UNIVERZITET U TUZLI

MAŠINSKI FAKULTET TUZLA

Džafer Kudumović

Sandira Alagić

ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA IZ OTPORNOSTI MATERIJALA

Tuzla, mart 2000. godine

Bez saglasnosti autora zabranjeno fotokopiranje i preštampavanje.

UNIVERZITETSKA KNJIGA
dr Džafer Kudumović, *Mašinski fakultet Tuzla*
mr Sandira Alagić, *Mašinski fakultet Tuzla*

Recenzenti
Prof. dr Osman Muftić, *Fakultet strojarstva i brodogradnje Zagreb*
Prof. dr Ivo Alfirević, *Fakultet strojarstva i brodogradnje Zagreb*

Lektor

Tehnička obrada
Mario Đaković, *student Mašinskog fakulteta Tuzla*
Avdić Admir, *student Elektrotehničkog fakulteta Tuzla*

Izdavač
"PROMOTEKS" Tuzla

Štampa
COPYGRAF Tuzla

Tiraž:
250 primjeraka

Na osnovu mišljenja ministarstva obrazovanja, nauke, kulture i sporta broj 03-15-2365/00 od 22.05.2000. udžbenik je oslobođen poreza na promet.

CIP – Katologizacija u publikaciji
Nacionalna i univerzitetska biblioteka
Bosne i Hercegovine, Sarajevo

539 . 3/ .5 (075.8) (076 . 1/ .2)

KUDUMOVIC, Džafer
Zbirka riješenih zadataka iz otpornosti materijala / Džafer Kudumović, Sandira Alagić. - Tuzla : Univerzitet, 2000. – 270 str. : graf. prikazi ; 25 cm. – (Univerzitetska knjiga)

Tiraž 250. – Bibliografija: str. [271]

ISBN 9958-609-01-0
1. Alagić, Sandira
COBISS/BiH-ID 7929862

OTPORNOST MATERIJALA I

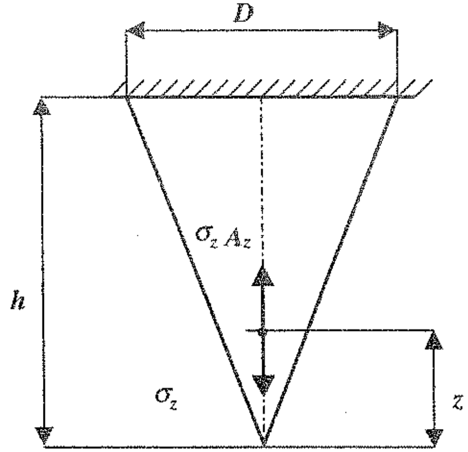
1. AKSIJALNO NAPREZANJE

1. ZADATAK

Tijelo konusnog oblika težine $G = 1100\ N$, visine $h = 60\ cm$, prečnika osnove $D=30\ cm$ modula elastičnosti $E = 2\cdot10^5\ MPa$, slobodnao visi. Izračunati ukupno izduženje štapa usljed sopstvene težine.

DATO JE:

$G=1{,}1\ kN$; $D=30\ cm$;
$h=60\ cm$; $E=2\cdot10^5\ MPa$;



Rješenje:

Ukupno izduženje možemo izračunati po obrascu:

$$\Delta h=\frac{1}{E}\int_0^h \sigma_z dz\,;$$

pri čemu je iz uslova ravnoteže:

$$\sigma_z A_z = \frac{1}{3}\ A_z z\cdot\gamma \Rightarrow \sigma_z = \frac{\gamma\cdot z}{3}\,;$$

$$\Delta h = \frac{1}{E}\int_0^h \frac{\gamma\cdot z}{3}\ dz = \frac{h^2\gamma}{6\varepsilon}\quad ili\quad \Delta h = \frac{2Gh}{\pi D^2 E}$$

$$\Delta h = (\frac{2\cdot1100\cdot0{,}6}{\pi\cdot0{,}3^2\cdot2\cdot10^{11}}) = 2{,}335\cdot10^{-8} m = 2{,}335\cdot10^{-5}\ mm$$

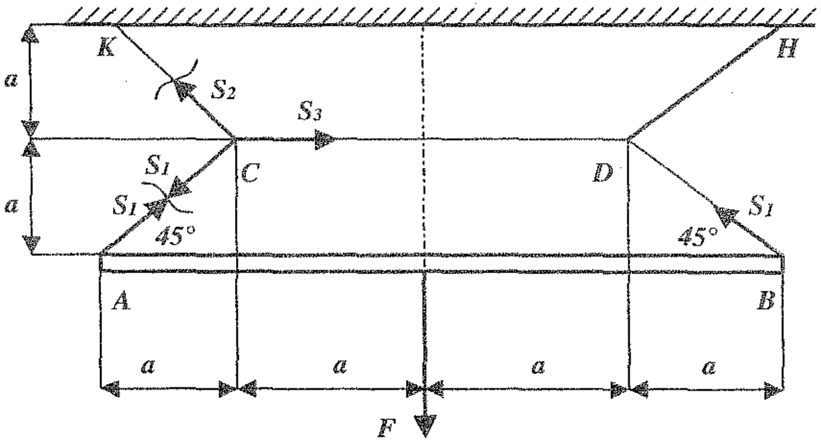
$$\Delta h=2{,}335\cdot10^{-5} mm.$$

2. ZADATAK

Kruti štap AB vezan je u tačkama A i B za sistem užadi prečnika d = 20 m. Odrediti silu F, koju može primiti kruti štap AB uz uslov da najveći nominalni napon u užetu bude σ_d=50 MPa. Dato je još i a = 50cm.

DATO JE:

$d = 20\ mm$;
$\sigma_d = 50\ MPa$;
$a = 50\ cm$;



Iz simetrije konstrukcije i opterećenja slijedi da su sile u lijevom i desnom dijelu konstrukcije iste po veličini. Iz statičkog uslova ravnoteže za štap AB imamo:

$\sum Yi = 2 \cdot S_1 \cos45° - F = 0$

$$S_1 = \frac{F}{2\frac{\sqrt{2}}{2}} = F\frac{\sqrt{2}}{2};$$

za tačku C: (1)... $\sum Xi = S_1 \cos45° + S_2 \cos45° - S_3 = 0$

(2)... $\sum Yi = S_1 \sin45° - S_2 \sin45° = 0$

iz (2) slijedi da je: $S_1 = S_2$, *a iz (1) slijedi da je:* $S_3 = 2S_1 \cos45° = F$;

$$S_3 = S_{max} = F = \sigma_d \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 50 \cdot 10^6 \frac{\pi \cdot (20 \cdot 10^{-3})^2}{4};$$

$F = 15700\ N = 15{,}7\ kN.$

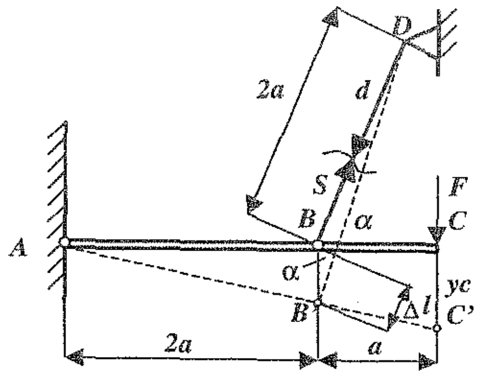
3. ZADATAK

Kruti štap ABC je u B oslonjen na elastični štap BD dužine 2a, presjeka A opterećen je u C silom F. Za date vrijednosti F, a, E, odrediti:

a) Prečnik štapa BD ako je dato i σ_d;
b) Vertikalno pomjeranje tačaka B i C;

DATO JE:

$a = 2\ m$;
$F = 20\ kN$;
$E = 2105\ MPa$;
$\sigma_d = 60\ MPa$;
$\alpha = 60°$;
$d = ?$



Riješenje:

Iz uslova ravnoteže momenta za tačku A imamo:

a)

$\sum M_A = F \cdot 3a - S \sin\alpha\, 2a = 0$

$$S = \frac{3F}{2\sin\alpha};$$

površina poprečnog presjeka je: $A \geq \dfrac{S}{\sigma_d} \Rightarrow$

$$d \geq \sqrt{\frac{4S}{\pi \cdot \sigma_d}} = \sqrt{\frac{6F}{\pi \cdot \sigma_d \cdot \sin\alpha}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 20 \cdot 10^3}{\pi \cdot 60 \cdot 10^6 \sin 60^o}} = 0{,}027\ m$$

$d = 27\ mm$;

b)

Na osnovu izduženja Δl štapa BD i odgovarajućih geometrijskih odnosa možemo izračunati verikalno pomjeranje tačke B. Pri tome imamo:

$$\Delta l=\frac{2Sa}{AE};\ BB'=\frac{\Delta l}{\sin\alpha}=\frac{2Sa}{AE\sin\alpha}=\frac{3Fa}{AE\sin^2\alpha};$$

$$BB'=\frac{12Fa}{d^2\pi E\sin^2\alpha}=\frac{12\cdot 20\cdot 10^3\cdot 2}{(27\cdot 10^{-3})^2\cdot\pi\cdot 2\cdot 10^5\cdot 10^6\sin^2 60^0}$$

$BB'=1{,}397245\cdot 10^{-3}\ m;$

$$y_c=BB'\ \frac{3a}{2a}=\frac{3Sa}{AE\sin\alpha}=\frac{9Fa}{AE\sin\alpha}=\frac{18Fa}{d^2\pi E\sin^2\alpha}$$

$$y_c=\frac{18\cdot 20\cdot 10^3\cdot 2}{(27\cdot 10^{-3})^2\cdot\pi\cdot 2\cdot 10^5\cdot 10^6\sin^2 60^0}$$

$y_c=2{,}09586710^{-3}\ m;$

$BB'=1{,}3972\ mm;$

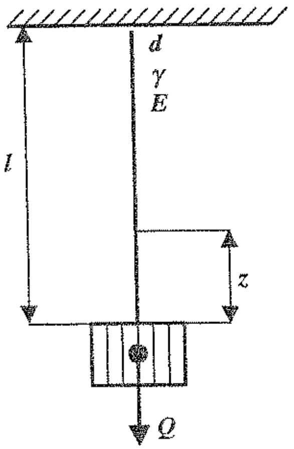
$y_c=2{,}0959\ mm;$

4. ZADATAK

Štap dužine $l=2{,}5$ m, specifične težine $\gamma=78\cdot 10^3 N/m^3$ i modula elastičnosti $E=2\cdot 10^5 MPa$, nosi teret $Q=10$ kN. Odrediti prečnik d štapa i njegovo totalno izduženje Δl, ako je dato $\sigma_d=80$ MPa.

DATO JE:

$l=2{,}5\ m;$
$\gamma=78\cdot 10^3\ N/m^3;$
$E=2\cdot 10^5\ MPa;$
$Q=10\ kN;$
$\sigma_d=80\ Mpa;$
$d=?$
$\Delta l=?$



Riješenje:

Potreban prečnik štapa, odnosno dimenzije poprečnog presjeka štapa određujemo iz uslova da maximalni normalni napon u štapu bude manji od dozvoljenog:

$\sigma_{max}\le\sigma_d$ *odnosno*

$$\frac{F_{max}}{A}\le\sigma_d.$$

Odavde slijedi da je :

$$A=\frac{\pi\cdot d^2}{4}\ge\frac{F_{max}}{\sigma_d};$$

pri čemu je : $F_{max}=Q+\frac{\pi\cdot d^2}{4}\cdot l\cdot\gamma;$

tako da imammo:

$$\frac{\pi\cdot d^2}{4}\ge\frac{1}{\sigma_d}\left(Q+\frac{\pi\cdot d^2}{4}l\cdot\gamma\right)\Rightarrow\frac{\pi\cdot d^2}{4}\left(1-\frac{l\gamma}{\sigma_d}\right)\ge\frac{Q}{\sigma_d};$$

$$d=\sqrt{\frac{4Q}{\pi(\sigma_d-l\gamma)}}=\sqrt{\frac{4\cdot 10^3\cdot 10}{\pi(30\cdot 10^6-2{,}5\cdot 78\cdot 10^3)}}=0{,}0126\ m$$

$d=12{,}6\ mm;$

stvarni napon na zatezanje u proizvoljnom presjeku štapa je:

$$\sigma_z=\frac{Q+Az\gamma}{A}=\frac{Q}{A}+\gamma z;$$

izduženje štapa je (na osnovu Hukovog zakona)

$$\Delta l=\frac{1}{E}\int_0^l\sigma_z\,dz=\frac{1}{E}\int_0^l\left(\frac{Q}{A}+\gamma z\right)dz=\frac{1}{E}\left(\frac{Q}{A}l+\frac{\gamma l^2}{2}\right)$$

$$\Delta l=\frac{1}{2\cdot 10^5\cdot 10^6}\left(\frac{10\cdot 10^3}{1{,}247\cdot 10^{-4}}\cdot 2{,}5+\frac{78\cdot 10^3\cdot 2{,}5^2}{2}\right)$$

$\Delta l=1{,}004\cdot 10^{-3}\ m$

$\Delta l=1{,}004\ mm;$

$$A=\frac{\pi\cdot d^2}{4}=\frac{\left(12{,}6\cdot 10^{-3}\right)^2\cdot\pi}{4}$$

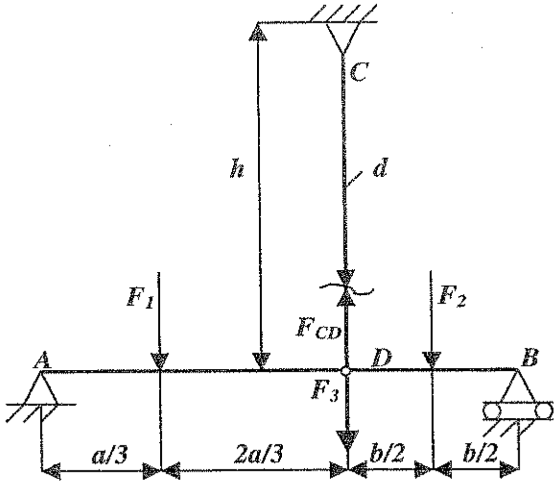
$A=1{,}247\cdot 10^{-4}\ m^2.$

5. ZADATAK

Za dato opterećenje prema skici, dimenzionirati štap CD kružnog poprečnog presjeka i naći pomjeranje zgloba D, ako je:

DATO JE:

$F_1=45$ kN;
$F_2=50$ kN;
$F_3=20$ kN;
$a=1,5$ m;
$b=0,8$ m;
$h=3,5$ m;
$E=2,1\cdot10^5$ MPa;
$\sigma_d=60$ MPa;



Iz uslova ravnoteže:

$$F_{CD}=F_3+\frac{F_2}{2}+\frac{F_1}{3}$$

$F_{CD}=60$ kN;

Dimenzije poprečnog presjeka štapa CD određuje se iz uslova:

$$\frac{F_{CD}}{A}\le\sigma_d\Rightarrow A\ge\frac{F_{CD}}{\sigma_D};\ \frac{\pi\cdot d^2}{4}\ge\frac{F_{CD}}{\sigma_D};\Rightarrow d\ge\sqrt{\frac{4F_{CD}}{\pi\cdot\sigma_d}};$$

$$d=\sqrt{\frac{4\cdot60\cdot10^3}{\pi60\cdot10^6}}=0,0357\ m$$

$d=36$ mm;

Pomjeranje zgloba D:

$$\Delta h=\frac{F_{CD}\cdot h}{AE}=\frac{4F_{CD}\cdot h}{d^2\pi E}=\frac{4\cdot60\cdot10^3\cdot3,5}{(0,036)^2\pi2,1\cdot10^{11}}$$

$\Delta h=9,8244\cdot10^{-4}$ mm

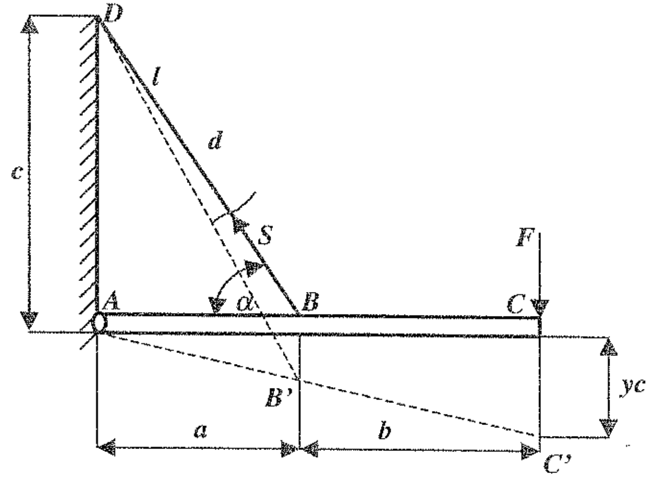
$\Delta h=0,9824$mm;

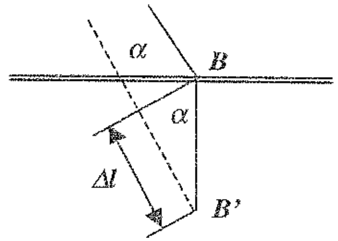
6. ZADATAK

Štap ABC je krut, u A oslonjen u zglobu a u B na elastični štap prečnika d. Za date vrijednost, odrediti silu F ako je pomjeranje tačke C dato sa $y_c=2$mm. Koliki je u ovom slučaju napon u kosom štapu?

DATO JE:

$a=1$ m;
$b=1,7$ m;
$c=\sqrt{3}$ m;
$d=40$ mm;
$E=2,1\cdot10^5$ MPa;





Rješenje:

Iz uslova ravnoteže momenta za tačku A :

$F\,(a+b) - a\,S\,\sin\alpha = 0$

$S = \dfrac{F(a+b)}{a \cdot \sin\alpha} \rightarrow$ *sila u štapu BD;*

$\sin\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{(a^2+c^2)}}$;

Iz izraza za izduženje štapa BD:

$\Delta l = \dfrac{S\,l}{AE} = \dfrac{F(a^2+c^2)}{AE}\left(\dfrac{a+b}{ac}\right)$;

$BB' = \dfrac{\Delta l}{\sin\alpha}$; $\quad y_c = BB'\left(\dfrac{a+b}{a}\right)$;

dobijamo:

$$y_c = \frac{(a+b)^2 \cdot (a^2+c^2)^{3/2}\,F}{a^2 c^2 AE}$$

$F = 42{,}61\,kN$;

a traženi napon je:

$\sigma_{BD} = \dfrac{S}{A} = \dfrac{4S}{\pi \cdot d^2}$; *pri čemu je:*

$$S = \frac{F(a+b)\sqrt{(a^2+c^2)}}{ac}$$

$S = 132{,}84\ kN$;

$\sigma_{BD} = 105{,}7\ MPa.$

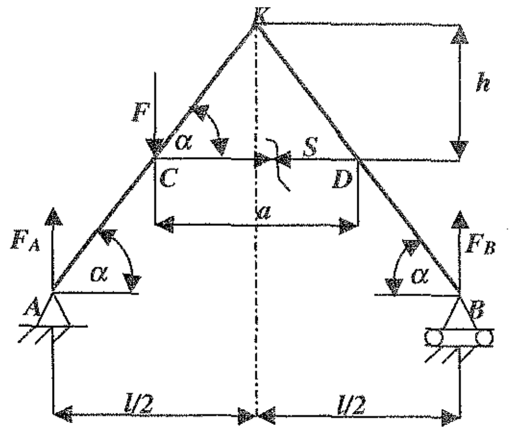
7. ZADATAK

Krovna konstrukcija sa zategom CD opterećena je silom F. Za date vrijednosti odrediti:

a) prečnik d zatege CD
b) ukupno izduženje zatege

DATO JE:

$F=30\ kN$;
$l=8\ m$;
$a=4\ m$;
$\alpha=45°$;
$E=2\cdot 10^5\ MPa$;
$\sigma_d=160\ MPa$;
$d=?$
$\Delta a=?$



a)

Iz uslova ravnoteže momenata za tačku A dobijamo da je:

$F_B = F\,\dfrac{l-a}{2l}$,

a iz uslova ravnoteže momenata za tačku B dobijamo da je:

$F_A = F\,\dfrac{l+a}{2l}$

Iz uslova ravnoteže momenata za tačku K sa desne strane slijedi:

$$\sum M_K^{\,d} = F_B\frac{l}{2} - sh = 0; \quad h = \frac{a}{2}\,tg\alpha;$$

$$S = \frac{F_B \cdot l}{2h} = \frac{F\cdot(l-a)}{2atg\alpha} = \frac{80\cdot10^3(8-4)}{2\cdot4\cdot tg45^0} = 40\cdot10^3\ N;$$

$S=40\ kN;$

Potreban prečnik zatege dobijamo iz uslova:

$$\frac{S\cdot4}{d^2\cdot\pi} \le \sigma_d \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4S}{\pi\sigma_d}} = \sqrt{\frac{4\cdot40\cdot10^3}{\pi160\cdot10^6}} = 18\ mm;$$

$d=18\ mm;$

b)

Na osnovu Hukovog zakona ukupno izduženje zatege iznosi:

$$\Delta a = \frac{Sa}{AE} = \frac{4Sa}{d^2\pi\cdot E} = \frac{4\cdot40\cdot10^3\cdot4}{0{,}018^2\pi\cdot2\cdot10^{11}} = 3{,}144\cdot10^{-3}\ m;$$

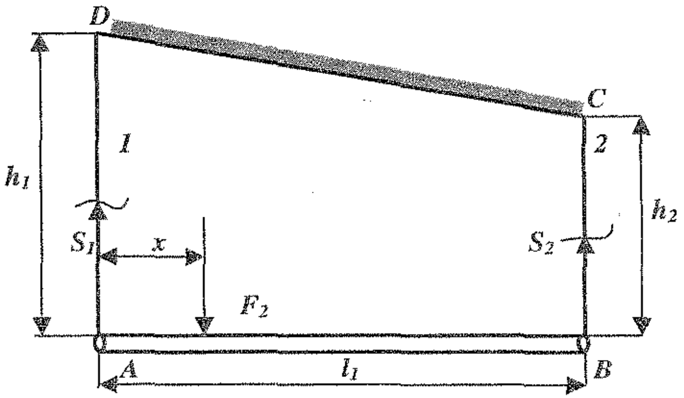
$\Delta a=3{,}144mm;$

8. ZADATAK

Kruti štap AB obješen je na dva elastična štapa 1 i 2 od istog materijala i presjeka A=10cm. Odrediti položaj sile F pod uslovom da štap AB ostane horizontalan kao što je bio u neopterećenom stanju. Za ovaj slučaj odrediti napone u štapovima 1 i 2, kao i pomjeranje tačke B.

DATO JE:

$E=2\cdot10^5\ MPa;$
$F=100\ kN;$
$A=10\ cm^2;$
$h_1=2\cdot h_2=2\ m;$
$l_1=2h_1=4\ m;$
$h_2=1m;$
$x=?$
$\Delta h_2=?$
$\sigma_1=?$
$\sigma_2=?$



Rješenje:

a)

Iz uslova:

$\Delta h_1 = \Delta h_2 \Rightarrow S_1h_1 = S_2h_2 \quad ...(1)$

iz uslova ravnoteže momenata za tačku B:

$\sum M_B = S_1l_1 - F(l_1-x) = 0 \Rightarrow$

$$S_1 = \frac{F(l_1-x)}{l_1};$$

iz uslova ravnoteže:

$$\sum Yi = S_1 + S_2 - F = 0 \Rightarrow S_2 = F - F\frac{(l_1-x)}{l_1} \Rightarrow$$

$$S_2 = \frac{Fx}{l};$$

$$(1)\ldots \quad (l_1 - x)h_1 = xh_2 \Rightarrow x = \frac{h_1}{h_1+h_2}\cdot l_1$$

$x = 2{,}67\ m;$

b)

Pomjeranje tačke B je:

$$\Delta h_2 = \frac{S_2h_2}{AE} = \frac{Fh_1h_2}{(h_1+h_2)AE}$$

$\Delta h_2=3{,}3310^{-4}\ m;$

c)

Naponi u štapovima 1 i 2 iznose:

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{A} = \frac{F}{A} - \sigma_2$$

$\sigma_1=33{,}33\ MPa;$

$$\sigma_2 = \frac{Fh_1}{(h_1+h_2)A}$$

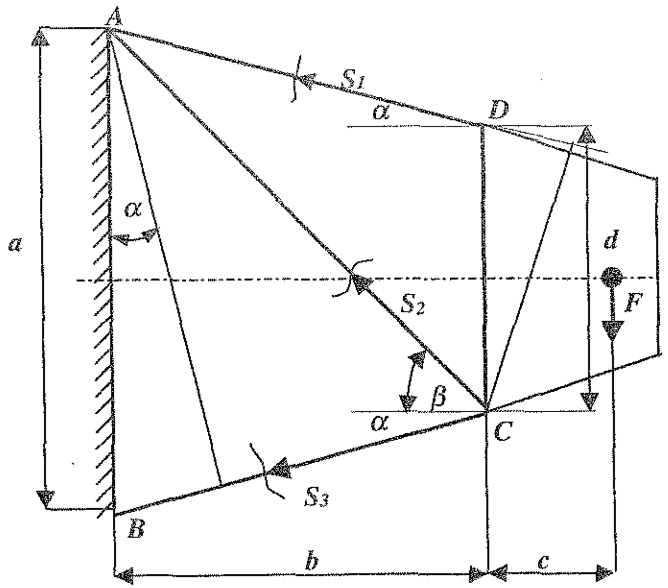
$\sigma_2=66{,}67\ MPa;$

9. ZADATAK

Tri štapa AB, AC i CD vezana su prema skici. Odrediti površiu presjeka ovih štapova ako je poznato σ_d=150 MPa.

DATO JE:

$a=2{,}4\ m;$
$b=1{,}8\ m;$
$c=0{,}4\ m;$
$d=2\ m;$
$F=70\ kN;$
$\sigma_d=100\ MPa;$
$A_1, A_2, A_3=?$



Rješenje:

Iz statičkog uslova ravnoteže momenata za tačku A:

$$\sum M_A = S_3\ a\cos\alpha + F(b+c) = 0 \Rightarrow$$

$$S_3 = -\frac{F(b+c)}{a\cos\alpha}$$

$S_3 = -64{,}56\ kN;$

Iz uslova ravnoteže momenta za tačku C:

$$\sum M_C = S_1 d\ \cos\alpha - Fc = 0 \Rightarrow$$

$$S_1 = \frac{Fc}{d\cos\alpha}$$

$S_1=22{,}11\ kN;$

Iz:

$$\sum Xi = S_1\cos\alpha + S_3\cos\alpha + S_2\cos\beta = 0 \Rightarrow$$

$$S_2 = -\frac{F}{\cos\beta}\left(\frac{c}{d} - \frac{b+c}{a}\right) =$$

$S_2=79{,}227\ kN;$

$$A_1 = \frac{S_1}{\sigma_d}$$

$A_1=2{,}211\ cm^2;$

$$A_2 = \frac{S_2}{\sigma_d}$$

$A_2=7{,}9227\ cm^2;$

$$A_3 = \frac{S_3}{\sigma_d}$$

$A_3=6{,}456\ cm^2;$

$$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + \left(\frac{a-d}{2}\right)^2}}$$

$\cos\alpha = 0{,}9939;$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}}$$

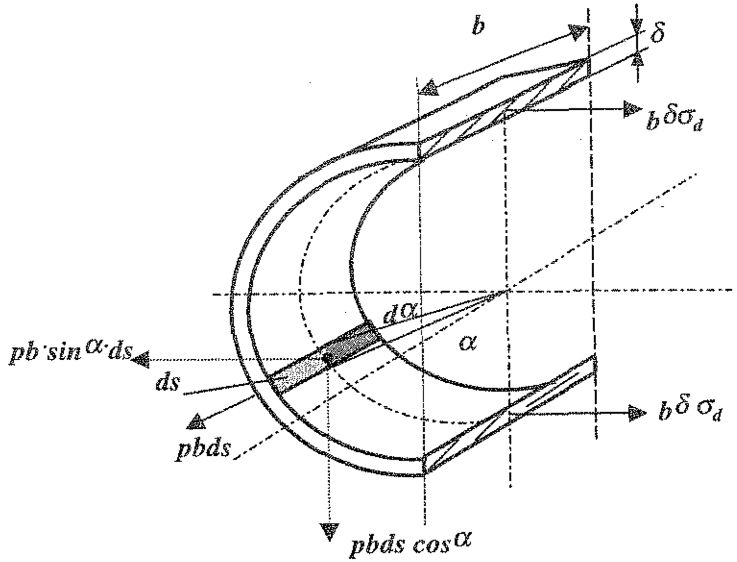
$\cos\beta = 0{,}6332;$

10. ZADATAK

Odrediti debljinu δ zida glave klipne poluge ako je po unutrašnjem zidu pritisak od sile inercije raspoređen po zakonu: $p=p_0 \sin\alpha$, gdje je $p_o=1MPa$ maksimalni pritisak.

DATO JE:

$p_o=1\ MPa;$
$r=20\ cm;$
$\sigma_d=110\ MPa;$
$\delta=?$



Rješenje:

Iz uslova ravnoteže dobijamo:

$$\Sigma Xi = 2\ \delta b\sigma_\alpha - \int_0^\pi p_0 \sin\alpha\, b\, r\, d\alpha = 0\ ;$$

$$\delta = \frac{r}{2\sigma_d} \int_0^\pi p_0 \sin^2\alpha\ d\alpha\ ;$$

$$\delta = \frac{\pi \cdot r p_0}{4\sigma_d}$$

$\delta = 1,43\ mm;$

11. ZADATAK

Prizmatični štap konstantnog presjeka $A=20cm^2$ duzine $R=1m$, okreće se konstantnom ugaonom brzinom $\omega=10rad/s$. Za date vrijednosti odrediti:

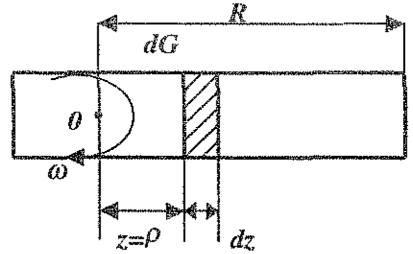
a) normalni napon u proizvoljnom presjeku i zatim najveći napon,

b) ukupno izduženje

c) broj obrtaja u minuti štapa oko ose O, da najveći napon bude $\sigma_d=120MPa$.

DATO JE:

$A=20\ cm^2;$
$R=1m;$
$\omega=10\ rad/s;$
$E=2\cdot 10^5$
$\gamma=78\ 000\ N/m^3$
$\sigma=?$
$\Delta R=?$
$n=?$



Normalni napon u proizvoljnom presjeku računamo po formuli:

$\sigma_z=\dfrac{F_z}{A}$; *gdje je : F_z – centrifugalna sila koju računamo na slijedeći način:*

$$dF_z=\frac{v^2}{\rho}\cdot dm = \frac{\omega^2\rho\cdot dG}{g} = \frac{\omega^2\rho A\gamma\cdot d\rho}{g};$$

$$F_z=\frac{A\omega^2\gamma}{g}\int_\rho^R \rho\, d\rho = \frac{A\omega^2\gamma}{2g(R^2-\rho^2)};$$

$$\sigma_z=\frac{\omega^2\gamma}{2g(R^2-\rho^2)};$$

za ρ =0 dobijamo max naponi on iznosi:

$$\sigma_{max}=\frac{R^2\omega^2\gamma}{2g}$$

σ_{max}=397,55 kPa;

Dozvoljeni napon obrtaja određujemo iz uslova da max napon bude manji od dozvoljenog:

$$\sigma_{max}=\frac{R^2\gamma}{2g}\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2\leq\sigma_d\Rightarrow$$

$$n=\sqrt{\frac{2g30^2\sigma_d}{\gamma R^2\pi^2}}$$

n=1659 o/min;

Izduženje štapa određujemo na osnovu Hukovog zakona i ono iznosi:

$$\Delta R=\frac{1}{E}\int_0^R\sigma_z\,dz=\frac{1}{E}\int_0^R\frac{\gamma\omega^2}{2g}\left(R^2-z^2\right)dz$$

$\Delta R=1,32510^{-6}$ m

$\Delta R=1,32510^{-3}$ mm;

12. ZADATAK

Prsten srednjeg prečnika r, specifične težine γ obrće se oko ose O, ugaonom brzinomω. Za date vrijednosti odrediti:

a) napon u prstenu usljed centrifugalne sile

b) broj obrtaja u minuti da napon u prstenu ne pređe dozvoljenu vrijednost σ_d.

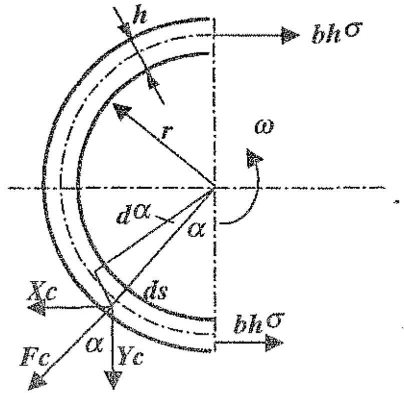
DATO JE:

r=30 cm;

γ=78 000 MPa;

ω =15 rad/s;

σ_d=90 MPa;



Rješenje:

a)

centrifugalna sila poluprstena

$$dFc=\frac{v^2dm}{r^2}=\frac{dG\ r\omega^2}{g}$$

$$dFc=\frac{r\omega^2hb\gamma}{g}rd\alpha\ ;$$

$$dXc=dFc\sin\alpha$$

$$Xc=\frac{r^2\omega^2hb\gamma}{g}\int_0^\pi\sin\alpha\ d\alpha=\frac{2r^2\omega^2hb\gamma}{g}\ ;$$

Iz uslova ravnoteže možemo odrediti napon σ :

$$\sum Xi=Xc-2\sigma bh=0\Rightarrow\sigma=\frac{r^2\gamma}{g}\omega^2$$

σ =161 Kpa;

b)

Broj obrtanja određuje se iz uslova da max napona bude manji od dozvoljenog što se svodi na sljedeću nejednakost:

$$\frac{r^2\gamma}{g}\omega^2\leq\sigma_d\Rightarrow\frac{r^2\gamma}{g}\cdot\frac{\pi^2n^2}{30^2}\leq\sigma_d$$

$$n=\frac{30}{\pi r}\sqrt{\frac{g\sigma_d}{\gamma}}$$

n=1016 o/min;

13. ZADATAK

Štap promjenljivog presjeka, uklješten je na oba kraja i opterećen aksijalnom silom F.
Za date vrijednosti odrediti:

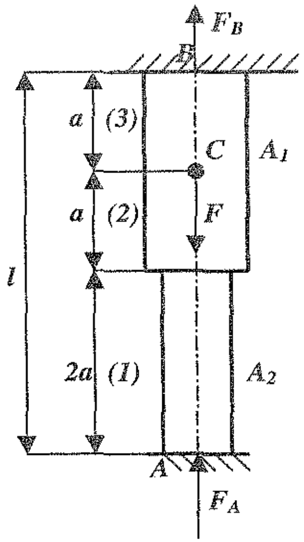
a) otpore ukliještenja,

b) napone u svakom intervalu,

c) pomjeranje tačke C.

DATO JE:

$F=80\ kN;$
$A_1=25\ cm^2;$
$A_2=20\ cm^2;$
$a=0{,}5\ m;$
$E=2\cdot 10^5\ MPa;$



Rješenje:

Zadatak je 1 x statički neodređen

Iz statičkog uslova ravnoteže

a)

$\sum Yi = F_A + F_B - F = 0$

dodatni uslov je:

$2.)\ \Delta l = 0$

$$(2)\ \Rightarrow \frac{Fa}{A_1E} - \frac{F_A 2a}{A_2E} - \frac{F_A 2a}{A_1E} = 0;$$

$$iz\ (2)\ \Rightarrow F_A = \frac{F}{2A_1\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}\right)}$$

$F_A=17{,}8\ kN;$

$Iz\ (1)\ \Rightarrow F_B = F - F_A = 80 - 17{,}8 = 62{,}2\ kN$
$F_B = 62{,}2\ N;$

b)

Naponi u:

$$\sigma_1 = -\frac{F_A}{A_2} = -\frac{17{,}8\cdot 10^3}{20\cdot 10^{-4}} = -8{,}9\cdot 10^6 Pa \Rightarrow$$

$\sigma_1 = -8{,}9\ MPa;$

$$\sigma_2 = -\frac{F_A}{A_1} = -\frac{17{,}8\cdot 10^3}{25\cdot 10^{-4}} = -7{,}12\cdot 10^6 Pa \Rightarrow$$

$\sigma_2 = -7{,}12\ MPa;$

$$\sigma_3 = \frac{F-F_A}{A_1} = \frac{(80-17{,}8)\cdot 10^3}{25\cdot 10^{-4}} = 24{,}88\cdot 10^6 Pa \Rightarrow$$

$\sigma_3 = 24{,}88\ MPa;$

c)

$$yc = \frac{(F-F_A)a}{A_1E} = \frac{(80-17{,}8)\cdot 10^3\cdot 0{,}5}{25\cdot 10^{-4}\cdot 2\cdot 10^{11}} = 6{,}2210^{-5} m \Rightarrow$$

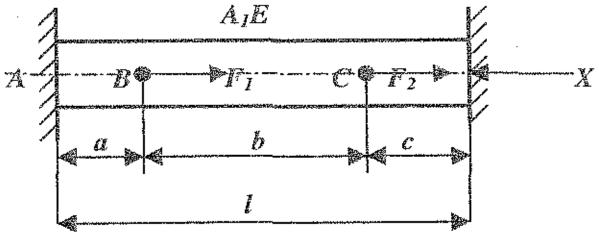
$yc = 0{,}0622\ mm;$

14. ZADATAK

Štap poprečnog presjeka $A=10cm^2$ ukliješten je na oba kraja i opterećen sa dvije aksijalne sile F_1 i F_2. Za date vrijednosti odrediti normalne napone u svakom intervalu, a zatim pomjeranje tačke C.

DATO JE:

$A=10\ cm^2$;
$F_1=100\ kN$;
$F_2=150\ kN$;
$b=50\ cm$;
$c=60\ cm$;
$a=30\ cm$;
$E=2\cdot10^{11}\ Pa$;



Rješenje:

Zadatak je 1 x statički neodređen

Iz uslova :

$$\Delta l=0 \Rightarrow \frac{F_1 a}{AE}+\frac{F_2(a+b)}{AE}-\frac{X(a+b+c)}{AE}=0 \Rightarrow$$

$$X=\frac{1}{(a+b+c)}\left[F_1 a + F_2(a+b)\right]$$

$X=107,14\ kN$;

Naponi u pojedinim presjecima:

$$\sigma_c= -\frac{X}{A}=-\frac{107,14\cdot10^3}{10\cdot10^4}= -107,14\cdot10^6\ Pa$$

$\sigma_c= -107,14\ MPa$;

$$\sigma_a=\frac{F_1+F_2-X}{A}=\frac{(100+150-107,14)10^3}{10\cdot10^{-4}}=142,86\cdot10^6\ Pa$$

$\sigma_a=142,86\ MPa$;

$$\sigma_b=\frac{F_2-X}{A}=\frac{(150-107,14)10^3}{10\cdot10^{-4}}=42,86\cdot10^6\ Pa$$

$\sigma_b=42,86\ MPa$;

Pomjeranje tačke C:

$$Xc=\frac{F_1 a}{AE}+\frac{F_2(a+b)}{AE}-\frac{X(a+b)}{AE}=\frac{(100\cdot10^3 0,3)}{10\cdot10^{-4}\cdot2\cdot10^{11}}+\frac{150\cdot10^3(0,3+0,5)}{10\cdot10^{-4}\cdot2\cdot10^{11}}$$

$$-\frac{107,14\cdot10^3(0,3+0,5)}{10\cdot10^{-4}\cdot2\cdot10^{11}}=3,2144\cdot10^{-4}\ m$$

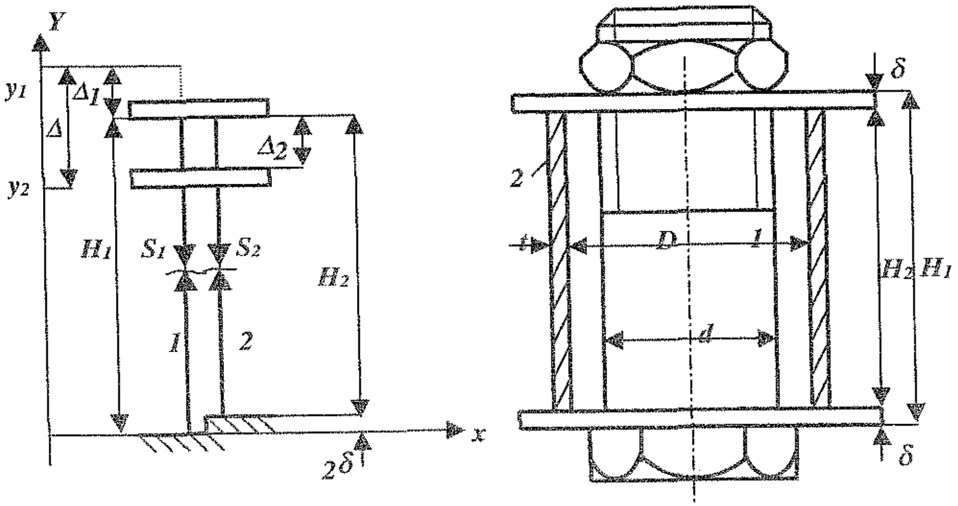
$Xc=0,32144\ mm$;

15. ZADATAK

Dvije krute ploče debljine δ pritegnute čeličnim vijkom 1 vrše pritisak na šuplji bakarni cilindar 2. Odredi za koji ugao treba odrediti navrtku vijka da se u bakarnom cilindru dobije napon $\sigma_2 = 50\ MPa$. Hod navoja iznosi h.

DATO JE:

$\sigma_2 = 50\ MPa$;
$h=2,5\ mm$;
$E_1=2\cdot10^5\ MPa$;
$E_2=1,2\cdot10^5\ MPa$;
$\delta=4\ mm$;
$H_1=80\ mm$;
$H_2=72\ mm$;
$t=3\ mm$;
$d=20\ mm$;
$D=30\ mm$;



Zadatak je 1 x statički neodređen

Iz uslova ravnoteže dobijamo:

$\sum Yi=S_1-S_2=0\Rightarrow S_1=S_2;$

Dodatnu jednačinu dobijamo iz uslova da je pomjeranje navrtke jednako zbiru izduženja vijka i skraćenja bakarnog cilindra:

$\Delta=\Delta_1+\Delta_2$ ili $\Delta = y_1 - y_2 = H_1+\Delta_1-(2\delta+H_2-\Delta_2)\Rightarrow$

$$\Delta=H_1-H_2-2\delta+\Delta_1+\Delta_2\Rightarrow$$

$$\Delta=\varphi\cdot\frac{H}{2\pi};\quad \Delta_1=\frac{S_1H_1}{A_1E_1};\quad \Delta_2=\frac{S_2H_2}{A_2E_2};$$

Ako posljednje izraze uvrstimo u jednačinu (2) dobijamo:

$$\varphi\frac{h}{2\pi}=\frac{S_1}{A_2}\left(\frac{A_2H_1}{A_1E_1}+\frac{H_2}{E_2}\right);\quad \sigma_2=\frac{S_2}{A_2}=\frac{S_1}{A_2};$$

a odavde dobijamo traženi ugao:

$$\varphi=\frac{\sigma_2 2\pi}{h}\left(\frac{A_2H_1}{A_1E_1}+\frac{H_2}{E_2}\right)$$

$\varphi=0,1252\ rad\ \Rightarrow$

$\varphi=7,17°;$

$$A_1=\frac{\pi d^2}{4}$$

$A_1=3,1410^{-4}\ m^2;$

$A_2=\pi(Dt+t^2)$

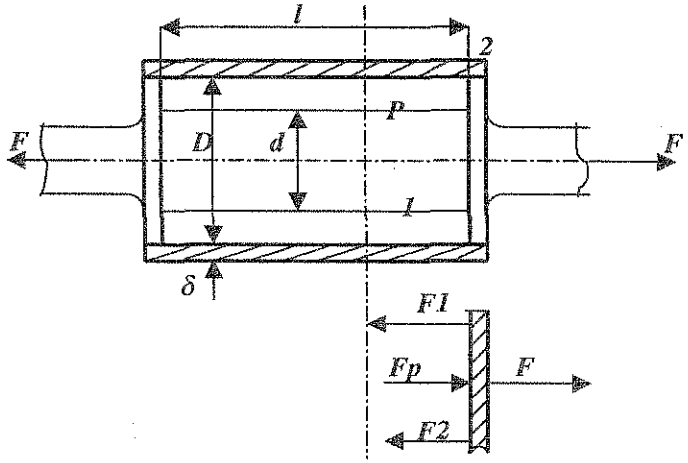
$A_2=3,1110^{-4}\ m^2;$

16. ZADATAK

Na diskovima čelične osovine zavarena je cijev. U prostoru između cijevi i osovine djeluje unutrašnji pritisak p=1,5MPa, a osovina je izložena aksijalnim silama F. Za date vrijednosti: d=30mm, δ=3mm, F=90kN, D=70mm, odrediti normalne napone u zidovima cijevi i osovini.

DATO JE:

$p=1,5\ MPa;$
$d=30\ mm;$
$\delta=3\ mm;$
$F=90\ kN$
$D=70\ mm;$
$\sigma=?$



Riješenje:

Sila pritiska koja djeluje na diskove je:

$Fp = p\dfrac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$

$Fp = 4721{,}4\ N;$

Zadatak je 1 x statički neodređen

Pred statičkog uslova ravnoteže (1) potrebno je postaviti još jedan dodatni uslov. U ovom slučaju to je uslov jednakosti izduženja osovine I cijevi (2):

$\sum Xi = F + Fp - F_1 - F_2 = 0$

$\Delta_1 = \Delta_2 \Rightarrow \dfrac{F_1 l}{A_1 E_1} = \dfrac{F_2 l}{A_2 E_2} = \Rightarrow$

$F_1 = \dfrac{A_1 E_1}{A_2 E_2} F_2;$

$\Rightarrow\ F + Fp = F_2(1 + \dfrac{A_1 E_1}{A_2 E_2})\ \Rightarrow$

$F_2 = \dfrac{F + F_p}{1 + \dfrac{A_1 E_1}{A_2 E_2}}$

$F_2 = 46711\ N;$

$F_1 = 48000\ N;$

Traženi napon:

$\sigma_1 = \dfrac{F_1}{A_1} = \dfrac{48000}{7{,}07 \cdot 10^{-4}} = 67{,}894 \cdot 10^6\ Pa$

$\sigma_1 = 67{,}894\ MPa;$

$\sigma_2 = \dfrac{F_2}{A_2} = \dfrac{46711}{6{,}88 \cdot 10^{-4}} = 67{,}894 \cdot 10^6\ Pa$

$\sigma_2 = 67{,}894\ MPa;$

$A_1 = \dfrac{\pi d^2}{4} = \dfrac{\pi 0{,}03^2}{4}$

$A_1 = 7{,}0710^{-4}\ m^2;$

$A_2 = \pi(D\delta + \delta^2)$

$A_2 = 6{,}8810^{-4}\ m^2;$

17. ZADATAK

Dva štapa od raznog materijala E_1 i E_2 i različitog presjeka A_1 i A_2 izloženi su dejstvu aksijalne sile F preko ploče K. Štap 1 je kraći od štapa 2 za veličinu δ. Odrediti sile i napone u štapovima 1 i 2.

DATO JE:

$A_1 = 20\ cm^2;$

$A_2 = 30\ cm^2;$

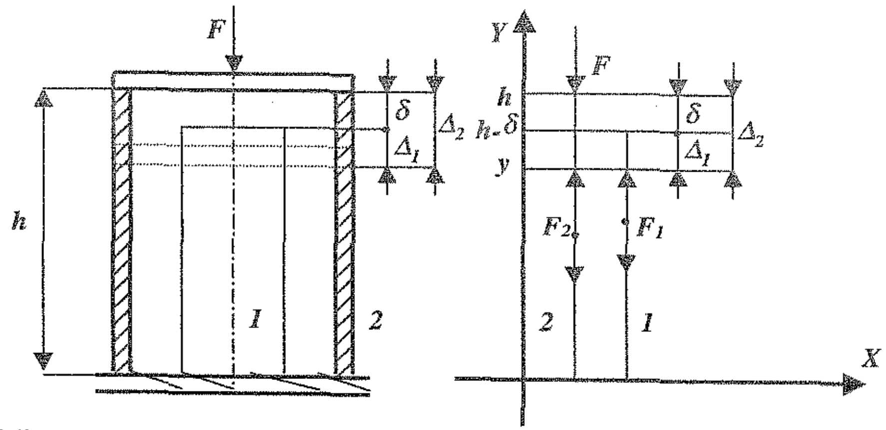
$E_1 = 2 \cdot 10^5\ MPa;$

$E_2 = 1{,}2 \cdot 10^5\ MPa;$

$F = 70\ kN;$

$h = 100\ mm;$

$\delta = 0{,}05\ mm;$



Riješenje:

Problem je 1 x statički neodređen

Pored jedne jednačine koju dobijamo iz statičkog uslova ravnoteže (1), Potrebno je postaviti još jednu jednačinu koju dobijamo iz osobina deformacija (2). Pri tome iz ovih jednačina određujemo sile F_1 i F_2:

$\sum Yi = F_1 + F_2 - F = 0$

$y = h - \Delta_2$

$y = h - \delta - \Delta_1 \quad \Rightarrow \quad h - \Delta_2 = h - \delta - \Delta_1$

$\delta = \Delta_2 - \Delta_1$

$\Delta_2 = \dfrac{F_2 \cdot h}{A_2 E_2}; \qquad \Delta_1 = \dfrac{F_1(h-\delta)}{A_1 E_1} \approx \dfrac{F_1 h}{A_1 E_1}$

$$\delta = \frac{F_2 h}{A_2 E_2} - \frac{F_1 h}{A_1 E_1};$$

$$F_1 = \frac{F - \delta A_2 E_2}{h(1 + \frac{A_2 E_2}{A_1 E_1})}$$

$F_1 = 273684,21\ N;$

$F = F_1 + F_2 \Rightarrow$

$F_2 = F - F_1 = 70000 - 273684,2 =$

$F_2 = -203684,2\ N;$

Traženi naponi su:

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{273684,2}{20 \cdot 10^{-4}} \qquad (\text{pritisak})$$

$\sigma_1 = 136,84\ MPa;$

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{203684,2}{30 \cdot 10^{-4}} \qquad (\text{istezanje})$$

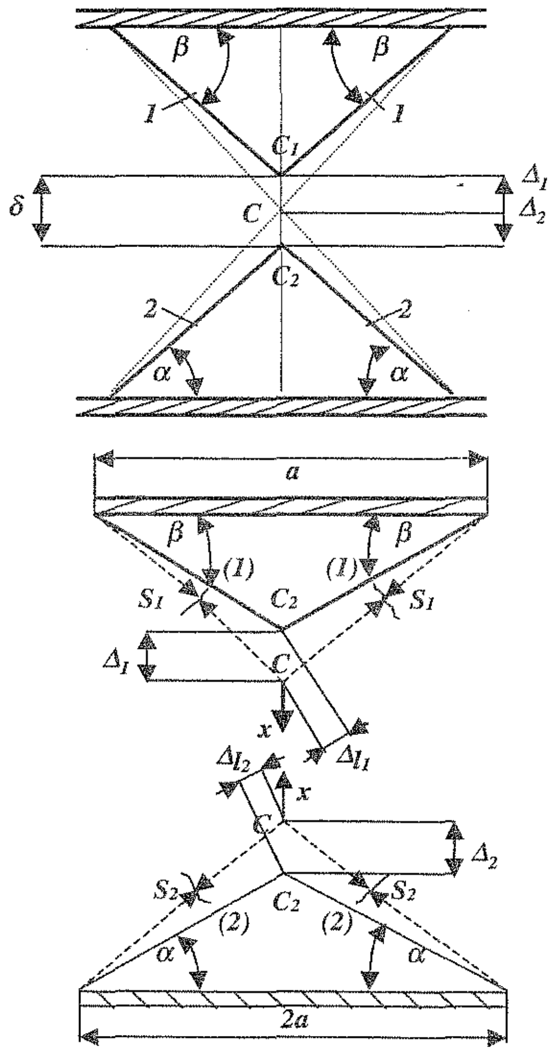
$\sigma_2 = 67,89\ MPa;$

18. ZADATAK

Pri montaži štapova 1 i 2, zglobno vezanih za krute zidove, postojala je razlika u visini izmedu tačaka C_1 koja pripada štapovima 1 i C_2 koja pripada štapovima 2. Prisilnom monntažom C_1 i C_2 došle su u položaj C. Za date vrijednosti: a=2m, $A_1=10 cm^2$, $A_2=12 cm^2$, odrediti sile i napone u štapovima ako su izrađeni od istog materijala.

DATO JE:

$a = 2\ m;$
$A_1 = 10\ cm^2;$
$A_2 = 12\ cm^2;$
$S_i = ?$
$\sigma_i = ?$
$E_1 = 1,2 \cdot 10^5\ MPa;$
$E_2 = 2 \cdot 10^5\ MPa;$
$\alpha = 30°C;$
$\beta = 45°C;$
$\delta = 1\ mm;$



a)

Iz statičkog uslova ravnoteže imamo:

$X = 2S_1 \sin\beta$

$$S_1 = \frac{X}{2\sin\beta};$$

$X = 2S_2 \sin\alpha$

$$S_2=\frac{X}{2\sin\alpha};$$

Problem je 1 x statički neodređen

i dodatna jednačina:

2.) $\Delta_1+\Delta_2=\delta;\qquad \Delta_1=\frac{\Delta l_1}{\sin\beta};\qquad \Delta_2=\frac{\Delta l_2}{\sin\alpha};$

$$\Delta l_1=\frac{S_1 l_1}{A_1E_1}=\frac{Xa}{4\sin\beta\cos\beta A_1E_1};$$

$$\Delta l_2=\frac{S_2 l_2}{A_2E_2}=\frac{Xa}{2\sin\alpha\cos\alpha A_2E_2};$$

$$\frac{1}{A_1E_1}\frac{Xa}{4\sin^2\beta\cos\beta}+\frac{1}{A_2E_2}\frac{Xa}{2\sin^2\alpha\cos\alpha}=\delta$$

$X=28284\ N;$

Tražene sile u štapovima iznose:

$$S_1=\frac{X}{2\sin\beta}=\frac{28284}{\sin 45''}$$

$S_1=20000\ N;$

$$S_2=\frac{X}{2\sin\alpha}=\frac{28284}{2\sin 30''}$$

$S_2=28284\ N;$

Traženi napon u štapovima iznose:

$$\sigma_1=\frac{S_1}{A_1}=\frac{20000}{10\cdot 10^{-4}}$$

$\sigma_1=20\cdot 10^6\ Pa;$

$$\sigma_2=\frac{S_2}{A_2}=\frac{28284}{12\cdot 10^{-4}}$$

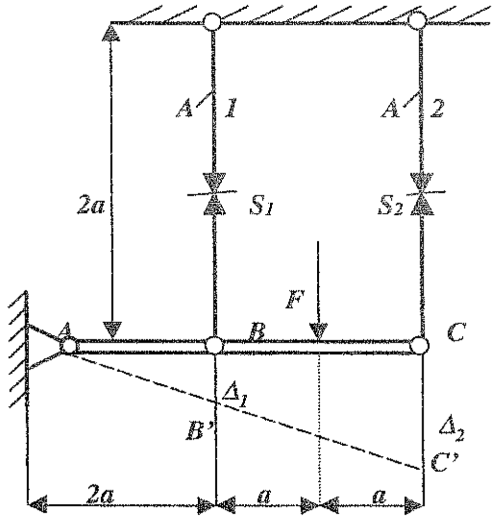
$\sigma_2=23{,}56\cdot 10^6\ Pa;$

19. ZADATAK

Kruti štap ABC obješen je na dva elastična štapa 1 i 2. U tački A je vezan za zid zglobnom vezom. Odrediti sile i napone u štapovima 1 i 2, otpore oslonaca i pomjeranje tačke C.

DATO JE:

F=50 kN;
$A=8\ cm^2;$
$E=2{,}1\cdot 10^5\ MPa;$
a=1 m;



Riješenje:

Problem je1 x statički neodređen

Sile u štapovima 1 i 2 ne možemo odrediti iz samo dvije jednačine za ravnotežu:

... $\sum Yi=S_1+S_2+F_A-F=0;$
... $\sum M_A=S_2\cdot 4a+S_1\cdot 2a-F\cdot 3a=0;$

Treću jednačinu dobićemo iz osobina deformacija, da će kruti štap ABC, ostati prav i poslije deformacija. Iz sličnoosti trouglova ABB' i ACC' dobijamo:

$$\ldots\ \frac{\Delta_1}{\Delta_2}=\frac{2a}{4a}\ \Rightarrow\ \Delta_1=\frac{1}{2}\Delta_2\ \Rightarrow\ \frac{S_1 2a}{AE}=\frac{1}{2}\frac{S_2 2a}{AE}$$

$S_1=\frac{1}{2}S_2$;

$S_2=\frac{3}{5}F$

$S_2=30\ kN$;

$S_1=\frac{3}{10}F$

$S_1=15\ kN$;

$F_A=\frac{1}{10}F$

$F_A=5\ kN$;

Pomjeranje tačke C jednako je izduženju štapa 2:

$y_c=\Delta_2=\frac{S_2 2a}{AE}=3{,}5714\cdot 10^{-4}\ m$;

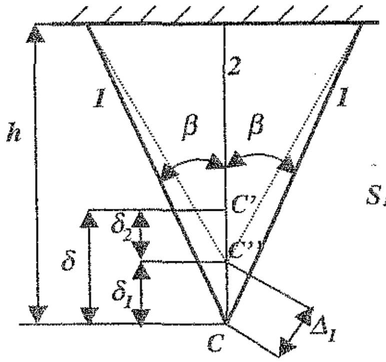
$y_c=0{,}35714\ mm$;

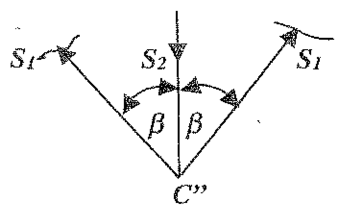
20. ZADATAK

Tri štapa istog prečnika d i materijala imaju dimenzije po skici. Prije montaže između tačaka C' i C, postoj razmak δ. Ako na prisilan način spojimo C' i C odrediti sile i napone u štapovima kao i izduženje štapa 2.

DATO JE:

$h=1\ m$;
$d=20\ mm$;
$\delta=1{,}5\ mm$;
$\beta=30°$;
$E=2\cdot 10^5\ MPa$;





Zbog simetrije sile u štapovima 1 su jednake:

Iz statičkog uslova ravnoteže dobijamo:

$\sum Yi=2S_1\cdot\cos\beta - S_2=0 \quad ...(1)$

Dodatnu jedačinu dobijamo iz uslova:

$\delta_1+\delta_2=\delta$; $\delta_1=\frac{\Delta_1}{\cos\beta}$; $\delta_2=\Delta_2$; *gdje je* : Δ_1 *i* Δ_2 *izduženje štapova 1 i 2:*

$\frac{\Delta_1}{\cos\beta}+\Delta_2=\delta$; $\Delta_1=\frac{S_1 l_1}{AE}$; $\Delta_2=\frac{S_2 l_2}{AE}$; $l_1=\frac{h}{\cos\beta}$;

$$\frac{S_1 h}{AE\cos^2\beta}+\frac{S_2 h}{AE}=\delta \quad ...(2')$$

Iz jednačina (1) i (2) dobijamo da su sile u štapovima:

$$S_1=\frac{\delta AE}{h}\frac{\cos^2\beta}{1+2co^3\beta}$$

$S_1=19{,}359\ kN$;

$$S_2=\frac{2\delta AE}{h}\frac{\cos^3\beta}{1+2\cos^3\beta}$$

$S_2=53{,}226\ kN$;

Traženi naponi iznose:

$\sigma_1=\frac{S_1}{A}$

$\sigma_1=61{,}653\ MPa$;

$\sigma_2=\frac{S_2}{A}$

$\sigma_2=169{,}51\ MPa$;

Izduženje štapa 2:

$\Delta_2=\frac{S_2 l_2}{AE}=\frac{S_2 h4}{d^2\pi E}$

$\Delta_2=0{,}847\ mm$;

21. ZADATAK

Kruti štap ABC obješen je u A i B za štapove 1 i 2. Za date vrijednosti F, a, l_1, l_2, E, odrediti:

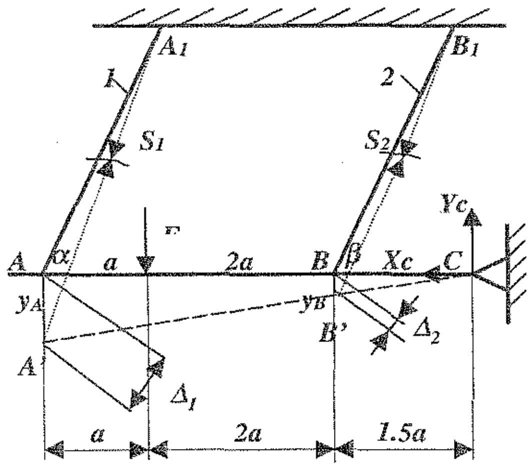
a) *sile u štapovima i otpor oslonca C,*

b) *poprečni presjek štapa 1 i 2, ako je poprečni presjek štapa 1 dva puta veći od presjeka štapa 2 i ako je dozvoljeni napon u štapu 1 σ_d poznat,*

c) *pomjeranje tačke A*

DATO JE:

$F=100\ kN;$
$E=2\cdot 10^5\ MPa;$
$\sigma_{d1}=100\ MPa;$
$l_1=1,2\ m;$
$l_2=1,1\ m;$
$a=1\ m;$
$A_1=2A_2;$
$\alpha=60°;$
$\beta=75°;$



Iz statičkih uslova ravnoteže imamo:

a)

$\sum Xi=S_1\cos\alpha+S_2\cos\beta-Xc=0 \quad ...(1)$

$\sum Yi=S_1\sin\alpha+S_2\sin\beta+Yc-F=0 \quad ...(2)$

$\sum Mc=4,5a\cdot S_1\sin\alpha-3,5a\cdot F+1,5a\cdot S_2\sin\beta=0 \quad ...(3)$

Dodatni uslov iz sličnosti trouglova ACA' i BCB' :

$y_A:y_B=4,5a:1,5a \Rightarrow \dfrac{\Delta_1}{\sin\alpha}:\dfrac{\Delta_2}{\sin\beta}=4,5:1,5;$

$\Delta_1=\dfrac{S_1 l_1}{A_1 E}; \quad \Delta_2=\dfrac{S_2 l_2}{A_2 E};$

$\dfrac{A_2 S_1 l_1 \sin\beta}{A_1 S_2 l_2 \sin\alpha}=3; \Rightarrow S_1=3S_2\dfrac{2l_2\sin\alpha}{l_1\sin\beta} \Rightarrow$

$S_1=kS_2;$

Iz (3) ... $\Rightarrow 4,5\,k\,S_2\sin\alpha+1,5\,S_2\sin\beta=3,5\,F;$

$S_2=16,936\ kN;$

Pri čemu je:

$k=6\dfrac{l_2\sin\alpha}{l_1\sin\beta}$

$k=4,9311;$

$S_1=kS_2=1,233\cdot 55,96=$

$S_1=83,511\ kN;$

(1)$\Rightarrow$ $Xc=S_1\cos\alpha+S_2\cos\beta$

$Xc=46,13\ kN;$

(2)$\Rightarrow$ $Yc=F-S_1\sin\alpha-S_2\sin\beta$

$Yc=11,3185\ kN;$

b)

Iz uslova:

$\dfrac{S_1}{A_1}\leq\sigma_{d1} \Rightarrow$

$A_1=\dfrac{S_1}{\sigma_{d1}}$

$A_1=8,35\cdot 10^{-4}\ cm^2;$

$A_2=\dfrac{A_1}{2}; \quad A_2=4,175\ cm^2;$

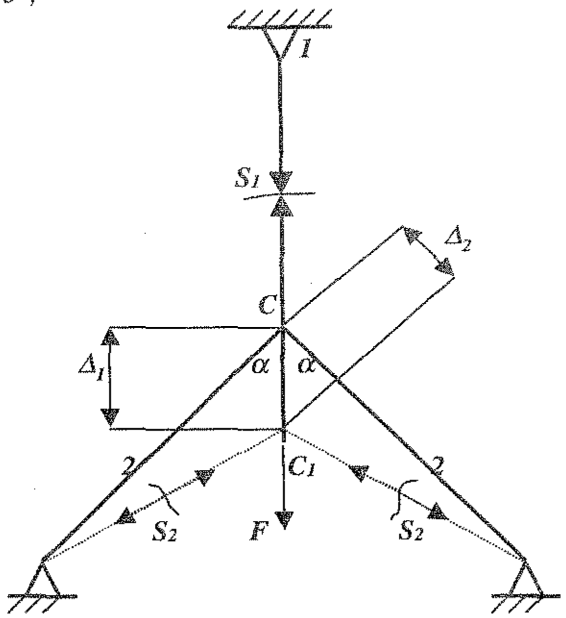
$y_A=\dfrac{\Delta_1}{\sin\alpha}=0,69\cdot 10^{-3}\ m$

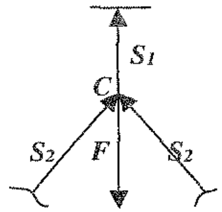
22. ZADATAK

Tri štapa po skici spojena u C i opterećena silom F. Odrediti sile i napone u štapovima kao i pomjeranje tačke C, ako je dato.

DATO JE:

$F=100\ kN;$
$l_1=1m;$
$l_2=0{,}8\ m;$
$E=2\cdot 10^5\ MPa;$
$A=10\ cm^2;$
$\alpha=45°;$





Zbog simetrije sile u štapovima 2 su jednake:

Statički uslov ravnoteže:

$\sum Yi=S_1+2S_2cos-F=0 \quad ...(1)$

Dodatna jednačina iz osobina deformacija:

$$\Delta_1=\frac{\Delta_2}{\cos\alpha}\Rightarrow\frac{S_1 l_1}{AE}=\frac{S_2 l_2}{AE\cos\alpha}\Rightarrow S_1\cdot l_1=\frac{S_2 l_2}{\cos\alpha};$$

Iz jednačina (1) i (2) dobijamo sile u štapovima:

$$S_1=\frac{F}{1+2(\frac{l_1}{l_2})\cos^2\alpha}$$

$S_1=44{,}4\ kN;$

$$S_2=\frac{F-S_1}{2\cos\alpha}$$

$S_2=39{,}28\ kN;$

Naponi u štapovima su:

$$\sigma_1=\frac{S_1}{A}$$

$\sigma_1=44{,}4\ MPa;$

$$\sigma_2=\frac{S_2}{A}$$

$\sigma_2=39{,}28\ MPa;$

Pomjeranje tačke C:

$$y_c=\Delta_1=\frac{S_1 l_1}{AE}$$

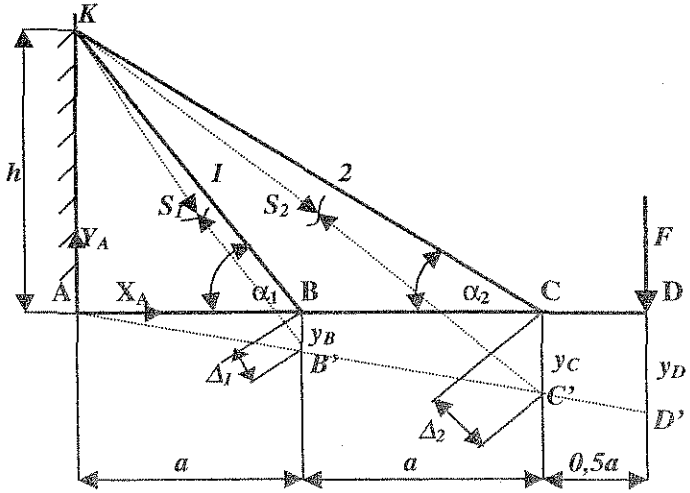
$y_c=0{,}222\ m;$

23. ZADATAK

Kruti štap AD u A je vezan zglobno za zid, a u B i C vezan zategama BK i CK. U tački D djeluje sila F. Odrediti sile i napone u štapovima BK i CK otpore oslonca A i pomjeranje tačke D.

DATO JE:

$a=1\ m;$
$F=70\ kN;$
$A=6{,}28\ cm^2;$
$h=\sqrt{3}\ m;$
$E=2\cdot 10^5\ MPa;$
$tg\alpha_1=h/a=\sqrt{3}/1=\alpha_1=60°;$
$tg\alpha=h/2a=\sqrt{3}/2=\alpha_2=40{,}89°;$



Iz statičkih uslova ravnoteže imamo:

$\sum Xi = X_A - S_1 cos\alpha_1 - S_2 cos\alpha_2 = 0 \quad ...(1)$

$Y_A + S_1 sin\alpha_1 + S_2 sin\alpha_2 - F = 0 \quad ...(2)$

$\sum M_A = aS_1 \, sin\alpha_1 + 2aS_2 \, sin\alpha_2 - 2{,}5aF = 0 \quad ...(3)$

$l_1 = \sqrt{a^2 + h^2}$

$l_1 = 2\ m;$

$l_2 = \sqrt{(2a)^2 + h^2}$

$l_2 = \sqrt{7} m;$

Iz sličnosti trouglova ABB' i ACC' slijedi:

$y_C : y_B = 2a : a,$ *pri čemu je :* $y_C = \dfrac{\Delta_2}{\sin\alpha_2};\ y_B = \dfrac{\Delta_1}{\sin\alpha_1};$

$\dfrac{S_2 l_2}{\sin\alpha_2} = \dfrac{S_1 l_1}{\sin\alpha_1} \cdot 2;\quad \Delta_2 = \dfrac{S_2 l_2}{AE};\quad \Delta_1 = \dfrac{S_1 l_1}{AE};$

$Iz\ (4) \Rightarrow S_2 = 2\,\dfrac{l_1}{l_2}\dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} S_1 \quad ili \quad S_2 = 2\dfrac{l_1^{\,2}}{l_2^{\,2}} S_1;$

$Iz\ (3) \Rightarrow S_1 = \dfrac{2{,}5F}{\sin\alpha_1 + 4(\frac{l_1}{l_2})^2 \sin\alpha_2}$

$S_1 = 74{,}08\ kN;$

$S_2 = 84{,}66\ kN;$

$\sigma_1 = \dfrac{S_1}{A}$

$\sigma_1 = 117{,}96\ MPa;$

$\sigma_2 = \dfrac{S_2}{A}$

$\sigma_2 = 134{,}81\ MPa;$

b)

$iz\ (1) \Rightarrow \quad X_A = S_1 cos\alpha_1 + S_2 cos\alpha_2$

$X_A = 101{,}04\ kN;$

$Iz\ (2) \Rightarrow \quad Y_A = F - S_1 sin\alpha_1 - S_2 sin\alpha_2$

$Y_A = -49{,}56\ kN;$

c)

$y_D = y_C \dfrac{2{,}5a}{2a}$

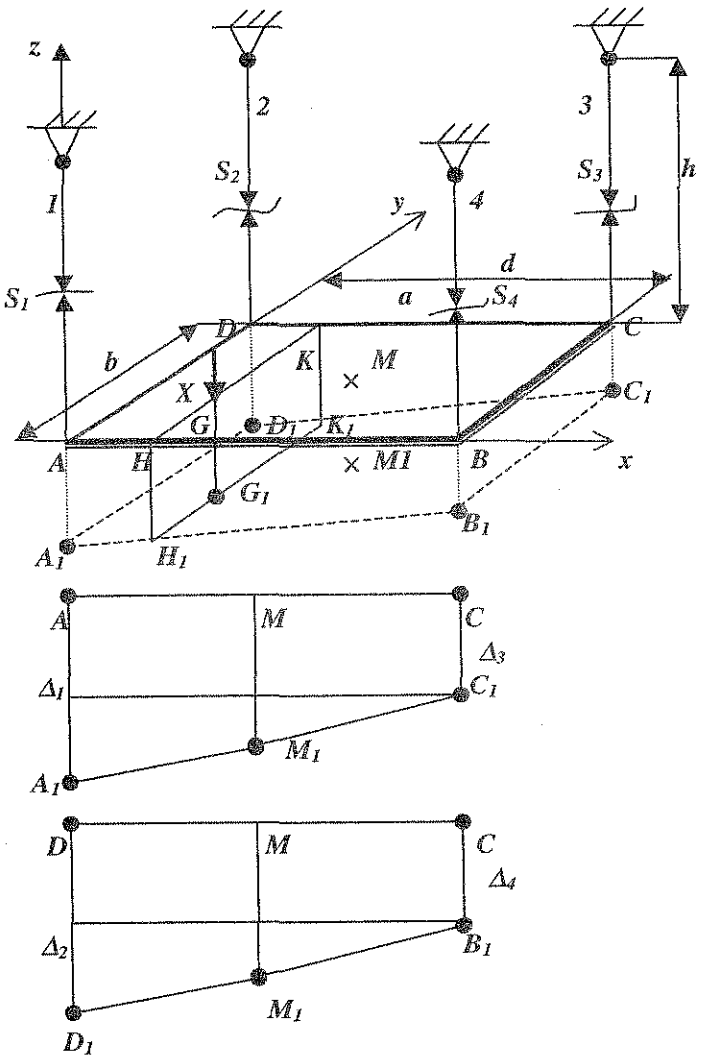
$Y_D = 3{,}4054\ mm;$

24. ZADATAK

Kruta pravougaona ploča je obješena za četiri štapa iste dužine h i presjeka A. U tački G djeluje sila F. Odrediti sile i napone u štapovima i pomjeranje tačke G ako je dato.

DATO JE:

$F = 120\ kN;$
$h = 2\ m;$
$a = 1{,}2\ m;$
$b = 1\ m;$
$Xc = 0{,}2\ m;$
$Yc = 0{,}2\ m;$
$A = 10\ cm^2;$
$E = 2{,}1 \cdot 10^5\ MPa;$



Statički uslov ravnoteže:

$\sum Zi = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 - F = 0 \quad ...(1)$

$\sum Mx = -Fy + S_3 b + S_2 b = 0 \quad ...(2)$

$\sum My = Fx - S_4 a - S_3 a = 0; \quad ...(3)$

Dodatna jednačina dobija se iz slijedećeg uslova:

$MM_1 = \dfrac{AA_1 + CC_1}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta_1 + \Delta_3 = \Delta_2 + \Delta_4$

$MM_1 = \dfrac{DD_1 + BB_1}{2} \quad ...(4)$

$S_1 + S_3 = S_2 + S_4$

Iz (1), (2), (3) i (4) slijedi:

$S_1 = \dfrac{F}{2}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{x_G}{a} - \dfrac{y_G}{b}\right)$

$S_1 = 68\ kN;$

$S_2 = \dfrac{F}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x_G}{a} + \dfrac{y_G}{b}\right)$

$S_2 = 32\ kN;$

$S_3 = \dfrac{F}{2}\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{x_G}{a} + \dfrac{y_G}{b}\right)$

$S_3 = -8\ kN;$

$S_4 = \dfrac{F}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{x_G}{a} - \dfrac{y_G}{b}\right)$

$S_4 = 28\ kN;$

Naponi:

$\sigma_1 = \dfrac{S_1}{A}$

$\sigma_1 = 68\ MPa;$

$\sigma_2 = \dfrac{S_2}{A}$

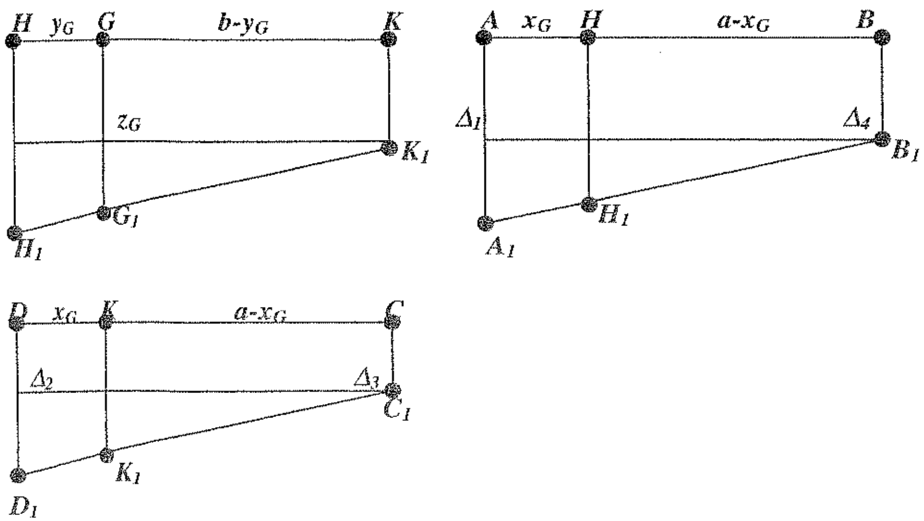
$\sigma_2 = 32\ MPa;$

$\sigma_3 = \dfrac{S_3}{A}$

$\sigma_3 = -8\ MPa;$

$\sigma_4 = 28\ MPa;$

b)



Pomjeranje tačke G:

$z_G = KK_1 + \left(\frac{HH_1 - KK_1}{b}\right)(b - y_G);$

$HH_1 = \Delta_4 + \left(\frac{\Delta_1 - \Delta_4}{a}\right)(a - x_G);$

$KK_1 = \Delta_3 + \left(\frac{\Delta_2 - \Delta_3}{a}\right)(a - x_G);$

$z_G = \Delta_3 + (\Delta_2 - \Delta_3)\left(\frac{1 - x_G}{a}\right) + \left[\Delta_4 + (\Delta_1 - \Delta_4)\left(1 - \frac{x_G}{a}\right) - \Delta_3 - (\Delta_2 - \Delta_3)\left(1 - \frac{x_G}{a}\right)\right]\cdot\left(1 - \frac{Y_G}{b}\right);$

$z_G = \Delta_1 - \frac{x_G}{a}(\Delta_2 - \Delta_3) - \frac{y_G}{b}(\Delta_1 - \Delta_2);$

$\Delta_1 = \frac{S_1 l_1}{AE}$

$\Delta_1 = 6{,}476 \cdot 10^{-4}\ m;$

$\Delta_2 = \frac{S_2 l_2}{AE}$

$\Delta_2 = 3{,}0476 \cdot 10^{-4}\ m;$

$\Delta_3 = \frac{S_3 l_3}{AE}$

$\Delta_3 = -\ 7{,}619 \cdot 10^{-5}\ m;$

$\Delta_4 = \frac{S_4 l_4}{AE}$

$\Delta_4 = 2{,}667 \cdot 10^{-4}\ m;$

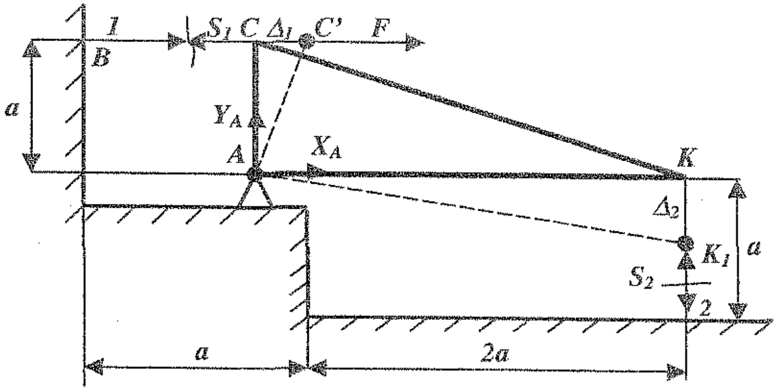
$z_G = 5{,}1554 \cdot 10^{-4}\ m;$

25. ZADATAK

Kruta konstrukcija, utvrđena je za temelje pomoću dva štapa (1) i (2) i jednog zgloba A opterećena je u C silom F. Odrediti sile i napone u štapovima (1) i (2) kao i pomjeranje tačke C ako je poznato.

DATO JE:

$F = 1000\ kN;$
$a = 2\ m;$
$A = 40\ cm^2;$
$E = 2 \cdot 10^5\ MPa;$



Iz statičkog uslova ravnoteže slijedi:

$\sum M_A = (S_1 - F)a + S_2 2a = 0 \quad ...(1)$

Dodatna jednačina dobija se iz sličnosti trouglova ACC' i AKK':

(2)... $\Delta_1 : \Delta_2 = a : 2a$ *gdje su:* Δ_1 *i* Δ_2 *izduženja štapova 1 i 2.*

$$\frac{S_1 a}{AE} = \frac{S_2 a}{AE}\ \frac{1}{2} \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}\ S_2 \rightarrow u\ (1)$$

$$S_2 = \frac{2}{5}F$$

$S_2=400\ kN;$

$$S_1 = \frac{1}{5}F$$

$S_1=200\ kN;$

Naponi u štapovima su:

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{A}$$

$\sigma_1=50\ MPa;$

$$\sigma_2=\frac{S_2}{A}$$

$\sigma_2=100\ MPa;$

Pomjeranje tačke C:

$$x_c=\Delta_1=\frac{S_1 a}{AE}$$

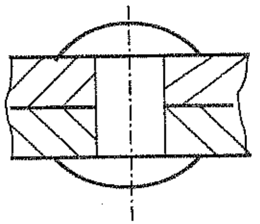
$xc=0,4762\ mm;$

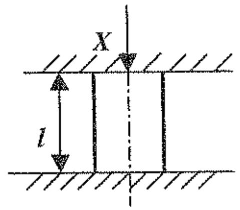
26. ZADATAK

Odrediti normalne napone koji se pojavljuju u zakivku pri njegovom hlađenju ako je kovanje izvršeno pri temperaturi to=50°C. Temperatura na koju se ohladio zakivak je t_1=15°C. Pretpostaviti da su limovi kruti. Dato je još $E=2\cdot10^5 MPa$, $\alpha=1,2\cdot10^{-5}\ 1/°C$.

DATO JE:

$t_o=50°C;$
$t_1=15°C;$
$E=2\cdot10^5\ MPa;$
$\alpha=1,2\cdot10^{-5}\ °C;$





Iz uslova:

$$(1)...\quad \Delta l = 0 \Rightarrow \alpha\, l\Delta t - \frac{Xl}{AE} = 0; \qquad \frac{X}{A} = \sigma \Rightarrow$$

$$\sigma = E\,\alpha\,\Delta t \qquad \Delta t=t_0 - t_1 = 50-15 = 35(^0C)$$

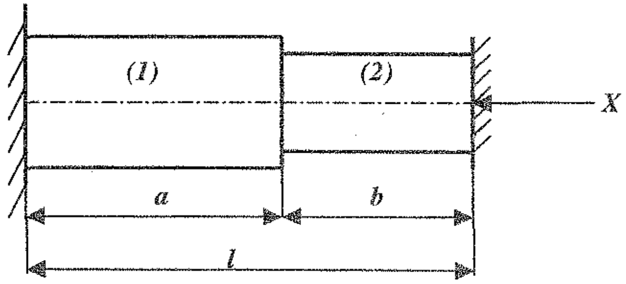
$\sigma=88,2\ MPa;$

27. ZADATAK

Dva štapa dužine a i b raznog presjeka i različitog materijala umetnuta su između dva kruta zida. Odrediti napone u oba štapa i pomjeranje tačke C, ako su oba tijela zagrijana za Δt. Poznati podaci su.

DATO JE:

$A_1=15\ cm^2;$
$A_2=10\ cm^2;$
$a=0,7\ m;$
$b=0,5\ m;$
$\alpha_1=1,7\cdot10^{-5}\ 1/°C;$
$\alpha_2=1,2\cdot10^{-5}\ 1/°C;$
$E_1=1,2\cdot10^5\ MPa;$
$E_2=2,1\cdot10^5\ MPa;$
$\Delta t=50°C;$



Iz uslova:

$(1)...\quad \Delta l=0$

$$\alpha_1\, a\,\Delta t + \alpha_2\, b\,\Delta t - \frac{Xa}{A_1E_1} - \frac{Xb}{A_2E_2} = 0$$

$$X = (a\alpha_1 + b\alpha_2)\frac{\Delta t}{\frac{a}{A_1E_1}+\frac{b}{A_2E_2}}$$

$X=142,75\cdot10^3\ N;$

$$\sigma_1 = \frac{X}{A_1}$$

$\sigma_1 = 95,164\ MPa;$

$$\sigma_2 = \frac{X}{A_2}$$

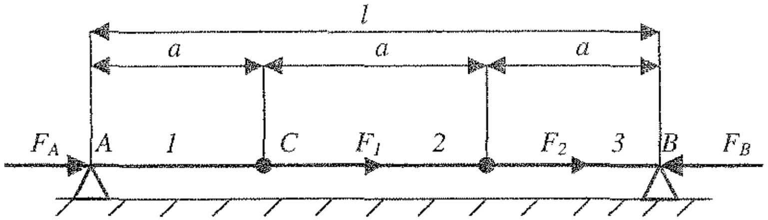
$\sigma_2 = 142,75\ MPa;$

28. ZADATAK

Elastični štap AB utvrđen za nepokretne oslonce A i B opterećen je sa dvije aksijalne sile F_1, F_2 i istovremeno zagrijan za Δt. Odrediti otpore oslonaca, napone u svakom intervalu i pomjeranje tačke C.

DATO JE:

$F_1=100$ kN;
$F_2=150$ kN;
$a=0{,}5$ m;
$A=20$ cm^2;
$E=2\cdot10^5$ MPa;
$\Delta t=70°C$;
$\alpha=1{,}2\cdot10^{-5}$ 1/%C;



Iz statičkog uslova ravnoteže imamo:

$$\ldots\sum Xi = F_A + F_1 + F_2 - F_B = 0$$

Iz dodatnog uslova :

$\Delta l = 0$ *slijedi:*

$$\ldots\ \frac{F_1 a}{AE} + \frac{F_2\,2a}{A\,E} + 3a\alpha\Delta t - \frac{F_B 3a}{AE} = 0$$

Iz gornjih jednadžbi izračunavamo reakcije u osloncima:

$$(2)\Rightarrow \quad F_B=\frac{1}{3}[F_1+2F_2+3AE\alpha\,\Delta t]=$$

$F_B=486{,}13$ kN;

$$(1)\Rightarrow \quad F_A = F_B - F_1 - F_2$$

$F_A=236{,}13$ kN;

Naponi u pojedinim presjecima štapa:

$$\sigma_1 = \frac{F_1 + F_2 - F_B}{A}$$

$\sigma_1= -\ 118{,}065$ MPa;

$$\sigma_2 = \frac{F_2 - F_B}{A}$$

$\sigma_2= -\ 168{,}065$ MPa;

$$\sigma_3= -\ \frac{F_B}{A}$$

$\sigma_3= -\ 243{,}065$ MPa;

Pomjeranje tačke C:

$$x_c=a\ \alpha\ \Delta t + \frac{(F_1 + F_2 - F_B)\cdot a}{AE}$$

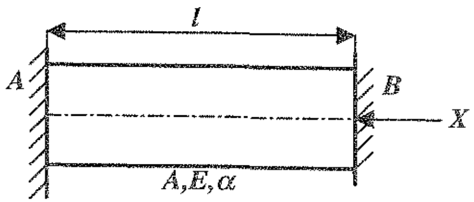
$x_c=0{,}1389$ mm;

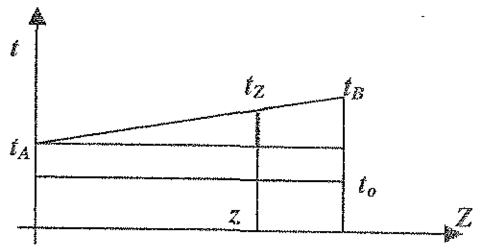
29. ZADATAK

Štap je umetnut između dva kruta zida na početnoj temperaturi t= 20° C, kada je dužina štapa i razmak krutih zidova jednak. Zagrijemo li štap tako da je u A temperatura t_A=50°C, u B temperatura t_B=70°C, a u ostalim presjecima linearno se mijenja od t_A do t_B(t_A<t_B) izračunati napon.

DATO JE:

$t=20°C$;
$t_A=50°C$;
$t_B=70°C$;
$\alpha=1{,}2\cdot10^{-5}$ 1/°C:
$E=2\cdot10^5$ MPa;
$\delta=?$





Iz uslova $\Delta l=0$ dobijamo:

$\Delta t-\Delta x=0$

gdje je: Δt *- izduženje štapa usljed promjene temperature:*

Δt *–izduženje štapa usljed djelovanja vanjske sile:*

$$\Delta_t=\int_0^l \varepsilon\, z\, dz=\int_0^l \alpha\,\Delta t_z\, dz=\int_0^l \alpha\left(t_z-t_0\right)dz$$

Raspored temperature duž štapa dat je jednačinom:

$$t_Z=t_A+\frac{z}{l}\left(t_B-t_A\right);$$

$$\Delta_t=\frac{\alpha\, l}{2}\left(t_A+t_B-2t_o\right);$$

$$\Delta_x=\frac{X\cdot l}{AE}=\frac{\sigma\cdot l}{E}\Rightarrow\sigma=\frac{\alpha E}{2}\left(t_A+t_B-2t_o\right)$$

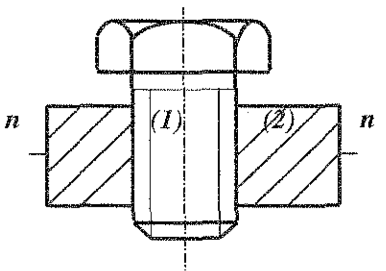
$\sigma=96\ MPa;$

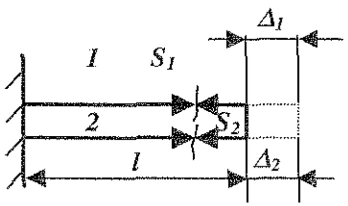
30. ZADATAK

Zavrtanj 1 iz čelika zavrne se pri $t_0=10°C$, u bakarnu čaharu 2 i oba tijela se zagriju na temperaturu t. Proračunati napone u presjeku n-n oba tijela.

DATO JE:

$A_1=12{,}56\ cm^2;$	$E_1=2\cdot10^5\ MPa;$
$A_2=20\ cm^2;$	$E_2=1{,}2\cdot10^5\ MPa;$
$\alpha_1=1{,}2\cdot10^{-5}\ 1/°C;$	$t_0=10\ °C;$
$\alpha_2=1{,}7\cdot10^{-5}\ 1/°C;$	$t=80\ °C;$





Teperatura u sklopu poveća se za:

$\Delta t=t-t_o=80-10=70\ °C;$

Iz statičkog uslova ravnoteže:

$\ldots\sum Xi=S_1+S_2=0\Rightarrow S_1=-S_2;$

Dodatne jednačine dobijamo iz uslova: da su deformacija vijka i čahure jednake: $\Delta_1=\Delta_2$, a ovo se može napisati u obliku:

$$2.)\ldots\ \alpha_1\, l\,\Delta t+\frac{S_1 l}{A_1 E}=\alpha_2\, l\,\Delta t+\frac{S_2 l}{A_2 E_2}\Rightarrow$$

$$(\alpha_2-\alpha_1)\Delta t=\frac{S_1}{A_1E_1}-\frac{S_2}{A_2E_2}$$

odavde je zbog (1) $\Rightarrow\ \dfrac{(\alpha_1-\alpha_2)\Delta t}{\dfrac{1}{A_1E_1}+\dfrac{1}{A_2E_2}}=S_1;$

$S_1=42957{,}65\ N;$

Naponi u naznačenom presjeku iznose:

$$\sigma_1=\frac{S_1}{A_1}$$

$\sigma_1=34{,}2\ MPa;$

$$\sigma_2=\frac{S_2}{A_2}$$

$\sigma_2=21{,}48\ MPa;$

31. ZADATAK

Tijelo u obliku (zarubljenog konusa) kružnog promjenjivog presjeka umetnuto je između dva kruta zida i zagrijano je za $\Delta t=80°C$. Odrediti otpore krutih zidova i zakon promjene normalnih napona duž štapa za date vrijednosti.

DATO JE:

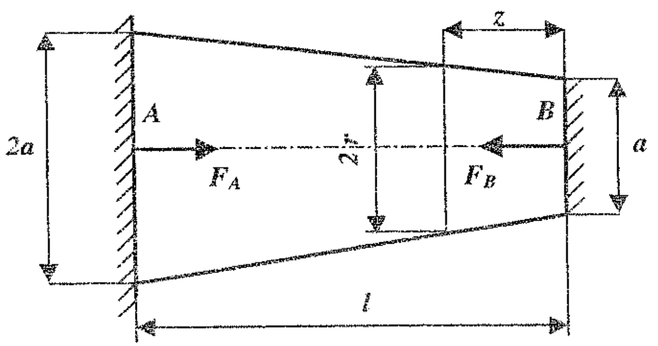
$a=50\ mm;$

$E=2{,}1\cdot10^5\ MPa;$

$\alpha=1{,}2\cdot10^{-5}\ 1/°C;$

$l=0{,}5\ m;$

$\Delta t=80^0C$



Iz uslova da je izduženje štapa jednko nuli:

$\Delta l=0 \qquad \ldots(1)$

koji se može napisati u obliku:

$\Delta_t - \Delta_{FB} = 0 \quad \ldots(1')$

Pri čemu je:

$$\Delta_{FB} = \frac{F_B\, l}{\pi\, E\, R\, r}; \qquad \Delta_t = \alpha\, l \Delta t$$

Zamjenom u (1') dobijamo:

$$\alpha\, l\Delta t = \frac{F_B\, l}{\pi\, E\, \frac{a^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad F_B = \frac{1}{2} a^2\, \pi\, E\, \alpha\, \Delta t \quad \Rightarrow$$

$F_B=791681{,}3$ N;

Iz statičkog uslova ravnoteže dobijamo reakciju u osloncu A:

$(2)\ldots \quad \sum Xi = F_A - F_B = 0 \;\Rightarrow F_A = F_B = 791681{,}3$ N;

$$r = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\frac{z}{l} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{z}{l}\right)$$

Raspodjela napona duž štapa:

$$\sigma = \frac{F_B}{A}$$

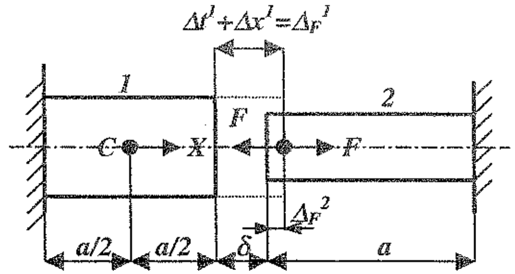
$$\sigma = \frac{F_B}{\pi \cdot r^2} = \frac{2E\alpha\Delta t}{\left(1+\frac{z}{l}\right)^2}$$

32. ZADATAK

Dva prizmatčina štapa od raznog materijala i dimenzija razmaknuti su za δ=2mm. Opteretimo štap 1 nepoznatom silom X i istovremeno ga zagrijemo za $\Delta t_1=100^0$C. Odrediti silu X tako da sila pritiska F na dodiru oba tijela ima datu vrijednost, zatim odrediti pomjeranje tačke C.

DATO JE

$F=55$ kN;
$a=40$ cm;
$\delta=1$ mm;
$A_1=2A_2=30\ cm^2$;
$\alpha_1=1{,}7\cdot 10^{-5}$ 1/°C;
$E_1=1{,}2\cdot 10^5$ MPa;
$\alpha_2=1{,}2\cdot 10^{-5}$ 1/°C;
$E_2=2\cdot 10^5$ MPa;
$\Delta t_1=100$°C;



Iz osobina deformacije dobijamo slijedeću jednačinu:

$\ldots\ \Delta t^{(1)} + \Delta x^{(1)} - \Delta_F^{(1)} = \delta + \Delta_F^{(2)}$

$$\alpha_1\, a\, \Delta t_1 + \frac{aX}{2A_1E_1} - \frac{aF}{A_1E_1} = \delta + \frac{aF}{A_2E_2}$$

$$\Rightarrow X = \frac{2\delta A_1E_1}{a} - 2\, A_1\, E_1\, \alpha_1\, \Delta t_1 + 2F\left(1+\frac{A_1E_1}{A_2E_2}\right)$$

$X = 818$ kN;

Pomjeranje tačke C:

$$x_c = \frac{a}{2}\, \alpha_1\, \Delta t_1 + \frac{a\,X}{2A_1E_1}$$

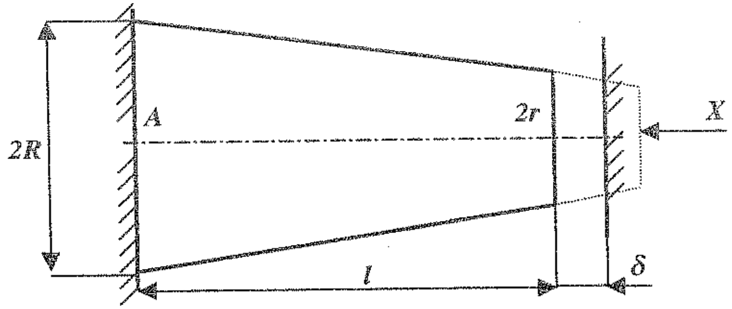
$x_c=0{,}794$ mm;

33. ZADATAK

Štap u obliku zarubljenog konusa datih poluprečnika R i r osnova, umetnut je između krutih zidova A i B. Dužina štapa kraća je za δ od razmaka krutih zidova. Zagrijemo li štap za Δt, odrediti uzajamnu silu pritiska štapa i zida.

DATO JE

$R=50\ mm;$
$r=30\ mm;$
$\delta=0,5\ mm;$
$l=0,7\ m;$
$\alpha=1,2\cdot10^{-5}\ 1/°C;$
$\Delta t=120\ °C;$
$E=2\cdot10^{5}\ MPa;$



iz uslova da je izduženje štapa jednako δ:

$(1.)\ldots\ \Delta l=\delta$

$$\Delta t-\Delta X=\delta$$

$$\alpha\,\Delta t\cdot l-\frac{X\cdot l}{\pi RrE}=\delta$$

dobijamo silu pritiska x:

$$X=\frac{E\pi Rr}{l}(\alpha\cdot l\cdot\Delta t-\delta)$$

$X=683,969\ kN;$

34. ZADATAK

Štap je kraći za δ od razmaka krutih zidova. Opteretimo li štap silom F i istovremeno ga zagrijemo za Δt, odrediti:

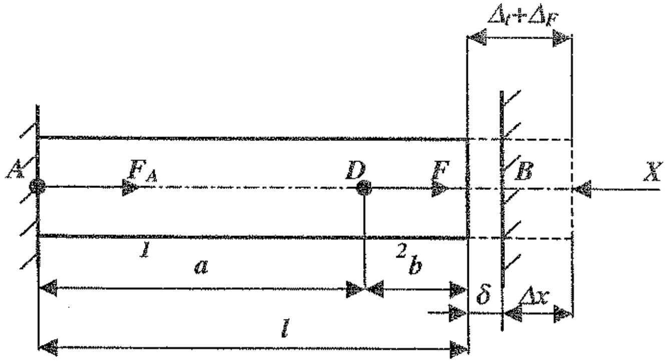
a) otpore krutih zidova,

b) napone u intervalima a i b,

c) pomjeranje tačke D,

DATO JE:

$F=300\ kN;$
$A=40\ cm2;$
$a=0,4\ m;$
$b=0,1\ m;$
$\delta=0,5\ mm;$
$E=2,1\cdot10^{5}\ MPa;$
$\Delta t=90°C;$
$\alpha=1,2\cdot10^{-5}\ 1/°C;$



Iz uslova ravnoteže dobijamo jednu jednačinu:

$(1)\ \ldots\quad \sum Xi = F_A + F - X = 0;$

Drugu jednačinu dobijamo iz osobina deformacije:

$\ldots\ \Delta l=\delta \Rightarrow \Delta_t+\Delta_F-\Delta_x=\delta$

$$\alpha(a+b)\Delta t+\frac{Fa}{AE}-\frac{X(a+b)}{AE}=\delta$$

$$X = \frac{AE\alpha(a+b)\Delta t + aF - AE\delta}{a+b}$$

$X = 340\ N;$

$\Rightarrow \quad F_A = X - F$

$F_A = 40\ N;$

$$x_D = \frac{a(F-X)}{AE} + \alpha\,\Delta\,t\,a$$

$x_D = 5{,}4274 \cdot 10^{-4}\ m;$

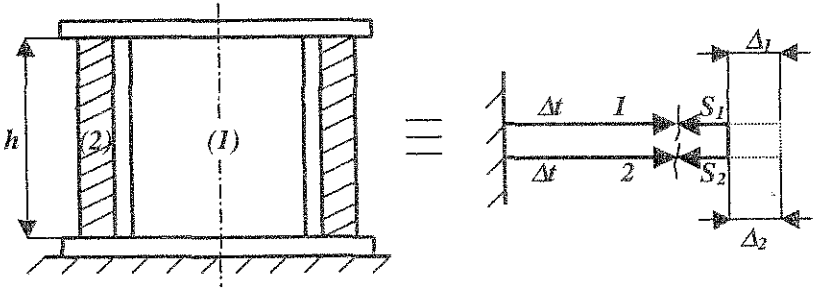
$$\sigma_1 = \frac{F}{A} = 75 \cdot 10^6\ Pa$$

35. ZADATAK

Tijelo 2 kružnog prstenastog presjeka površine A_2, postavljeno je na kalem 1 površine presjeka A_1, ako se oba tijela zagriju za Δt, odrediti napone u oba tijela i njihovo izduženje.

DATO JE:

$A_1 = 50\ cm^2;$	$l = 25\ cm;$
$A_2 = 70\ cm^2;$	$E_1 = 2 \cdot 10^5\ MPa;$
$\alpha_1 = 1.2 \cdot 10^{-5}\ 1/°C;$	$E_2 = 1.2 \cdot 10^5\ MPa;$
$\alpha_2 = 1.7 \cdot 10^{-5}\ 1/°C;$	$\Delta t = 70\ °C;$



Iz statičkog uslova ravnoteže dobijamo:

1.) $\quad \sum Xi = S_1 + S_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = -S_2$

Dodatnu jednačinu dobijamo iz osobina deformacija:

2.) $\quad \Delta_1 = \Delta_2 \quad \Rightarrow \alpha_1 l \Delta t + \dfrac{S_1 l}{A_1 E_1} = \alpha_2 l \Delta t + \dfrac{S_2 l}{A_2 E_2}$

$(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta t = \dfrac{S_1}{A_1 E_1} - \dfrac{S_2}{A_2 E_2}$, *a odavde zbog (1)* $\Rightarrow$

$$S_1 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta t}{\dfrac{1}{A_1 E_1} + \dfrac{1}{A_2 E_2}}$$

$S_1 = 159782{,}6\ N;$

Traženi naponi su:

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{A_1}$$

$\sigma_1 = 31{,}956 \cdot 10^6\ Pa$ - *pritisak;*

$$\sigma_2 = \frac{S_2}{A_2}$$

$\sigma_2 = -\ 22{,}826 \cdot 10^6\ Pa$ - *istezanje*

Izduženje:

$$\Delta l = \Delta_1 = \Delta_2 = \alpha_1\, l\, \Delta t + \frac{S_1 l}{A_1 E_1}$$

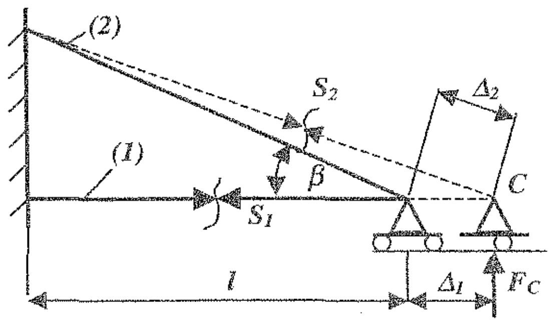
$\Delta l = 2{,}4994 \cdot 10^{-4}\ m;$

36. ZADATAK

Dva štapa su u tački C spojena i oslonjena na pokretnom osloncu. Zagrijemo li štap 1 za Δt_1, a štap 2 za Δt_2, odrediti sile i napone u štapovima 1 i 2, otpor oslonca C i pomjeranje tačke C.

DATO JE:

$l=2\ m;$
$\beta=30°;$
$A_1=20\ cm^2;$
$A_2=15\ cm^2;$
$E=2\cdot10^5\ MPa;$
$\Delta t_1=70°C;$
$\Delta t_2=80°C;$
$\alpha=1{,}2\cdot10^{-5}\ 1/°C;$



Iz statičkog uslova ravnoteže dobijamo dvije jednačine:

$\sum Xi=S_1+S_2\cos\beta=0;$

$\sum Yi=F_C+S_2\sin\beta=0;$

Treću jednačinu dobijamo iz osobina deformacija:

$\Delta_2=\Delta_1\cos\beta$

$$\text{iz (3) jednačine} \Rightarrow \frac{S_2 l}{A_2 E\cos\beta}+\frac{\alpha\Delta t_2 l}{\cos\beta}=\left(\frac{S_1 l}{A_1 E}+\alpha_1\Delta t_1 l\right)\cos\beta$$

Iz (2) jednačine $\Rightarrow S_1=-S_2\cos\beta$; *a ubacivanjem u (3) dobijamo:*

$$\Rightarrow S_2=\frac{\alpha E\left(\Delta t_1\cos^2\beta-\Delta t_2\right)}{\frac{1}{A_2}+\frac{\cos^3\beta}{A_1}}$$

$S_2=-66570{,}7\ N;$

$S_1=-S_2\cos\beta$

$S_1=57652\ N;$

Iz jednačine (2) dobijamo reakciju u osloncu C:

$F_C=-S_2\sin\beta$

$F_C=33285{,}4\ N;$

Pomjeranje tačke C:

$$\Delta_C=\Delta_1=\frac{S_1 l}{A_1 E_1}+\alpha\, l\,\Delta t_1$$

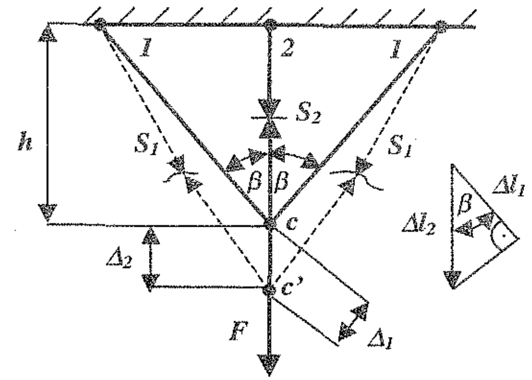
$\Delta_C=1{,}96826\ mm;$

37. ZADATAK

Tri štapa istog presjeka i materijala spojena su u tački C i opterećeni silom F. Odrediti napone u štapovima i pomjeranje tačke C, ako su štapovi zagrijani za Δt.

DATO JE:

$F=120\ kN;$
$A=20\ cm^2;$
$h=1\ m;$
$\beta=30°;$
$\alpha=1{,}2\cdot10^{-5}\ 1/°C;$
$E=2{,}1\cdot10^5\ MPa;$
$\Delta t=100\ °C;$



Iz statičkog uslova ravnoteže dobijamo jednačinu:

$\sum Yi=2S_1\cos\beta+S_2-F=0$ (1)

Drugu jednačinu dobijamo iz osobina deformacija:

$\Delta_1=\Delta_2\cos\beta$; *odnosno:*

$$\frac{S_1 h}{AE\cos\beta}+\frac{\alpha h}{\cos\beta}\Delta t=\frac{S_2 h}{AE}+\alpha\Delta t\cdot h; \qquad (2)$$

Iz (1) i (2):

$S_1=13{,}048\ kN;$

$S_2=97{,}4\ kN;$

Naponi u štapovima:

$$\sigma_1=\frac{S_1}{A}$$

σ_1=6,524 MPa;

$$\sigma_2=\frac{S_2}{A}$$

σ_2= 48,7 MPa;

Pomjeranje tačke C:

$$y_c=\Delta_2=\frac{S_2 h}{AE}+\alpha h\Delta t$$

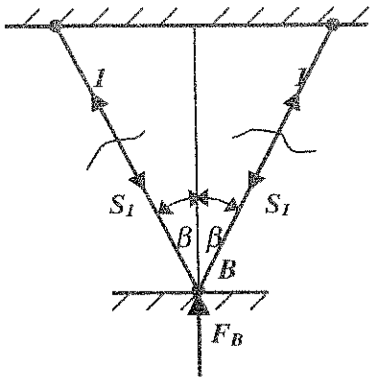
y_c = 1,4435 mm;

38. ZADATAK

Dva štapa od istog materijala i istih dimenzija umetnuta su po skici između dva kruta zida. Odrediti napone u štapovima i sile pritiska na podlogu B ako su oba štapa zagrijana za Δt.

DATO JE:

$E=2\cdot 10^5$ MPa;
$\alpha=1{,}2\cdot 10^{-5}$ 1/°C;
$\beta=45°$;
$A=20\ cm^2$;
$\Delta t=50$ °C;



Rješenje:

Iz statičkog uslova ravnoteže dobijamo jednačinu:

$\sum Yi=F_B-2S_1\cos\beta=0$;

Iz osobina deformacija dobijamo:

2.) $\Delta_1=0$: odnosno:

$$\alpha\, l\Delta t-\frac{S_1 l}{AE}=0\ \Rightarrow$$

$S_1=\alpha AE\Delta t$;

S_1=240 kN;

Iz (1)$\Rightarrow$ $F_B=2S_1\cos\beta$

$F_B=240\sqrt{2}$ kN;

Naponi u štapovima:

$$\sigma_1=\frac{S_1}{A}$$

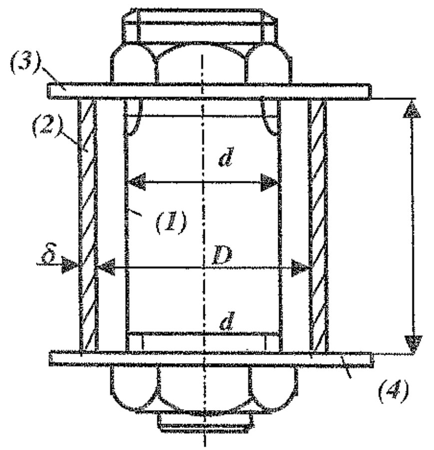
σ_1=120 MPa;

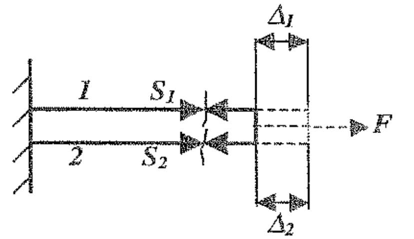
39. ZADATAK

Pomoću čeličnog vijka 1, a posredstvom krutih ploča pritisnuta je kružna mesingana čahura 2. Pri zatezanju vijka na t_0 sila u vijku iznosi F=30 kN. Odrediti napone u tijelu vijka i čahuri pri promjeni temperature oba tijela do + t_1, a zatim do – t_1.

DATO JE:

d=20 mm;	$E_1=2{,}1\cdot 10^5$ MPa;	$\alpha_2=1{,}7\cdot 10^{-5}$ 1/°C;	$t_0=0$ °C;
D=24 mm;	$\alpha_1=1{,}2\cdot 10^{-5}$ 1/°C;	F=30 kN;	$t_1=30$ °C;
$\delta=5$ mm;	$E_2=1{,}2\cdot 10^5$ MPa;		$t_2=-30$ °C;





$A_1=\frac{d^2\pi}{4}$

$A_1=3,14\cdot10^{-4}\ m^2;$

$A_2=\frac{\pi}{4}(0,034^2-0,024^2)$

$A_2=4,524\cdot10^{-4}\ m^2;$

Kombinirajući jednačinu ravnoteže i jednačinu koju dobijamo iz osobina deformacija (pogledati zadatak 36) dobijamo:

$$S_1=-S_2=\frac{(\alpha_2-\alpha_1)\Delta t}{\frac{1}{A_1E_1}+\frac{1}{A_2E_2}}$$

$S_2=148,87\Delta t\ (N);$

Ako uvrstimo odgovarajuću vrijednost za Δt onda dobijamo:

a)

$\Delta t=t_1-t_o=30-0=30°C;$

$S_1^{(a)}=\ 4466,2\ N;$

$S_2^{(a)}=-S_1^{(a)}=-4466,2\ N;$

$$\sigma_1^{(a)}=\frac{F}{A_1}+\frac{S_1^{(a)}}{A_1}$$

$\sigma_1^{(a)}=111,18\cdot10^6\ Pa;$

$$\sigma_2^{(a)}=\frac{F}{A_2}+\frac{S_2^{(a)}}{A_2}$$

$\sigma_{2(}a)=52,26\cdot10^6\ Pa;$

b)

$\Delta t=t_2-t_o=-30-0=-30\ °C;$

$$\sigma_1^{(b)}=\frac{F+S_1^{(b)}}{A_1}$$

$\sigma_1^{(b)}=81,318\cdot10^6\ Pa;$

$$\sigma_2^{(b)}=\frac{F+S_2^{(b)}}{A_2}$$

$\sigma_2^{(b)}=75,51,\ \cdot10^6\ Pa;$

40. ZADATAK

Četiri štapa istog presjeka i materijala, dužine l_1 i l_2 jednim krajem vezani su u tački C, a drugim krajevima za ploču krutog zida. Odrediti sile i napone u štapovima i pomjeranje tačke C, ako su štapovi 1 zagrijani za Δt_1.

DATO JE:

$l_1=2/\sqrt{3}\ m;$

$l_2=\sqrt{2}\ m;$

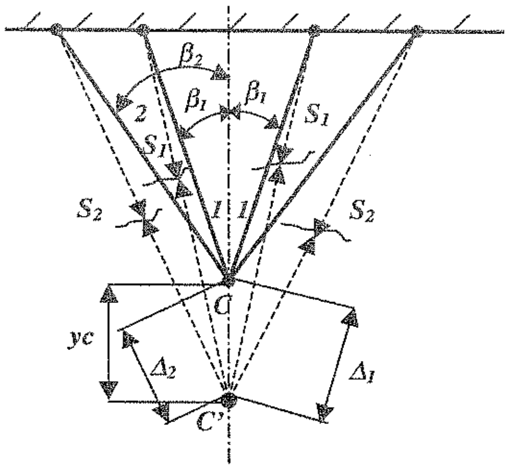
$h=1\ m;$

$E=2,1\cdot10^5\ MPa;$

$\alpha=1,2\cdot10^{-5}\ 1/°C;$

$\Delta t_1=60°C;$

$A=20\ cm^2;$



Iz statičkog uslova ravnoteže dobijamo:

$\Sigma\ Yi=2S_1\cos\beta_1+2S_2\cos\beta_2=0;$

Iz dodatnog uslova imamo:

$2.)\ y_c=\frac{\Delta_1}{\cos\beta_1}=\frac{\Delta_2}{\cos\beta_2};$

$Iz\ (2)\Longrightarrow\qquad \Delta_1=\frac{\cos\beta_1\,\Delta_2}{\cos\beta_2}\ \ ili$

$$\frac{S_1 l_1}{AE} + \alpha \cdot l_1 \Delta t_1 = \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_2} \cdot \frac{S_2 l_2}{AE}$$

Iz (1) $\Rightarrow$ $S_1 = -\frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_1} S_2$

$$\frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_1} \cdot \frac{S_2 l_1}{AE} + \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_2} \cdot \frac{S_2 l_2}{AE} = \alpha\, l_1 \Delta_{t1}$$

$$S_2 = \frac{AE\alpha\, l_1 \Delta t_1}{\frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_1} l_1 + \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_2} l_2}$$

$S_2 = 130542\ N;$

$S_1 = -\frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_1} S_2$

$S_1 = -\ 106587\ N$

Naponi u štapovima su:

$\sigma_1 = \frac{S_1}{A}$

$\sigma_1 = -53{,}29 \cdot 10^6\ Pa;$

$\sigma_2 = \frac{S_2}{A}$

$\sigma_2 = 65{,}271 \cdot 10^6\ Pa;$

Pomjeranje tačke C:

$$y_c = \frac{\Delta_1}{\cos\beta_1} = \left(\frac{S_1 l_1}{AE} + \alpha\, l_1 \Delta t_1\right) \cdot \frac{1}{\cos\beta_1}$$

$y_c = 9{,}5966 \cdot 10^{-4}\ m$

41. ZADATAK

Na drveni točak 1 spoljnjeg prečnika D_0 navučen je čelični prsten 2 pošto je prethodno zagrijan za Δt i pri ovom dobio unutrašnji prečnik D_0. Ako se čelični prsten ohladi za Δt, odrediti:

a) Pritisak p čeličnog prstena na drveni točak.

b) Napone u čeličnom prstenu i drvenom točku.

DATO JE:

$D_0 = 50\ mm;$

$\delta_1 = 10\ mm;$

$\delta_2 = 3\ mm;$

$E_1 = 0{,}5 \cdot 10^5\ MPa;$

$E_2 = 2 \cdot 10^5\ MPa;$

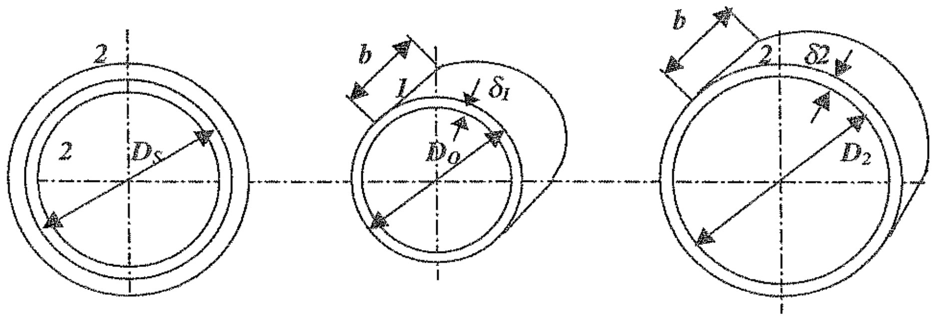
$\alpha_2 = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ 1/°C;$

$\Delta t = -\ 20°C;$

$b = 20\ mm;$

$A_1 = \delta_1 \cdot b = 2 \cdot 10^{-4}\ m^2;$

$A_2 = \delta_2 \cdot b = 2 \cdot 10^{-4}\ m^2;$



Ako je unutarnji prečnik čeličnog prstena nakon zagrijavanja za Δt D_0, a kada prsten nije zagrijan D_1 onda je:

$D_2(1+\alpha_2 \Delta t) = D_0;$

$$D_2 = D_0 \frac{1}{1+\alpha_2 \Delta t}$$

$D_2 = 49,988\ mm;$

Iz statičkog uslova ravnoteže imamo:

(2) $\Sigma Xi = S_1 - S_2 = 0$ *slijedi* $S_1 = S_2;$

Iz osobina deformacija dobijamo jednačinu:

$$(3)\ \Delta_1 + \Delta_2 = \Delta \Rightarrow \frac{S_1 \pi D_o}{A_1 E_1} + \frac{S_2 \pi D_o}{A_2 E_2} = \pi(D_0 - D_2) \Rightarrow$$

$$S_1 = \frac{D_o - D_2}{D_0\left(\frac{1}{A_1 E_1} + \frac{1}{A_2 E_2}\right)}$$

$S_1 = 2215\ N;$

Traženi naponi su:

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{A_1}$$

$\sigma_1 = 11,077 \cdot 10^6\ Pa;$

$$\sigma_2 = \frac{S_2}{A_2}$$

$\sigma_2 = 3,69 \cdot 10^6\ Pa;$

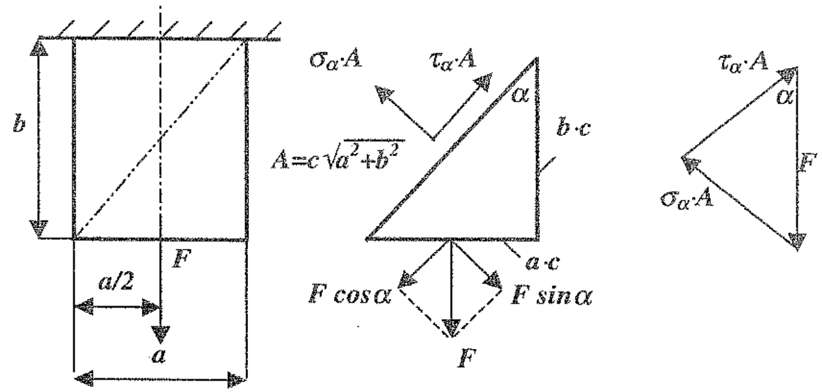
2. RAVNO STANJE NAPONA

42. ZADATAK

Prizma sa stranicama a, b, i c opterećena je na kraju silom F. Odrediti normalni i tangencijalni napon u dijagonalnoj ravni BC.

DATO JE:

$a = 20\ mm;$
$b = 30\ mm;$
$c = 35\ mm;$
$F = 50\ kN;$



Iz uslova ravnoteže u pravcu normale dobijamo jednačinu:

$\sigma_\alpha \cdot A - F \sin\alpha = 0;$

a iz uslova ravnoteže u tangncijalnom pravcu dobijamo jednačinu:

$\tau_\alpha \cdot A$ - $F \cos\alpha = 0;$

$$\Rightarrow \sigma_\alpha = \frac{Fa}{(a^2+b^2)c} =$$

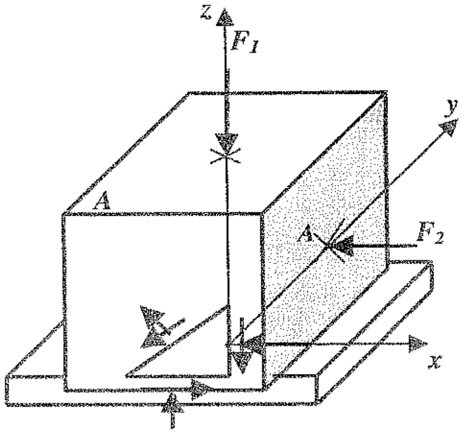
$\sigma_\alpha = 21,978 \cdot 10^6\ Pa;$

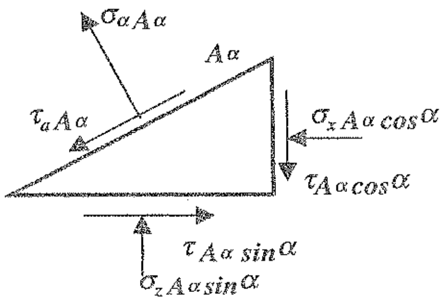
$$\Rightarrow \tau_a = \frac{Fb}{(a^2+b^2)c}$$

$\tau_\alpha = 32,967 \cdot 10^6\ Pa;$

43. ZADATAK

Malo prizmatično tijelo presjeka $A=1m^2$, opterećeno je aksijalnom silom $F_1=1000$ kN i poprečnom silom $F_2 = F_1$. Odrediti glavne napone i ugao koji čine glavne ravni sa z osom, ako su sile F_1 i F_2 ravnomjerno raspoređene po 4.





$$\sigma_x = \frac{F_2}{A} = F_2; \qquad \sigma_z = \frac{F_1}{A} = F_1; \qquad \tau = \frac{F_2}{A} = F_2;$$

Iz uslova ravnoteže za pravce x i y dobijamo jednačinu:

$$\Sigma Xi = 0 \Rightarrow \tau A_\alpha \sin\alpha - \sigma_x A_\alpha \cos\alpha + \tau_\alpha A_\alpha \sin\alpha - \sigma_\alpha A_\alpha \cos\alpha = 0;$$

$$\Sigma Yi = 0 \Rightarrow \sigma_z A_\alpha \sin\alpha - \tau A_\alpha \cos\alpha + \tau_\alpha A_\alpha \cos\alpha + \sigma_\alpha A_\alpha \sin\alpha = 0;$$

Iz (1) i (2) slijedi

$$\sigma_a = -F(1 - \sin^2\alpha)$$

$$\tau_\alpha = F\cos^2\alpha$$

$$\tau_\alpha = 0 \ \text{za} \ \alpha_1 = \frac{\pi}{4} \ \text{i} \ \alpha_2 = \frac{3\pi}{4};$$

Glavni naponi su:

$$\sigma_1 = -F(1 - \sin\frac{\pi}{2}) = 0;$$

$$\sigma_2 = -F(1 - \sin\frac{3\pi}{4}) = -2F$$

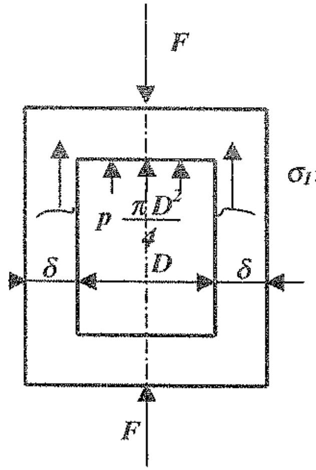
$$\sigma_2 = -2000 kPa;$$

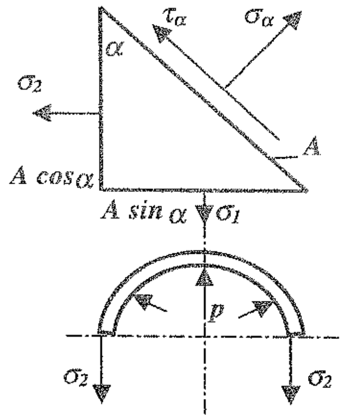
44. ZADATAK

Cilindrični sud unutrašnjeg prečnika D_1 debljine zida δ, opterećen spolja aksijalnom silom F i unutrašnjim pritiskom p. Odrediti normalne napone u aksijalnom pravcu i u pravcu upravnom na izvodnice kao i maksimalni tangencijalni napon.

DATO JE:

$D = 40$ mm;
$\delta = 5$ mm;
$F = 120$ kN;
$p = 5$ MPa;





Iz uslova ravoteže za Y pravac slijedi:

$$\Sigma Yi = F - \sigma_1 D\pi\delta - p \cdot D^2 \frac{\pi}{4} = 0$$

Odavde je normalni napon u aksijalnom pravcu:

$$\sigma_1 = \frac{F}{\pi D\delta} - p\frac{D}{4\delta}$$

$$\sigma_1 = 180{,}986 \ MPa;$$

Normalni napon u pravcu koji je upravan na izvodnice je:

$$\sigma_2 = p\frac{D}{2\delta}; \qquad \sigma_2 = 20 \ MPa;$$

Maksimalni tangencijalni napon dobijamo iz jednačine:

$$3.)\ \tau_\alpha = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\alpha \quad za\ \alpha = \pm\frac{\pi}{4} \Rightarrow \quad \tau_{max} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$

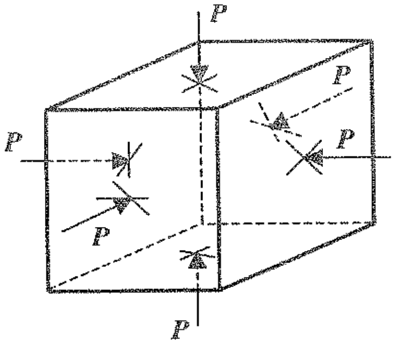
τ_{max}=80,493 MPa;

45. ZADATAK

Kocka je izložena po svim stranama istom pritisku p. Odrediti Poasonov koeficijent, ako je poznato.

DATO JE:

$p = 100\ MPa;$
$E = 2\cdot 10^5\ MPa;$
$\varepsilon_v = 0{,}001;$



Iz izraza za kubnu dilataciju:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$\varepsilon_v = 3\varepsilon_x$ *gdje je:*

$$\varepsilon_x = -\frac{p}{E} + \frac{2\mu p}{E}$$

dobijamo:

$$\varepsilon_v = 3[-\frac{p}{E} + \frac{2\mu p}{E}]$$

odavde je:

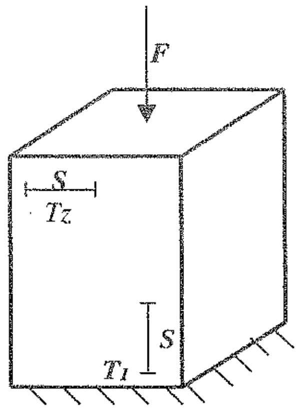
$$\mu = \frac{1}{2}\ [1 + \frac{1}{3}\frac{E}{p}\cdot\varepsilon_v]; \quad \mu = 0{,}83;$$

46. ZADATAK

Za mjerenje diletacije upotrijebljena su dva tenzometra T_1 i T_2 sa istom osnovom za mjerenje dilatacije. Tenzometar T_1 povećava k_1, a tenzometar T_2 za k_2 puta. Odrediti Poasonov koeficijent μ, ako je tenzometar T_1 pokazao promjenu Δn_1, a tenzometar T_2, promjenu Δn_2.

DATO JE:

$k_1 = 20;$
$k_2 = 50;$
$\Delta n_1 = 80\ \mu m;$
$\Delta n_2 = 50\ \mu m;$
$\mu = ?$



Za jedan i drugi tenzometar vrijede slijedeće jednačine:

$$(1)\ \left|\frac{\Delta S_2}{S}\right| = \frac{\mu\sigma}{E}, \quad \Delta S_2 = \frac{\Delta n_2}{k_2}$$

$$(2)\ \left|\frac{\Delta S_1}{S}\right| = \frac{\sigma}{E}, \quad \Delta S_1 = \frac{\Delta n_1}{k_1}$$

iz jednačina (1) i (2) slijedi:

$$\mu = \left|\frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}\right| \Rightarrow \mu = \frac{\Delta n_2 k_1}{\Delta n_1 k_2}$$

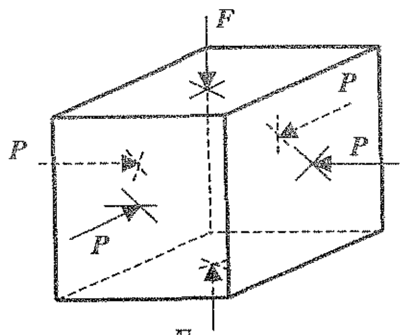
$\mu = 0{,}25;$

47. ZADATAK

Prizmatično tijelo dimenzija a = 30 m, b = 30 mm, c = 30 mm umetnuto je u otvor krutog tijela koja ima iste dimenzije kao i prizmatično tijelo. Odrediti bočne pritiske na prizmatično tijelo, ako je ono opterećeno aksijalnomm silom.

DATO JE:

$E = 2\cdot10^5\ MPa;$
$F = 50\ kN;$
$\mu = 0,3;$
$a = 30\ mm;$
$b = 30\ mm;$
$c = 30\ mm;$



Iz uslova $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0 \quad ...\ (1)$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\sigma_x = \sigma_y = p$$

$$\sigma_z = \frac{F}{a\cdot b}$$

$$iz\ (1) \quad \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right] = 0$$

$$p = \frac{\mu\cdot\sigma_z}{1-\mu} = \frac{\mu\cdot F}{(1-\mu)ab}$$

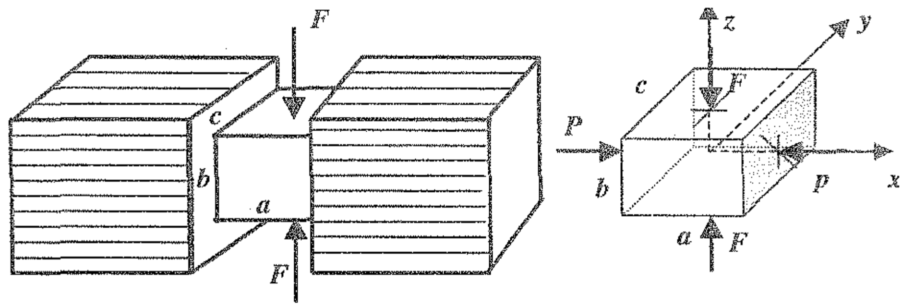
$p = 23,81\ MPa;$

48. ZADATAK

Ravna ploča umetnuta je između dva kruta zida. Odrediti pritisak ploče na kruti zid, ako se ploča zagrije za $\Delta t = 50°\ C$ i istovremeno optereti dvjema silama $F=80\ kN$. Poznato je još $a=40\ mm$, $b=30\ mm$, $c=50\ mm$, $E=2\cdot10^5\ MPa$, $\alpha = 1,2\cdot10^5\ 1/°C$, $\mu=0,3$. Kolika su totalna izduženja u pravcu sile F i u pravcu debljine ploče.

DATO JE:

$\Delta t = 50°\ C;$	$c = 50\ mm;$
$F = 80\ kN;$	$E = 2\cdot10^5\ MPa;$
$a = 40\ mm;$	$\alpha = 1,2\cdot10^{-5}\ 1/°C;$
$b = 30\ mm;$	$\mu = 0,3;$



Deformacije u pravcu ose x jednake su nuli:

$$\varepsilon_x = 0 \Rightarrow \alpha\Delta t + \frac{F}{ac}\frac{\mu}{E} - \frac{p}{E} = 0$$

Odavde dobijamo da je traženi pritisak:

$$p = E\cdot\alpha\Delta t + \mu\frac{F}{ac}$$

$p = 132\cdot10^6\ Pa;$

Izduženje u pravcu sile F:

$$\Delta b = b\cdot\varepsilon_b = b\left(-\frac{F}{ac}\frac{1}{E} + \frac{p}{E}\mu + \alpha\cdot\Delta t\right)$$

$\Delta b = 1,794\cdot10^{-5}\ m;$

Izduženje u pravcu debljine ploče:

$$\Delta c = c\cdot\varepsilon_c = c\cdot\left(\frac{\mu F}{ac}\frac{1}{E} + \frac{p}{E}\cdot\mu\right) + c\cdot\alpha\Delta t$$

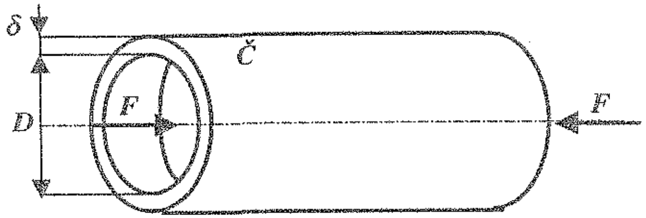
$\Delta c = 4,29\cdot10^{-5}\ m;$

49. ZADATAK

Oko mesinganog valjka postavljen je čelični cilindar debljine δ. Mesingani valjak opterećen je aksijalnom silom F. Za date vrijednosti, odrediti uzajamni pritisak p između košuljice i cilindra i normalni napon u zidu košuljice.

DATO JE:

$F = 70\ kN$;
$D = 30\ mm$;
$\delta = 4\ mm$;
$\mu_M = 0{,}32$;
$E_{\check{C}} = 2\cdot 10^5\ MPa$;
$E_M = 1{,}1\cdot 10^5\ MPa$;



Iz uslova da su deformacije valjka od mesinga i čeličnog cilindra međusobno jednake dobijamo:

$$\varepsilon_{\check{C}} = \varepsilon_M, \qquad \varepsilon_M = \frac{1}{E_M}\left[\sigma_M - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\frac{\sigma_{\check{C}}}{E_{\check{C}}} = \frac{\sigma_x}{E_M} - \mu\frac{\sigma_y}{E_M} - \mu\frac{\sigma_z}{E_M}$$

$$\sigma_{\check{C}} = \frac{p\cdot D}{2\delta}; \qquad \sigma_x = \sigma_y = p \quad \sigma_z = \sigma_M = \frac{4F}{D^2\pi}$$

Odavde je traženi pritisak:

$$p = \frac{\mu_m \cdot 4F}{D^2\pi\left[(1+\mu) - \dfrac{D\cdot E_M}{2\delta\cdot E_{\check{c}}}\right]}$$

$p = -22{,}93\ MPa$;

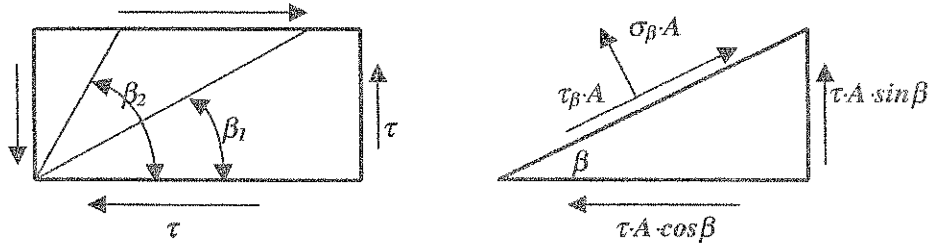
$$\sigma = \frac{pD}{2\delta} = -86\ MPa\ ;$$

50. ZADATAK

Na površinama pravougaonog paralelopipeda djeluje tangencijalni napon $\tau = 50$ MPa. Koliki su normalni i tangencijalni naponi u ravnima nagnutim pod uglom $\beta_1 = 30°$, odnosno $\beta_2 = 45°$.

DATO JE:

$\tau = 50\ MPa$;
$\beta_1 = 30°$;
$\beta_2 = 45°$;



Iz uslova ravnoteže dobijamo:

$\tau_\beta = \tau\cdot\cos 2\beta$;

$\sigma_\beta = -\tau\cdot\sin 2\beta$;

$\tau_\beta\cdot A + \tau A\sin^2\beta - \tau\cdot A\cos^2\beta = 0 \Rightarrow (1)$

$\sigma_\beta\cdot A + \tau\cdot A\sin\beta\cos\beta + \tau\cdot A\cos\beta\sin\beta = 0 \Rightarrow (2)$

za $\beta = \beta_1 = 30° \Rightarrow \tau_{\beta 1} = \tau\cos 2\beta_1 = 50\cdot\cos 2\cdot 30°$

$\tau_{\beta 1} = 25\ MPa$;

$\sigma_{\beta 1} = -\tau\sin 2\beta_1$

$\sigma_{\beta 1} = -25\sqrt{3}\ MPa$;

za $\beta = \beta_2 = 45°$;

$\tau_{\beta 2} = \tau\cos 2\beta_2 = 50\cdot\cos 2\cdot 45° = 0$;

$\sigma_{\beta 2} = -\tau\sin 2\beta_2 = -50\cdot\sin 2\cdot 45°$

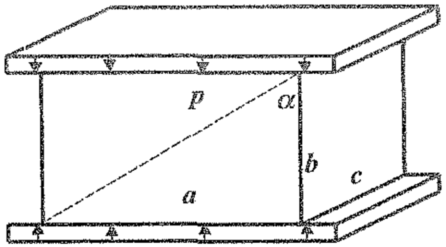
$\sigma_{\beta 1} = -50\ MPa$;

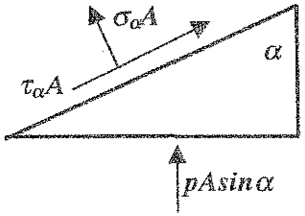
51. ZADATAK

Prizmatično tijelo sa stranicama a=100 mm, b=60 mm, c=50 mm umetnuto je između dva kruta zida. Zagrije li se prizma za Δt i izduži se strana a za Δa=1mm, odrediti temperatursku promjenu Δt i pritisak između krutih zidova, kao i normalni i tangencijalni napon u dijagonalnoj ravni prizme, ako je poznato.
$t_0 = 15°\ C;\ \alpha = 1{,}2\cdot10^{-5}\ 1/°C;\ \mu = 0{,}3;\ E = 2\cdot10^5\ MPa;$

DATO JE:

$a = 100\ mm;$
$b = 60\ mm;$
$c = 50\ mm;$
$\Delta a = 0{,}1\ mm;$
$t_0 = 15\ °C;$
$\alpha = 1{,}2\cdot10^{-5}\ 1/°C;$
$\mu = 0{,}3;$
$E = 2\cdot10^5\ MPa;$





Iz uslova:

$$\varepsilon_b = 0 = \alpha\,\Delta t - \frac{p}{E} \Rightarrow \alpha\cdot\Delta t = \frac{p}{E}$$

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{a} = \alpha\,\Delta t + \mu\frac{p}{E}; \qquad \frac{\Delta a}{a} = \alpha\Delta t(1+\mu)$$

$$\text{iz (2)} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{\alpha(1+\mu)}\cdot\frac{\Delta a}{a};$$

$\Delta t = 64{,}1°C;$

iz (1) $\Rightarrow p = E\cdot\alpha\cdot\Delta t;\quad p = 153{,}84\cdot10^6\ Pa;$

Traženi normalni napon dobijamo iz jednačine:

3) $A\cdot\sigma_\alpha + p\cdot A\sin^2\alpha = 0 \quad \sigma_a = -\,p\cdot\sin^2\alpha;\quad \sigma_a = -\,113{,}118\cdot10^6\ Pa;$

Traženi tangencijalni napon dobijamo iz jednačine:

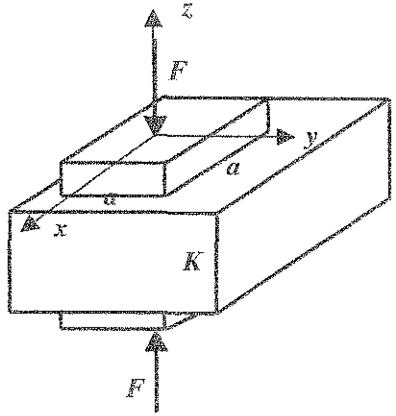
$$A\cdot\tau_\alpha + p\cdot A\sin\alpha\cos\alpha = 0 \Rightarrow \tau_\alpha = -\frac{p}{2}\cdot\sin2\alpha;\quad \tau_\alpha = -\,67{,}87\cdot10^6\ Pa;$$

52. ZADATAK

Prizmatično tijelo kvadratnog presjeka sa stranom a umetnuto je u otvor istog presjeka krutog tijela K, i opterećeno aksijalnom silom F. Zagrijemo li prizmatično tijelo za Δt, izračunati pritisak između strana prizmatičnog tijela i krutih zidova.

DATO JE:

$a = 40\ mm;$
$F = 100\ kN;$
$\Delta t = 50°C;$
$\alpha = 1{,}2\cdot10^{-5}\ 1/°C;$
$\mu = 0{,}3;$
$E = 2\cdot10^5\ MPa;$



Iz uslova:

$\varepsilon_x = \varepsilon_y$

dobijamo jednačinu:

$$\mu\cdot\frac{F}{a^2E} + \alpha\,\Delta t - \frac{P}{E} + \mu\frac{P}{E} = 0;$$

odavde je traženi pritisak:

$$p = \frac{1}{1-\mu}\left(\alpha\cdot E\cdot\Delta t + \mu\frac{F}{a^2}\right)$$

$p = 198{,}214\cdot10^6\ Pa;$

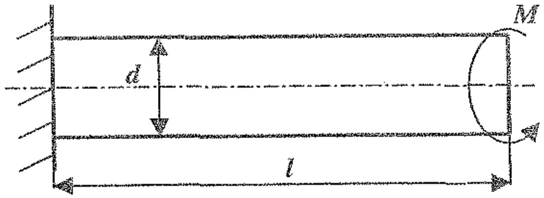
3. UVIJANJE

53. ZADATAK

Na slobodnom kraju ukliještenog štapa kružnog presjeka prečnika d=30 mm, dužine l=25 cm, djeluje obrtni momenat M = 200 Nm. Na kraju štapa izmjeren je ugao uvijanja θ =0,1°. Odrediti Poasonov koeficijent μ. (E=2·10⁵ MPa).

DATO JE:

$d = 30\ mm;$
$l = 25\ cm;$
$M = 200\ Nm;$
$\theta = 0,5°;$
$E = 2\cdot 10^5\ MPa;$
$\mu = ?$



$$Io = \frac{d^4\pi}{32}$$

$$Io = 7,952\cdot 10^{-8}\ m^4;$$

$$\theta = \frac{\pi\cdot\theta^o}{180}$$

$$\theta = 8,7266\cdot 10^{-3}\ rad;$$

Iz izraza za ugao uvijanja dobijamo:

$$\theta = \frac{Ml}{G I_o} \Rightarrow G = \frac{Ml}{\theta\ I_o}$$

Ako modul klizanja izrazimo preko modula elastičnosti dobijamo:

$$G = \frac{E}{2\,(1+\mu)} = \frac{Ml}{\theta\cdot I_o} \Rightarrow \mu = \frac{\theta\cdot I_o E}{2Ml} - 1$$

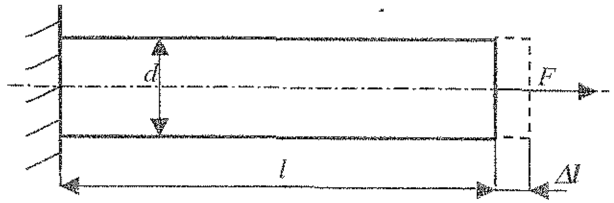
$$\mu = 0,388$$

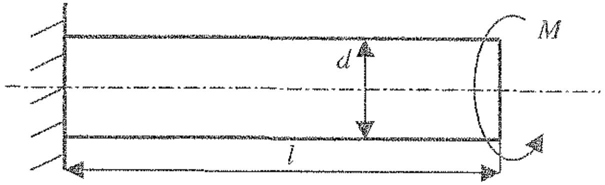
54. ZADATAK

Štap od mekog čelika prečnika d = 40 mm, izduži se za Δl =0,2 mm, na dužini l = 30 cm pri zatezanju silom F = 100 kN. Isti štap se uvije za ugao θ = 0,25° na dužini l uslijed obrtnog momenta M = 150Nm. Odrediti veličinu E, G, μ .

DATO JE:

$d = 40\ mm;$
$\Delta l = 30\ cm;$
$F = 100\ kN;$
$\theta = 0,25°;$
$M = 150\ Nm;$
$E = ?$
$G = ?$
$\mu = ?$





$$A = \frac{d^2\pi}{4} = \frac{0,04^2\pi}{4} = 12,56\cdot 10^{-4}\ m^2;$$

$$I_o = \frac{d^4\pi}{32} = \frac{0,04^4\pi}{32} = 2,512\cdot 10^{-7}\ m^4;$$

$$\theta = \frac{\pi}{180}\theta^o = 4,361\cdot 10^{-3}\ rad;$$

Iz izraza za izduženje štapa možemo izračunati modul elastičnosti:

$$\Delta l = \frac{Fl}{AE} \Rightarrow E = \frac{Fl}{A\Delta l}$$

$$E = 1,19\cdot 10^{11}\ Pa;$$

a iz izraza za ugao uvijanja možemo izračunati:

$$\theta = \frac{Ml}{GI_o} \Rightarrow G = \frac{Ml}{\theta\cdot I_o}\ ;\quad G = 4,108\cdot 10^{10}\ Pa;$$

Poasonov koeficijent možemo izračunati ako iskoristimo vezu između E i G:

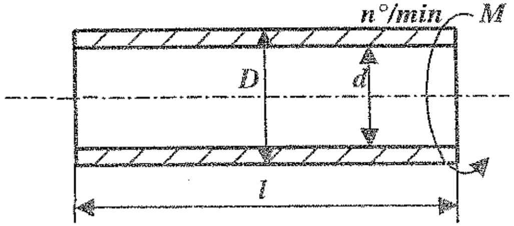
$$E = 2G(1+\mu) \Rightarrow \mu = \frac{E}{2G} - 1\ ;\quad \mu = 0,448;$$

55. ZADATAK

Vratilo prstenastog presjeka spoljašnjeg prečnika D=50 mm, a unutrašnjeg d=30 mm. Koliku snagu vratilo pri obrtanju sa n=900 o/min, ako je ugao uvijanja na dužini l=40 cm, θ =0,12°. Koliki je najveći tangencijalni napon? (G=8·10⁴ MPa)

DATO JE:

$l=40$ cm;
$D=50$ mm;
$n=900$ °/min;
$d=30$ mm;
$\theta=0{,}12°$;
$G=8\cdot10^4$ MPa;
$\tau=?$



$$\theta=\frac{\pi}{180}\theta^{o}$$

$\theta=2{,}093\cdot10^{-3}$ rad;

$$I_o=\frac{\pi}{32}\cdot(D^4-d^4)$$

$I_o=5{,}341\cdot10^{-7}\ m^4$;

Iz izraza za momenat uvijanja vratila dobijamo snagu koju vratilo prenosi:

$$1.)\ M=\frac{P}{\omega}\Rightarrow P=M\cdot\omega,\quad \omega=\frac{\pi n}{30}\Rightarrow P=\frac{\pi n}{30}M\ ;$$

Momenat uvijanja možemo izračunati iz izraza za ugao uvijanja:

$$2.)\left(\frac{\theta}{l}\right)_d=\frac{M}{I_oG}\Rightarrow M=\left(\frac{\theta}{l}\right)_d\cdot I_o\cdot G\ \text{ odnosno } M=\left(\frac{\theta}{l}\right)_d\cdot I_o\cdot G;$$

$M=223{,}6$ Nm;

Ubacivanjem u jednačinu (1) dobijamo:

$$P=\frac{\pi n}{30}M\ ;\quad P=350{,}995\ W;$$

Najveći tangencijalni napon javlja se na obodu vratila i iznosi:

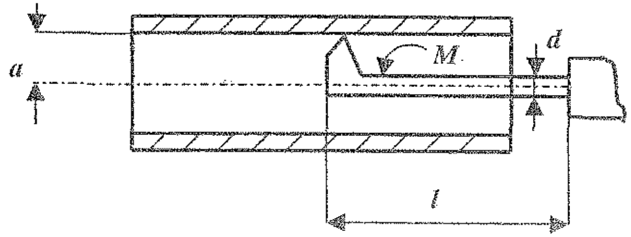
$$\tau_{max}=\frac{M}{I_o}\frac{D}{2};\quad \tau_{max}=10{,}47\ MPa;$$

56. ZADATAK

Otpor koji nož trpi pri bušenju cilindra poluprečnika a=40 mm, iznosi F=10 kN u pravcu tangente na unutrašnji krug cilindra. Dužina vratila bušilice koja na kraju nosi nož iznosi l=100 mm. Odrediti prečnik d vratila bušilice ako je dozvoljeni ugao uvijanja (θ/l)$_d$=0,25°/m, a modul klizanja G. Koliki je τ_{max}?

DATO JE:

$F=10$ kN;
$a=40$ mm;
$l=100$ mm;
$(\theta/l)_d=0{,}25°/m$;
$G=8\cdot10^4$ MPa;
$\tau_{max}=?$
$d=?$



$M=F\cdot a=10\cdot10^3\cdot0{,}04=400$ Nm;

$$\left(\frac{\theta}{l}\right)_d=\frac{\pi}{180}\left(\frac{\theta}{l}\right)^o_d=4{,}361\cdot10^{-3}\ rad/m;$$

Iz izraza za ugao uvijanja:

$$1.)\ \theta=\frac{Ml}{I_oG}\Rightarrow I_o=\frac{Ml}{\theta\cdot G}\ ,\quad I_o=\frac{d^4\pi}{32};$$

$$\frac{d^4\pi}{32}=\frac{Ml}{\theta\cdot G}\Rightarrow d=\sqrt[4]{\frac{32Ml}{\pi\theta G}}$$

$d=0{,}05846\ m=58{,}46\ mm\Rightarrow$

$d=60$ mm (usvojeno);

Maksimalni tangentni napon je:

$$\tau_{max}=\frac{16M}{\pi d^3}$$

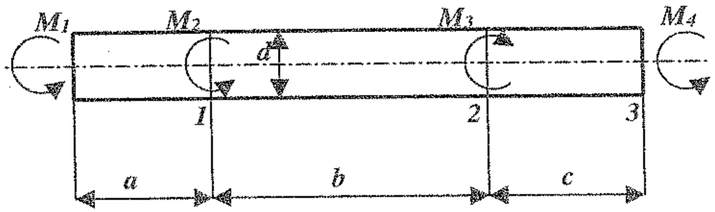
$\tau_{max}=9{,}431\cdot10^6$ Pa

57. ZADATAK

Na vratilo prečnika d=45 mm, djeluju obrtni momenti M_1 = 100 Nm, M_2=70 Nm, M_3=90 Nm, M_4 =150Nm. Odrediti maksimalne tangentne napone u svim intervalima, a zatim ugao uvijanja između krajnjih presjeka. Poznato je još: a=80 mm, b=100 mm, c=60 mm, G=8·10⁴ MPa.

DATO JE:

d=45 mm;
M_1=100 Nm;
M_2=70 Nm;
M_3=90 Nm;
M_4=150 Nm;
a=80 mm;
b=100 mm;
c=60 mm;
$G=8\cdot10^4$ MPa;



a)

Tangentni naponi u pojedinim presjecima su:

$$\tau_1=\frac{M_1}{I_o}\frac{d}{2}$$

$\tau_1=5,589\cdot10^6$ Pa;

$$\tau_2=\frac{(M_1+M_2)}{I_O}\frac{d}{2}$$

$\tau_2=9,5\cdot10^6$ Pa;

$$\tau_3=\frac{(M_1+M_2-M_3)}{I_O}\frac{d}{2}$$

τ_3= - $2,2356\cdot10^6$ Pa;

b)

Traženi ugao uvijanja je:

$$\theta_{1/4}=\frac{M_1 a}{GI_0}+\frac{(M_1+M_2)b}{GI_0}+\frac{(M_1+M_2-M_3)c}{GI_0}$$

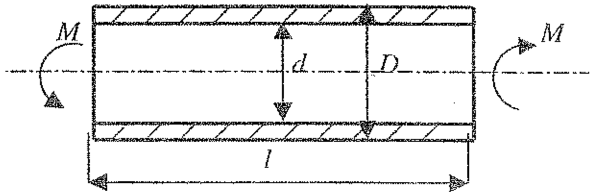
$\theta_{1/4}$=0,04 °;

58. ZADATAK

Čelično prstenasto vratilo dužine l=150 mm, opterećena je spoljnim obrtnim momentom M=100 Nm. Odrediti spoljni i unutrašnji prečnik vratila ako je dozvoljeni ugao uvijanja θ_d=0,04°, na dužini l=150 mm, a dozvoljeni tangentni napon τ_d=50MPa. ($G=2\cdot10^4$ MPa).

DATO JE:

l=150 mm;
M=100 Nm;
θ_d=0,2°;
τ_d=50 MPa;
$G=8\cdot10^4$ MPa;
d=?
D=?



$$\theta_d=\frac{\pi}{180}\cdot\theta_d^o=8,7266\cdot10^{-3}\ \text{rad};$$

$$\frac{\theta_d}{l}=\frac{M}{GI_0};$$

$$\left.\tau_d\geq\frac{M}{I_o}\frac{D}{2}\right\}\Rightarrow$$

$$D=\frac{2l}{G}\frac{\tau_d}{\theta_d}$$

D= 53,7 mm;

$$\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)=I_o;$$

$$I_0=\frac{Ml}{G\cdot\theta_d};$$

$$d^4=-\frac{32I_O}{\pi}+D^4$$

d=52,79 mm;

59. ZADATAK

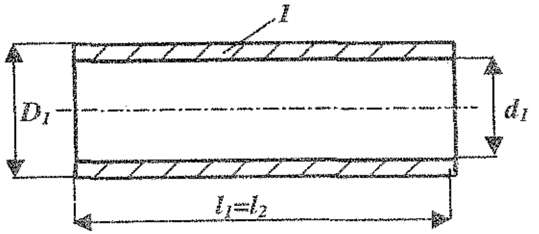
Izračunati odnos momenata uvijanja kojima se smiju opteretiti jedni puno i jedno šuplje vratilo istih poprečnih presjeka, d_1 i d_2, pri istom dozvoljenom naponu τ_d=70 MPa, ako je odnos prečnika šupljeg vratila α=0,75.

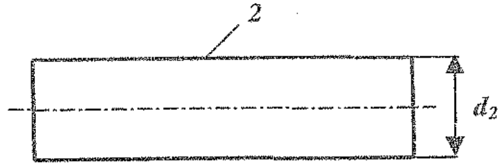
DATO JE:

$d_1=d_2$;

τ_d=70 MPa;

$\alpha = \dfrac{d_1}{D_1} = 0{,}8$





$$\tau_1=\frac{M_1}{I_o}\frac{D_1}{2};$$

$$\tau_2=\frac{M_2}{I_{O2}}\frac{d_2}{2};$$

$$\frac{M_1}{M_2}=\frac{I_{O1}}{I_{O2}}\frac{d_2}{D_1};$$

$$\frac{\pi}{4}(D_1^2-d_1^2)=\frac{\pi}{4}\cdot d_2^2 \quad \Rightarrow \quad d_2^2=D_1^2(1-\alpha^2);$$

$$\frac{I_{01}}{I_{02}}=\frac{D_1^4}{d_2^4}(1-\alpha^4);$$

$$\frac{M_1}{M_2}=\frac{D_1^4}{d_2^4}(1-\alpha^4)\frac{d_2}{D_1}$$

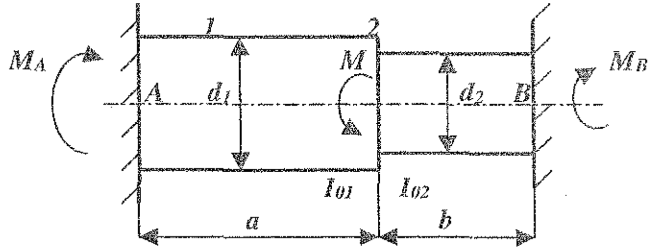
$$\frac{M_1}{M_2}=2{,}362;$$

60. ZADATAK

Odrediti maximalni obrtni moment M vratila promjenjivog kružnog poprečnog presjeka d_1=40 mm, d_2=60 mm, uklještenog na oba kraja, ako je poznato: a=120 mm, τ_d=60 MPa, b=200 mm.

DATO JE:

d_1=60 mm;
d_2=40 mm;
a=120 mm;
τ_d=60 MPa;
b=200 mm;
M=?



– *Polarni momenti inercije poprečnog presjeka vratila su:*

$$Io_2=\frac{d_2^4\pi}{32}=\frac{0{,}04^4\pi}{32}=2{,}513\cdot10^{-7}\ m^4;$$

$$Io_1=\frac{d_1^4\pi}{32}=\frac{0{,}06^4\pi}{32}=1{,}272\cdot10^{-6}\ m^4;$$

Iz uslova ravnoteže je:

$$\sum Mz=M_A+M_B-M=0;$$

Dodatni uslov je:

$$\theta_{A/B}=\frac{M_A a}{GI_{O1}}+\frac{(M_A-M)b}{GI_{O2}}=0;$$

$$\frac{M_A}{G}\left(\frac{a}{I_{o1}}+\frac{b}{I_{02}}\right)=\frac{M\,b}{G\,I_{02}}; \qquad M_A=\frac{M\,b}{I_{02}\left(\dfrac{a}{I_{o1}}+\dfrac{b}{I_{02}}\right)};$$

$$M_A=\frac{M\cdot b\cdot I_{01}}{a\cdot I_{02}+b\cdot I_{01}}; \qquad M_B=\frac{M\cdot a\cdot I_{02}}{a\cdot I_{02}+b\cdot I_{01}};$$

Maximalni moment određujemo iz uslova da maxiamlni tangecionalni napon bude manji od dozvoljenog:

kako je $a<b$; $d_1>d_2$;

$$\tau_d \geq \frac{M_B}{Io_2}\frac{d_2}{2}=\left(\frac{M\cdot a\cdot I_{01}\cdot d_2}{(a\cdot I_{02}+b\cdot I_{01})Io_2 2}\Rightarrow M_{max}\right.$$

$$M_{max}=\tau_d\frac{(a\cdot I_{02}+b\cdot I_{01})\cdot 2}{a\cdot d_2}$$

$$M_{max}=\tau_d(\frac{(a\cdot I_{02}+b\cdot I_{01})2}{a\cdot d_2}=60\cdot 10^6\frac{0{,}12\cdot 2{,}513\cdot 10^{-7}+0{,}2\cdot 1{,}272\cdot 10^{-6}}{0{,}12\cdot 0{,}04}=$$

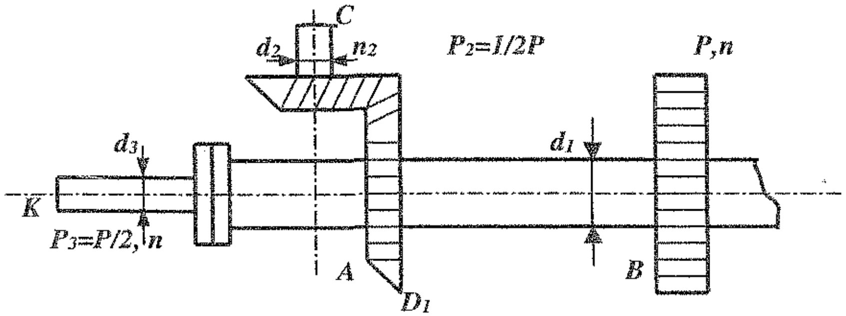
$M_{max}=71130\ Nm$;

61. ZADATAK

Vratilo AB obrće se sa $n=700$ $^o/min$, *dobijajući preko točka B snagu* $P=50$ *kW. Posredstvom koničnih zupčanika sa prečnicima* $D_1=120$ *mm,* $D_2=60$ *mm, polovina date snage predaje se na vertikalno vratilo C, a drugu polovinu na vratilo K. Odrediti prečnike* d_1, d_2, d_3, *ako je* $\tau_d=55$ *MPa.*

DATO JE:

$n=700\ ^o/min$; $P=30\ kW$;
$D_1=120\ mm$; $D_2=60\ mm$;
$\tau_d=55\ MPa$;



Iz uslova da maximalni tangecionalni naponi budu manji od dozvoljenog dobijamo prečnike vratila:

$$d_1=\sqrt[3]{\frac{16M_1}{\pi\cdot\tau_d}}; \quad M_1=\frac{P}{\omega}=\frac{30\cdot P}{\pi\cdot n}=\frac{30\cdot 50\cdot 10^3}{\pi 700}$$

$M_1=682{,}1\ Nm$;

$$d_1=\sqrt[3]{\frac{16\cdot 682{,}1}{\pi 55\cdot 10^6}}=0{,}03982\ m=39{,}8\ mm$$

$d_1=40\ mm$;

Obrtni moment i prečnik vratila 2 je:

$$M_2=\frac{30P_2}{\pi\cdot n_2}; \qquad \frac{n_1}{n_2}=\frac{D_2}{D_1}$$

$$n_2=n_1\left(\frac{D_1}{D_2}\right)=700\frac{120}{60}$$

$n_2=1400\ ^o/min$;

$$M_2=\frac{30\cdot 25\cdot 10^3}{\pi\cdot 1400}$$

$M_2=170{,}52\ Nm$;

$$d_2=\sqrt[3]{\frac{16M_2}{\pi\cdot\tau_d}}=\sqrt[3]{\frac{16\cdot 170{,}52}{\pi\cdot 55\cdot 10^6}}=0{,}025\ m$$

$d_2=25\ mm$;

$$d_3=\sqrt[3]{\frac{16\frac{M_1}{2}}{\pi\cdot\tau_d}}=0{,}0316\ m$$

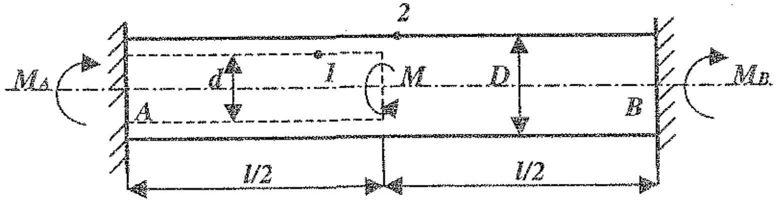
$d_3=32\ mm$;

62. ZADATAK

Štap kružnog promjenjivog presjeka, uklješten na oba kraja, opterećen je u sredini obrtnim momentom M. Odrediti odnos d/D pod uvjetom da tangentni napon u tački 1 bude polovina tangentnog napona u tački 2.

DATO JE:

$M=30\ kNm$;
$\tau_1=1/2\,\tau_2$;
$l=800\ mm$;
$d/D=?$



Rješenje:

Statički uvjet ravnoteže:

1) $\Sigma M_z=M_A-M+M_B=0$

Geometrijski uvjet:

$$2)\ \vartheta_{A/B}=\frac{M_A l}{2GI_{01}}+\frac{(M_A-M)l}{2GI_{02}}=0$$

Iz prethodna 2 uvjeta dobija se moment zakretanja kraja štapa kod A u odosu na B.

$(2)\Rightarrow M_A I_{02}+(M_A-M)I_{01}=0$

$$M_A=\frac{I_{01}M}{(I_{02}+I_{01})},\qquad \ldots(*)$$

Uvjet odnosa tangentnih napona

$$(3)\tau_1=\frac{1}{2}\tau_2\Rightarrow\frac{M_A d}{2Io_1}=\frac{(M_A-M)}{2\cdot I_{01}}\cdot\frac{D}{2}$$

$$M_A=\frac{MDI_{01}}{DI_{01}+2dIo_2}\qquad\ldots(**)$$

Izjednačavanjem(*) i (**) slijedi:

$$\frac{I_{01}M}{I_{01}+Io_2}=\frac{MDI_{01}}{DI_{01}+2dIo_2}$$

$$\frac{2d}{D}\cdot I_{02}=I_{02}$$

$$\frac{d}{D}=\frac{1}{2}$$

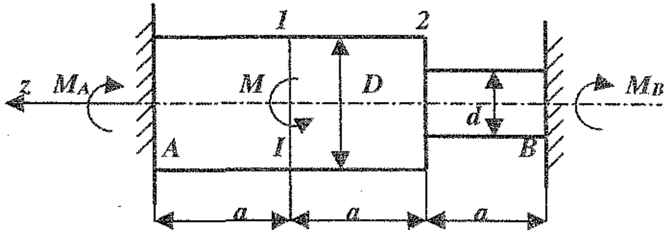
63. ZADATAK

Vratilo kružnog promjenjivog presjeka, na oba kraja ukliješteno, opterećeno je obrtnom spregom M. Za date vrijednosti odrediti:

a) prečnik vratila d
b) momente uklještenja u A i B
c) ugao uvijanja između presjeka I i uklještenja A
d) tangentne napone u tački 1 i 2.

DATO JE:

$M=42\ kNm$;
$a=32\ cm=320\ mm$;
$D=11\ cm=110\ mm$;
$\tau_\alpha=120\ N/mm^2$;
$G=80\cdot10^3\ N/mm^2$;



Rješenje:

a) Pošto imamo dvije nepoznate M_A i M_B, to formirajmo dvije jednačine; jednačine (1) kao statički uvjet ravnoteže i jednačinu (2) kao geometrijski uvjet anuliranja deformacije presjeka vratila na mjestu A u odnosu na presjek vratila na mjestu B.

$1)\ \Sigma M_z = M_A + M_B - M = 0$

$$2)\ \theta_{A/B} = \frac{M_A a}{GIo_1} + \frac{(M_A - M)a}{GIo_1} + \frac{(M_A - M)a}{GIo_2} = 0$$

$$(2) \Rightarrow M_A = \frac{(I_{01} + I_{02})M}{2I_{02} + Io_1} \quad \dots (2`)$$

ili

$$I_{01} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} = \frac{\pi \cdot (11cm)^4}{32} = 1437{,}37\ cm^4,$$

$$\tau_d = \frac{M_A}{I_{01}} \frac{D}{2} \quad \Rightarrow$$

$M_A = 31{,}36\ kNm$

Rješavanjem jednačine (2`) po nepoznatoj d slijedi:

$d = 9{,}31 cm$

b) Momenti uklještenja na mjestu "A" i "B" su:

$M_A = 31{,}36 kNm$

iz (1) $\Rightarrow M_B = M - M_A$

$M_B = 10{,}64\ kNm$

c) Zaokretanje presjeka na mjestu "I" u odnosu na presjek "A" oktarakterisano je uglom uvijanja koji se računa:

$$\vartheta_{A/I} = \frac{M_A a}{GI_{01}}; \quad \vartheta_{A/I} = 0{,}00872\ rad,$$

d) tangentni naponi u tačkama (1) i (2) su:

$$\tau_1 = \frac{M_A D}{2I_{01}}$$

$$\tau_2 = \frac{M_A - M}{I_{01}} \frac{D}{2}; \quad \tau_2 = -4{,}071\ kN/cm^2 = -40{,}71\ N/mm^2$$

Napomena:

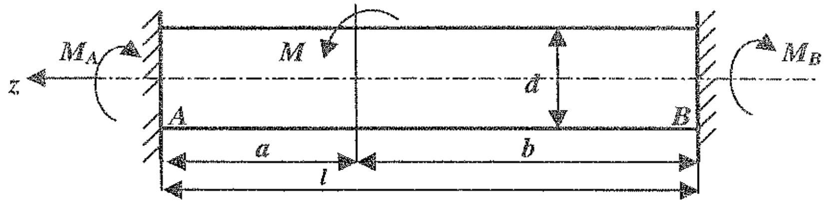
Bitno je vidjeti da tačke (1) i (2) nisu eksplicitno lokalizovane na vratilu več da tačka (1) može poprimiti bilo koje mjesto na spoljnjem dijelu vratila od presjeka A do presjeka I, odnosno za tačku (2) od presjeka I do presjeka B

64. ZADATAK

Vratilo konstantnog kružnog presjeka ukliješteno je na oba kraja i opterećeno obrtnim momentom M. Odreditit za koji ugao uvijanja $\vartheta_{A/B}$, i u kojem smislu treba zaokrenuti uklještenje B, da bi tangentni napon u oba intervala bio jednak. Treba ujedno odrediti prečnik vratila.

DATO JE:

$l = 90\ cm = 90\ mm;$
$a = 35\ cm = 350\ mm;$
$G = 85 \cdot 10^3\ N/mm^2;$
$\tau_d = 100 N/m^2$
$M = 35\ kNm;$
$\theta_{A/B} = ?$
$d = ?$



Rješenje:

Formirajmo dvije jednačine; (1) kao statički uvjet ravnoteže obrtnih momenata i jednačinu (2) prema uvjetu zadatka;

$1)\ \Sigma M_2 = M_A - M + M_B = 0 \Rightarrow$ *1 x stat. neodređen*

$2)\ \tau_1 = \tau_2$ *- prema uvjetu zadatka*

$$\tau_1 = \frac{M_A}{I_o} \frac{d}{2} = \tau_2 = \frac{M_B}{I_o} \frac{d}{2} \Rightarrow M_A = M_B, \quad \text{-----} (2`)$$

uvrštavanjem (2`) u (1) slijedi:

$$iz(1) \Rightarrow M_A = M_B = \frac{M}{2} = \frac{35kNm}{2} = 17{,}5\ kNm,$$

tangentni napon bilo koje tačke na spoljnoj strani vratila od uklještenja A do B je:

$$\tau = \frac{M}{W_o} = \frac{M}{I_o} \frac{d}{2} = \frac{16M}{\pi d^3} \le \tau_d, \quad \text{---} (3)$$

Za granični slučaj kada je $\tau = \tau_d$ *iz (3) slijedi:*

$$d^3 = \frac{16M}{\pi \tau_d}$$

d=121,25 mm,

d=12,12 cm

Ugao uvijanja presjeka "B" u odnosu na "A" je:

$$\vartheta_{A/B} = \frac{M_A a}{GI_0} + \frac{(M_A - M)(l-a)}{GI_0}$$

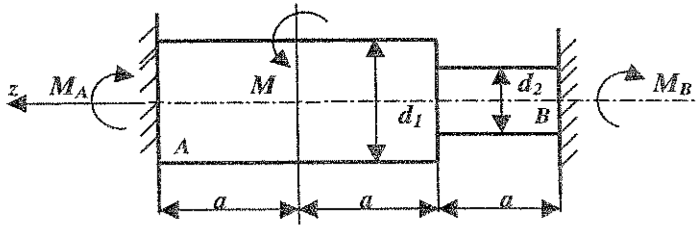
$\vartheta_{A/B}$*=-0,00194 rad*

65. ZADATAK

Vratilo prečnika d_1 *i* d_2*, na oba kraja je ukliješteno, opterećeno je obrtnim momentom M. Odrediti odnos* d_1/d_2 *pod uvjetom da tangentni napon* τ_A *u prvom intervalu bude tri puta veći od tangentnog napona* τ_B *u trećem intervalu.*

DATO JE:

M=30 kNm;
$\tau_A = 3\tau_B$
$d_1/d_2 = ?$



Rješenje:

1) $\Sigma M_z = M_A + M_B - M = 0$

2) $$V_{A/B} = \frac{M_A a}{GIo_1} + \frac{(M_A - M)a}{GIo_1} + \frac{(M_A - M)a}{GIo_2} = 0,$$

3) $$\tau_A = \frac{M_A}{Io_1}\frac{d_1}{2} = 3\tau_B = 3\cdot\frac{M_B}{Io_2}\frac{d_2}{2} = 3\frac{(M - M_A)}{Io_2}\frac{d_2}{2}$$

$$iz(2) \Rightarrow \frac{M_A - M}{Io_2} = \frac{M_A}{Io_1 + I_{O2}}$$

$$iz(3) \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = 3\cdot\left(\frac{I_{O1}}{I_{O1} + I_{O2}}\right) \ldots (3`)$$

$$\left(\frac{d_1}{d_2}\right) - 3\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^3 + 1 = 0$$

smjenom $K = \dfrac{d_1}{d_2}$

$K^4 + 1 - 3K^3 = 0$, $K^4 - 3K^3 + 1 = 0$, ...(**)

Jednačina (**) ima dva rješenja realna i dva rješenja imaginarna. Realni korijeni te jednačine nalaze se u intervalima (0,1) i (2,3). Prema približnom računu oni su: $K_1 = 0,765$, $K_2 = 2,9616$ *; odnosno*

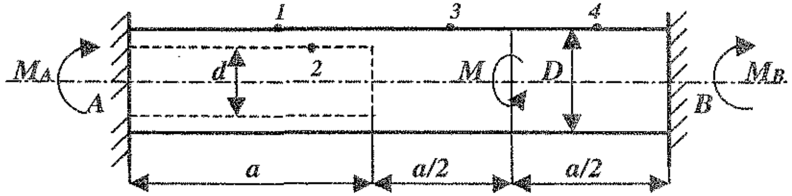
$\left(\frac{d_1}{d_2}\right)_1 = 0,765$ *i* $\left(\frac{d_1}{d_2}\right)_2 = 2,9616$

66. ZADATAK

Vratilo na pola dužine prstenastog, a na drugoj polovini punog kružnog presjeka, ukliješteno je na oba kraja, opterećeno obrtnim momentom M. Odreditit momente uklještenja, napone u tačkama 1, 2, 3, 4, ugao uvijanja u presjeku u kome djeluje moment u odnosu na uklještenje A. Dato je: M, d, D, a, G.

DATO JE:

M=40 kNm;
d=88 mm=8,8 cm;
D=100 mm=10 cm;
a=430 mm=43 cm;
$G = 80\cdot10^3\ N/mm^2 = 80\cdot10^5\ N/cm^2$;
$\vartheta_{A/I} = ?$, $M_A = ?$, $M_B = ?$, $\tau_1 = ?$, $\tau_2 = ?$, $\tau_3 = ?$, $\tau_4 = ?$.



Rješenje:

a)

Zadatak ima dvije nepoznate M_A i M_B te obrazujmo dvije jednačine:

1) $\Sigma M_z = M_A + M_B - M = 0$ – *statički uvjet ravnoteže*

2) $\vartheta_{A/B} = \dfrac{M_A a}{GI_{01}} + \dfrac{M_A \frac{a}{2}}{GI_{02}} + \dfrac{(M_A - M)\frac{a}{2}}{GI_{02}} = 0$ - *geometrijski uvjet anuliranja ugaone deformacije;*

iz (2) $\Rightarrow$ $M_A = [\dfrac{I_{01}}{I_{01} + I_{02}}] \cdot \dfrac{M}{2}$ ---- (2`)

$I_{01} = \dfrac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4) = 392{,}99 cm^4 \approx 393\ cm^4$

$I_{02} = \dfrac{\pi}{32} \cdot D^4 = \dfrac{\pi}{32} \cdot (10cm)^4 = 981{,}74\ cm^4 \approx 982\ cm^4$

iz (2`) $\Rightarrow$ $M_A = 11{,}43\ kNm$

iz (1) $\Rightarrow$ $M_B = M - M_A = 28{,}57\ kNm$; $M_B = 28{,}57\ kNm$

Ugao uvijanja presjeka "I" u odnosu na presjek "A";

b)

$\vartheta_{A/I} = \dfrac{M_A a}{GI_{01}} + \dfrac{M_A a}{2GI_{02}} = \dfrac{M_A a}{G} \cdot \left(\dfrac{1}{I_{01}} + \dfrac{1}{2I_{02}}\right) = 0{,}018\ rad;$

$\vartheta_{A/I} = 0{,}018\ rad$

tangentni naponi u tačkama (1,2,3,4) na vratilu;

c)

$\tau_1 = \dfrac{M_A}{I_{01}} \dfrac{D}{2} = 14{,}54\ kN/cm^2 = 145{,}4\ N/mm^2,$

$\tau_2 = \dfrac{M_A}{I_{01}} \dfrac{d}{2} = 11{,}43 \cdot 102\ kNcm \cdot \dfrac{8{,}8cm}{393cm^4 \cdot 2} = 12{,}79\ kN/mm^2$

$\tau_3 = \dfrac{M_A}{I_{02}} \dfrac{D}{2} = 11{,}43 \cdot 10^2\ kNcm \cdot \dfrac{10cm}{982cm^4 \cdot 2} = 5{,}82\ kN/cm^2 = 58{,}2\ N/mm^2,$

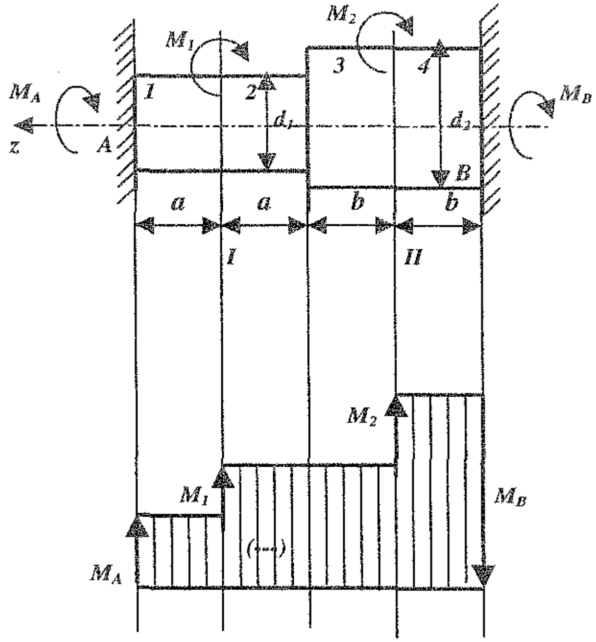
$\tau_4 = \dfrac{(M_A - M)}{I_{02}} \dfrac{D}{2} = (11{,}43 - 40) \cdot 10^2\ kNcm \cdot \dfrac{10cm}{982cm^4 \cdot 2} = -14{,}55\ kN/cm^2$

67. ZADATAK

Za vratilo promjenjivog kružnog presjeka, ukliještenog na oba kraja,odredi momente uklještenja,dijagram momenata uvijanja,napone u svakom intervalu i ugao uvijanja presjeka I u odnosu na II.

DATO JE:

$a = 24\ cm;$
$b = 20\ cm;$
$d_1 = 85\ mm = 8{,}5\ cm;$
$d_2 = 140\ mm = 14\ cm$
$M_1 = 20\ kNm;$
$M_2 = 28\ kNm;$
$G = 80 \cdot 10^3\ N/mm^2$



Rješenje:

Zadatak je 1x statički neodređen te formirajmo dva naša poznata uvjeta (1) i (2) koji u ovom slučaju imaju oblik:

1) $\Sigma M_z = M_A + M_1 + M_2 + M_B = 0$,

$$2)\ \theta_{A/B} = \frac{M_A a}{G I_{o1}} + \frac{(M_A + M_1)a}{G I_{01}} + \frac{(M_A + M_1)b}{G I_{02}} + \frac{(M_A + M_2 + M_1)b}{G I_{02}} = 0$$

$$I_{01} = \frac{\pi d_1^4}{32} = 512{,}48\ cm^4,$$

$$I_{02} = \frac{\pi d_2^4}{32} = 3771{,}5\ cm^4,$$

$M_A = 12{,}44\ kNm$

Iz (1) $\Rightarrow M_B = -(M_1 + M_2 + M_A)$

$M_B = -60{,}44\ kNm$

tangentni naponi pojedinim intervalima vratila su:

$$\tau_1 = \frac{M_A d_1}{I_{01} 2} = \frac{12{,}44 kNcm \cdot 8{,}5 cm}{512{,}48 cm^4 \cdot 2} = 10{,}316\ kN/cm^2 = 103{,}16\ N/mm^2,$$

$$\tau_2 = \frac{(M_A + M_1)d_1}{I_{01} 2} = \frac{(12{,}44 + 20)10^2\ kNcm \cdot 8{,}5 cm}{512{,}48 cm^4 \cdot 2} = 269\ N/mm^2$$

$$\tau_3 = \frac{(M_A + M_1)d_2}{I_{02} 2} = \frac{(12{,}44 + 20)10^2\ kNcm \cdot 14 cm}{3771{,}5 cm^4 \cdot 2} = 6{,}02 kN/cm^2 = 60{,}2\ N/mm^2,$$

$$\tau_4 = \frac{M_B d_2}{I_{02} 2} = -\frac{60{,}44 \cdot 10^2\ kNcm \cdot 14 cm}{3771{,}5 cm^4 \cdot 2} = 11{,}2 kN/cm^2 = 112{,}2\ N/mm^2,$$

Ugao uvijanja presjeka vratila na mjestu (II) u odnosu na presjek na mjestu (I);

$$\vartheta_{I/II} = \frac{(M_A + M_1)a}{G I_{01}} + \frac{(M_A + M_1)b}{G I_{02}} = 0{,}000021\ rad$$

$\vartheta_{I/II} = 0{,}000021\ rad$

68. ZADATAK

Dva vratila kružnog presjeka jednim krajevima su uklještana za krute zidove a drugim krajevima su spojena pomoću prirebnice sa dva vijka.

Odrediti:

a) Momente uklještenja i nacrtati dijagram momenta uvijanja.

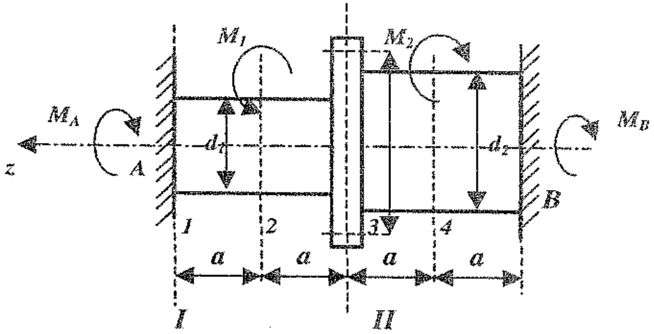
b) Sile koje djeluju na vijak

c) Ugao uvijanja presjeka I u odnosu na II.

d) Maksimalne tangentne napone u svakom intervalu.

DATO JE:

$M_1 = 40\ kNm$;
$M_2 = 35\ kNm$;
$G = 80 \cdot 10^3\ N/mm^2 = 80 \cdot 10^5\ N/cm^2$;
$d_1 = 18\ cm = 180\ mm$;
$d_2 = 22\ cm = 220\ mm$;
$c = 20\ cm = 220 mm$;
$a = 20\ cm = 220\ mm$;



Riješenje:

a) Zadatak je 1x statički neodređen:

1) $\Sigma M_z = M_A + M_B - M_1 + M_2 = 0$

$$2)\ \vartheta_{A/B} = \frac{M_A a}{G I_{o1}} + \frac{(M_A - M_1)a}{G I_{01}} + \frac{(M_A - M_1)a}{G I_{02}} + \frac{(M_A + M_2 - M_1)a}{G I_{02}} = 0,$$

$$I_{01} = \frac{\pi d_1^4}{32} = 10306\ cm^4; \quad I_{02} = \frac{\pi d_2^4}{32} = 22998{,}03\ cm^4,$$

$Iz(2) \Rightarrow M_A=28{,}39 kNm \approx 28{,}4\ kNm$

$Iz(1) \Rightarrow M_B=-23{,}4\ kNm,$

b) Ugao uvijanja presjeka vratila na mjestu II u odnosu na presjek "I" je :

$$\vartheta_{I/II}=\frac{M_A a}{GI_{O1}}+\frac{(M_A-M_1)a}{GI_{O1}};\quad \vartheta_{I/II}=0{,}000407\ rad$$

c) Obrtni moment na mjestu spajanja vratila je:

$$F_s\cdot c=M_A\text{-}M_1 \Rightarrow F_s=\frac{M_A-M_1}{c}$$

F_s=-58 kN F_s - *sila koja djeluje na vijak prirubnice,*

d) tangentni naponi u pojedinim intervalima na vratilu:

$$\tau_1=\frac{M_A d_1}{I_{O1}2}=2{,}48\ kN/cm^2$$

$\tau_1=2{,}48\ kN/cm^2=24{,}8\ N/mm^2$ - *vrijedi za interval od presjeka (1) do presjeka (2),*

$$\tau_2=\frac{(M_A-M_1)d_1}{I_{O1}2}=-1{,}013\ kN/cm^2$$

$\tau_2 = -1{,}013\ kN/cm^2 = -10{,}13\ N/mm^2$ - *vrijedi za interval od presjeka (2) do presjeka (3)*

$$\tau_3=\frac{(M_A-M_1)d_2}{I_{O2}2}=-0{,}55\ kN/cm^2$$

$\tau_3=-0{,}55\ kNcm^2=-5{,}5\ N/mm^2$ - *vrijedi za interval od (3) do (4)*

$$\tau_4=\frac{(M_A-M_1+M_2)d_2}{I_{O2}2}=1{,}119\ kN/cm^2$$

$\tau_4=1{,}12\ kN/cm^2=11{,}2\ N/mm^2$ -*vrijedi za interval od presjeka (4) do presjeka (B).*

69. ZADATAK

Vratilo promjenjivog kružnog presjeka krajnjih prečnika d i D, dužine l, opterećeno je na sredini obrtnim momentom M i ukliješteno na oba kraja za krute zidove A i B. Odrediti momente ukliještenja i maksimalne tangentne napone na mjestima ukliještenja.

DATO JE:

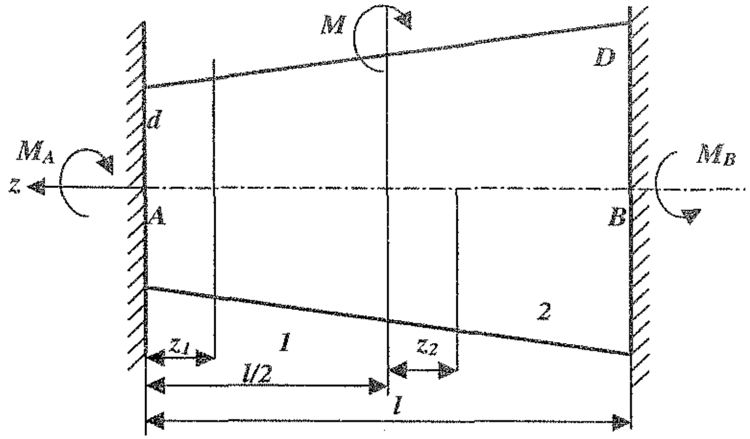
$d=16\ cm=160\ mm;$

$D=25\ cm=250\ mm;$

$l=82\ cm=820\ mm;$

$M=70\ kNm=70\cdot10^3\ Nm$

$M_A=?, M_B=?, \tau_A=?, \tau_B=?.$



Rješenje:

Zadatak je 1x stat. neodređen te formirajmo i jednačinu (2):

1) $\Sigma M_Z=M_A - M_B + M=0$

2) $$\vartheta_{A/B}=\frac{1}{G}\int_0^{l/2}\frac{M_A dz}{I_{O1}(z)}+\frac{1}{G}\int_0^{l/2}\frac{(M_A+M)d_2}{I_{O2}(z)}=0$$

$$I_{01}(z) = \frac{\pi}{32}(d+\frac{D-d}{l}z)^4;$$

$$I_{02}(z) = (\frac{d+D}{2}+\frac{D-d}{l}z)^4\frac{\pi}{32};$$

tangentni naponi u uklještenju "A" i "B" su:

$Iz(1) \Rightarrow M_B = M + M_A;$

$$\tau_A = \frac{M_A}{I_{0A}}\frac{d}{2} = \frac{M_A}{\frac{\pi d^4}{32}}\frac{d}{2} = \frac{16M_A}{\pi d^3}$$

$$\tau_B = \frac{M_B D}{I_{0B} 2} = \frac{M_B D}{\frac{\pi \cdot D^4}{32} 2} = \frac{16M_B}{\pi D^3}$$

odakle poslije integracije slijedi;

$$M_A = \frac{d^3}{(D+d)^3}\left[\frac{(D+d)^3 - 8D^3)}{d^3 - D^3}\right]\cdot M$$

$M_A = 20,23\ kNm$

$Iz\ (1) \Rightarrow M_B = M + M_A = 70kNm + 20,23kNm = 90,23\ kNm$

$M_B = 90,23\ kNm$

$\tau_A = 2,52\ kN/cm^2$

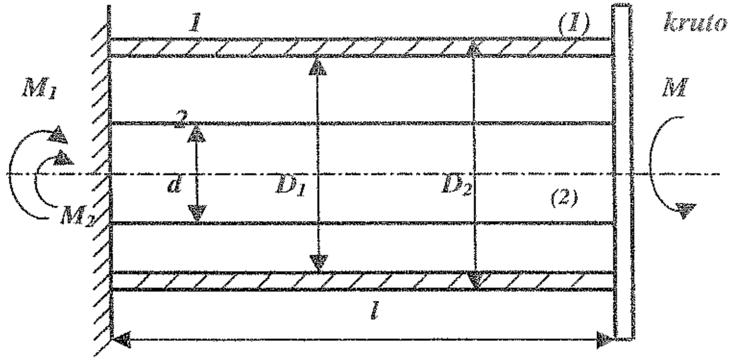
$\tau_B = 1,62\ kN/cm^2$

70. ZADATAK

Dva vratila umetnuta su jedno u drugo. Jednim krajevima su uklješteni, a drugim krajevima su zavarena za krutu ploču koju napada obrtni moment M. Odrediti moment M, ako je poznat ugao uvijanja γ, a zatim napone u (1) i (2). Dalje je poznato d, D_1, D_2, l, G.

DATO JE:

$\vartheta = 0,0037\ rad;$
$D_1 = 90\ mm;$
$D_2 = 106\ mm;$
$d = 60\ mm;$
$G = 80\cdot 10^3\ N/mm^2;$
$l = 500\ mm;$



Rješenje:

1) $\Sigma M_z = M_1 + M_2 - M = 0$, -1x statički neodređen

2) $\vartheta = \frac{M_1 l}{GI_{01}} \Rightarrow M_1 = \frac{\theta \cdot G \cdot I_{01}}{l}$

$$I_{01} = \frac{(D_2^4 - D_1^4)\pi}{32}$$

$I_{01} = 1,9\cdot 10^6\ mm$

$$Iz\ (*) \Rightarrow M_1 = \frac{0,0037\cdot 80\cdot 10^3\ N/mm^2\cdot 1,9\cdot 10^6}{500mm}$$

$M_1 = 1124,8\ Nm,$

$$I_{02} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(60cm)^4}{32} = 1,27\cdot 10^6 mm^4,$$

$$3`) \; \ldots \; \vartheta = \frac{M_2 l}{GI_{02}} \Rightarrow M_2 = \frac{\vartheta G\cdot I_{02}}{l}$$

M_2=751840 Nmm=751,8 Nm,

Na osnovu (1) slijedi: $M=M_1+M_2$

M=1876,6 Nm,

tangentni napon u tački (1):

$$\tau_1 = \frac{M_1 D_2}{2I_{01}} = \frac{1124,8\cdot 10^3\, Nmm \cdot 10^6\, mm}{1,9\cdot 10^6\, mm^4 \cdot 2}$$

$\tau_1=31,37\ N/mm^2$

tangentni napon u tački (2):

$$\tau_2 = \frac{M_2 d}{2I_{02}}$$

$\tau_2=17,76\ N/mm^2$

71. ZADATAK

Greda kružnog presjeka prečnika d_1 i d_2 utvrđena je za krute ploče, koje su sa po dva vijka vezane za zidove . Za date vrijednosti odredi:

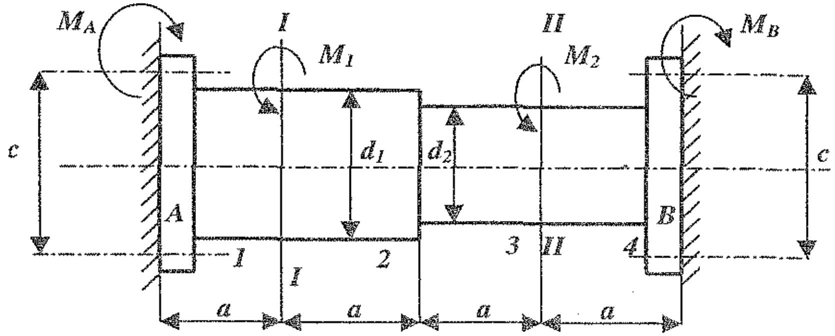
a) sile u vijcima ako je τ_d poznato.

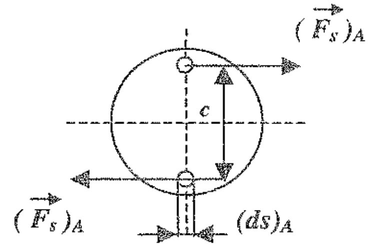
b) maksimalne tangentne napone u svakom intervalu osovine

c) ugao uvijanje presjeka u kojima djeluju momenti M_1 i M_2.

DATO JE:

$M_1=20\ kNm$;
$M_2=10\ kNm$;
$d_1=25\ cm$;
$d_2=20\ cm$;
$c=30\ cm$;
$a=21\ cm$;
$G=80\cdot 10^3\ N/mm^2$;
$\tau_{ds}=65\ N/mm^2$;





Rješenje:

a) Zadatak je 1x statički neodređen.

1) $\Sigma M_z = M_A + M_B - M_1 - M_2 = 0,$

2) $$\theta_{A/B} = \frac{M_A a}{GIo_1} + \frac{(M_A - M_1)a}{GI_{01}} + \frac{(M_A - M_1)a}{GI_{02}} + \frac{(M_A - M_2 - M_1)a}{GI_{02}} = 0,$$

$$iz(2) \Rightarrow M_A = \frac{M_1 I_{01} + M_1 I_{02} + (M_1 + M_2) I_{01}}{2(I_{01} + I_{02})} \quad \ldots (2`)$$

$$I_{01} = \frac{\pi d_1^4}{32} = 38349,52\ cm^4,$$

$$I_{02} = \frac{\pi d_2^4}{32} = 15707,96\ cm^4,$$

$M_A=20,64\ kNm$

$Iz(1) \Rightarrow M_B = M_1 + M_2 - M_A$

$M_B=9,36\ kNm=9,36\ kNm$

Moment ukliještenja (M_A) jednak je po intenzitetu momentu reaktivnih sila u vijcima koji djeluju na dijametralnoj udaljenosti označenoj sa "C"

$$M_A=(F_s)_A\cdot c \Rightarrow (F_s)_A=\frac{M_A}{c}=\frac{20{,}64kNm}{0{,}3m}=68{,}8kN,$$

Napon (mjerodovni) u vijku je smičući I lokalizovan je u presjeku između vratila I ukliještenja:

$$\tau_S=\frac{F_S}{\frac{d_S^2\cdot\pi}{4}}=\frac{4F_S}{d_s^2\cdot\pi}\le\tau_{sd}\Rightarrow d_S=\mathrm{d_S}=\sqrt{\frac{4F_S}{\cdot\pi\cdot\tau_d}}=(\frac{4\cdot 68{,}8\cdot 10^3 N}{\pi\cdot 65N/mm^2})^{1/2}$$

$d_S=36{,}71\ mm=3{,}67\ cm,$

b)

tangentni naponi u pojedinim intervalima na spoljnoj strani vratila je:

$$\tau_1=\frac{M_A}{W_{O1}}=\frac{M_A d_1}{2I_{O1}}$$

$\tau_1=0{,}673\ kN/cm^2=6{,}73N/mm^2$

$$\tau_2=\frac{(M_A-M_1)d_1}{2I_{O1}}$$

$\tau_2=0{,}21N/mm^2$

$$\tau_3=\frac{(M_A-M_1)d_2}{2I_{O2}}$$

$\tau_3=0{,}407\ N/mm^2,$

$$\tau_4=\frac{M_B\cdot d_2}{2I_{02}}$$

$\tau_4=0{,}5896\ kN/cm^2=5{,}96\ N/mm^2,$

c)

Ugao uvijanja presjeka II u odnosu na presjek I je:

$$\theta_{I/II}=\frac{(M_A-M_1)a}{GI_{O1}}+\frac{(M_A-M_1)a}{GI_{O2}}$$

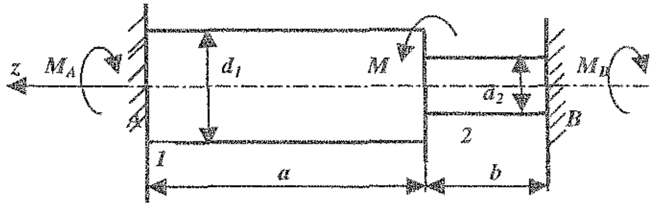
$\theta_{I/II}=0{,}00001507\ rad,$

72. ZADATAK

Vratilo kružnog promjenjivog presjeka, ukliješteno je na oba kraja i opterećeno obrtnim momentom M. Odrediti prečnike d_1 i d_2 pod uslovom da u oba intervala maksimalni tangentni napon bude isti i jednak τ_d. Poznato je: a,b,G.

DATO JE:

$G=85\cdot10^3\ N/mm^2=8500\ kN/cm^2;$
$a=45\ cm;$
$b=25\ cm;$
$M=30\ kNm;$
$\tau_d=100\ N/mm^2=10\ kN/cm^2;$
$d_1=?, d_2=?.$



Rješenje:

Zadatak je 3x statički neodređen te pored jednačine statičke ravnoteže formirajmo još tri dodatna uvjeta (2),(3),(4).

1) $\Sigma M_z=M_A+M_B-M=0,\Rightarrow M_B=M-M_A$

2) $\vartheta_{A/B}=\dfrac{M_A a}{GIo_1}+\dfrac{(M_A-M\ )b}{GI_{O2}}=0$ - *geometrijski uvjet*

$$iz(2)\Rightarrow M_A=\frac{MbI_{O1}}{aI_{O2}+bI_{O1}}$$

$$iz(1)\Rightarrow M_B=M-\frac{MbI_{O1}}{aI_{O2}bI_{O1}}=\frac{MaI_{02}}{aI_{02}+bI_{01}},$$

tangentni napon u intervalu 1

$$(3) \text{---}\quad \tau_1=\frac{M_A}{W_{O1}}=\frac{M_A}{I_{01}}\frac{d_1}{2}\le\tau_d$$

iz (3)$\Rightarrow$ $d_1=\sqrt[3]{\left(\frac{16M_A}{\pi\tau_d}\right)}$, --- (3`)

tangentni napon u intervalu 2 je po uvjetu zadatka jednak τ_d:

(4) --- $\tau_2=\frac{M_A-M}{W_{O2}}=\frac{(M_A-M)}{I_{O2}}\frac{d}{2}\leq\tau_d$

iz (4)$\Rightarrow$ $d_2=\sqrt[3]{16\frac{(M_A-M)}{\pi\cdot\tau_d}}$ ---- (4`)

iz (2)$\Rightarrow$ $\frac{M_A a}{\frac{Gd_1^4\pi}{32}}+\frac{(M_A-M)b}{\frac{Gd_2^4\cdot\pi}{32}}=0$ ---- (2`)

uvrstimo (3`) i (4`) u (2`):

Poslije sređivanja dobijemo:

$a^3(M_A-M)=-b^3M_A$

$(a^3+b^3)M_A=a^3M\Rightarrow M_A=\frac{Ma^3}{(a^3+b^3)}=\frac{30kNm\cdot 45^3}{45^3+25^3}=25{,}61kNm,$

$M_A=25{,}61$ kNm

$M_B=M-M_A=30$ kNm$-25{,}61$kNm$=4{,}39$ kNm,

$M_B=4{,}39$ kNm

Iz (3`) $\Rightarrow$ $d_1=\sqrt[3]{\frac{16M_A}{\pi\cdot\tau_d}}=\left(\frac{16\cdot 25{,}61\cdot 10^2 kNcm}{\pi\cdot 10kNcm^2}\right)^{1/3}=10{,}925$

$D_1=10{,}925\approx 11$ cm,

Iz (4`) $\Rightarrow$ $|d_2|=\sqrt[3]{\frac{16(M_A-M)}{\pi\cdot\tau_d}}=\left(\frac{16\cdot(25{,}61-30)kNcm\cdot 10^2}{\pi\cdot 10kNcm^2}\right)^{1/3}=6{,}069cm,$

$|d_2|=6{,}069cm\approx 6{,}1$ cm,

ili $d_2=\sqrt[3]{\frac{M_B 16}{\pi\cdot\tau_d}}=6{,}1$ cm.

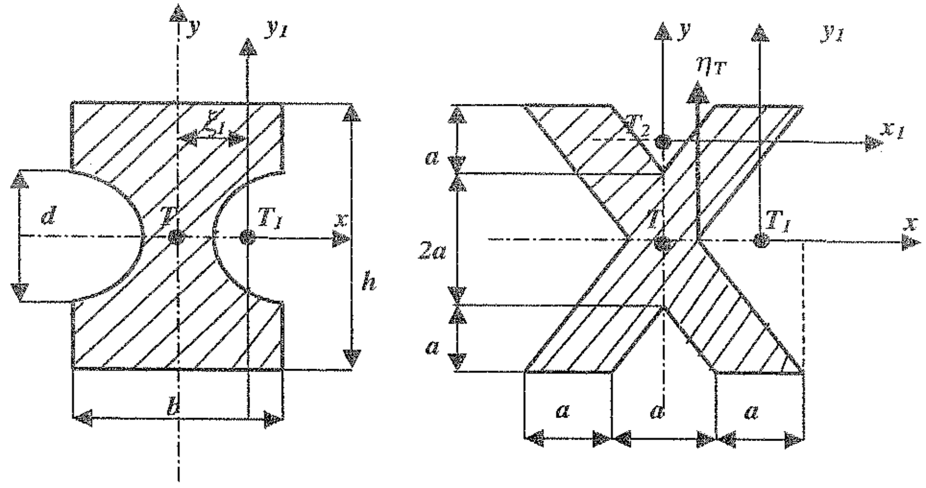
4. MOMENT INERCIJE I SAVIJANJE

73. ZADATAK

Naći momente inercije za ose x i y datih presjeka, pri čemu je:

DATO JE:

$a=6$ cm;
$b=15$ cm;
$h=20$ cm;
$2r=d=14$ cm;



a) b)

Rješenje:

a)

Za presjek a): $I_x=I_x'-2I_{x1}$; $I_x'=\frac{b\cdot h^3}{12}$; $I_{x1}'=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot d^4}{64}$;

$I_X=\frac{bh^3}{12}-\frac{\pi\cdot d^4}{64}$; $I_X=8114{,}25$ cm^4,

$I_y=I_y'-2I_{y1}$; $I_y'=\frac{h\cdot b^3}{12}$; $I_{y1}=I_{y1}'+\xi_{1T}^2\cdot A_1$

$$I_Y=\frac{1}{12}hb^3-2\left[I_{y1}'+\xi_{1T}^2\cdot A_1\right]$$

$$I_y=\frac{1}{12}hb^3-2\left[r^4\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)+\left(r-\frac{4r}{3\pi}\right)^2\cdot\frac{\pi r^2}{2}\right];\quad I_Y=2599,5\ cm^4$$

Za presjek b):

$$I_X=\frac{3a(4a)^3}{12}-2\left[\frac{a\cdot a^3}{36}+\left(a+\frac{2}{3}a\right)^2\frac{a^2}{2}\right];\quad I_X=17064cm^4$$

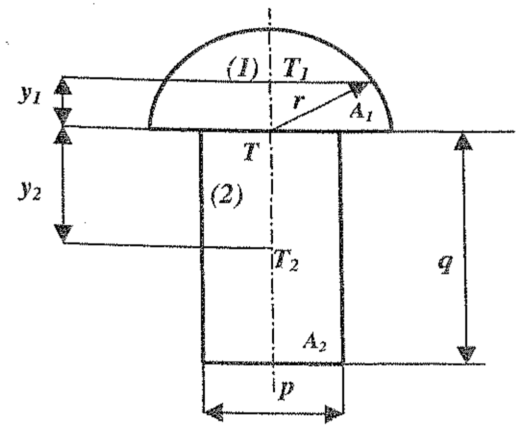
$$I_y=\frac{1}{12}4a\cdot(3a)^3-2\left[\frac{1}{36}4a\cdot a^3+\left(\frac{a}{2}+\frac{2}{3}a\right)^2\cdot\frac{1}{2}4a\cdot a\right];\quad I_Y=4320\ cm^4$$

74. ZADATAK

Odredit p i q presjeka po skici tako da težište padne u centar polukružnog presjeka i da aksijalni moment inercije za težišne ose x i y budu jednaki dato je r.

DATO JE:

$r=3$ cm;



Rješenje:

1`) $\Sigma S_X^i = y_1A_1+y_2A_2=0$ - uvjet zadatka

iz(1`) $\Rightarrow \frac{4r}{3\pi}\frac{r^2\pi}{2}-\frac{q}{2}\,p\,q=0$

2`) $I_X=I_Y$ - uvjet zadatka

iz (2`)$\Rightarrow \frac{r^4\pi}{8}+p\frac{q^3}{3}=\frac{r^4\pi}{8}+q\frac{p_1^3}{12}\Rightarrow q^2=\frac{p^2}{4}$ *Uvrštavanjem (1`) i (2`) slijedi:*

$q=2,62$ cm, $p=2q=5,24$ cm

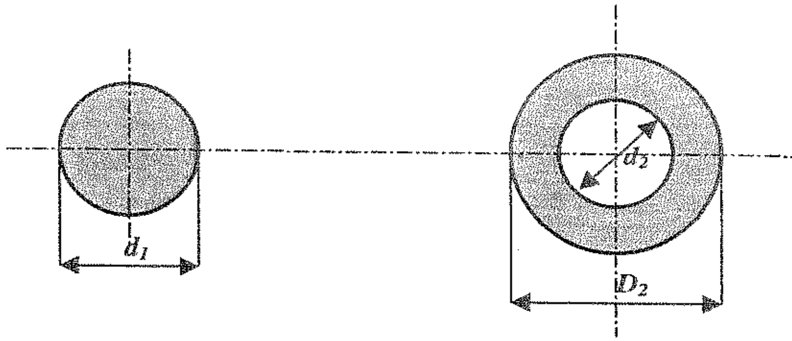
$p=5,24$ cm

75. ZADATAK

Naći odnos polarnih momenata inercije punog i prstenastog kružnog presjeka, ako je površina prstena jednaka površini kruga.

DATO JE:

$\alpha=d_2/D_2=1/3$,



Riješenje:

Odnos polarnih momenata inercije je :

$$\frac{I_{01}}{I_{02}}=\frac{\frac{\pi d_1^4}{32}}{\frac{\pi}{32}(D_2^4-d_2^4)}=\frac{d_1^4}{D_2^4(1-\alpha^4)}=\left(\frac{d_1}{D_2}\right)^4\cdot\frac{1}{1-\alpha^4}\quad ----(1)$$

Prema uvjetu zadatka o jednakosti površina kruga i kružnog prstena:

$$A_1=A_2;\quad \frac{\pi\cdot d_1^4}{4}=\frac{\pi\cdot(1-\alpha^2)^2D_2^2}{4}\quad -----(2)$$

$$Iz\ (2)\Rightarrow\left(\frac{d_1}{D_2}\right)^4=(1-\alpha^2)^2\quad ----(2`)$$

Uvrštavanjem jednačine (2`) i (1) slijedi:

$$(2`) \rightarrow (1) \Rightarrow \quad \frac{I_{01}}{Io_2} = \frac{(1-\alpha^2)^2}{1-\alpha^4} = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

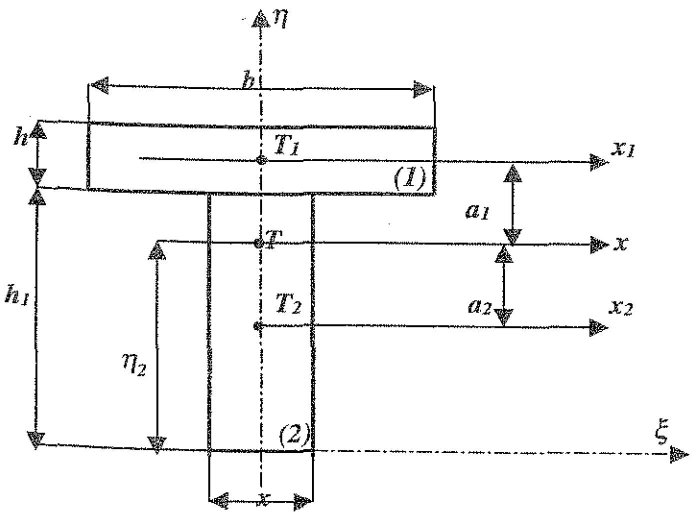
$$\frac{I_{01}}{Io_2} = \frac{4}{5}$$

76. ZADATAK

Na pravougaonik sa dimenzijama b i h postavljen je drugi pravougaonik visine h_1 i nepoznate širine x. Odrediti širinu x pod uvjetom da otporni moment za težišnu osu cijelog presjeka ostane isti, nepromijenjen.

DATO JE:

b=16 cm;
h=4 cm;
h_1=10 cm;,



Rješenje:

Koordinata težišta η_T je:

$$1)\ \eta_T = \frac{A_1\eta_1 + A_2\eta_2}{A_1 + A_2}$$

$A_1=b\cdot h; \quad A_2=h_1\cdot x=10x,$

$$Iz\ (1) \Rightarrow \quad \eta_T = \frac{384+25x}{32+5x}$$

Moment inercije za osu ξ cijelog kombinovanog presjeka:

$$2)\ I_\xi = \frac{b(h_1+h)^3}{3} - \frac{(b-x)h_1^2}{3}$$

Primjenom Štajnerove teoreme nalazimo moment inercije za osu X cijelog presjeka:

$$3)\ I_x = I_\xi - \eta_T^2 A$$

$$I_x = \frac{2730{,}66 + 18773{,}3x + 416{,}66x^2}{32+25x}$$

Ukupni otporni moment kombinovanog presjeka:

$$4)\ W_X^{(2)} = \frac{I_x}{\eta_T}$$

$$W_x^{(2)} = \frac{2730{,}66 + 18773{,}3x + 416{,}66x^2}{384+25x}$$

Otporni moment pravougaonika (1) prije postavljanja pravougaonika (2):

$$W_x^{(1)} = \frac{bh^2}{6}; \quad W_x = 42{,}66\ cm^3;$$

Prema uvjetu zadatak otporni moment ostaje konstantan,te možemo pisati:

$$W_x^{(1)} = W_x^{(2)};$$

$$42{,}66 = \frac{2730{,}66 + 18773{,}3x + 416{,}66x^2}{384+25x}$$

Nakon sređivanja dobivamo:

$$x^2 + 42{,}5x - 32{,}77 = 0 \ \ldots (*)$$

$$iz\ \ (*) \Rightarrow x_{1,2} = -42{,}5 \pm 44{,}015/2$$

$x_1=0{,}7575\ cm;$

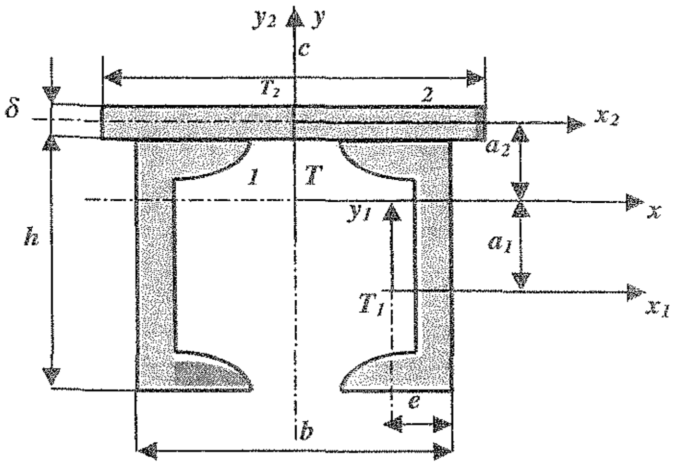
Negativno rješenje x_2 odbacujemo,a pozitivno ćemo usvojiti.

77. ZADATAK

Presjek se sastoji iz dva U-profila i horizontolnog lista dimenzija c i δ. Odrediti razmak b, između U-profila da bi centralna elipsa inercije bila krug.

DATO JE:

$c=19$ cm;
$\delta=2$ cm;



Rješenje:

odabrat ćemo profil [16;

$I_{x1}=925\ cm^4$;

$I_{y2}=85{,}3\ cm^4$;

$b_1=6{,}5$ cm;

$h_1=16$ cm;

$e=1{,}84$ cm;

$A_1=24\ cm^2$;

Pošto je osa x glavno težište osa kombiniranog presjeka ploče I dva profila očito slijedi da je statički moment površina za tu osu jednak nuli:

1.) $S_x=0;\ A_2\cdot a_2 - A_1 a_1 = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{A_2}{A_1}$;

Sa crteža slijedi jednakost:

$$a_2+a_1=\frac{\delta}{2}+\frac{h}{2};$$

$h \approx h_1;\ A_2=c\cdot\delta=38\ cm^2$

Iz (1) i (2) slijedi:

$$a_1=\frac{h+\delta}{2\left(1+\frac{A_1}{A_2}\right)} \qquad a_1=5{,}51\ cm$$

$$a_2=\frac{h+\delta}{2\left(1+\frac{A_2}{A_1}\right)}$$

$a_2=3{,}48$ cm;

Ukupni moment inercije za osu x je:

$$I_x=2I_{x1}+A_1a_1^2+\frac{c\delta^3}{12}+A_2a_2^2$$

$I_x=3849{,}5\ cm^4$;

Ukupni moment inercije za osu y je:

$$I_y=2I_{y1}+A_1\left(\frac{b}{2}-e\right)^2+\frac{\delta\ c^3}{12}$$

$$I_x=1313{,}766\ cm^4;+24\ cm^3(\left(\frac{b}{2}-e\right)^2$$

da bi centralna elipsa inercije bila krug potrebno je:

$I_x=I_y$;

$$3849{,}5=1313{,}766+24\left(\frac{b}{2}-e\right)^2;$$

$$\left(\frac{b}{2}-e\right)^2=105{,}66\ cm^2$$

$$\left(\frac{b}{2}-e\right)=10{,}27\ cm;$$

$$\frac{b}{2}=12{,}118\ cm \quad \Rightarrow \quad b=24{,}23\ cm;$$

Komentar:

Pošto je $b>c$ to slijedi da je]- profili neće cjelokupnom površinom dolaziti ispod ploče (2) nego će sa po 40% pelaziti ploču (2):

$b_1=\dfrac{b-c}{2}=2{,}61$ *cm;*

$\dfrac{b_1}{b}=0{,}40;$

$\dfrac{b_1}{b}=40\%.$

78. ZADATAK

Na pravougaoni presjek dimenzija b i h, dometnut je drugi pravougaonik simetrično postavljen prema x osi, sa stranama x i y tako da otporni moment cijelog presjeka u odnosu na x-osu bude nepromijenjen. Proračunati:

a) zavisnost x i y

b) najveću širinu x dometnutog pravougaonika i odgovarajuće visinu y.

DATO JE:

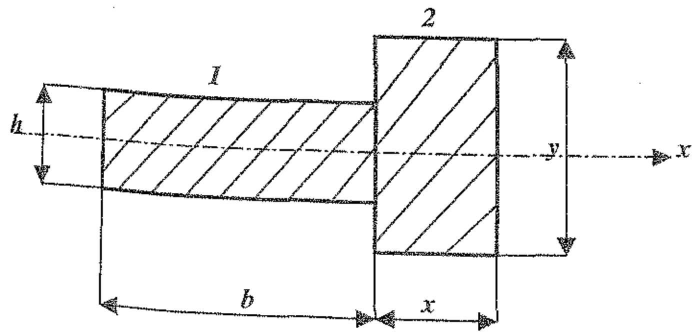
$h=10$ *cm;*

$b=24$ *cm;*

$x=f(y)=?$

$x=?$

$y=?$



Rješenje:

Iz uvjeta konstantnosti otpornih momenata slijedi:

$W_X^{(1)}=W_X^{(1+2)}$

$\dfrac{bh^2}{6}=\dfrac{bh^3+xy^3}{6y}$ *ili* $ybh^2=bh^3+xy^3\ldots(*)$

iz $(*)\Rightarrow x=f(y)=\dfrac{ybh^2-bh^3}{y^3}$

Da bi dimenzija x bila ekstremne vrijednosti potrebno je da njen prvi izvod bude jednak nuli tj.

$$\frac{df(y)}{dy}=\frac{bh^2-y^3-(ybh^2-bh^3)3y^2}{y^6}=0\ldots(**)$$

tj. $bh^2y-3ybh^2+3bh^3=0$, *odavde je:*

$y=\dfrac{3h}{2}$; $\quad y=15$ *cm;*

Ako uvrstimo dobijeno u jednačinu (**) dobijamo:

$$x_m=\frac{\frac{3}{2}hbh^2-bh^3}{\left(\frac{3}{2}h\right)^3};\quad x_m=3{,}55\ \text{cm};$$

Dobijena vrijednost $x_m=3{,}55$*cm predstavlja maksimalnu širinu dometnutog pravougaonika.*

$$\frac{d^2f(y)}{dy^2}=\frac{(3bh2y3-6y3bh2+6y2bh3-3y3bh2-6bh2y3+18y3bh2-18y2bh3)}{y^7}$$

$$\frac{d^2f(y)}{dy^2}=\frac{\left(-12y3bh^2-12y^2bh^3+15y^3bh^2\right)}{y^7}=\left(\frac{-12ybh-12bh^3+15bh^2y^2}{y^5}\right)_5$$

za vrijednost za y=15cm, u drugi izvod slijedi:

$$\frac{d^2f(y)}{dy^2}=(-12\cdot15\cdot10\cdot24^2-12\cdot10\cdot24^3+15\cdot10\cdot24^2\cdot15)/(15)^7=-0{,}0082$$

$$\frac{d^2f(y)}{dy^2}=-0{,}0082<0$$

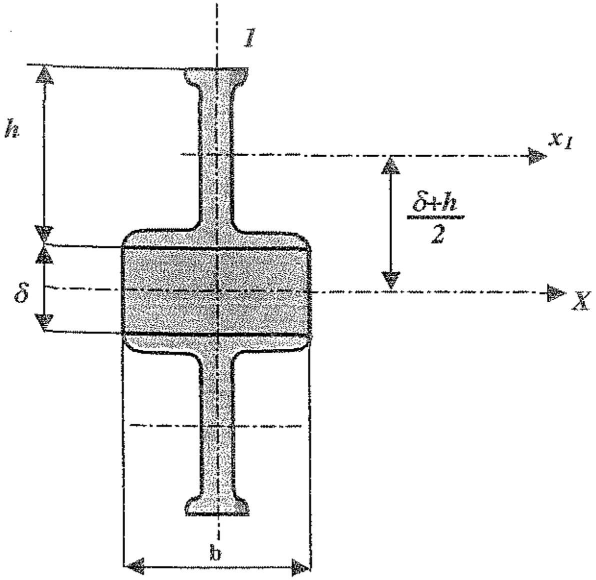
A to znači da imamo maksimalnu vrijednost širine kao što je zadatkom i traženo.

79. ZADATAK

Presjek grede je kombinovan iz presjeka dviju šina i presjeka ploče debljine δ. Poznate su vrijednosti za šinu: A_1, h, W_{X1}, I_{X1}. Odrediti debljinu δ umetnute ploče pod uslovom da otporni moment ovako kombinovanog presjeka bude W_X. Zanemariti moment inercije ploče.

DATO JE:

Željeznička tračnica (šina) TIP 22;
$h=100\ mm=10\ cm$;
$b=90\ mm=9\ cm$;
$A_1=28{,}18\ cm^2$;
$W_{X1}=73{,}6\ cm^3$;
$I_{X1}^{(1)}=375{,}5\ cm^4$;
$W_X=252{,}724\ cm^4$;
$\delta=?$



Riješenje:

Ukupni moment inercije za osu x je jednak:

$$I_X = 2\left[I_{x_1}^{(1)} + A_1\left(\frac{h+\delta}{2}\right)^2\right] + \frac{b\delta^3}{12};$$

Iz uslova zadatka $b\delta^3/12 \approx 0$,

Otporni moment inercije za osu x cjelokupnog presjeka:

$$W_X = \frac{Ix}{h+\dfrac{\delta}{2}} = 4\frac{\left[I_{X1}^{(1)} + A_1\left(\dfrac{h+\delta}{2}\right)^2\right]}{2h+\delta} \quad \ldots(*)$$

$$Iz\ (*) \Rightarrow \delta = \{ -(2A_1h-W_X) \pm [(2A_1h-W_X)^2-4A_1(4I_{X1}^{(1)}-2hW_X+A_1h^2)]^{1/2} \}/2A_1$$

$$\delta = \{-(2\cdot 28{,}18\cdot 10-252{,}724) \pm [(2\cdot 28{,}18\cdot 10-252{,}724)^2-4\cdot 28{,}18(4\cdot 375{,}5 - 2\cdot 10\cdot 252{,}724+28{,}18\cdot 10^2)]^{1/2}\} \div 2\cdot 28{,}18$$

poslije sređivanja:

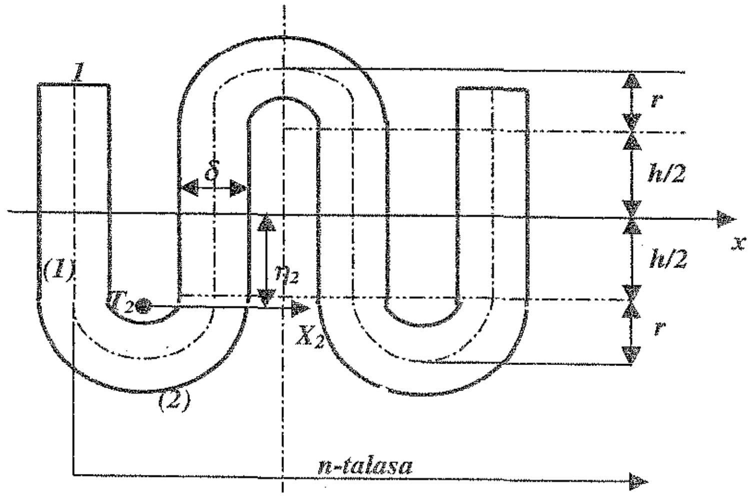
$\delta=1{,}999\approx 2cm$, *- drugo negativno rješenje odbacujemo.*

80. ZADATAK

Odrediti moment inercije u odnosu na težišnu osu x poprečnog presjeka talasastog lima debljine δ, širine a, ako je visina talasa h i dužina talasa l, a srednji radijus plukružnih presjeka je r.

DATO JE:

$\delta=0{,}5\ cm$; $h=2{,}5\ cm$;
$r_s=1{,}2\ cm$; $n=10$;



Riešenje:

Moment inercije za osu x pravog dijela lima:

$$I_x(1)=\frac{\delta \cdot h^3}{12}=0{,}651\,cm^4$$

Moment inercije za osu x_2 plukružnog dijela lima:

$$I_{x2}^{(2)}=\frac{\pi\delta \cdot r_3^3}{2}-\frac{4r_3^3\delta}{\pi}=0{,}257cm^4$$

$I_{x2}^{(2)}=0{,}257cm^4$

Ukupni moment inercije za osu x lima od n-talasa:

$I_X=nI_X^{(1)}+(n-1)I_X^{(2)}$ ...(*)

Moment inercije polukružnog dijela lima za centralnu osu x je:

$I_X^{(2)}=I_{X2}^{(2)}+\eta_2^2 A_{(2)}$ ...(**)

Udaljenost težišne ose x_2 od glavne težišne ose x je:

$$\eta_2=\frac{h}{2}+\frac{2r_3}{\pi}=\frac{2{,}5cm}{2}+\frac{2\cdot 1{,}2cm}{\pi}\approx 2{,}014\ cm;$$

$\eta_2\approx 2{,}014\ cm;$

$$I_X^{(2)}=\frac{(\pi^2-8)r_3^3\,\delta}{2\pi}+\left(\frac{h}{2}+\frac{2r_3}{\pi}\right)^2\pi\, r_s\,\delta$$

$I_X^{(2)}=0{,}257cm^4+7{,}645cm^4=7{,}902\ cm^4$

$I_X^{(2)}=7{,}902\ cm^4$

Nakon sređivanja ukupni moment inercije lima za osu x je:

$I_X=nI_X^{(1)}+(n-1)I_X^{(2)}$

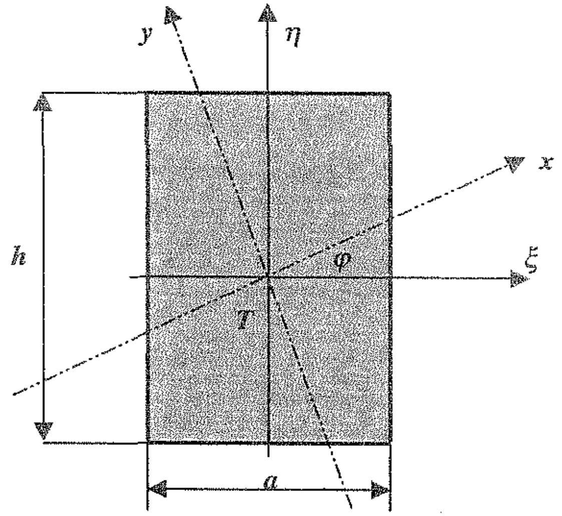
$I_X=77{,}628\ cm^4;$

81. ZADATAK

Odrediti aksijalni i centrifugalni moment inercije pravougaonog presjeka za težišne ose x i y pod uglom φ prema glavnim težišnim osama, ako je dato: a, h, φ.

DATO JE:

$a=15\ cm;$
$h=20\ cm;$
$\varphi=10°$



Riešenje:

Momenti inercije za osu ξ i η:

$$I_\xi=\frac{ah^3}{12};\quad I_\xi=10000\ cm^4;\quad I_\eta=\frac{ha^3}{12}=5625\,cm^4$$

Moment inercije za glavnu težišnu osu x je:

$I_X=I_\xi\cos^2\varphi+I_\eta\sin^2\varphi;\quad I_X=9868{,}07\ cm^4$

Moment inercije za glavnu težišnu osu y je:

$I_Y=I_\xi\sin^2\varphi+I_\eta\cos^2\varphi;\quad I_Y=5756{,}92\ cm^4\approx 5757\ cm^4$

Centrifugalni moment inercije za glavne težišne ose je:

$$I_{xy}=\frac{I_\xi-I_\eta}{2}\sin 2\varphi;\quad I_{xy}=748{,}17\ cm^4$$

82. ZADATAK

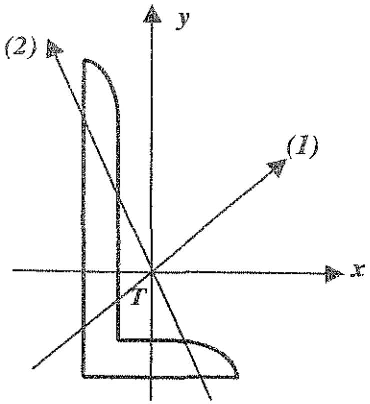
Za standardni ugaoni profil 100x50x50x10 odrediti centrifugalni moment inercije za ose x i y, ako je poznato: I_X, I_Y, I_2, koristeći koristeći obje invarijante.

DATO JE:

$L100\times50\times10$

Na osnovu gornjeg podatka,iz tabele za L profile biramo:

$I_X=552\ cm^4$;
$I_Y=198\ cm^4$;
$I_2=112\ cm^4$;
$I_{XY}=?$



Riješenje:

Na osnovu gornjeg podatka iz tabele za L profile biramo:
Koristeći invarijantu momenata inercije slijedi:
$I_1+I_2=I_x+I_Y$ ...(*)
$I_1=I_X+I_Y-I_2$; $I_1=638cm^4$,
Centifugalni moment inercije:
$I_{XY}^2=I_XI_Y-I_1I_2$
$I_{XY}=-194cm^4$ (zbog položaja profila)
Položaj glavnih težišnih osa određuju uslovi:

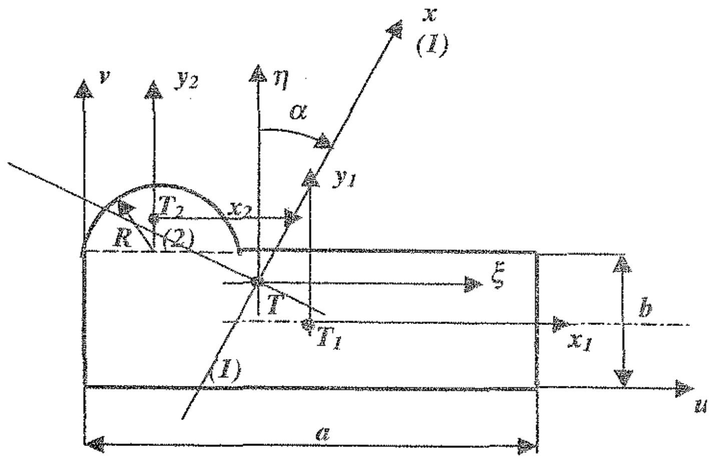
$$tg2\varphi' = \frac{2I_{xy}}{I_y-I_x} = 1.09888\ ; \quad 2\varphi' = 47{,}6499\ ; \quad \varphi' = 23^0\,50'$$

83. ZADATAK

Odrediti težište, glavne težišne ose i momente inercije za ove ose.

DATO JE:

$a=20\ cm$;
$b=6\ cm$;
$R=4\ cm$;



Riješenje:

Koordinate težišta:

$$1)\, u_T = \frac{\Sigma u_i A_i}{\Sigma A_i}$$

$$u_T = \frac{u_1A_1+u_2A_2}{A_2+A_2} = \frac{\frac{a}{2}\,ab + R\frac{R^2\pi}{2}}{ab+\frac{R^2\pi}{2}}$$

$u_T=8{,}96\ cm$;

$$v_T = \frac{v_1A_1+v_2A_2}{A_2+A_2} = \frac{\frac{b}{2}ab + \left(b+\frac{4R}{3\pi}\right)\frac{R^2\pi}{2}}{ab+\frac{R^2\pi}{2}}$$

$v_T=3{,}81\ cm$;

Momenti inercije za ose U i V:

2) $Iu=Iu^{(1)}+Iu^{(2)}$,

$$I_u^{(1)}=\frac{ab^3}{3}=1440\ cm^4,$$

$$I_u^{(2)}=R^4\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)+R^2\frac{\pi}{2}\left(b+\frac{4R}{3\pi}\right)^2=1517{,}31cm^4,$$

$$I_v=I_v^{(1)}+I_v^{(2)},$$

$$I_v^{(1)}=\frac{ba^3}{3}=16000\ cm^4$$

$$I_v^{(2)}=\frac{\pi R^4}{8}+R^2\cdot R^2\frac{\pi}{2}=502{,}65\ cm^4,$$

$I_u=2957{,}31\ cm^4$; $I_v=16502{,}65\ cm^4$,

$$I_{uv}=I_{uv}^{(1)}+I_{uv}^{(2)}$$

$$I_{uv}^{(1)}=\frac{a}{2}\frac{b}{2}ab=3600\ cm^4,$$

$$I_{uv}^{(2)}=R\left(b+\frac{4R}{3\pi}\right)R^2\frac{\pi}{2}=773{,}85cm^4,$$

$I_{uv}=4373{,}85cm^4$

3) *Momenti inercije za težišne ose ξ i η:*

$I_\xi=I_U-v_T^2A=846{,}5\ cm^4$; $I_\eta=I_V-u_T^2A=4851{,}16\ cm^4$;

$I_{\xi\eta}=I_{UV}-u_T v_T A$; $I_{\xi\eta}=-585{,}75\ cm^4$,

4) *položaj glavnih osa:*

$$tg2\alpha=-\frac{2I_{\xi\eta}}{I_\xi-I_\eta}\quad tg2\alpha=-0{,}2927\Rightarrow\alpha=-8°9'$$

Glavna osa (x) određuje se tako da se ugao nanosi u naznačenom(negativnom) smjeru od ose većeg momenta inercije (η)

5) *Momenti inercije za glavne ose:*

$$Ix=\frac{I_\xi+I_\eta}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(I_\xi-I_\eta)^2+4I_{\xi\eta}^2}\ ;\quad Ix=4760{,}58\ cm^4,$$

$$Iy=\frac{I_\xi+I_\eta}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(I_\xi-I_\eta)^2+4I_{\xi\eta}^2}=1649{,}51cm^4;\quad Iy=934{,}52cm^4$$

84. ZADATAK

Za profile na skici odrediti:

a) položaj težišta,

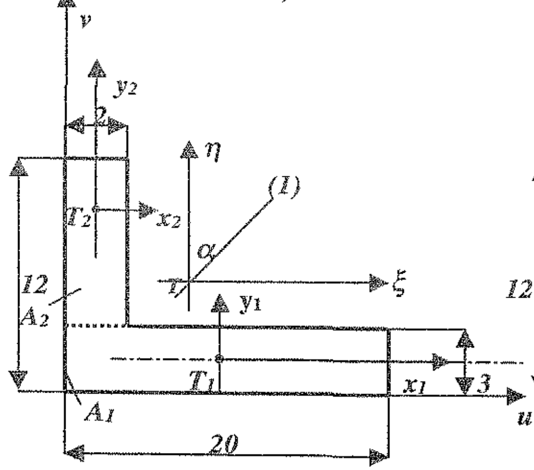
b) položaj glavnih težišnih osa

c) glavne težišne momente inercije,

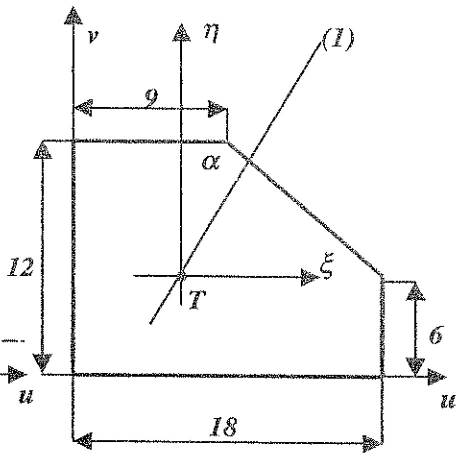
d) poluprečnike inercije,

e) nacrtati elipsu inercije i Mohrov krug.

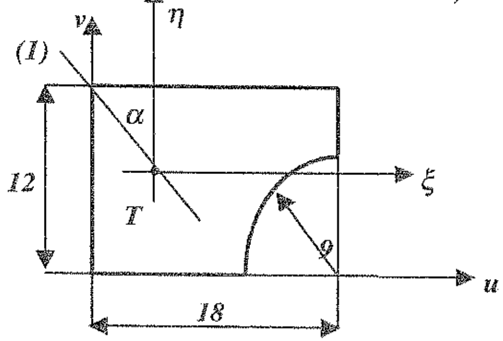
a)



b)



c)



Riješenje:

a) *Koordinate težišta:*

1') $u_T = \frac{\Sigma u_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{u_1 A_1 + u_2 A_2}{A_2 + A_2}$; $u_T = 7{,}9$ cm

$v_T = \frac{\Sigma v_i A_I}{\Sigma A_I} = \frac{v_1 A_1 + v_2 A_2}{A_2 + A_2}$; $v_T = 2{,}9$ cm

Aksijalni momenti inercije za ose u i v:

b) $I_u = \frac{20 \cdot 3^3}{3} + \frac{2 \cdot 9^3}{12} + 2 \cdot 9 \cdot 7{,}5^2 = 1314\ cm^4$

$Iv = \frac{3 \cdot 20^3}{3} + \frac{9 \cdot 2^3}{12} = 8024\ cm^4$

Centrifugalni moment inercije:

$I_{uv} = 10 \cdot 1{,}5 \cdot 20 \cdot 3 + 1 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 7{,}5 = 1035 cm^4$

Primjenjujući Štajnerove teoreme nalazimo momente inercije za težišne ose η i ξ

c) $I_\xi = I_u - v_T^2 A = 658{,}02\ cm^4$,

$I_\eta = Iv - u_T^2 A = 3156{,}02\ cm^4$

$I_{\xi\eta} = I_{uv} - u_T v_T A = -744{,}14\ cm^4$

Položaj glavnih težišnih osa određujemo računanjem ugla $\propto$:

$$tg2\alpha = -\frac{2I_{\xi\eta}}{I_\xi - I_\eta} = -\frac{2 \cdot 211{,}89 cm^4}{658{,}02 cm^4 - 3156{,}02 cm^4} = -0{,}6039; \quad \alpha = -15^0\ 33'\ 52''$$

Momenti inercije za glavne ose

$$I_{1,2} = \frac{I_\xi + I_\eta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_\xi - I_\eta)^2 + 4I_{\xi\eta}^2}$$

$I_1 = 3338{,}60\ cm^4$; $I_2 = 459{,}76\ cm^4$;

Radijusi inercije:

d) $i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = 6{,}54$ cm; $i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = 2{,}42$ cm;

Primjeri na slici B) i C) ostavljamo čitaocu kao vježbu. Postupkom sličnim kao kod (A) dobivamo tražene veličine za (B) i (C).

b) $u_T = 8{,}15$; $v_T = 5{,}42$; $\alpha = -14°50'$; $I_1 = 4716\ cm^4$;
$I_2 = 1916\ cm^4$; $i_1 = 5{,}0$ cm ; $i_2 = 3{,}18$ cm ;

c) $u_T = 6{,}81$cm ; $v_T = 6{,}9$cm ; $\alpha = +28°55'$; $I_1 = 3774\ cm^4$;
$I_2 = 1154\ cm^4$; $i_1 = 5{,}0$ cm ; $i_2 = 2{,}75$ cm ;

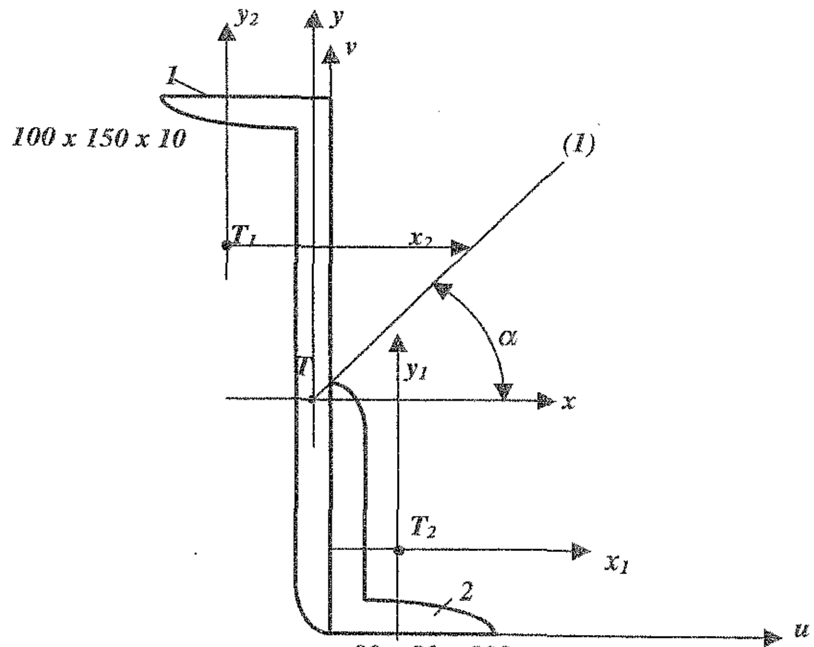
85. ZADATAK

Za dati kombinovani presjek izračunati:

a) *položaj težišta,*
b) *položaj glavnih osa*
c) *glavne težišne momente inercije,*
d) *poluprečnik inercije*
e) *nacrtati elipsu inercije i Mohrov krug.*

DATO JE:

[80 x80 x10;]100 x150 x10;



Rješenje:

Na osnovu podataka za gornje profile, te na osnovu tabličnih vrijednosti istih,formirajmo sljedeću tabelu;

	A_i	u_i	v_i	u_i^2	v_i^2	u_iA_i	v_iA_i	$u_i^2A_i$	$v_i^2A_i$	I_{Xi}	I_{Yi}	I_{XiYi}	$u_iv_iA_i$
	cm^2	cm	cm	cm^2	Cm^2	cm^3	cm^3	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4
1]	24,2	-2,34	10,2	5,48	104,04	-56,63	246,84	132,6	2517,7	552	198	-194	-577,6
L 2	15,1	2,34	2,34	5,48	5,48	35,33	35,33	82,75	82,75	87,5	87,5	-51	82,75
Σ	39,3					-21,3	282,17	215,35	2600,45	639,5	285,5	-245	-494,85

Glavni momenti inercije za težište profila (1) i (2):

$I_1^{(1)}=638\ cm^4, \quad I_2^{(1)}=112\ cm^4,$

$I_1^{(2)}=139,1 cm^4, \quad I_2^{(2)}=35,9\ cm^4,$

Koordinate težišta profila]L;

$$u_T=\frac{\Sigma u_i A_i}{\Sigma A_i}=-0,516\ cm,$$

$$v_T=\frac{\Sigma v_i A_i}{\Sigma A_i}=7,18\ cm,$$

Na osnovu prve I druge invarijante momenata inercije slijedi:

$I_{Y1}^{(1)}=I_1^{(1)}+I_2^{(1)}-I_{X1}^{(1)}=198\ cm^4,$

$I_{Y2}^{(2)}=I_1^{(2)}+I_2^{(2)}-I_{X1}^{(2)}=87,5\ cm^4$

$I_{XY1}^{(1)}=\sqrt{I_{X1}I_{Y1}-I_1I_2}=194\ cm^4,$ *zbog položaja* $I_{XY1}^{(1)}=-194\ cm^4$

$I_{XY2}^{(2)}=\sqrt{I_{X2}I_{Y2}-I_1I_2}=51\ cm^4,$ $I_{XY2}^{(2)}=-51\ cm^4$

$Iu=\Sigma I_{Xi}+\Sigma v_i^2A_i\approx 3240\ cm^4,$

$I_v=\Sigma I_{YI}+\Sigma u_i^2A_I\approx 500,85\ cm^4,$

$Iuv=\Sigma I_{XYi}+\Sigma u_iv_iA_i\approx -740\ cm^4,$

Aksijalni momenti inercije za ose x i y:

$Ix=Iu-v_i^2A=1214\ cm^4$

$Iy=Iv-u_T^2A\approx 490\ cm^4,$

Centrifugalni moment inercije:

$Ixy=Iuv-u_Tv_TA=-595\ cm^4$

Položaj glavnih osa, određen je uglom α:

$$tg2\alpha=-\frac{2I_{XY}}{I_X-I_Y}\approx 1,645\Rightarrow 2\alpha=58°42`, \alpha=29°21`;$$

$$I_{1/2}==\frac{I_X+I_Y}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(I_X-I_Y)^2+4I_{xy}^2}\Rightarrow I_1=1542\ cm^4$$

$$I_2=162\ cm^4$$

Poluprečnici inercije:

$$i_1=\sqrt{\frac{I_1}{A}}=6,26\ cm,$$

$$i_2=\sqrt{\frac{I_1}{A}}=2,03\ cm,$$

Jednačine elipse inercije za glavne ose $\xi\equiv(1),\eta\equiv(2)$

$$\frac{\xi^2}{i_2^2}+\frac{\eta^2}{i_1^2}=1,$$

Mjerilo:

Elipsa 1:20

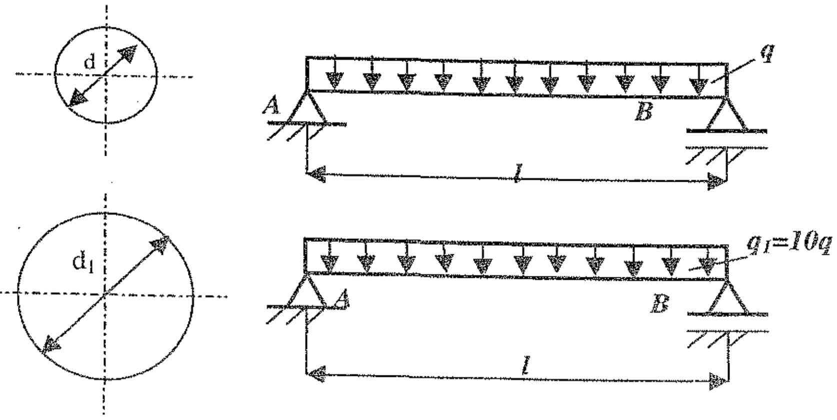
Mohrov krug

86. ZADATAK

Drvena greda dužine l, kružnog presjeka opterećena je ravnomjernim teretom q. Odrediti prečnik grede ako je σ_d *poznato. Zatim odrediti koliko je puta potrebno uvećati presjek grede, ako se intenzitet opterećenja poveća 10 puta.*

DATO JE:

$l=4\ m;$
$q=12\cdot 10^3\ N/m;$
$\sigma_d=110\ N/mm^2=11\ kN/cm^2;$



Rješenje:

Maksimalni moment savijanja, kako se vidi sa slike ,očito je na sredini grede i on se računa:

a) $M_{max}=\dfrac{ql^2}{8}=24\cdot 10^3\ Nm$

$$d=\sqrt[3]{\frac{32M_{max}}{\pi\sigma_d}}=13{,}05\ cm$$

$d=13{,}05cm=130{,}5mm$

Za drugu gredu maksimalni moment je:

b) $M_{1max}=\dfrac{ql^2}{8}$; $\quad M_{1max}=240\cdot 10^3\ Nm,$

$$d_1=\sqrt[3]{\frac{32M_{max}}{\pi\sigma_d}}=28{,}12\ cm;\quad d_1=28{,}12\ cm=281{,}2\ mm$$

Te je odnos prečnika:

$$\frac{d_1}{d}=\sqrt[3]{\frac{M_{1max}}{M_{max}}}=\sqrt[3]{10}\approx 2{,}154$$

Odnos površina poprečnog presjeka:

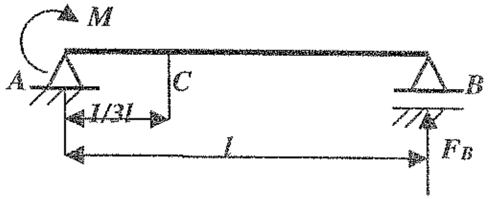
$$\frac{A_1}{A}=\sqrt[3]{(10)^2}\approx 4{,}64$$

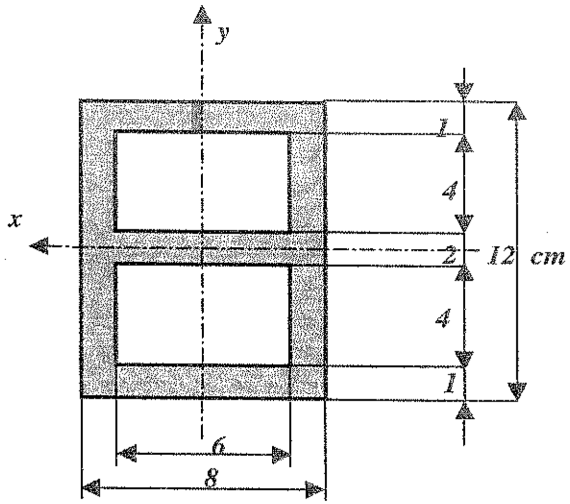
87. ZADATAK

Greda presjeka po skici opterećena je u A spregom M. Odrediti maksimalni normalni i tangentni napon u tački C.

DATO JE:

$M=20\ kNm;$
$l=4\ m;$





Riešenje:

Moment savijanja grede na mjestu C je:

$$M_C=\frac{F_B 2l}{3}=\frac{2M}{3}, \text{ pošto je iz } \Sigma M_A=F_B\cdot l-M=0 \Rightarrow F_B=\frac{M}{l},$$

Moment inercije za osu x je: $I_x=\dfrac{8\cdot 12^3}{12}-2\cdot\left(\dfrac{6\cdot 4^3}{12}+6\cdot 4\cdot 3^2\right)$

$I_X=656\ cm^4$

Statički moment površine poprečnog presjeka za osu x je:

$S_X=(8{\cdot}6{\cdot}3-6{\cdot}4{\cdot}3)\ cm^3$

$S_X=72cm^3$

Širina poprečnog presjeka paralelna neutralnoj težišnoj osi x na udaljenosti 6cm=h/2 od nje:

$\xi=8\ cm$

Maksimalni normalni napon "savijene" grede:

$$\sigma_{cmax}=\frac{M_c 6}{Ix}=\frac{2M6}{3Ix}=\frac{4M}{Ix}=12{,}19\ kN/cm^2$$

$\sigma_{cmax}=12{,}19\ kN/cm^2=121{,}9\ N/mm^2$

Maksimalni tangentni napon:

$$\tau_{cmax}=\frac{F_B S x}{\xi\cdot Ix}=\frac{5kN\cdot 72cm^2}{8cm\cdot 656cm^4}=0{,}0686\ kN/cm^2$$

$\tau_{cmax}=0{,}686\ N/mm^2$

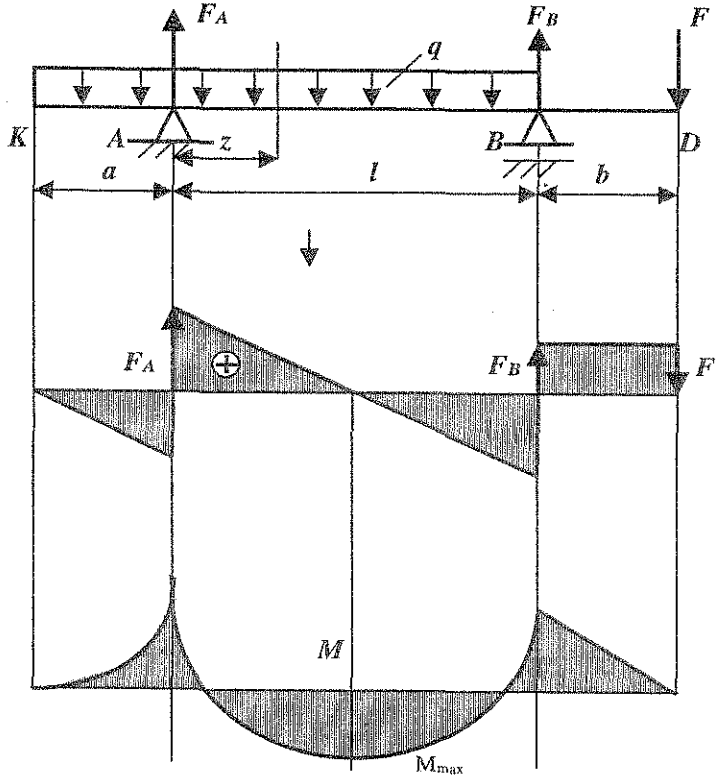
$F_B=5\ kN$

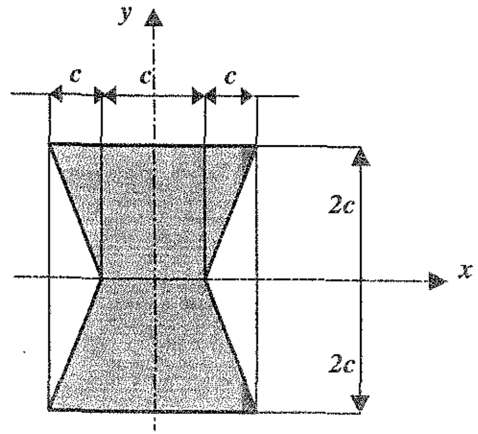
88. ZADATAK

Greda na dva oslonca, presjeka po skici opterećena je sa q i F. Dimenzionirati presjek prema maksimalnom momentu savijanja naći najveću brojnu vrijednost tangentnog napona i nacrtati statičke dijagrame.

DATO JE:

$q=8000\ N/m;$
$F=25\ kN=25{\cdot}10^3\ N$
$a=1\ m;$
$b=1{,}2\ m;$
$l=4\ m;$
$\sigma_d=10\ kN/cm^2=100\ N/mm^2;$
$c=?$
$\tau_{max}=?$





Riešenje:

Maksimalni napon na savijanje:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{Wx} \leq \sigma_d$$

$$M_z = \frac{F_A \cdot z - q(a+z)^2}{2} \quad \ldots (\Delta)$$ --- *moment savijanja na udaljenosti Z od oslonca A*

Uvjet maksimalnog napona:

$$\frac{dM}{dz} = F_A - q(a+z) = 0 \Rightarrow z = \frac{F_A}{q} - a \quad \ldots (*)$$

Iz statičkih uvjeta ravnoteže lako nalazimo da je:

$$F_A = \frac{(a+l)^2 q}{2l} - \frac{Fb}{l}$$

$F_A = 17500\ N$

$$Iz\ (*) \Rightarrow z = \frac{F_A}{q} - a = 1{,}187\ m$$

$z = 1{,}187\ m$

$$Iz\ (\Delta) \Rightarrow M_{max} = \frac{F_A^2}{2q} - F_A \cdot a$$

$M_{max} = 1640{,}6\ Nm$

Moment inercije za osu x je:

$$I_X = \frac{3c(4c)^3}{12} - \frac{4c(2c)^3}{12} = \frac{40c^4}{3}$$

$$W_X = \frac{I_X}{2c} = \frac{20c^3}{3} \geq \frac{M_{max}}{\sigma_d}$$

Ako uzmemo granični slučaj da je $\sigma = \sigma_d$ tada slijedi:

$$c = \sqrt[3]{\frac{3M_{max}}{20\sigma_d}}$$

$c = 13{,}5\ mm$

$c = 1{,}35\ cm$

Maksimalni tangentni napon:

$$\tau_{max} = \frac{F_{t\,max}}{Ix}\left(\frac{Sx}{\xi}\right)_{max} \quad \ldots (**)$$

Statički moment površine za osu x:

$$S_x = c \cdot 2c \cdot c + 2 \cdot \frac{c \cdot 2c}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2c = \frac{14c^3}{3}$$

$S_x = 11{,}48\ cm^3$,

$\xi = c = 1{,}35\ cm$,

$$I_x = \frac{40c^4}{3}$$

$I_x = 44{,}27 cm^4$;

$\Sigma Y = 0,\ F_A - F_q + F_B - F = 0$

$F_B = F_q + F - F_A = q(a+l) + F - F_A$

$F_B = 47500\ N$,

Transferzala sila u osloncu B je:

$F_{tmax} = F_B - F$

$F_{tmax} = 22500\ N$

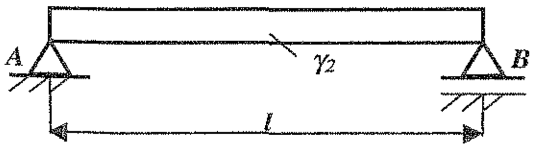
$\tau_{max} = 4{,}321\ kN/cm^2 = 43{,}21\ N/mm^2$,

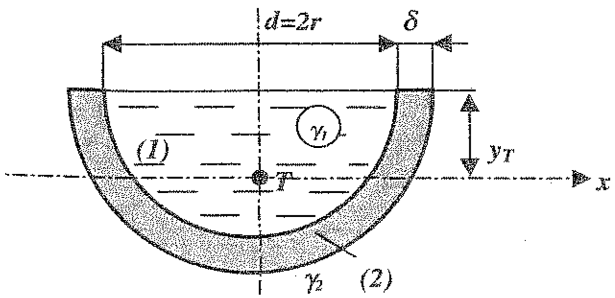
89. ZADATAK

Oluk u obliku polukružnog prstena prečnika d, debljine δ, ispunjen je vodom i oslonjen na dva oslonca čiji je raspon l. Odrediti najveći normalni napon uzimajući u obzir i specifičnu težinu γ oluka.

DATO JE:

$\gamma_1 = 9810\ N/m^3$;
$\gamma_2 = 76000\ N/m^3$;
$d = 2r = 22\ cm$;
$\delta = 0{,}5\ vm$;
$l = 4\ m$;
$\sigma_{max} = ?$





Riješenje:

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{Wx}\leq\sigma_d$$

Iz statičkih uvjeta nalazimo:

$$M_{max}=\frac{(q_1+q_2)l^2}{8}=\frac{(A_1\gamma_1+A_2\gamma_2)l^2}{8},\text{-----}(*)$$

$$A_1=\frac{r^2\pi}{2}=\frac{d^2\pi}{8}=190{,}006cm^2;\quad A_1\approx 190{,}1cm^2;$$

$A_2=r_s\cdot\pi\cdot\delta\approx r\pi\delta$, *uzeli smo zbog male debljine* δ *približno* $r_s\approx d/2=r$,

$A_2=1{,}727\ cm^2$;

Iz $(*)\Longrightarrow\ M_{max}=375{,}44Nm$

$$I_x=\frac{(\pi^2-8)}{2\pi}\cdot r_s^3\cdot\delta\ ;\ r_s=\frac{d}{2}+\frac{\delta}{2}\approx\frac{d}{2}=r,\ \text{zbog}\ \delta<<D$$

$$W_x=\frac{Ix}{y_T}=\frac{\frac{(\pi^2-8)r_s^3\delta}{2\pi}}{\frac{2r_S}{\pi}}=\frac{(\pi^2-8)r_s^3\delta}{4}=;\quad W_x=2{,}812cm^3;$$

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{Wx};\quad \sigma_{max}=133{,}48\ MPa$$

90. ZADATAK

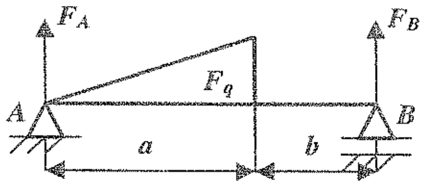
Greda po skici opterećena je trouglastim teretom. Za date vrijednosti, F_q, *a, b, H, h. Odrediti:*

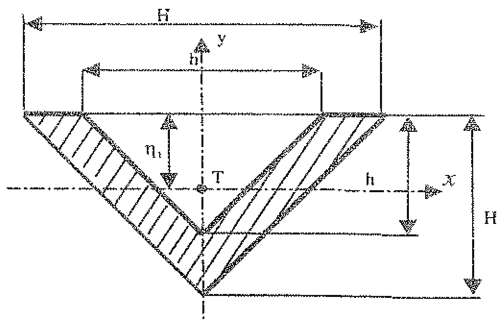
a) položaj i veličinu maksimalnog momenta

b) maksimalni normalni napon.

DATO JE:

$F_q=30\ kN$
$a=3{,}5\ m;$
$b=1{,}2\ m;$
$H=24\ cm;$
$h=18\ cm;$





Riješenje:

Koordinate težišta:

$$\eta_T=\frac{\frac{HH}{2}\frac{H}{3}-\frac{hh}{2}\frac{h}{3}}{\frac{H^2}{2}-\frac{h^2}{2}}=$$

$\eta_T=10{,}57cm$, *druga koordinata* $\xi_T=0$, *zbog simetrije presjeka*

$$I_X=\frac{H^4}{12}-\frac{h^4}{12}-\eta_T^2\left(\frac{H^2}{2}-\frac{h^2}{2}\right)$$

$I_X=4822{,}67\ cm^4$

Primjenimo statičke uvjete ravnoteže:

Iz $\Sigma y_i=0$,

$\Sigma M_B=0;\quad F_A=Fq\dfrac{3b+a}{3(a+b)}=15{,}106kN$;

$F_A=15{,}11kN;$

Iz $M=M(z)$ i uvjeta za ekstremnu vrijednost momenata $\dfrac{dM(z)}{dz}=0$, dobivamo:

$$M_{max}=\frac{3F_q\cdot a}{2}\left[\frac{3b+a}{3(a+b)}\right]^{\frac{3}{2}}$$

$M_{max}=56{,}28\ kNm,$

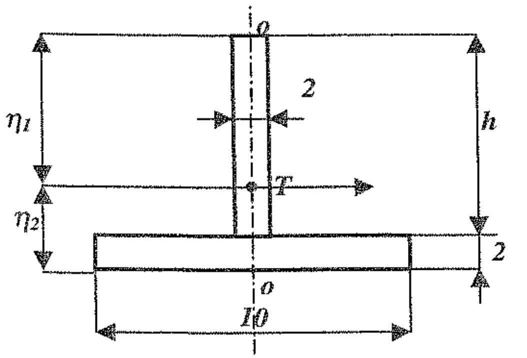
Te je maksimalni napon na savijanje:

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{Wx}=\frac{M_{max}}{\dfrac{I_x}{(H-\eta_T)}}=\frac{M_{max}(H-\eta_t)}{Ix}$$

$\sigma_{max}=15{,}67\ kN/cm^2=156{,}7\ N/mm^2$

91. ZADATAK

Greda u obliku T-presjeka opterećena je na savijanje u ravni O. Za date vrijednosti na skici odrediti h pod uvjetom da najveći napon pritiska bude dva puta veći od najvećeg napona zatezanja.



Riješenje:

Odnos napona pritiska i istezanja:

$$1)\ \frac{M}{I_x}\eta_1=2\frac{M}{I_x}\eta_2\Rightarrow\eta_1=2\eta_2$$

Statički moment površine poprečnog presjeka za x-osu:

$$2)S_x=0;\ (\eta_2-1)\cdot 10\cdot 2+\frac{2(\eta_2-2)^2}{2}-\eta_1^2=0,$$

iz $(2)\Rightarrow 20\eta_2-20+\eta_2^2-4\eta_2+4-4\eta_2^2=0$

$\eta_2^{(1)}=4cm$ i $\eta_2^{(2)}=\dfrac{4}{3}cm$

iz $(1)\Rightarrow\eta_1^{(1)}=8cm$ i $\eta_1^{(2)}=\dfrac{8}{3}cm,$

Sa crteža jasno vidimo da je ukupna visina za prvu vrijednost rješenja $(\eta_1^{(1)},\eta_2^{(1)})$:

$3)\ h^{(1)}=\eta_1^{(1)}+\eta_2^{(1)}-2=10cm$

$h^{(1)}=10cm$

Dok za drugu vrijednost rješenja dobijamo: $(\eta_1^{(2)},\eta_2^{(2)})$

$h^{(2)}=2cm$

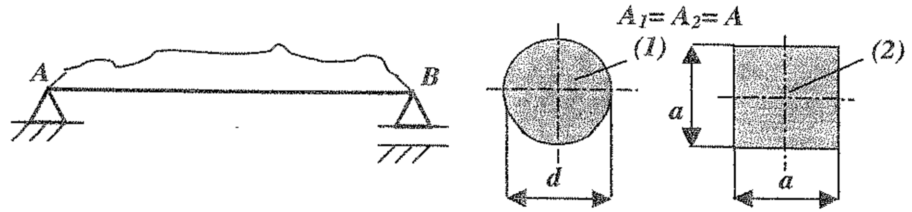
Prema tome dobili smo dvije različite visine koje bi u isti mah zadovoljavale dati uvjet zadatka.

92. ZADATAK

Od iste vrste materijala izrađene su dvije grede, jedna kružnog, druga kvadratnog presjeka. Obje grede imaju istu dužinu, istu površinu poprečnog presjeka i opterećene su na isti način. Odrediti odnos između najvećih normalnih napona.

DATO JE:

$a=20\ cm;$
$M=25\ kNm;$
$\sigma_1/\sigma_2=?$



Riješenje:

Iz površina kruga i kvadrata slijedi:

$a=\sqrt{A}$ ...(1)

$d=2\sqrt{\frac{A}{\pi}}$ ...(2)

iz (2) $\Rightarrow$ $d=\frac{2a}{\sqrt{\pi}}$; $d=22,56\ cm$;

Napon na savijanje za slučaj da je poprečni presjek grede krug:

$\sigma_1=\frac{32M}{\pi d^3}$; $\sigma_1=2,217\ kN/cm^2$ ili $\sigma_1=22,17\ N/mm^2$;

Napon na savijanje na slučaj kvadratičnog poprečnog presjeka grede:

$$\sigma_2=\frac{6M}{(20cm)^3}=\frac{6\cdot 25\cdot 10^2\,kNcm}{(20cm)^3}$$

$\sigma_2=1,875kNcm^2=18,75\ N/mm^2$

Odnos napona u oba slučaja:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{32\cdot a^3}{6\pi d^3}=\frac{32}{6\pi}\left(\frac{\pi A}{4A}\right)^{3/2}$$

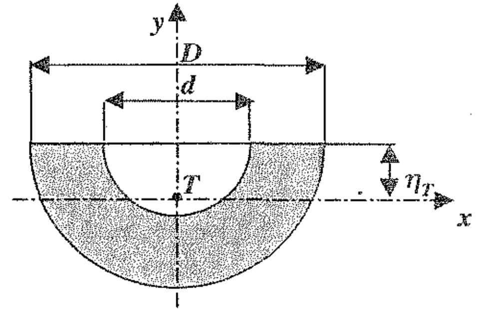
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{2}{3}\sqrt{\pi}\approx 1,181$$

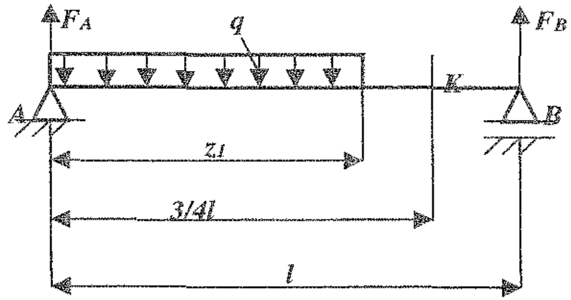
93. ZADATAK

Greda presjeka po skici, opterćena je kontinuiranim opterećenjem q. Odrediti na kojoj dužini Z se smije rasprostirati teret da maksimalni normalni napon u presjeka K ne pređe određenu vrijednost $\sigma_d^{(k)}$. Dato je još: q, l, D, d.

DATO JE:

$q=9000\ N/m$;
$l=4\ m$;
$d=12\ cm$;
$D=18\ cm$;
$\sigma_d^{(k)}=100\ N/mm^2=10\ kN/cm^2$;
$z_1=?$





Riješenje:

Statički uvjet ravnoteže:

1) $\Sigma M_A^{Fi}=F_B l-qz_1\frac{z_1}{2}=0$

$$F_B=q\frac{z_1^2}{2l}$$

Moment na presjeku "K":

$$M_K=\frac{F_B l}{4}=q\frac{z_1^2}{2l}\cdot\frac{l}{4}=q\frac{z_1^2}{8} \quad \ldots (*)$$

$$\sigma_{(K)}=\frac{M_K}{W_K}\le\sigma_D^{(K)}, \quad \ldots (**)$$

$$I_X=\frac{\pi(R^4-r^4)}{8}-\frac{8(R^3-r^3)^2}{9\pi(R^2-r^2)};$$

$I_X = 412{,}85\ cm^4$;

Koordinate težišta presjeka:

$$\eta_T = \frac{4(R^3 - r^3)}{3\pi(R^2 - r^2)}$$

$\eta_T = 4{,}84\ cm$;

$$W_X = \frac{I_X}{\eta_T} = 85{,}33\ cm^3,$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u jednačinu (**) slijedi:

$Iz\ (**) \Rightarrow\ M_K = W_X\, \sigma_d^K$

$M_K = 8{,}53\ kNm$,

$$Iz\ (*) \Rightarrow z_I = \left(\frac{8M_K}{q}\right)^{1/2}$$

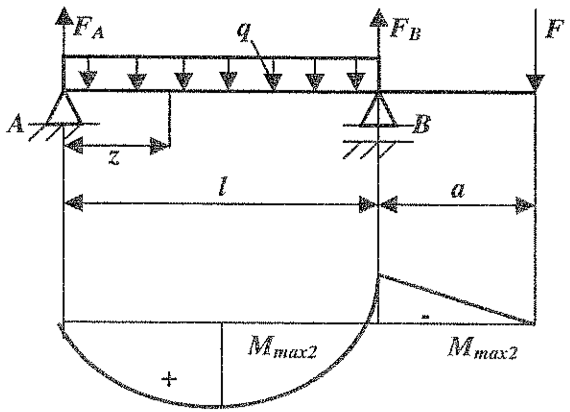
$z_I = 2{,}75 m$

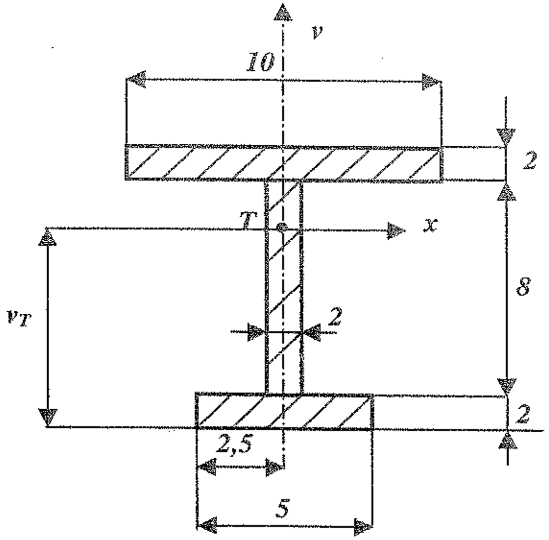
94. ZADATAK

Za presjeke i opterćenje po skici odrediti silu F tako da normalni napon u presjeku najvećeg momenta savijanja bude σ_d, a zatim odrediti najveći tangentni napon.

DATO JE:

$q = 9500\ N/m$;
$a = 1{,}2\ m$;
$l = 3\ m$;
$\sigma_d = 11\ kN/cm^2 = 110\ N/mm^2$;
$F = ?$





Riješenje:

Statički uvjet ravnoteže:

1) $\Sigma Y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = \frac{ql}{2} - \frac{Fa}{l}$,

$\Sigma M_B = 0$

$$M_Z = F_A \cdot z - q\frac{z^2}{2} \quad \ldots(*)$$

Uvjet ekstremne vrijednosti momenta na savijanje:

$$\frac{dMz}{dz}=F_A-qz=0 \Rightarrow z=z_m=\frac{F_A}{q},$$

$$iz\ (*) \Rightarrow M_{max1}=\frac{F_A^{\ 2}}{2q}$$

$$M_{max2}=F\cdot a$$

Koordinate težišta:

$$2)\quad \frac{\Sigma v_1 A_1}{\Sigma A_1}=v_T=7{,}1\ cm; dok\ je\ u_T=0,$$

$I_u=3101{,}32\ cm^4$

$I_X=I_U-v_T^2\cdot A\approx 1000\ cm^4,$
$I_X=795{,}51\ cm^4$

$A=A_1+A_2+A_3=46\ cm^2,$

$$W_X=\frac{Ix}{y_{max}}=112{,}36\ cm^3$$

Maksimalni moment na savijanje s druge strane je:

$M_{max}=\sigma_d\cdot W_X=112{,}36\ cm^3\cdot 10^{-6}\ \sigma_d;$

a) Diskusija:

$$M_{max2}=F\,a=\sigma_d W_X \Rightarrow F_0=\frac{\sigma_d W_X}{a}\quad ...(\Delta\ )$$

$$M_{max1}=\frac{F_A^{\ 2}}{2q}=\sigma_d W_X \quad ili \quad \frac{\frac{ql}{2}-\frac{Fa}{l}}{2q}-\sigma_d W_X=0 \Rightarrow$$

$$F_{1,2}=\frac{2l^2}{2a}\pm\frac{l}{a}\sqrt{2W_x\sigma_d q}$$

$F_1=73\ 936{,}05\ N$

$F_2=-2685{,}60\ N,$

$Iz\ (\Delta)\Rightarrow\ F_0=10\ 299{,}66\ N,$

$F_2\le F\le F_0,\quad -2685{,}6N < F < 10\ 299{,}66\ N,$

Sila F da bi bio ispunjen uvjet iz mora biti u navedenom intervalu.

95. ZADATAK

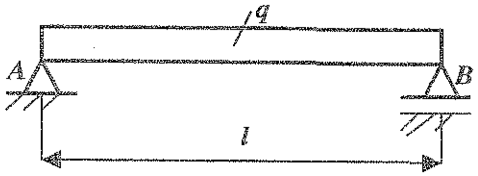
Greda poprečnog presjeka I-20, dužine l, opterećena je ravnomjerno kontinuiranim teretom q.

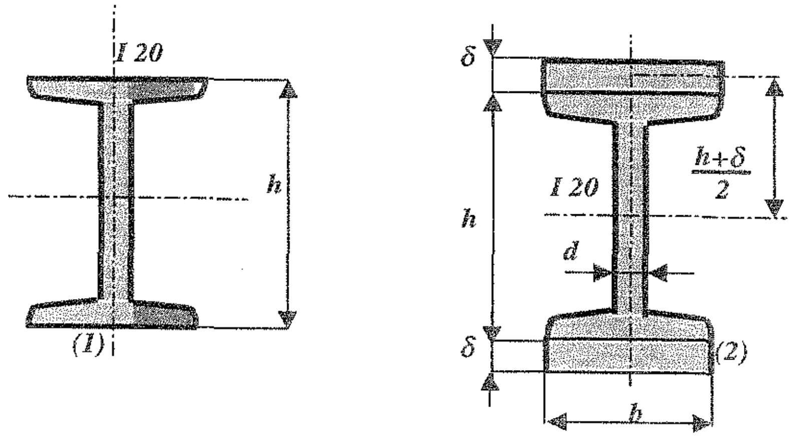
Odrediti:

a) opterećenje q_1, koje nosač I-20 može primiti pri σ_d.
b) pojačanjem presjeka sa dvije lamele, odrediti debljinu δ lamele, da bi tako kombinovani presjek lamele primio opterećenje $q_2=2q_1$ pri istom σ_d.
c) odrediti za oba slučaja maksimalne tangentne napone.

DATO JE:

$l=4\ m;$
$\sigma_d=100\ N/mm^2=10\ kN/cm^2$





Riješenje:

a) Napon na savijanje u prvom slučaju:

$$\sigma^{(1)}=\frac{M_{max}^{(1)}}{W_X^{(1)}}\le\sigma_d \Rightarrow M_{max}^{(1)}=W_X^{(1)}\sigma_d \quad ---- (1)$$

Za I-20 iz tabele slijedi:

$W_X^{(1)}=214\ cm^3$; $I_X^{(1)}=2140\ cm^4$; $b=90\ mm$; $h=200\ mm$

$M_{max(1)}=F_A\cdot\frac{l}{2}-\frac{ql}{2}\frac{l}{4}=\frac{ql^2}{8}$,

Iz (1) $\Rightarrow \frac{ql^2}{8}=W_X^{(1)}\sigma_d \Rightarrow q=\frac{8Wx^{(1)}\sigma_d}{l^2}=107N/cm$

$q=q_1=10700N/m$

b) U drugom slučaj prema uvjetu zadatka mjenja opterećenje te je:

$q_2=2q_1=\frac{8Wx^{(2)}\sigma_d}{l^2} \Rightarrow W_X^{(2)}=\frac{q_1l^2}{4\sigma_d}$ ---(2)

s druge strane je: $W_X^{(2)}=\frac{I_x^{(2)}}{y_{max}}$ ----(3)

$I_X^{(2)}=I_X^{(1)}+[\frac{b\delta^3}{12}+(\frac{h+\delta}{2})^2\cdot\delta\cdot b]\cdot 2$

$y_{max}=\frac{h}{2}+\delta$

$$\text{Iz (3)}\Rightarrow\ W_X^{(2)}=\frac{I_x^{(1)}+\left[\frac{b\delta^3}{12}+\left(\frac{h+\delta}{2}\right)^2\cdot\delta\cdot b\right]\cdot 2}{\left(\frac{h+\delta}{2}\right)}$$

$W_X^{(2)}=h+2\delta=2I_X^{(1)}+\frac{b\delta^3}{12}+(\frac{h+\delta}{2})^2\cdot b\cdot\delta$ ...(3`)

Iz (2) $\Rightarrow W_X^{(2)}=\frac{q_1l^2}{4\sigma_d}$; $W_X^{(2)}=428\ cm^3$,

Iz (3`) $\Rightarrow 428(20+2\delta)=2\cdot 2140+\frac{9\delta^3}{3}+(20+\delta)^2\cdot 9\cdot\delta$

$\delta^3+30\delta^2+229\delta-357=0$, ... (*)

Komentar:

Gornju kubnu jednačinu riješićemo jednom od metoda numeričke matematike za nalaženje korjena. Rješavanjem jednačine (*) dobijamo tri rješenja, odbacivanjem negativnih rješenja imamo: $\delta\approx 1,32\ cm$

Tačna vrijednost korijena jednačine (*) sa tačnošću 10^{-6} *je:* $\delta=1,32047228\ cm$;

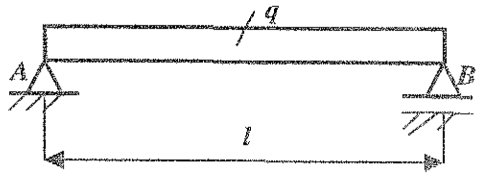
96. ZADATAK

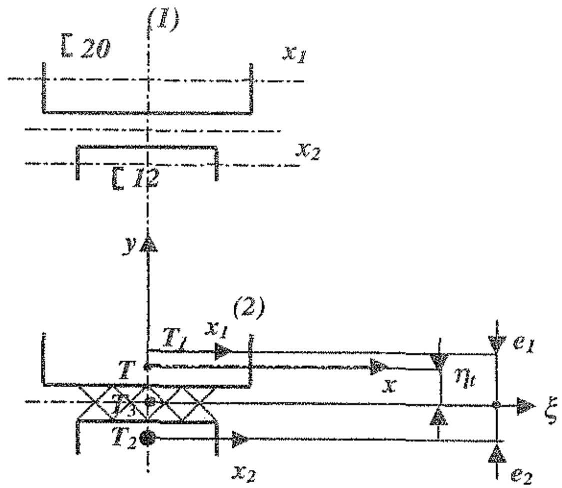
Greda kombinovana iz dva U-profila broj 12 i 20, postavljena je na nosače jedanput da profili leže slobodno jedan preko drugog, a drugi put su vezani među sobom. Odrediti za prvi i drugi slučaj opterećenje.

DATO JE:

$l=2,5\ m$;

$\sigma_d=110\ N/mm^2=11\ kN/cm^2$;





Rješenje:

Iz tablica za U-profile slijedi:

U12:

$I_X^{(2)}=I_Y^{(2)}=43,2\ cm^4$

$e_2=1,60\ cm$; $A_2=17,0\ cm^2$; $W_{X2}=11,1\ cm^3$

U20

$I_X^{(1)}=I_Y^{(1)}=148\ cm^4$

$e_1=2{,}01\ cm;\quad A_1=32{,}2\ cm^2;\quad b_1=7{,}5\ cm;\quad W_{X1}=27{,}0\ cm^3$

Napomena:

zbog datog položaja U-profila i pripadnih osa x_1 i x_2 iz tablica ne uzima se I_{X1} i I_{X2} nego $I_Y^{(1)}$ i $I_Y^{(2)}$!! Isto vrijedi i za W_{X1} i W_{X2}.

a) *Maksimalni moment je očito na sredini i iznosi:*

$$1)\ \sigma_1=\frac{M_{max}}{W^{(1)}}\le\sigma_d;\quad M_{max}=\frac{F_A l}{2}-\frac{q_1 l^2}{8}=\frac{q_1 l^2}{8},$$

Ukupni moment inercije:

$$W_X^{(1)}=W_{X1}+W_{X2}=38{,}1\ cm^3;$$

$$Iz\ (1`)\Rightarrow \frac{q_1 l^2}{8Wx^{(1)}}=\sigma_d\ \Rightarrow\ q_1=\frac{8\sigma_d Wx^{(1)}}{l^2}=\frac{8\sigma_d(W_{X1}+W_{X2})}{l^2};\quad q_1=5364{,}48N/m;$$

b) *U drugom slučaju napon na savijanje je:*

$$\sigma_2=\frac{M_{max}}{W^{(2)}}\le\sigma_d\ \Rightarrow\ \frac{q_1 l^2}{8Wx^{(2)}}=\sigma_d\ \Rightarrow\ q_2=\frac{8\sigma_d Wx^{(2)}}{l^2}\quad ...(*)$$

Težišna koordinata:

$$\eta_T=\frac{\Sigma Ai\eta i}{\Sigma A_1}=\frac{A_1e_1+A_2e_2}{A_1+A_2}=1{,}868\ cm;\quad \eta_T=1{,}87\ cm;$$

$$W_X^{(2)}=\frac{Ix^{(2)}}{Y_{max}}=\frac{I_{x1}+A_1(e_1-\eta_T)^2+I_{X2}+(e_2-\eta_T)^2A_2}{b_1-\eta}$$

$$gdje\ je:\quad W_{X1}`=\frac{I_{x1}+A_1(e_1-\eta_T)^2}{b_1-\eta}$$

$$W_X^{(2)}=\frac{I_{X2}+(e_2-\eta_T)^2A_2}{b_1-\eta}$$

$W_X^{(2)}=34{,}293\ cm3$

$Iz\ (*)\ \Rightarrow\ q_2=4828{,}4\ N/m$

97. ZADATAK

Greda I-profila, optrećena je pokretnim teretom koji se prenosi na dva točka silama F_1 i F_2.

Odrediti:

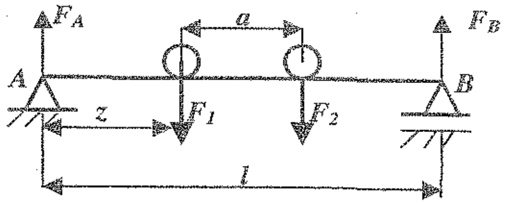
a) položaj sile F_1 za koje će ispod ove sile biti najveći moment savijanja i njegovu veličinu.

b) prema najvećem momentu dimenzionisati presjeka ako je poznato σ_d.

Odrediti najveću vrijednost tangentnih napona. Dato je još: a i l.

DATO JE:

$F_1=25\ kN;$
$F_2=20\ kN;$
$a=1{,}2\ m;$
$l=3\ m;$



Rješenje:

a) $\Sigma M_B=F_Al-F_1(l-z)-F_2(l-z-a)=0$

$$F_A=F_1\frac{l-z}{l}+F_2\frac{l-z-a}{l}$$

$$M_Z=F_A z=F_1 z\frac{l-z}{l}+F_2\frac{z}{l}(l-z-a)\ ...(*)$$

$$\frac{dMz}{dz}=0\ \Rightarrow\ z=z_m=\frac{(F_1+F_2)l-F_2a}{2(F_1+F_2)};\quad z_m=1{,}233\ m;$$

$$Iz\ (*)\ \Rightarrow\ M_{Zm}=M_{2max}=\frac{[\ (F_1+F_2)l-F_2a\ ]^2}{4l(F_1+F_2)};\quad M_{2max}=22{,}82\ kNm$$

$$b)\ \sigma=\frac{M_{max}}{Wx}\le\sigma_d\Rightarrow\ W_X=\frac{M_{max}}{\sigma_d},$$

za $\sigma_d=11\ kN/cm^2$ *slijedi:*

W_X=207,45 cm^3

Na osnovu W_X odabrat ćemo iz tablica profila, profil I-20.

c) $\tau_{max}=\frac{T_{max}}{Ix}(\frac{Sx}{\xi})_{max}$

$T_{max}=(F_a)_{z=0}=F_1+F_2\frac{l-a}{l}$; T_{max}=37 kN,

I_X=2140 cm^4;

$S_X(\frac{1}{2})=S_X$=125 cm^3

ξ=d=4,5 mm=0,75 cm;

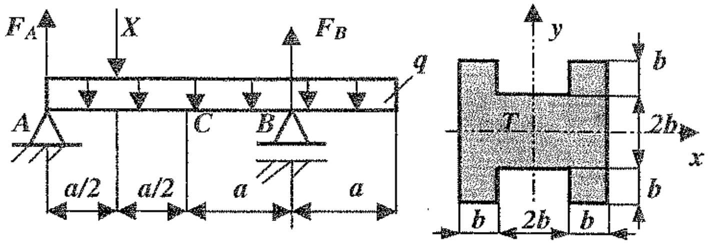
τ_{max}=2,88 kN/cm^2=28,8 N/mm^2;

98. ZADATAK

Greda presjeka po skici prepuštena na jednom kraju,opterećena je kontinuiranim teretom q i nepoznatom silom X. Odrediti silu X pod uslovom da najveći normalni napon u presjeku C bude σ_d. Dato je još: a, b.

DATO JE:

a=1,5 m;
b=5 cm;
q=9500 N/m;
σ_d=110 N/mm^2=11 kN/cm^2;
X=?



Rješenje:

1) $\Sigma M_B=2F_Aa-X\frac{3}{2}a-q2a^2+q\frac{a^2}{2}=0,$

$F_A=\frac{3X}{4}+\frac{3qa}{4}$; $M_C=F_Aa-X\frac{a}{2}-\frac{qa^2}{2}-\frac{Xa}{4}+\frac{qa^2}{4}$;

2) *Moment na savijanje u presjeku C:*

$M_C=W_X\cdot\sigma_{cmax}\Rightarrow X=\frac{4}{a}\left(W_x\sigma_{c\max}-\frac{qa^2}{4}\right)$

3) $W_X=\frac{Ix}{2b}=\frac{\frac{(4b)^4}{12}-2\left[\frac{2bb^3}{12}+2b^2(\frac{3b}{2})^2\right]}{2b}=6b^3,$

W_X = 6b3=6(5cm)3=750 cm^3,

$\sigma_c=\sigma_d$, - prema uvjetu zadatka

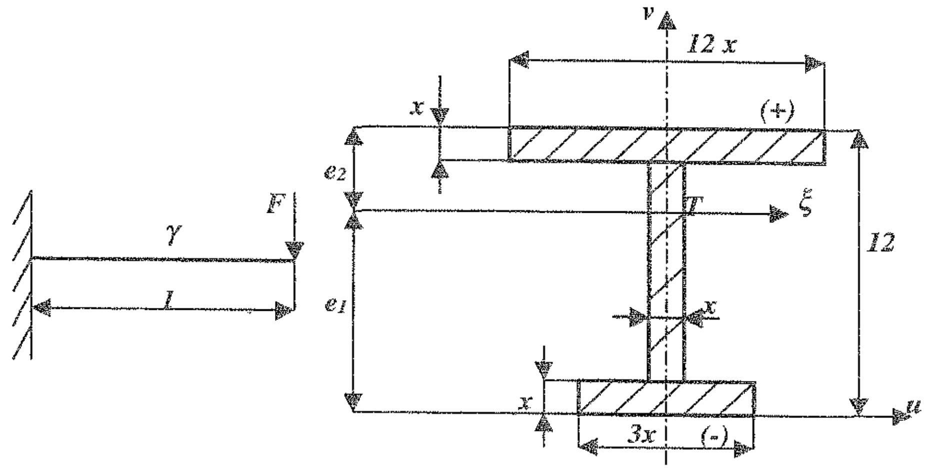
Iz (2) $\Rightarrow$ X=205,72kN≈206kN,

99. ZADATAK

Konzola specifične težine γ, dužine l, presjeka po skici, opterećena je na kraju silom F. Odrediti x i f tako da dozvoljeni napon na zateznoj strani bude σ+, a na strani pritiska σ -.

DATO JE:

γ=76000 N/m^3; σ^+= 35 N/mm^2 =3,5 kN/cm^2;
σ^-=75 N/mm^2 = 7,5 kN/cm^2; l=2,5 m;



Rješenje:

Naponi na zatezanje σ^+, *pritisak* σ^-, *mogu se izraziti:*

$$\sigma^+=\frac{M_{\max}}{I_\xi}e_2;\quad \sigma^-=\frac{M_{\max}}{I_\xi}e_1\ ;$$

iz ove dvije:

$$\frac{e_2}{e_1}=\frac{\sigma^+}{\sigma^-}=\ldots(*)$$

sa crteža je očito da je:

$e_2+e_1=12$

iz $(*)\Rightarrow e_2=e_1(\frac{\sigma^+}{\sigma^-})$

iz ove dvije :

$$e_1=\frac{12\sigma^-}{\sigma^++\sigma^-};\qquad e_2=12\frac{\sigma^+}{\sigma^++\sigma^-}$$

Koordinate težišta:

$$3)\quad e_1=\frac{\Sigma A_i v_i}{\Sigma A_i}=\frac{12\sigma^-}{\sigma^++\sigma^-}\quad\ldots(**)$$

Rješavanjem ove jednačine dobijamo:

$x_1=1{,}33$ *cm – odabrat ćemo* X_1 *kao povoljnije"tehnološko"rješenje*

$x_2=4{,}36$ *cm,*

b)

Određivanje sile F:

$$I_u=\frac{2xx^3}{3}+\frac{x12^3}{3}+\frac{11xx^3}{12}+11x^2(12-\frac{x}{2})^2;\quad I_u=3284{,}8\ cm^4;$$

$$M_{max}=\frac{\sigma^+I_\xi}{e_2}=Fl+\frac{\gamma Al^2}{2}\Rightarrow F=\frac{(\sigma^++\sigma^-)I_\xi}{12l}-\frac{\gamma Al}{2};$$

$I_\xi=I_u-e_1^2A;\quad I_\xi=668{,}82\ cm^4;\quad F=2080\ N;$

100. ZADATAK

Drvena greda pravougaonog presjeka sa odnosom strana b/h=k, dužine l, opterećena je specifičnim teretom q. Odrediti dimenzije poprečnog presjeka grede AB pri dozvoljenom naponu σ_d, *i dijametar čeličnog zatega AD i BD pri dozvoljenom naponu* $\sigma_d^{(1)}$. *U tački C grede AB je zglob.*

DATO JE:

$B/h=k=0{,}66;$

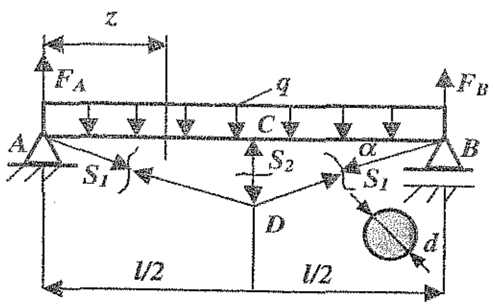
$l=4m;$

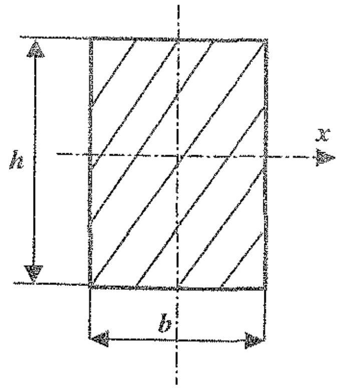
$q=9500\ N/m;$

$\alpha=45°;$

$\sigma_d=90\ N/mm^2;$

$\sigma_d^{(1)}=120\ N/mm^2;$





Rješenje:

$$F_A=F_B=\frac{ql}{2}=19\ kN;$$

$$\Sigma M_c^l=0\ \Rightarrow\ S_1=\frac{F_A}{\sin\alpha}-\frac{ql}{4\sin\alpha};\quad S_1=13434{,}97\ N$$

$$M_{max}=\frac{ql^2}{32};\quad M_{max}=4750\ Nm;$$

$$\sigma=\frac{M_{\max}}{Wx}\le\sigma_d\Rightarrow W_x=\frac{M_{\max}}{\sigma_d}=\frac{bh^2}{6}=\frac{kh^3}{6}\ \ldots(*)$$

$$\text{iz }(*)\Rightarrow\ h=\sqrt[3]{\frac{6M_{\max}}{k\sigma_d}};\quad h=78{,}28\ mm=7{,}828\ cm;$$

$b=k\cdot h;\quad b=5{,}166\ cm;$

$$\sigma=\frac{S_1}{A_1}\leq \sigma_d^{(1)} \Rightarrow \quad A_1=\frac{S_1}{\sigma_d^{(1)}}=\frac{\pi\cdot d^2}{4}\Rightarrow \quad d=\sqrt{\frac{4S_1}{\pi\cdot\sigma_{d1}^{(1)}}}=11{,}939\ mm;$$

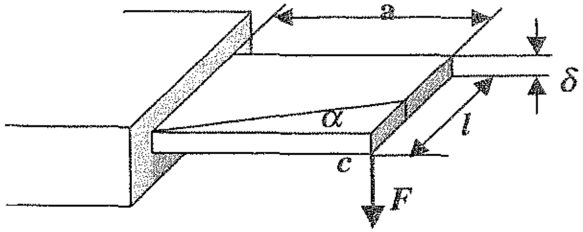
$d=1{,}194\ cm\approx 1{,}2\ cm;$

101. ZADATAK

Ploča dužine l, širine δ, jednom stranom je ukliještena, a u roglju C opterećena silom F. Odrediti ugao α kosog presjeka u kome se pojavljuju najveći normalni napon I veličinu ovog napona.

DATO JE:

$l=2\ m;$
$\delta=6\ cm;$
$F=85\ kN;$
$a=1{,}8\ m;$
$\alpha=?;\quad \sigma_\alpha=?$



Riešenje:

Moment savijanja u ravni određen uglom α:

$M_\alpha=F\sin\alpha\cdot a\ ;$

$$\sigma_\alpha=\frac{M_\alpha}{W}=\frac{F\,a\sin\alpha}{\frac{a\cdot\delta^2}{\cos\alpha\cdot 6}};\qquad \frac{F\,a\sin\alpha}{\frac{a}{\cos\alpha}\frac{\delta^2}{6}}=\frac{6F\,a\sin\alpha\cos\alpha}{a\delta^2}$$

$$\sigma_\alpha=\frac{3F\sin\alpha}{\delta^2};\qquad \sigma_{\alpha max}=\frac{3F}{\delta^2}\quad Za\ \alpha=\frac{\pi}{4};$$

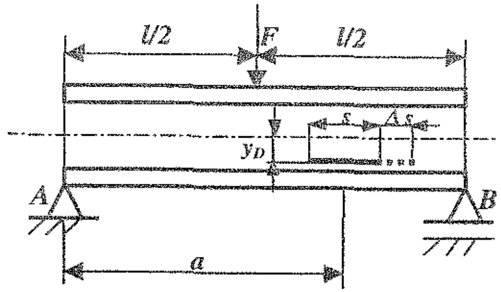
$\sigma_{\alpha max}=70{,}83\ kN/mm^2;$

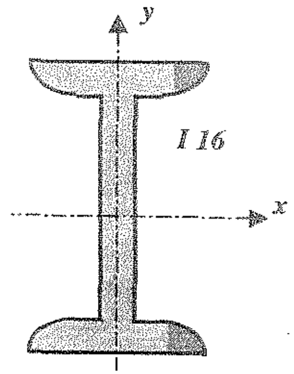
102. ZADATAK

Pri opterećenju grede profila I-16 silom F, vlakno na rastojanju y_d, od neutralne ose izduži se za Δs na dužini S(baza termometra). Odrediti silu F ako je poznato: l, s, E, y_D, ΔS.

DATO JE:

$l=2{,}8\ m;$
$S=3{,}2\ cm;$
$E=20\cdot 10^3\ kN/cm^2;$
$Y_d=5{,}5\ cm;$
$\Delta s=0{,}08\ cm;$
$a=1{,}6\ m;$





Riešenje:

Iz tablice za I 16 profil:

$h=160\ mm;$

$I_x=935\ cm^4;$

Napon na savijanje obzirom na Hukov zakon:

$$\sigma_D=E\varepsilon=\frac{E\Delta s}{s};$$

Napon na savijanje obzirom na spoljni moment savijanja:

$$\sigma_D=\frac{M_D}{W_{XD}}=\frac{M_D}{I_x}\cdot y_D;$$

σ_D - *napon u tački:*

Moment savijanja u tački D:

$$M_D=F_A\cdot a-F\left(a-\frac{l}{2}\right)=\frac{F(l-a)}{2}$$

Kako je:

$$F_A=F_B=\frac{F}{2};$$

Slijedi:

$$Iz\ (2)\ \Rightarrow \sigma_D=\frac{F(l-a)}{2I_x}\cdot y_D;$$

$$(1)=(2)\ \Rightarrow \frac{E\Delta s}{s}=\frac{F(l-a)}{2I_x}\cdot y_D \Rightarrow$$

$$F=\frac{2E\Delta s I_x}{s(l-a)y_D}$$

$$F = 1416{,}66\ kN;$$

103. ZADATAK

Konzola je sastavljena od dvije grede pravougaonog presjeka koje su međusobno povezane moždanikom, opterećena je sa specifičnim opterećenjem.
Odrediti:

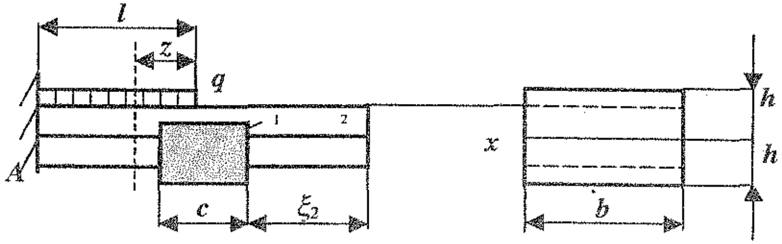
a) *kolika je dužina (c) moždanika ako je poznato* $\tau_d^{(1)}$.

b) *koliki je dio* ξ_2, *ako je poznato* $\tau_d^{(2)}$.

c) *koliki je najveći normalni napon.*

DATO JE:

$q=9800\ N/m;$
$l=2{,}5\ m;$
$h=8\ cm;$
$b=20\ cm;$
$\tau_d^{(1)}=7{,}1\ kN/cm^2=71\ N/mm^2;$
$\tau_d^{(2)}=10\ kN/cm^2;$



Rješenje:

$$1)\ T=qz,\ S_x=\frac{bh^2}{2},\ I_x=\frac{b(2h)^3}{12},$$

$$\tau=\frac{TS_x}{I_x b}=\frac{3}{4}q\frac{z}{bh}=kz$$

ukupna sila:

$$F_s=\int_A \tau\alpha A=k\int_0^l zbdz=\frac{bkl^2}{2};\quad F_s=287{,}109\ kN;$$

a) *Dužina moždanika je:*

$$\frac{F_s}{cb}\le\tau_d^{(1)}\Rightarrow c=\frac{F_s}{b\cdot\tau_d^{(1)}};\quad c=2{,}02cm;$$

b) *Rastojanje* (ξ) *je:*

$$\tau^{(2)}=\frac{F_s}{\xi_2 b}\le\tau_d^{(2)}\Rightarrow \xi_2=\frac{F_s}{b\cdot\tau_d^{(2)}};\quad \xi_2=1{,}435\ cm;$$

c) *Najveći normalni napon je:*

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{Wx}=\frac{ql^2h}{2I_x};\quad \sigma_{max}=\frac{ql^2h}{2I_x};$$

$$I_x=\frac{b(2h)^3}{12};\quad I_x=6826{,}66\ cm^4;$$

$$\sigma_{max}=\frac{2450\cdot 10^4\ Ncm^2}{6826{,}66cm^4};$$

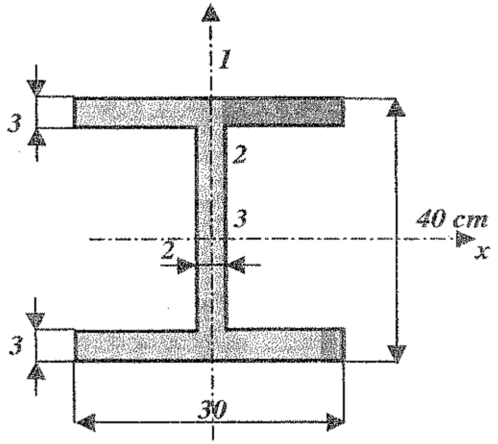
$$\sigma_{max}=35{,}8\ N/mm^2;$$

104. ZADATAK

Nosač presjeka I opterećen je momentom M i transverzalnom silom T. Odrediti veličinu glavnih napona u tačkama 1, 2, 3.

DATO JE:

$M=70\ kNm;$
$T=40\ kN;$



Rješenje:

Tačka "1":

- normalni naponi

$$\sigma_{1,2}=\sigma_{max}=\frac{M}{W_x}=\frac{M}{I_x}\frac{h}{2};$$

$$I_x=\frac{30\cdot 40^3}{12}-\frac{28\cdot 34^3}{12}\approx 68250\ cm^4;$$

$$\sigma_{1,2}=20,5\ N/mm^2;$$

Tačka "2":

-ukupni napon grede opteećene na savijanje:

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2},\ \ldots(*)$$

$$\sigma=\frac{M}{I_x}\left(\frac{h}{2}-3cm\right);\quad \sigma=1,74\ kN/cm^2;$$

$$\tau_{max}=\frac{TS_x^{(2)}}{I_x 2cm};\quad \tau_{max}=0,487\ kN/cm^2;$$

$$S_x^{(2)}=3\cdot 30\cdot 18,5\ cm^3;$$

ili

$$\sigma_{1,2}=(8,7\pm 9,97)\ N/mm^2;$$

Tačka"3"

$$\sigma_{1,2}=\tau_{max}=\frac{TS_x^{(3)}}{I_x 2cm}=\ldots(**)$$

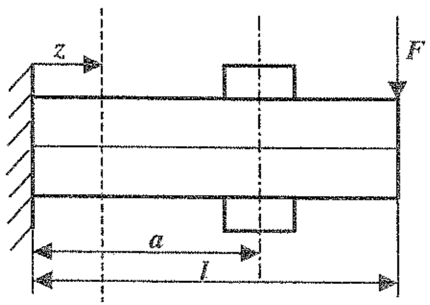
$$S_x^{(3)}=(3\cdot 30\cdot 18,5+2\cdot 17\cdot 8,5)\ cm^3=1954\ cm^3;$$

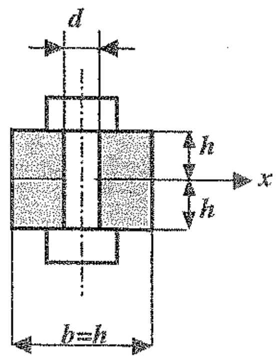
$$\sigma_{1,2}=\tau_{max}=\frac{TS_x^{(3)}}{I_x 2cm}=\frac{40kN\cdot 1954cm^3}{68250cm^4\, 2cm}=0,572\ kN/cm^2$$

$$\sigma_{1,2}=\tau_{max}=5,72\ N/mm^2;$$

105. ZADATAK

Konzola se sastoji iz dva kvadratna presjeka postavljena prema skici i spojenih jednim vijkom, opterećena je silom F. Odrediti prečnik vijka d tako da tangentni napon u vijku bude τ_d.





DATO JE:

$F=35\ kN;$
$l=2\ m;$
$a=1,6\ m;$
$\tau_d=85\ N/mm^2;$
$h=b=18\ cm;$

Riješenje:

$$\tau=\frac{F_S}{d^2\pi}4\le\tau_d\Rightarrow d=\sqrt{\frac{4F_S}{\pi\cdot\tau_d}}\quad ...(1)$$

$$F_s=\int_A \tau\, b\, dz=\tau\, b\, a\quad ...(2)$$

$$\tau_s=\frac{TS_x}{I_x b}=\frac{Fb\dfrac{h^2}{2}}{\dfrac{2b^2h^3}{3}}=\frac{3F}{4bh}=k\ ...(3)$$

iz (2) $\Rightarrow F_s=kab$ ...(2')

iz ...(3) u(2') $\Rightarrow$

$$F_s=\frac{3F\cdot ab}{4bh}=\frac{3aF}{4h}$$

$F_s=233{,}33\ kN;$

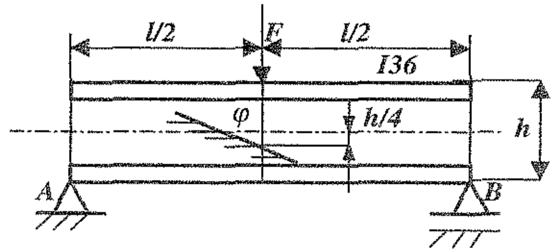
iz (1) $\Rightarrow$ $d=5{,}9\ cm\approx 6$ c

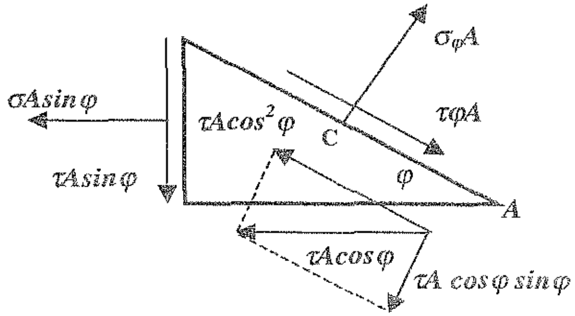
106. ZADATAK

Greda profila I-36, opterećena je silom F. Odrediti veličinu normalnih i tangentnih napona u tački C a u ravni koja je pod uglom φ, prema osi greda.

DATO JE:

$\varphi=30°;$
$F=55\ kN,$
$l=3\ m;$
$b=14{,}3\ m;$
$h=36\ cm;$
$I_x=19610\ cm^4;$
$\delta=13{,}0\ mm;$
$\delta_1=19{,}5\ mm;$
$\xi=\delta=13{,}0\ mm;$





Riješenje:

Normalni i tangentni napon u tački C u kosom presjeku:

$\sigma_\varphi A-\tau A\cos\varphi\sin\varphi-\tau A\sin\varphi\cos\varphi-\sigma A\sin^2\varphi=0\quad ...(1)$

iz (1) slijedi: $\sigma_\varphi=\sigma\sin^2\varphi+\tau\sin 2\varphi....(*)$

$\tau_\varphi A-\tau A\cos^2\varphi+\tau A\sin^2\varphi-\sigma A\sin\varphi\cos\varphi=0,$

$\tau_\varphi=\frac{1}{2}\sigma\sin 2\varphi+\tau\cos 2\varphi\quad ...(**)$

Normalni i tangentni napon u tački C:

$$\sigma=\frac{Mc}{Ix}\frac{h}{4}=\frac{F\cdot l}{4Ix}\frac{h}{4};\quad \sigma=18{,}9\ N/mm^2;$$

$$\tau=\frac{TS_x^{(c)}}{I_x\xi};\quad \tau=6{,}36\ N/mm^2;$$

$$S_x^{(c)}=\frac{b(h^2-h_r^2)}{8}+\frac{\xi(h_r^{\ 2}-4y^2)}{8}=\frac{b\left[h^2-(h-2\delta_1)^2\right]}{8}+\frac{\xi\left[(h-2\delta_1)^2-4(\frac{h}{4})^2\right]}{8};$$

$S_x^{(c)}=589{,}5\ cm^3;$

iz (*) $\Rightarrow$ $\sigma_\varphi=\sigma\sin^2\varphi+\tau\sin 2\varphi$; $\sigma_\varphi=0{,}9495\ kN/cm^2;$

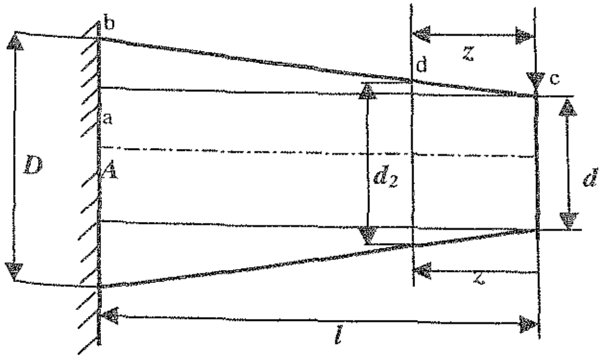
iz (**) $\Rightarrow$ $\tau_\varphi=\frac{1}{2}18{,}9\sin 60°+6{,}36\cos 60°=11{,}3669\ N/mm^2;$ $\tau_\varphi=1{,}136 kN/cm^2;$

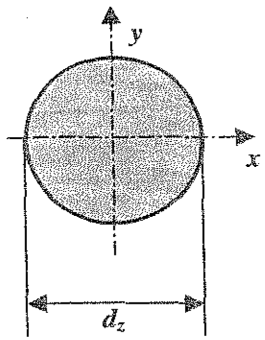
107. ZADATAK

Konzola kružnog promjenjivog presjeka, sa krajnim prečnicima d i D opterećena je silom F. Za date vrijednosti odrediti položaj presjeka u kome će normalni napon imati najveću vrijednost i veličinu ovog napona.

DATO JE:

$F=20kN=20000N$;
$l=2m$;
$D=30\ cm$;
$d=16\ cm$;





Riješenje:

Normalni napon u presjeku z je:

$$\sigma = \frac{M}{Ix^{(z)}} \cdot \frac{dz}{2}$$

iz sličnosti: $\Delta\, abc \approx \Delta\, cde \Rightarrow dz = d + \frac{D-d}{l} z, \ldots (*)$

$$I_x^{(z)} = \frac{\pi \cdot dz^4}{64} \ \ldots (2)$$

$$Iz\ (2) \rightarrow (1) \Rightarrow \sigma_z = \frac{32F \cdot z}{\pi d_z^3}; \quad \ldots \quad (1')$$

$d\sigma_z/dz=0, \quad \Rightarrow$

$$z = \frac{dl}{2(D-d)} = 1{,}143\ m, \quad \ldots\ (3)$$

$z = z_m = 1{,}143\ m$;

Iz (3) I od (*)(2) imamo →(1):

$$\sigma_{max} = \frac{128}{27\pi} \frac{Fl}{d^2}$$

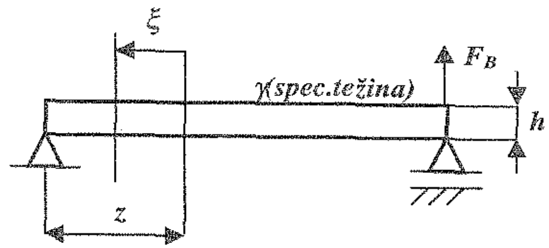
$\sigma_{max} = 23{,}58\ kN/cm^2$

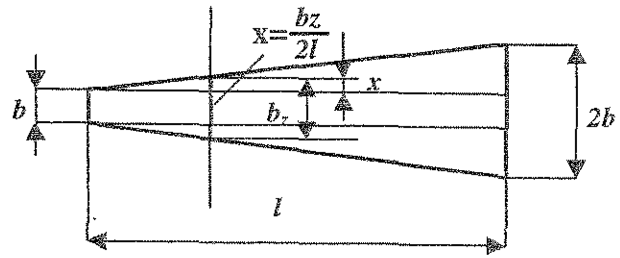
108. ZADATAK

Naći položaj i veličinu najvećeg normalnog napona za slučaj grede pravougaonog poprečnog presjeka, konstantne visine a promjenjive širine po skici, usljed sopstvenog opterećenja.

DATO JE:

$h=15\ cm$;
$l=2{,}3\ m$;
$\gamma=76000\ N/m^3$;
$b=20\ cm$;





Riješenje:

$b_z=b+2x$; *kako je* : $x=\frac{b}{2l}\cdot z$; $b_z=b+\frac{z}{l}b$;

$dF_q=b_z\cdot\gamma\cdot h\cdot dz$,

$\frac{dF_q}{dz}=b_z\cdot\gamma\cdot h=q_z=\gamma\cdot h\cdot b(1+\frac{z}{l})=q_z(z)$

$\Sigma M_A=F_B\cdot l-{}_0\int^l z\cdot q_z\cdot dz=0\Rightarrow$

$F_B=\frac{1}{l}\int_0^l \gamma hb\left(1+\frac{z}{l}\right)dz=\frac{5}{6}\gamma hbl$;

$F_B=\frac{5}{6}\gamma hbl$; $F_B=6080kN$;

$\Sigma Y_i=F_A+F_B-F_q=0\Rightarrow F_A=\frac{2}{3}\gamma hbl$;

$F_A=486{,}4\ N$;

$M_z=F_A z-\int_0^z \xi\, q(\xi)\,d\xi$; $q(\xi)=q_z(z-\xi)$

$M_z=F_A\cdot z-\gamma hb(\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6l})$;

$\sigma_z=\frac{M_{(z)}}{Ix}\cdot\frac{h}{2}$; $\sigma_{(z)}=\frac{M_{(z)}}{\frac{b_z h^3}{12}}\frac{h}{2}\quad ...(\Delta)$

$\sigma_z=\frac{\gamma(4l^2z-3lz^2-z^3)}{h(l+z)}$

$\frac{d\sigma}{dz}=\frac{\gamma}{h}\frac{(4l^3-6l^2z-6lz^2-2z^3)}{(l+z)^2}=0$

iz $(*)\Rightarrow z=l(\sqrt[3]{3}-1)\approx 0{,}4416l$

$z=z_m=1{,}413\ m\rightarrow$ *od oslonca A, položaj najvećeg normalnog napona,*

iz $(\Delta)\sigma_{zm}=\sigma_{max}=\frac{\gamma l^2}{h}\frac{(7^3\sqrt{3-9})}{\sqrt[3]{3}}\approx 0{,}763\frac{\gamma l^2}{h}$;

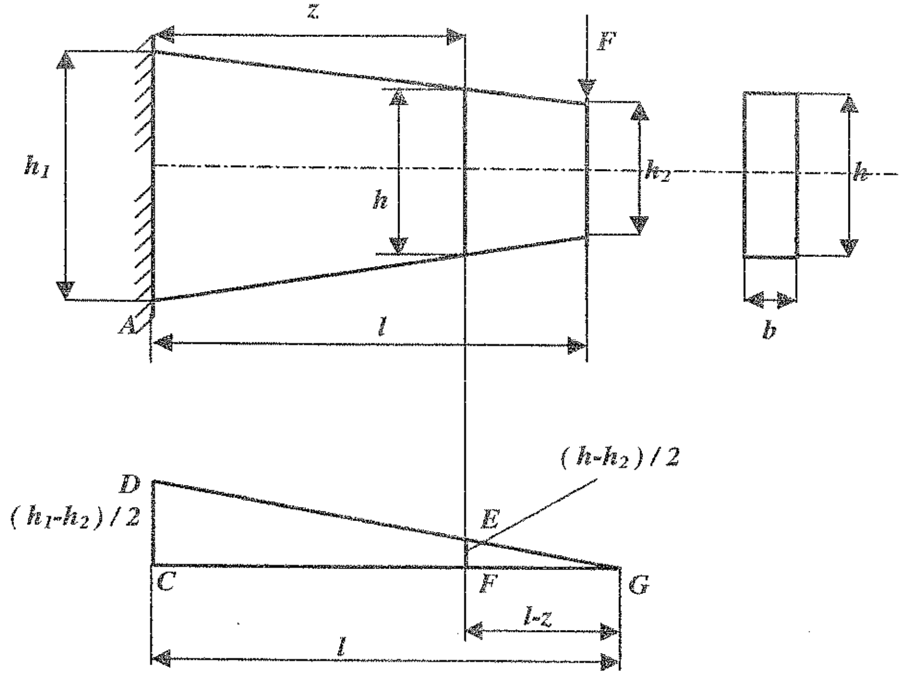
$\sigma_{max}=0{,}396\ kN/cm^2=3{,}96\ N/mm^2$;

109. ZADATAK

Konzola pravougaonog poprečnog presjeka konstantne širine b, a promjenjive visine po skici,opterećena je na kraju silom F. Za date vrijednosti , odrediti na kojem udaljenju od uklještenja se nalazi najveći normalni napon, veličinu moment savijanja u tom presjeku, kao i maximalni napon.

DATO JE:

$b=7\ cm$;
$F=35\ kN$;
$h_1=30\ cm$;
$h_1=12\ cm$;
$l=3m$;
$z_m=?$
$\sigma_{max}=?$
$M_{max}=?$



Riješenje:

Na osnovu sličnosti trouglova:

$\Delta DCG \approx \Delta EFG$ *slijedi:*

$$h=h_2+\frac{h_1-h_2}{l}(l-z),$$

Normalni napon u presjeku na rasponu z od uklještenja konzole je:

$$\sigma=\frac{M}{I_x}\frac{h}{2} \qquad \sigma_z=\frac{F(l-z)}{\frac{bh^3}{12}}\frac{h}{2}$$

Uvjet za ekstremnu vrijednost napona:

$$\frac{d\sigma_z}{dz}=0 \Rightarrow z_m=(1-\frac{h_2}{h_1-h_2})l$$

$z_m=1\ m;$

$$za\ z=z_m,\ iz\ (*) \Rightarrow \sigma_{max}=\frac{3Fl}{2bh_2(h_1-h_2)}$$

$\sigma_{max}=10{,}4\ kN/cm^2=104\ N/mm^2;$

$M_z=F(l-z)$, za $z=z_m \Rightarrow Mz_m=F(l-z_m)$

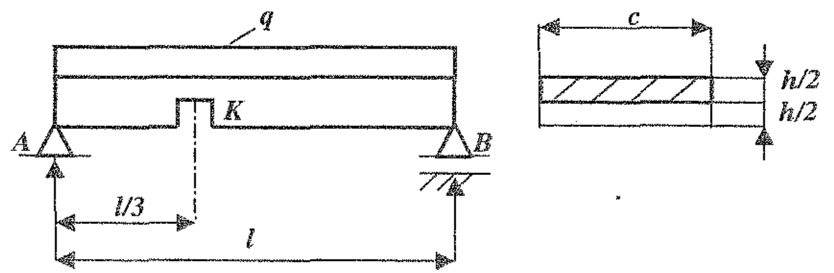
$M_z=70\cdot 10^3\ Nm=70\ kNm;$

110. ZADATAK

Greda pravougaonog presjeka, oslabljena je u presjeku na 1/3 raspona mjereno od oslonca A, po visini za h/2. Za date vrijednosti l, h, c, σ_d, odrediti specifično opterećenje.

DATO JE:

$l=5\ m;$
$h=12\ cm;$
$c=15\ cm;$
$\sigma_d=110\ N/mm^2=11\ kN/cm^2;$
$q=?$



Riješenje:

$$I_x=\frac{c(\frac{h}{2})^3}{12}=\frac{ch^3}{12\cdot 8}$$

-normalni napon je:

$$\sigma=\frac{M_x}{I_x}\frac{h}{4}\le\sigma_d;$$

-moment u kritičnom presjeku grede:

$$M_k=\frac{ql^2}{6}-\frac{ql^2}{2}=\frac{ql^2}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{ql^2}{9}=\sigma_d\frac{ch^2}{24} \Rightarrow q=\frac{9}{24l^2}\cdot\sigma_d\cdot c\cdot h^2;$$

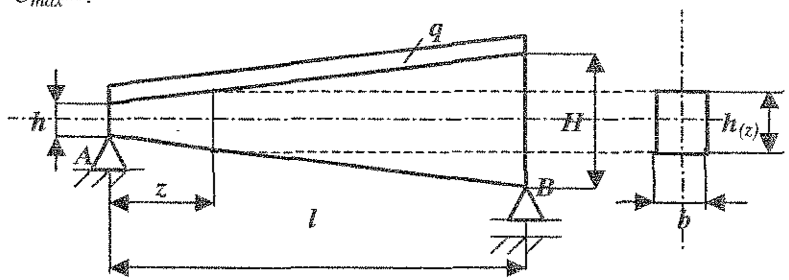
$q=3564\ N/m;$

111. ZADATAK

Greda konstantne širine b, a promjenjive visine prema skici, opterećenja je kontinuiranim teretom q. Za date vrijednosti:q,l,h i H. Odrediti položaj presjeka u kome će biti najveći normalni napon i veličinu ovog napona.

DATO JE:

$q=4500\ N/m;\quad l=6\ m;\quad h=20\ cm;$
$H=25\ cm;\quad b=10\ cm;$
$z_m=?;\quad \sigma_{max}=?$



Riješenja:

$$h(z)=h+\left[\frac{H-h}{l}\right]\cdot z,$$

$$\sigma_{(z)}=\frac{M_{(z)}}{I_x(z)}\frac{h_{(z)}}{2};$$

$$\sigma_z=\frac{3q(lz-z^2)}{b\left[h+\frac{H-h}{l}z\right]^2};$$

$d\sigma/dz=0\Rightarrow$

$$z_m=\frac{h}{H+h}l$$

$z_{max}=2,66\ m;$

$$\sigma_{max}=\frac{3ql}{4bHh};$$

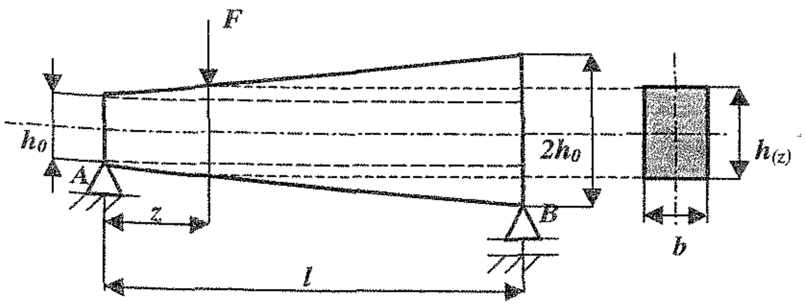
$\sigma_{max}=2,43\ kN/cm^2;$

112. ZADATAK

Greda promjenjive visine a konstantne širine b, opterećena je pokretnim teretom F. Odrediti položaj z, za koji će u presjeku ispod tereta postojati najveći normalni napon i veličinu ovog napona.

DATO JE:

$F=24,5\ kN;$ $l=6\ m;$
$b=20\ cm;$ $h_0=15\ cm;$



Riješenje:

Iz sličnosti trouglova lako nalazimo:

Pogledati primjer (111)

$$h(z)=h_0(1+\frac{z}{l});\ F_A=\frac{F(l-z)}{l}$$

Napon u presjeku na z rastojanju:

$$\sigma_{(Z)}=\frac{F_A}{I_X(z)}\frac{h(z)}{2}=\frac{6Fl(lz-z^2)}{bh_0^2(l+z)^2}\quad ...(*)$$

Uvjet ekstremnog napona:

$$\frac{d\sigma_{(z)}}{dz}=0\Rightarrow z_m=\frac{l}{3}=2m,$$

Uvrštavanjem $z=z_m$ u jednačinu (*) slijedi:

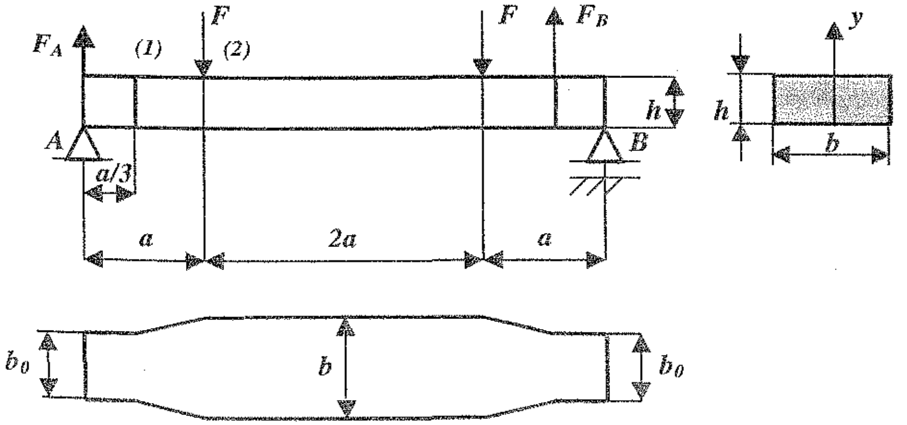
$$\sigma_{max}=\frac{3Fl}{4bh_0^2};\quad \sigma_{max}=24,5\ N/mm^2$$

113. ZADATAK

Greda je pravougaonog presjeka konstante visine h, širine b u intervalu između sila,a nepoznate širine na krajevima b. Ako je poznato F odrediti visinu h i širinu b pod uvjetom da je normalni i tangentni naponi ne pređu date vrijednosti σ_d i τ_d.

DATO JE:

$a=1\ m;$
$b=22\ cm;$
$F=20\ kN;$
$\sigma_d=110\ N/mm^2;$
$\tau_d=70\ N/mm^2;$



Riješenje:

Presjek 2-2:

Normalni napon:

$$\sigma_{(2)}=\frac{M_{(2)}h}{I_x^{(2)}2}\leq\sigma_d \qquad \Rightarrow \quad F_A=F$$

$$M_{(2)}=F_A a=F\cdot a, \qquad \Rightarrow \frac{6Fa}{bh^2}\leq\sigma_d \Rightarrow h\geq\frac{6Fa}{b\sigma_d}; \qquad I^{(2)}=\frac{bh^3}{12},$$

$h\geq 7{,}041$ *cm, usvojimo:* $h=7{,}1$ *cm*

presjek 1-1:

Ovdje treba odrediti b_0 *tako da tangentni i normalni napon ne pređu dozvoljenu granicu.*

$$\tau_{(1)max}=\frac{FSx}{I_X^{(1)}b_o}\leq\tau_d \Rightarrow I_{X\tau}^{(1)}\geq\frac{Fh^2}{8\tau_d}=18{,}00\ cm^4$$

usvojimo: $I_{X\tau}^{(1)}=18\ cm^4$,

$$\sigma_{1max}=\frac{M_{(1)}}{I_{X\sigma}^{(1)}}\frac{h}{2}=\frac{Fa}{3I_{X\sigma}^{(1)}}\frac{h}{2}\leq\sigma_d \Rightarrow I_{X\sigma}^{(1)}\geq\frac{F\cdot a\cdot h}{6\sigma_d}$$

usvojimo: $I_{X\sigma}^{(1)}=216\ cm^4$,

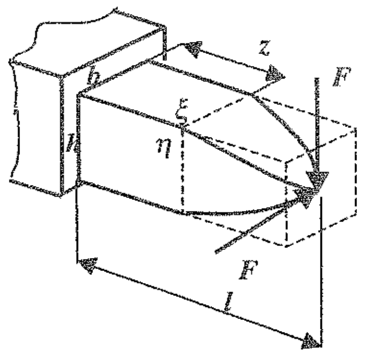
Kako je $I_{X\sigma}^{(1)}>I_{X\tau}^{(1)}$ *to slijedi:* $b_0=\frac{12I_{X\sigma}^{(1)}}{h^3}$; $\qquad b_0=7{,}24$ *cm,*

114. ZADATAK

Ukliješteni nosač je promjenjivog pravougaonog presjeka koji u uklještenju ima osnovicu b i visinu h, a u nekom drugom presjeku osnovicu ξ *i visinu* η. *Konzola je dužine l i na slobodnom kraju opterećena silama F. Odrediti kako se mijenjaju dimenzije* ξ *i* η *u zavisnosti od z, da bi konzola bila idealnog oblika.*

DATO JE:

$b=15$ *cm;*
$h=22$ *cm;*
$l=2{,}5$ *m;*
$F=40$ *kN;*
$\xi=?$
$\eta=?$



Riješenje:

1) Za vertikalnu ravan uvjet za konstantnost napona je:

$$W_{(z)}=W_{max}\cdot\frac{M_z}{M_{max}} \text{ ili } \frac{\xi\cdot\eta^2}{6}=\frac{bh^2}{6}F(\frac{l-z}{Fl}),$$

2)Za horizontalnu ravan uvjet za konstantnost napona je:

$$W_{(z)}=W_{max}\cdot\frac{M_z}{M_{max}} \text{ ili } \frac{\xi^2\cdot\eta}{6}=\frac{hb^2}{6}F(\frac{l-z}{Fl}),$$

Oba uslova treba da su ispunjeni istovremeno, tako da rješenje uvjeta (1) i (2) nalazimo:

$$\xi=15\ cm\sqrt[3]{1-\frac{z}{2{,}5}};\ \eta=22\ cm\sqrt[3]{1-\frac{z}{2{,}5}};$$

115. ZADATAK

Lisnata opruga se sastoji iz n listova širine b, i debljine δ. Dužine listova su tako određene da greda ima idealan oblik sa konstantnim naponom σ_d. Odrediti silu F sa kojom smijemo opteretiti lisnatu oprugu.

DATO JE:

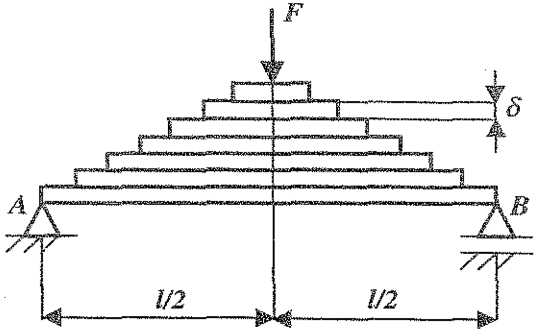
$b=7\ cm;$

$\delta=1{,}5\ cm;$

$\sigma_d=110\ N/mm^2=11\ kN/cm^2;$

$l=2\ m;$

$n=8;$



Rješenje:

Iz jednadžbe za normalni napon u poprečnom presjeku grede: $\sigma=\dfrac{M_{\max}}{\sigma_d}\le\sigma_d$

za n – listova imamo:

$$nW_x=\frac{M_{\max}}{\sigma_d}\quad ili\ n\frac{b\delta^2}{6}=\frac{F\frac{l}{4}}{\sigma_d}\Rightarrow F=\frac{2}{3}nb\delta^2\cdot\frac{\sigma_d}{l};$$

$F=4620\ N;$

116. ZADATAK

Odrediti zakon promjene prečnika grede ABC iz uvjeta da u svakom presjeku najveći normalni napon bude konstantan i jednak σ_d. Poznato je: q, l, a, σ_d.

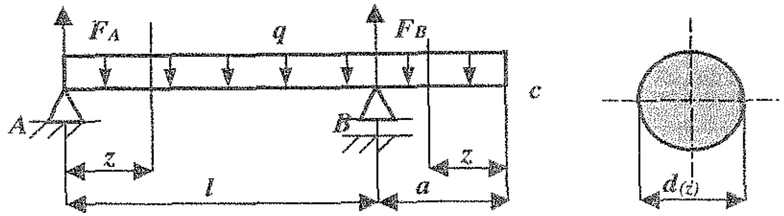
DATO JE:

$q=8000\ N/m;$

$l=3{,}5\ m;$

$a=1{,}2\ m;$

$\sigma_d=110\ N/mm^2;$



Riješenje:

Iz statičkih uvjeta ravnoteže lako nalazimo vrijednost otpora oslonaca:

$$F_A=q(l+a)-q\frac{(l+a)^2}{2l};\quad F_A=12{,}35\ kN;$$

$$F_B=q\frac{(l+a)^2}{2l};\quad F_B=25{,}24\ kN;$$

Za oblast AB:

$$M_{(z)}=F_A\cdot z-\frac{qz^2}{2};$$

$$\sigma_{(z)}=\frac{M(z)}{I_x^{(z)}}\frac{d(z)}{2}=\sigma_d=const\Rightarrow W_x(z)=\frac{M(z)}{\sigma_d}\ \ldots(*)$$

$$iz\ (*)\Rightarrow d(z)=\sqrt[3]{\frac{16M(z)}{\pi\cdot\sigma_d}}$$

za oblast CB:

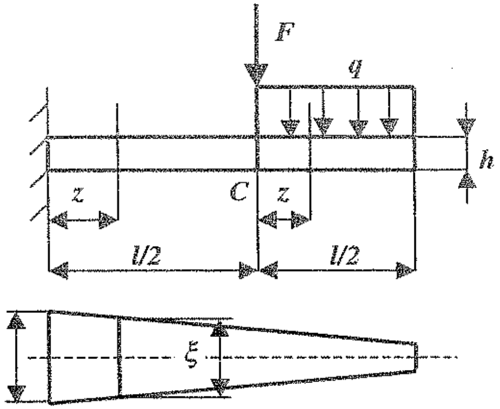
$$M(z)=\frac{qz^2}{2};\quad W_x=\frac{M(z)}{\sigma_d}\quad\Rightarrow\quad d(z)=\sqrt[3]{\frac{8qz^2}{\pi\cdot\sigma_d}};$$

117. ZADATAK

Konzola konstantne visine h i promjenjive širine ξ, opterećena je sa F i q. Presjek grede na mjestu uklještenja ima širinu b. Odrediti zakon promjene širine ξ, u zavisnosti od položaja presjeka , da bi greda bila idealnog oblika. Kolika je širina konzole na mjestu c.Poznato je:F,q,l,b,h.

DATO JE:

$F=20\ kN;$
$q=9800\ N/m;$
$l=3{,}5\ m;$
$b=30\ cm;$
$h=25\ cm;$



Rješenje:

Za oblast AC:

$$W_x(z)=W_{x(max)}\frac{M(z)}{M_{max}} \quad ili \quad \frac{\xi(z)h^2}{6}=\frac{bh^2}{6}\cdot\frac{F\left(\frac{l}{2}-z\right)+\frac{ql}{2}\left(\frac{3}{4}l-z\right)}{F\frac{l}{2}+\frac{ql}{2}\cdot\frac{3}{4}l}$$

$$\xi_{(z)}=\frac{b\left[(4F(l-2z)+ql(3l-4z)\right]}{4Fl+3ql^2};$$

$$za\ z=\frac{l}{2}; \quad \xi(\frac{l}{2})=\frac{bql^2}{4Fl+3ql^2}; \quad \xi_{(1,75)}=5{,}63\ cm;$$

za oblastCB:

otporni moment inercije u presjeku z:

$$W_{x(z)}=W_{max}=\frac{M(z)}{M_{max}} \quad ili \quad \xi(z)=\ \xi\left(\frac{l}{2}\right)\frac{q\frac{\left(\frac{l}{2}-z\right)^2}{2}}{\frac{ql^2}{2}} \qquad \dots(*)$$

$$Iz(*)\Rightarrow \quad \xi(z)=\xi\left(\frac{l}{2}\right)\frac{(l-2z)^2}{l^2}$$

$$\xi_{(z)}=0{,}459\cdot10^{-4}(cm^{-1})\cdot(3{,}5-2z)^2;$$

Širina grede na mjestu C: $z=0$

$$\xi_{(0)}=0{,}459\cdot10^{-4}\cdot3{,}5^2\cdot10^4=5{,}63\ cm;$$

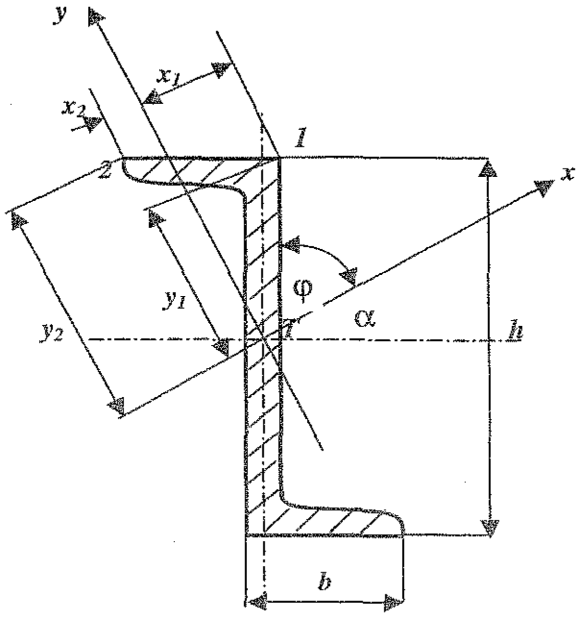
dok je širina grede na mjestu B (za $z=\frac{l}{2}$ *)* $\xi(\frac{l}{2})=0;$

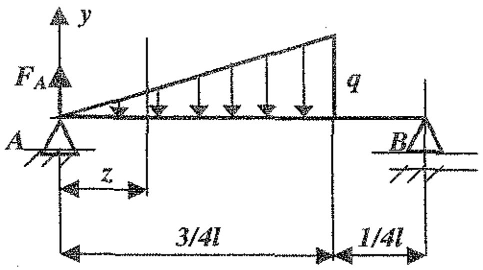
118. ZADATAK

Greda presjeka Z–20 na dva oslonca opterećena je u ravnini koja prolazi kroz rebro profila, silom u obliku trouglastog opterećenja prema skici. Za date vrijednosti q i l, odrediti napone u tačkama 1 i 2 presjeka na mjestu gdje je najveći moment savijanja.

DATO JE:

$q=9500\ N/m;$
$l=5\ m;$
$b=80\ mm;$
$h=200\ mm;$
$tg\alpha=0{,}313;$
$I_x=2300\ cm^4;$
$I_y=357\ cm^4;$





__Rješenje:__

$$\left.\begin{array}{l} iz\sum F_y=0 \\ \sum M_A=0 \end{array}\right\} \Rightarrow F_A=F_B=\frac{3ql}{16}=8906{,}25N;$$

$$M_z=F_A\cdot z-\frac{2qz^3}{9l}=\frac{3ql}{16}\cdot z-\frac{2qz^3}{9l} \quad \dots (*)$$

$$\frac{dM(z)}{dz}=0 \rightarrow z_m=\frac{3l\sqrt{2}}{8}$$

$z_m=2{,}665\ m;$

uvrštavanjem z_m u (*) slijedi:

$$M_{max}=\frac{3\sqrt{2}}{64}ql^2$$

$M_{max}=15744{,}17N/m;$

Sa sl., slijedi:

$$x_1=\frac{h}{2}\ sin\alpha,\ \alpha=arc\ tg\ 0{,}313=17{,}38°;$$

$x_1=2{,}99cm;$

$x_2=-bcos\alpha+\ x_1=-8cm17{,}387+2{,}99\ –4{,}64\ cm;$

$x_2=-4{,}64cm;$

$$y_1=\frac{h}{2}\ cos\alpha\ ;$$

$y_1=9{,}54\ cm;$

$y_2=y_1+bsin\alpha=9{,}54\ cm+8\ sin17{,}38°=11{,}929\ cm\approx 11{,}99\ cm$

$y_2=11{,}99\ cm;$

$$\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha=90-17{,}38=72{,}62;$$

Napon u poprečnom presjeku na mjestu maksimalnog momenta savijanja u tački 1:

$$\sigma_1=M_{max}\left(\frac{\sin\varphi}{I_x}y_1+\frac{\cos\varphi}{I_y}x_1\right)$$

$\sigma_1=101{,}7N/mm^2;$

a u tački 2 je:

$$\sigma_1=M_{max}\left(\frac{\sin\varphi}{I_x}y_2+\frac{\cos\varphi}{I_y}x_2\right)=1{,}72\ kN/cm^2=17{,}20N/mm^2$$

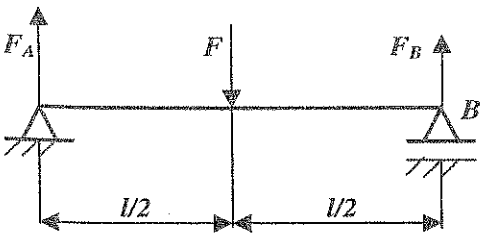
$\sigma_2=17{,}2\ N/mm^2;$

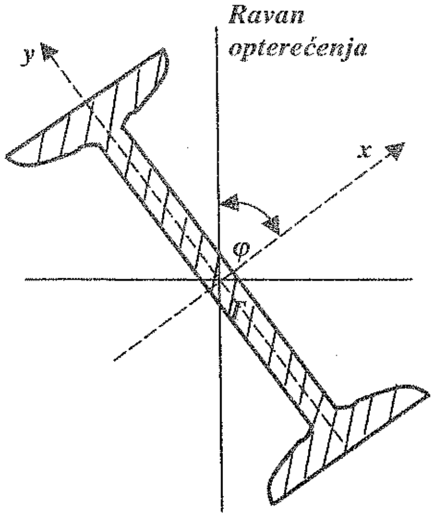
119. ZADATAK

Greda profila I, opterećena je u sredini silom F. Ravan opterećena sa x osom čini ugao φ. Izračunati potreban standardni profil, ako je dato: F, l, σ_d.

DATO JE:

$F=40\ kN$;
$l=4{,}5\ m$;
$\sigma_d=110 N/mm^2=11\ kN/cm^2$;
$\varphi=80°$;





Riješenje:

Napon na savijanje kod kosog savijanja je:

$$\sigma_c=M_{max}\left(\frac{\sin\varphi}{Wx}+\frac{\cos\varphi}{Wx}\right)\leq\sigma_d;$$

$$M_{max}=F_A\cdot\frac{l}{2}=\frac{F}{2}\ \frac{l}{2}=\frac{Fl}{4};$$

$$\sigma_c=\frac{M_{max}}{Wx}\left(\sin\varphi+\frac{W_x}{W_y}\cos\varphi\right)\leq\sigma_d;\ \ldots(*)$$

Označimo sa $k=\dfrac{W_x}{Wy}$, *i usvojimo (pretpostavimo) da je k=4.7, sada iz (*) možemo izračunati* W_x:

$$\frac{M_{max}}{W_{max}}(\sin\varphi+k\cos\varphi)=\sigma_d;$$

$$M_{max}=\frac{\sin\varphi+k\cos\varphi}{\sigma_d}=Fl\frac{(\sin\varphi+k\cos\varphi)}{4\sigma_d}$$

$$W_x=\frac{M_{max}(\sin\varphi+k\cos\varphi)}{\sigma_d}=Fl\frac{(\sin\varphi+k\cos\varphi)}{4\sigma_d}$$

$W_x=736{,}75\ cm^3$;

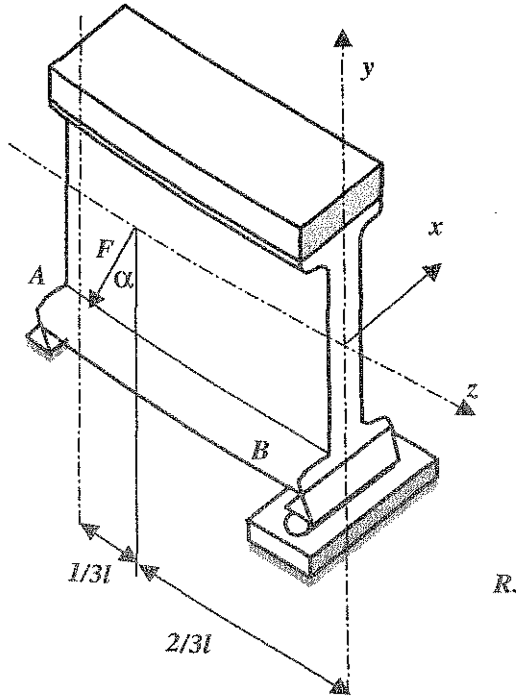
Iz tablice za I profil vidimo da nam naš W_x, *pripada intervalu* $653cm^3=W_{x30}$ *do* $W_{x32}=782\ cm^3$. *Mi usvajamo prvi veći otporni moment* $W_{x32}=782\ cm^3$ *te nam je standarni profil I 32.*

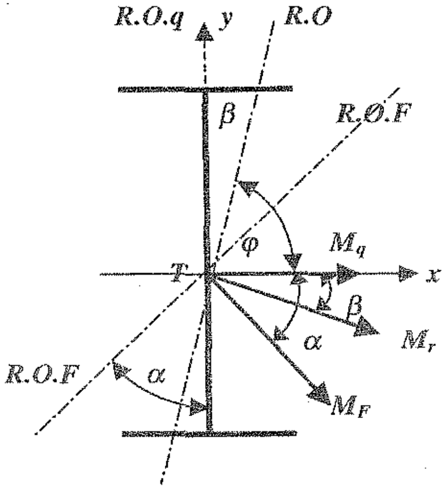
120. ZADATAK

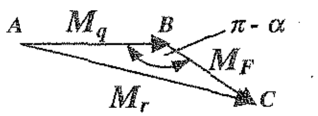
Za dato opterećenje i položaj sile F dimenzionirati gredu standardnog I-profila.

DATO JE:

$q=9000\ N/m$;
$F=25\ kN$;
$l=4\ m$;
$\alpha=20°$;
$\sigma_d=110\ N/mm^2=11\ kN/cm^2$;







Riješenje:

$M_F = F_B \cdot z = \frac{1}{3} F \cdot z, \rightarrow$ *u ravnini R.O.F.*

$M_q = \frac{ql}{2} \cdot z - \frac{qz^2}{2}, \rightarrow$ *u ravni R.O.q.*

Iz $\Delta ABC \Rightarrow M_r^2 = M_q^2 + M_f^2 + 2\, M_q\, M_f(\cos\pi - \alpha)$

$M_r^2 = M_q^2 + M_f^2 + 2M_q M_f \cos\alpha,\ M_F = M_f = f(F),$

$M_r^2 = (\frac{ql}{2} \cdot z - \frac{qz^2}{2})^2 + (\frac{Fz}{3})^2 + 2\frac{Fz}{3}(\frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2})\cos\alpha,$

$$\frac{dM_r}{dz} = 0 \Rightarrow z_m = \frac{\frac{3l}{2} + \frac{F}{q}\cos\alpha - \sqrt{\frac{1}{4}l^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{Fl}{q}\cdot\cos\alpha - \frac{F^2}{q^2}(\frac{8}{9} - \cos^2\alpha)}}{2};$$

$z_m = 3{,}29\ m;$

ovo z_m *mjereno je od oslonca B i predstavlja položaj opasnog presjeka. Za ovako određen položaj treba sada odrediti ugao* β*, odnosno ugao* φ *kao i vrijednosti* $M_{r\,max}$.

$M_F = \frac{1}{3}\ F \cdot z_m;\quad M_F = 27{,}42\ kNm;$

$M_q = \frac{ql}{2} \cdot z_m - q \cdot \frac{z_m^2}{2}\ ;\quad M_q = 10{,}51\ kNm;$

$M_r^2 = M_q^2 + M_F^2 - 2M_q \cdot M_F \cdot \cos\alpha\ ;\quad M_r = M_{rmax} = 37{,}47\ kNm;$

$tg\beta = \frac{M_F \sin\alpha}{M_q + M_F\cos\alpha} = 0{,}25852 \Rightarrow \beta = 14{,}49°;$

$\varphi = 90° - \beta° = 75{,}50°;\qquad \varphi = 75{,}50°;$

Uvjet dimenzioniranja je:

$\sigma = M_{r\,max}(\frac{\sin\varphi}{Wx} + \frac{\cos\varphi}{Wx}) = \frac{M_{r\max}}{Wx}\ (\sin\varphi + \frac{W_x}{Wy}\cos\varphi)\ \leq \sigma_d,$

$k = (\frac{W_X}{Wy}),$ *pretpostavljamo da je* $k = 4{,}2,$

$\frac{M_{r\max}}{W_x}\ (\sin\varphi + k\cos\varphi) = \sigma_d,$

$W_x = \frac{Mr_{max}}{W_x \sigma_d}\ (\sin\varphi + k\cos\varphi);\ W_x = 670{,}94\ cm^3 = 671\ cm^3;$

Iz tablica za I profil da je $W_{x30} = 653cm^3 < 671cm^3 < W_{x32} = 782\ cm$*, uzet ćemo prvi otporni moment, u našem slučaju* W_{x32}*, dakle standardni profil je I 32 za koji su odgovarajuće dimenzije:*

$b = 131\ mm;$

$h = 320\ mm;$

$\delta = 11{,}5\ mm;$

$\delta_1 = 17{,}3\ mm;$

$r = 11{,}5\ mm;$

5. EKSCENTRIČNI PRITISAK I ZATEZANJE

121. ZADATAK

Pri bušenju čelika svrdlo vrši pritisak na materijal silom F. Svrdlo je paralelno sa stubom bušilice. Odrediti najveći i najmanji napon u stubu bušilice, položaj neutralne ose.

DATO JE:

$a=1,5\ m;$

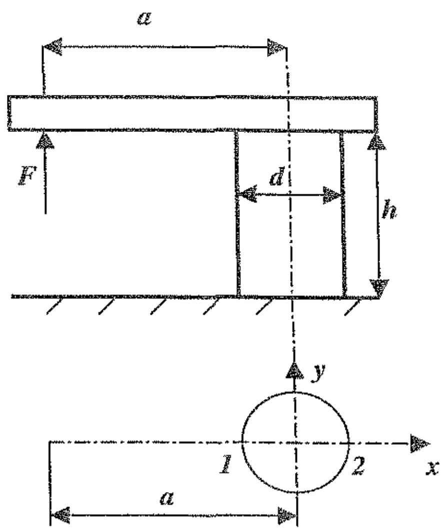
$d=35\ cm;$

$h=2\ m;$

$F=1950\ N;$

$\sigma_1=?$

$\sigma_2=?$



Riješenje:

Napon na pritisak ekscentričnom silom opterećenog presjeka je:

$$\sigma=\frac{F}{A}\left(1+\frac{u\cdot x}{i_y^2}+\frac{v\cdot y}{i_x^2}\right)$$

radijus inercije:

$$i_y^2=\frac{I_x}{A}=\frac{\frac{d^4\pi}{64}}{\frac{d^2\pi}{4}}=\frac{d^2}{16}$$

$u=-a=-1,5\ m;$

$x_1=-\frac{d}{2}=-17,5\ cm$

$v=0;\ x_2=+\frac{d}{2}=+17,5\ cm$

$$\sigma_1=\sigma_{max}=\frac{F}{A}\left[1+\frac{(-a)\cdot\left(-\frac{d}{2}\right)}{\frac{d^2}{16}}\right]$$

$$\sigma_1=\frac{4F}{\pi d^2}\left(1+\frac{8a}{d}\right);$$

$\sigma_1=0,715\ N/mm^2 \Rightarrow$ *istezanje*

$$\sigma_2=\sigma_{min}=\frac{F}{A}\left[1-\frac{(-a)\cdot\left(-\frac{d}{2}\right)}{\frac{d^2}{16}}\right]$$

$$\sigma_2=\frac{4F}{\pi d^2}\left(1-\frac{8a}{d}\right)$$

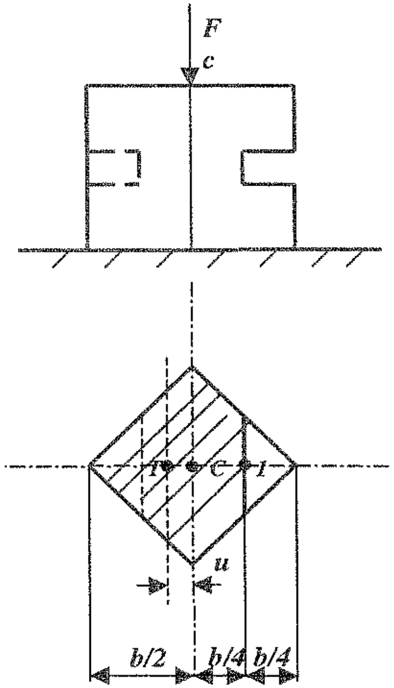
$\sigma_2=\sigma_{min}=-0,6746\ N/mm^2 \Rightarrow$ *pritisak,*

122. ZADATAK

Kratki stub opterećen je silom F. Odrediti za koliki procenat se poveća maksimalni napon pritiska, ako je isječen presjek za b/4,
a) sa jedne strane;
b) sa obje.

DATO JE:

$F=25000\ N=25\ kN$
$b=25\ cm;$



Riješenje:

a) Stub zasječen sa jedne strane:

$$u=\frac{\Sigma A_1 u_i}{\Sigma A_1}=\frac{\frac{b^2}{16}\frac{b}{3}}{\frac{7b^2}{16}}=\frac{b}{21}=1,19\ cm$$

$$\sigma_1=\frac{-2F}{b^2}$$

$$\sigma=-0,8\ N/mm^2=-0,08\ kN/cm^2$$

$$I_y=\frac{b^4}{48}+\frac{u^2b^2}{2}-\left[\frac{\frac{b}{2}\left(\frac{b}{4}\right)^3}{36}+(u+\frac{b}{3})^2\frac{b^2}{16}\right]\approx\frac{0,608b^4}{48}$$

$$I_y\approx 4948\ cm^4$$

$$i_y^2=\frac{I_Y}{A_1}=\frac{0,608\cdot 2b^4}{0,875-48b^2}=\frac{0,695\cdot b^4}{24}$$

$$i_y^2=18,098\approx 18,1\ cm^2$$

$$\sigma_{1max}=-\frac{-16F}{7b^2}\left(1+\frac{u\left(u+\frac{b}{4}\right)}{i_y^2}\right)$$

$$\sigma_{1max}=-0,136\ kN/cm^2=-1,36\ N/mm^2,$$

$$\frac{\sigma_{1\max}}{\sigma}\cdot 100\ \%=130\%$$

b) *Stub zasječen sa obje strane:*

$$A=\frac{b^2}{2}-\frac{2b^2}{16}=\frac{3b^2}{8}=234,37\ cm^2,$$

$$\sigma_{2max}=-\frac{8F}{3b^2}$$

$$\sigma_{2max}=-0,106\ kN/cm^2$$

$$\frac{\sigma_{2\max}}{\sigma}\cdot 100\ \%=133,3\%$$

123. ZADATAK

Za stub datog presjeka odrediti;

a) *Analitički izraz neutralne ose ako ekscentrična sila djeluje u tački D.*

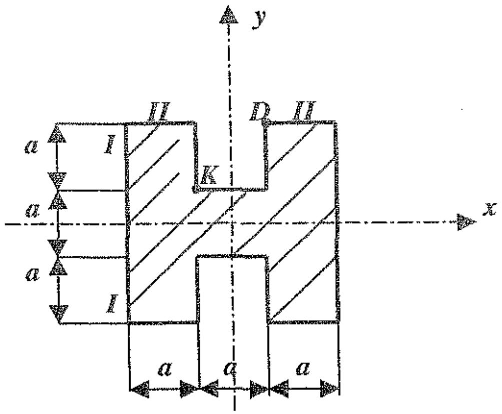
b) *Proračunati karakteristične tačke jezgra presjeka.*

c) *Za neutralnu osu koja prolazi kroz tačke D i K naći odgovarajući položaj ekscentrične sile.*

DATO JE:

$F=30$ kNm;

$a=6$ cm;



Rješenje:

a)

analitički uvjet neutralne ose:

$$1+\frac{xu}{i_y^2}+\frac{yv}{i_x^2}=0 \Rightarrow \frac{x}{\frac{-i_y^2}{u}}+\frac{y}{\frac{-i_x^2}{v}}=1 \quad ...(*)$$

$$I_x=\frac{2a(3a)^3+aa^3}{12}=\frac{55a^4}{12} \quad ...(1)$$

$$A=7a^2 \quad ...(2)$$

$$\Rightarrow i_x^2=\frac{Ix}{A}=\frac{55a^2}{84}$$

$i_x^2=23{,}57\ cm^2$;

$$I_y=\frac{3a(3a)^3-2aa^3}{12}=\frac{79a^4}{12}$$

$$i_y^2=\frac{Iy}{A}=\frac{79a^4}{84}$$

$i_y^2=33{,}85\ cm^2$;

$$u=\frac{a}{2}=3\ cm;$$

$$v=\frac{3a}{2}=9\ cm;$$

Iz (*) slijedi: $$\frac{x\cdot 3}{-33{,}85}+\frac{y\cdot 9}{-23{,}57}=1$$

$$-\frac{x}{11{,}28}-\frac{y}{2{,}618}=1$$ – *jednačina neutralne ose;*

b)

"I" iz tačke jezgra:

tangenta I-I

odsječak na osi x je $x=-\frac{3}{2}a=-9$ cm,

odsječak na osi y je $y=\infty$,

$$x_I=-\frac{i_y^2}{x}=-\frac{i_y^2}{-\frac{3}{2}a}=0,$$

$x_I=3{,}76$ cm

$$y_I=\frac{-i_x^2}{y}=0 \qquad y_i=0$$

Druga tačka je simetrična prvoj i dobije se na analogan način:

$$x_I'=-3{,}76cm, \quad y_I'=0$$

"II" tačke jezgra:

tangenta II-II

odsječak na osi $x=\infty$,

odsječak na y osi je $y=\frac{3}{2}a=9$ cm;

$$y_{II}=-\frac{i_y^2}{x}=-\frac{i_y^2}{\infty}=0, \qquad x_{II}=0$$

$$y_{II}=-\frac{i_x^2}{\frac{3}{2}a}=-2,618 \text{ cm};$$

$$y_{II}=-2,618 \text{cm};$$

Druga tačka je simetričana prvoj : $x_2'=0$; $y_2'=2,618$ cm

c)

jednačina pravca K-D:

$-\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1 \rightarrow$ *odavde slijedi za koordinate sile:*

$$u_1=\frac{i_y^2}{-a}=\frac{79}{84}a$$

$u_1=5,64$ *cm;*

$$v_1=\frac{i_x^2}{a}=\frac{-55a}{84}$$

$$v_1=-3,93 \text{cm}$$

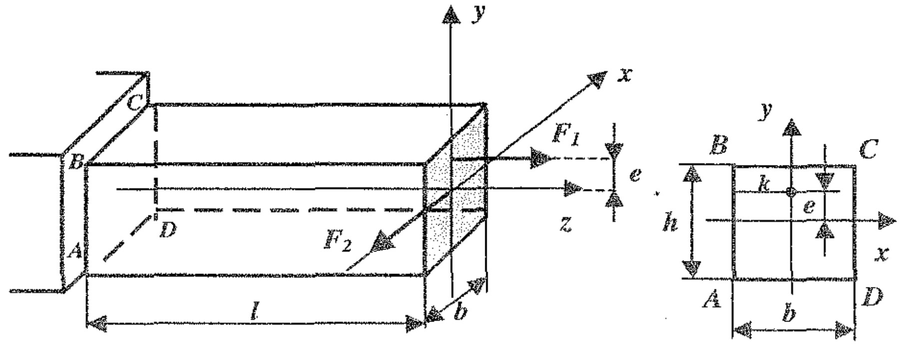
124. ZADATAK

Štap pravougaonog poprečnog presjeka, izložen je uzdužnoj sili F_1, i poprečnoj sili F_2. Odrediti normalne napone u tačkama A, B, C, D, uklještenja.

DATO JE:

$F_1=20$ kN; $F_2=18$ kN ; $b=30$ cm; $h=25$ cm; $l=3$ m; $e=5$ cm;

$\sigma_A=?$; $\sigma_B=?$; $\sigma_C=?$; $\sigma_D=?$



Rješenja:

Ukupni napon u tački A:

$$\sigma_A=\frac{F_1}{A}\left(1-e\frac{\frac{h}{2}}{i_x^2}\right)-\frac{F_2 l}{W_y}=-\frac{F_1}{2bh}-\frac{6F_2 l}{bh^2}=$$

$\sigma_A= -1,728$ kN/cm^2; *slijedi zaključak da je u tački A pritisak.*

Ukupni napon u tački B:

$$\sigma_B=\frac{F_1}{A}\left(1+e\frac{\frac{h}{2}}{i_x^2}\right)-\frac{F_2 l}{W_y}=-\frac{5F_1}{2bh}-\frac{6F_2 l}{bh^2}=$$

$\sigma_B= -1,6613$ kN/cm^2; $\rightarrow$ *pritisak.*

Ukupni napon u tački C:

$$\sigma_C=\frac{F_1}{A}\left(1+e\frac{\frac{h}{2}}{i_x^2}\right)+\frac{F_2 l}{W_y}=\frac{5F_1}{2bh}+\frac{6F_2 l}{bh^2}$$

$\sigma_C= 1,7946$ kN/cm^2; $\rightarrow$ *istezanje.*

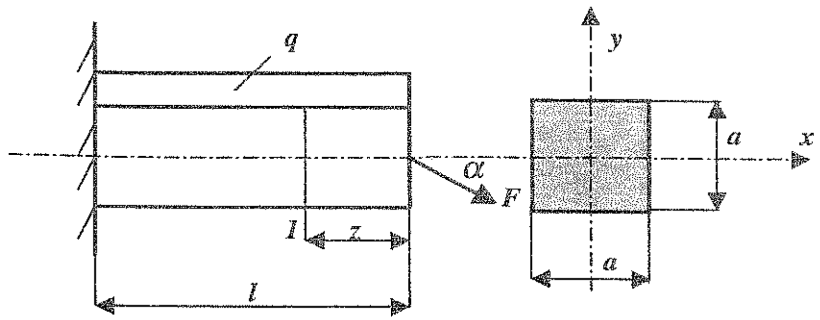
$\sigma_D= 1,727$ kN/cm^2; $\rightarrow$ *istezanje.*

125. ZADATAK

Greda kvadratnog presjeka a, opterećena je silom F i ravnomjernim teretom q. Sila djeluje pod uglom α. Odrediti presjek u kome će se pojaviti najveći normalni napon i veličinu ovog.

DATO JE:

$a=25\ cm$;
$F=25\ kN$;
$q=8000\ N/m$;
$l=2,5\ m$;
$\alpha=20°$;



Riješenje:

Ukupni napon ovako opterećene grede je:

$$\sigma_1=\frac{qz^2}{2W_x}+F\frac{z\sin\alpha}{W_x}+F\frac{\cos\alpha}{A};$$

$$\frac{dM_1}{dz}=0\ \Rightarrow\ z_m=\frac{\sin\alpha}{q}F$$

$z_m=1,068\ m\approx 1,1\ m$;

$A=a^2=625\ cm^2$;

$W_x=\frac{a^3}{6}=2604,16\ cm^3$;

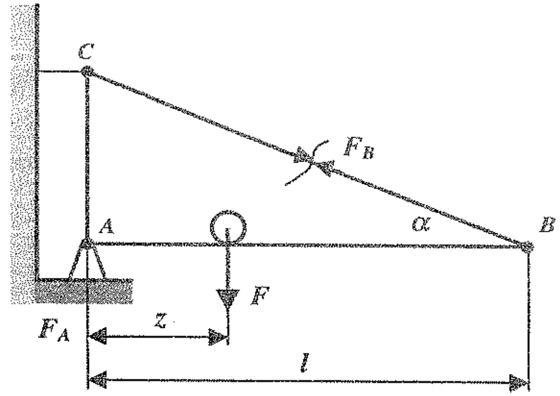
$\sigma_{1max}=2,13\ N/mm^2$;

126. ZADATAK

Dimenzionirati kransku stazu AB presjeka i ako je opterećena silom F. Poznato je još α, l, σ_d.

DATO JE:

$F=130\ kN$;
$l=4\ m$;
$\alpha=40°$;
$\sigma_d=110\ N/mm^2=11\ kN/cm^2$;



Riješenje:

$$\sum M_A=F_B\cdot\sin\alpha\cdot l-F\cdot 2=0\Rightarrow F_B=\frac{F\cdot z}{l\sin\alpha}$$

$$F_A=F-F_B\cdot\sin\alpha=F-F\cdot\frac{z}{l}=\frac{F(l-z)}{l};$$

$M_{(z)}=F_A\cdot z=\frac{F(l-z)}{l}\cdot z$ → *moment na savijanje na rastojanju z od oslonca A.*

Ukupni napon je jednak zbiru napona na pritisak savijanja:

$$\sigma_{(z)}=\sigma_{(z)f}+\sigma_{(z)c}=\frac{M_z}{W_x}+\frac{F_B\cos\alpha}{A};$$

$\sigma_{(z)max}\le\sigma_d$;

$$\sigma_{(z)}=F\frac{(zl-z^2)}{W_x l}+\frac{Fz}{Al}ctg\alpha\ ;$$

Uvjet ekstremnog (maximalnog) napona je:

$$\frac{d\sigma_z}{d_z}=0\Rightarrow z_m=\frac{1}{2}l+\frac{W_x}{2A}ctg\alpha, \rightarrow \text{kritičan presjek,}$$

$$\sigma_{zm}=\sigma_{(z)max}=\frac{F}{4lW_x}\cdot\left[l^2-\frac{W^2}{A^2}\cdot ctg^2\alpha\right]+\frac{F}{2lA}\left(\frac{l}{2}+\frac{W_x}{2A}\right)\leq\sigma_d;$$

Prema podacima za standarde I profile treba odabrati probanjem par najpovoljnijih vrijednosti W_x i A koji će zadovoljavati gornju nejednačinu, ovako određenom paru odgovara određen broj profila.

Prvi standardni I profil, ujedno i najpovoljniji, koji zadovoljava gornju nejednačinu je

I 38, ako uzmemo taj profil, onda je:

$\sigma_{max}=10{,}61\ kN/cm^2 < 11\ kN/cm^2$.

OTPORNOST MATERIJALA II

6. ELASTIČNE LINIJE

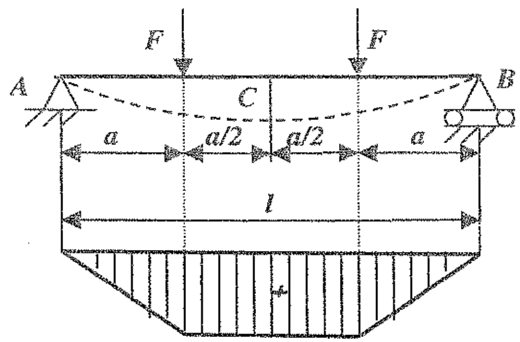
STATIČKI ODREĐENI ZADACI

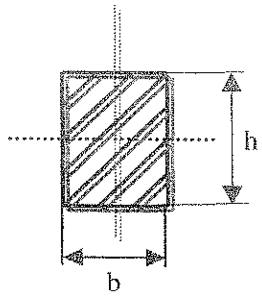
127. ZADATAK

Za gredu na dva oslonca opterećenu zadatim teretom odrediti maximalni normalni napon i tangecionalni napon te naći ugib na sredini grede. Greda je pravougaonog poprečnog presjeka.

DATO JE:

bxh=30x50 mm;
a=0,7m;l=2,1m;
$F=15kN;E=2\cdot10^5\ MN/m^2$;
$I=800\ cm^4$





Rješenje:

$y_c=y_1^C+y_2^C \quad y_1^C=y_2^C \Rightarrow y^C=2\cdot y_2^C;$

$$y_C=2\cdot\frac{F\cdot l^3}{6\cdot E\cdot I}\cdot\left\{\frac{a}{3a}\cdot\frac{3a}{6a}\left[1-\left(\frac{a}{3a}^2\right)-\left(\frac{3a}{6a}^2\right)\right]\right\}=\frac{23}{648}\cdot\frac{F\cdot l^3}{E\cdot I}\Rightarrow \quad y_C=3\ mm;$$

$F_A=F_B=F$, $M_{max}=F_A\cdot a=F\cdot a;$

$$\sigma_{max}=\frac{M_{\max}}{W_x}=\frac{M_{\max}}{I_x}\cdot\frac{h}{2}=\frac{6\cdot F\cdot a}{bh_2}=84\frac{kN}{cm^2}; \quad \sigma_{max}=84\ kN/cm^2;$$

$$Ft_{max}=F; \quad S_x=b\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{4}=(\frac{b\cdot h^2}{8})l_x=(\frac{b\cdot h^3}{12}); \quad \xi=\frac{b}{2};$$

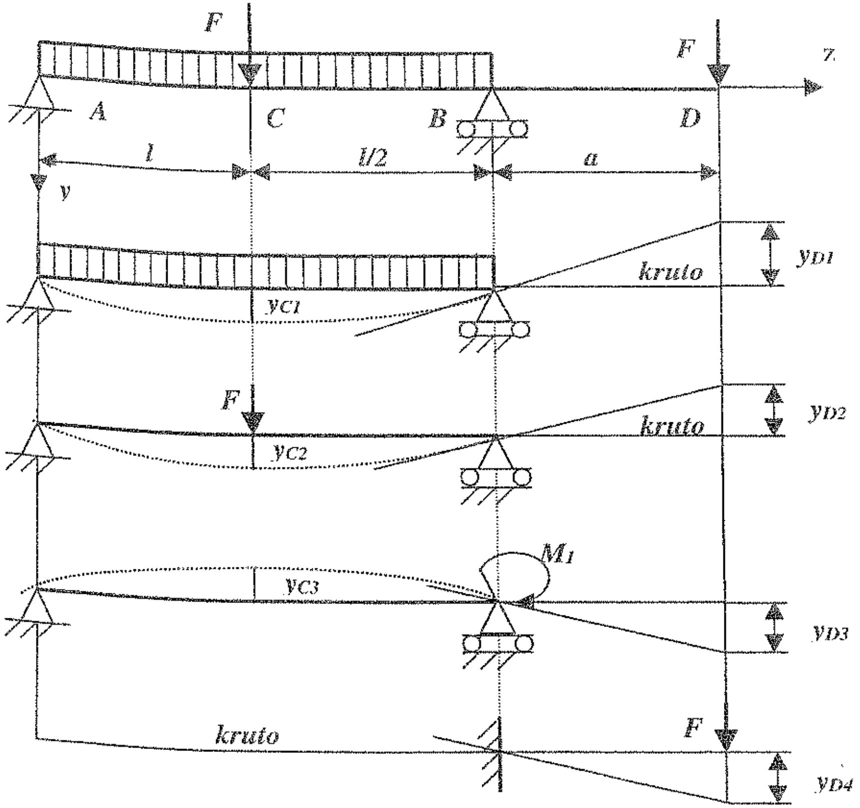
$$\tau_{max}=\frac{Ft_{\max}\cdot S_X}{I_X\cdot\xi}=\frac{3F}{bh}=3\frac{kN}{cm^2}\Rightarrow \quad \tau_{max}=3\ kN/cm^2$$

128. ZADATAK

Greda na jednom kraju prepuštena, opterećena je silama F i q. Odrediti ugib tačaka C i D.

DATO JE:

$F=13kN;$
$q=8\ kN/m;$
$l=2m; a=0{,}5m,$
$I=750\ cm^4;$
$E=2{,}1\cdot10^5\ MN/m^2;$



Rješenje:

$M_1 = -F\cdot a = -6{,}5kNm;$

$$y_C = y_{C1} + y_{C2} + y_{C3}$$

$$y_{C1} = \frac{5\cdot q\cdot l^4}{384EI};$$

$$y_{C2} = \frac{F\cdot l^3}{48EI};$$

$$y_{C3} = \frac{M\cdot l^2}{16EI};$$

$$y_C = \frac{5\cdot q\cdot l^4}{384EI} + \frac{F\cdot l^3}{48EI} - \frac{M\cdot l^2}{16EI} = 1{,}54mm \Rightarrow$$

$y_C = 1{,}54\ mm;$

$y_D = -Y_{D1} - Y_{D2} + Y_{D3} + Y_{D4};$

$y_{D1} = \beta_1\cdot a;$

$y_{D2} = \beta_2\cdot a;$

$y_{D3} = \beta_3\cdot a;$

$$\beta_1 = \frac{q\cdot l^3}{24EI};$$

$$\beta_2 = \frac{F\cdot l^2}{16EI};$$

$$\beta_3 = \frac{M\cdot l}{3EI};$$

$$y_{D4} = \frac{F\cdot a^3}{3EI};$$

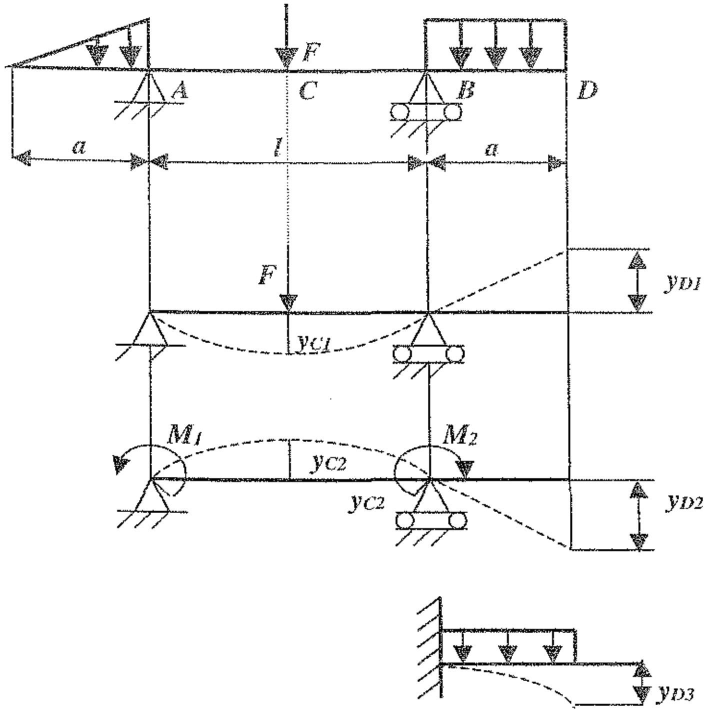
$y_D = 0{,}85\ mm;$

129. ZADATAK

Za gredu na slici naći ugibe u tačkama C i D:

DATO JE:

$l=1{,}5m;$
$a=0{,}3m;$
$q=5kN/m;$
$E=2{,}1\cdot 10^5 MN/m^2;$
$I=500cm^4;$
$F=12kN;$



$M_1=-\frac{1}{2}\cdot q\cdot a\cdot \frac{a}{3}=-0{,}075kNm\Rightarrow$

$M_1=-0{,}075kNm;$

$M_2=-qa\frac{a}{2}=-q\frac{a^2}{2}=-0{,}225kNm\Rightarrow$

$M_2=-0{,}225kNm;$

$y_{C1}=\frac{F\cdot l^3}{48EI};$

$y_{C2}=\frac{l^2}{6EI}\cdot\frac{l}{2l}\cdot\left(1-\frac{l}{2l}\right)\cdot\left[M_1\left(-2-\frac{l}{2l}\right)+M_2\left(1+\frac{l}{2l}\right)\right]=$

$y_{C2}=\frac{l^2}{4EI}\cdot(M_1+M_2);$

$y_C=0{,}64\ mm;$

$y_D=-y_{D1}+y_{D2}+y_{D3}=-\beta_1\cdot a+\beta_2\cdot a+y_{D3};$

$\beta_1=\frac{F\cdot l^2}{16EI};$

$\beta_2=\frac{1}{16EI}\cdot(M_1+2M_2);$

$y_{D3}=\frac{q\cdot l^4}{8EI};$

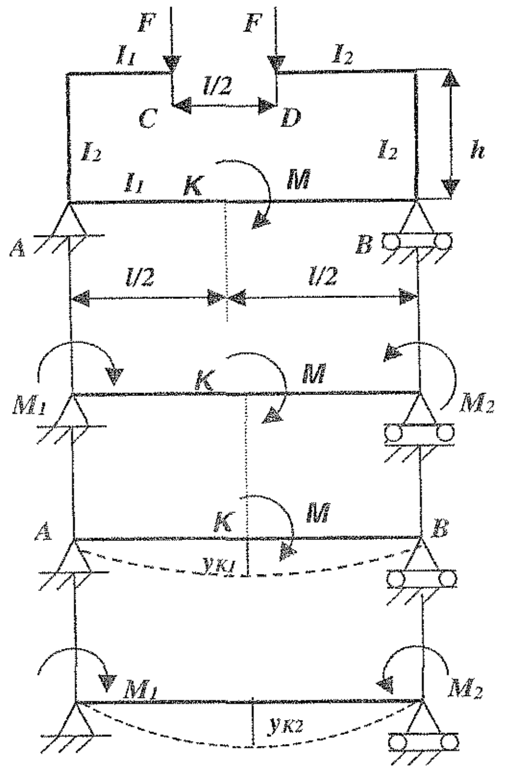
$y_D=0{,}4\ mm;$

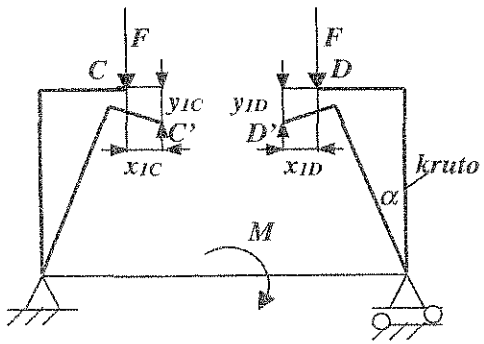
130. ZADATAK

Ram prema slici opterećen je silama F i momentom M. Odrediti vrijednost sile F i momenta ako je poznato vertikalno pomjeranje tačaka C, D, K, te naći horizontalno pomjeranje tačaka C, D.

DATO JE:

$I_1=500\ cm^4;$
$I_2=1000\ cm^4;$
$h=1m; l=2m; E\check{c};$
$y_C=3mm;$
$y_K=2{,}3mm;$





$y_K = y_{K1} + y_{K2}$;

$$y_{K1} = \frac{M \cdot l^2}{6EI}\left\{\frac{1}{2}\cdot\left[(1-3(\frac{1}{4})^2-(\frac{1}{2})^2\right]\right\} = \frac{3\cdot M \cdot l^2}{64EI_1};$$

$$y_{K1} = \frac{3Ml^2}{64EI_1} + \frac{F\frac{l}{4}l^2}{8EI_1}; \quad M_1 = F\frac{l}{4}$$

$$y_C = y_D = y_{1C} + y_{2C} + y_{3C} = \alpha\frac{l}{4} + \frac{F\left(\frac{l}{4}\right)^3}{3EI_1} + \gamma\cdot\frac{l}{4}$$

$$\gamma = \frac{F\cdot\frac{l}{4}\cdot h}{E\cdot I_2}$$

$$\alpha = \frac{Ml}{6EI}\left[1-3\left(\frac{l}{2l}\right)^2\right] = \frac{Ml}{24EI}$$

$$y_C = y_D = \frac{Ml}{24EI_1}\cdot\frac{l}{4} + \frac{Fl^3}{192EI_1} + \frac{Flh}{4EI_2}\cdot\frac{l}{4}$$

Horiz. pomjer. presjeka C, D:

$$X_C = X_D = X_{1C} + X_{2C} = \alpha\cdot h + \frac{F\cdot\frac{l}{4}h^2}{2EI_2} = \frac{Ml}{24EI_1}\cdot h + \frac{Flh^2}{8EI_2}$$

$F = 8{,}3\,kN$

$M = -31{,}5\,kNm$

131. ZADATAK

Prosta greda raspona l, opterećena je sa dva jednaka koncentrična tereta F. Odrediti ugib presjeka na sredini raspona neposrednom integracijom.

DATO JE:

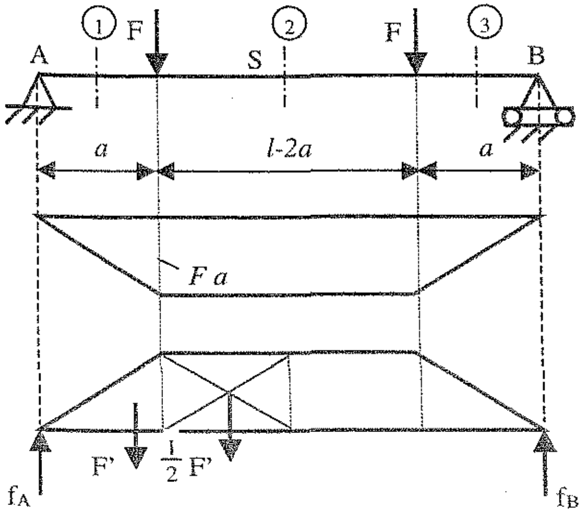
$F=10kN$;

$l=3m$;

$I_X=9800cm^4$;

$a=0{,}5m$;

$E=2\cdot10^5 N/mm^2$;



$F_A = F_B = F$

diferencijalna jedančina:

$EI_Y'' = -M\cdot(z)$

$EI_Y'' = -F_A\cdot z\,|+F(z-a)\,|+F[z-(l-a)],$

$EI_Y' = -F_A\cdot\frac{z^2}{2}+C_1\cdot z+C2\,|+F\cdot(z-a)\,|+F\cdot[z-(l-a)],$

$Y_S=\frac{1}{24}F\cdot a\cdot\frac{3l^2-4a^2}{El}$

$Y_S=0,276$ *mm;*

$\Sigma Yi=0$

$\mathcal{F}'=\frac{1}{2}a^2\cdot F;$

$\mathcal{F}''=F\cdot a(l-2a);$

$\mathcal{F}_A+\mathcal{F}_B=2\,\mathcal{F}'+\mathcal{F}''=2\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot F\cdot a+F\cdot a\cdot(l-2a);$

$\mathcal{F}_A=\mathcal{F}_B=\frac{1}{2}\cdot F\cdot a\cdot(l\cdot a);$

$\alpha=-\beta=3,18^{-4};$

132. ZADATAK

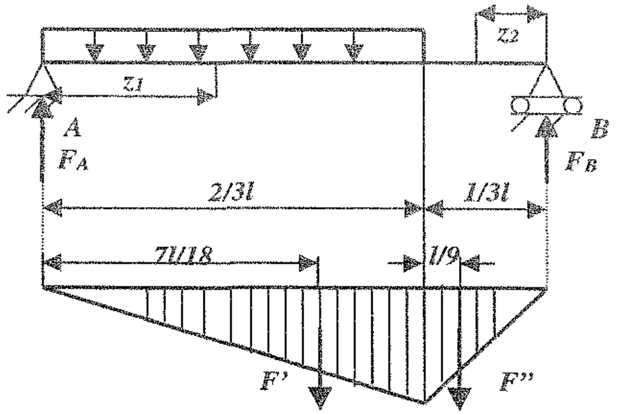
Prosta greda je opterećena na 2/3 raspona s lijevog kraja ravnomjerno podijeljenim teretom q(kN/m). Odrediti nagibe tangente el. linije na osloncima i ugib presjeka C na 2/3 raspona:

a) metodom integrisanja

b) grafo-analitičkom metodom

DATO JE:

$q=5$ *kN/m;*
$l=2m;$
$I=1000cm^4;$
$E=2\cdot10^5 N/mm^2;$



a)

$\Sigma M^A=0$

$F_B\cdot l-q\cdot\frac{2}{3}\cdot l\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot l=0;$

$F_A=\frac{4}{9}\cdot q\cdot l=\frac{80}{9}$ *kN;*

$F_B=\frac{2}{9}\cdot q\cdot l=\frac{20}{9}$ *kN;*

AC:

$M_1^l=F_A\cdot z_1-\frac{1}{2}\cdot q\cdot z_1^2;$

$EIy_1'' = -F_A \cdot z_1 + \frac{1}{2} \cdot q \cdot z_1^2;$

$EIy_1' = -\frac{1}{2} \cdot F_A \cdot z_1^2 + \frac{1}{6} \cdot q \cdot z_1^3 + C_1;$

$EIy_1 = -\frac{1}{6} \cdot F_A z_1^3 + \frac{1}{24} \cdot q \cdot z_1^4 + C_1 z + C_2$

BC:

$M_2^d = F_B \cdot z_2$

$EIy_2'' = -F_B z^2;$

$EIy_2' = -\frac{1}{2} F_B z^2 + D_1;$

$EIy_2 = -\frac{1}{6} F_B \cdot z_2^3 + D_1 z_2 + D_2;$

1°

za $z_1=0$ $y_1=0 \Rightarrow C_2=0$

$z_2=0$ $y_2=0 \Rightarrow D_2=0$

2°

$$\text{za } z_1 = \frac{2}{3} \cdot l \Big\} y_1 = y_2 \Rightarrow C_1 = \frac{8}{243}\left(q \cdot l^3\right)$$

$$z_2 = \frac{1}{3} \cdot l \Big\} y_1' = y_2' \Rightarrow D_1 = \frac{7}{243}\left(q \cdot l^3\right)$$

Nagibi:

$$\alpha = \frac{C_1}{E \cdot I} = \frac{8}{243} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I};$$

$$\beta = -\frac{7}{243} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I};$$

b)

$$M_C = F_A \frac{2}{3} \cdot l - q \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l = \frac{2}{27} \cdot (q \cdot l^2);$$

$$M_{(Z)} = F_A \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = \frac{1}{18} \cdot (q \cdot l^2) \cdot \left[8 \cdot \left(\frac{z}{l}\right) - 9\left(\frac{z}{l}\right)^2\right]$$

Površina dijagrama momenta su:

$$F' = \int_0^{2/3l} M dz = \int_0^{2/3l} \left\{ \frac{1}{18} q l^2 \left[8 \cdot \frac{z}{l} - 9\left(\frac{z}{l}\right)^2 \right] \right\} dz = \frac{4}{81} q l^3;$$

$$F'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{27} (q \cdot l^2);$$

$$z' = \frac{1}{F'} \int_0^{2/3l} M z dz = \frac{7}{18} \cdot l;$$

$$z'' = \frac{2}{3} \cdot l + \frac{1}{9} \cdot l = \frac{7}{9} \cdot l;$$

Fiktivni otpori oslonaca su: $F_A + F_B = F' + F'';$

$\sum M^A = 0$

$$F_B \cdot l - F' \cdot \frac{7}{18} - F'' \cdot \frac{7}{9} = 0 \Rightarrow$$

$$F_B = \frac{7}{243} (q \cdot l^3);$$

$$F_A = \frac{8}{243} \cdot q \cdot l^3;$$

$$\alpha = \frac{F_A}{EI};$$

$$\beta = -\frac{F_B}{EI};$$

133. ZADATAK

Za konzolu opterećenu prema datoj slici metodom direktnog integrisanja, izvesti jednačinu elastične linije i naći ugib slobodnog kraja konzole.

DATO JE:

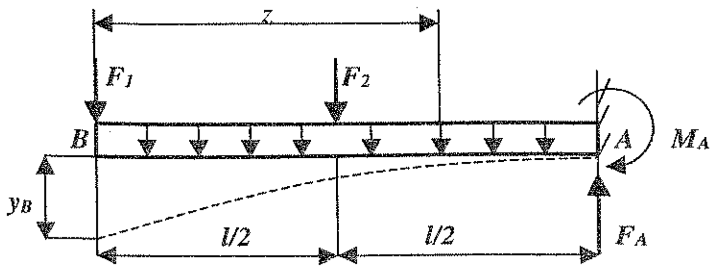
$F_1 = 8kN;$

$F_2 = 5kN;$

$q = 1kN; l = 2m;$

$E = 2 \cdot 10^5 N/mm^2;$

$I_X = 9800 cm^4;$



$F_A=F_1+F_2+q\cdot l=15kN;$

$\Sigma M_A=0;$

$$-M_A+F_1 l+F_2\frac{l}{2}+q\cdot l\cdot\frac{l}{2}=0;$$

$$M_A=F_1\cdot l+F_2\cdot\frac{l}{2}+q\cdot\frac{l^2}{2}\quad\Rightarrow\quad M_A=23\ kNm;$$

$$M_1=-F_1 z-q\cdot\frac{z^2}{2}\quad (interval\ BC);$$

$$M_2=-F_1\cdot z-\frac{q\cdot z^2}{2}-F_2(z-\frac{l}{2});$$

$$M_{(Z)}=-F_1\cdot z-\frac{q\cdot z^2}{2}\Big|_1-F_2(z-\frac{l}{2})\Big|_2;$$

$$EI_Y''=F_1\cdot z+\frac{q}{2}z^2\Big|+F_2\cdot(z-\frac{l}{2});$$

$$EI_Y'=\frac{F_1}{2}\cdot z^2+\frac{q}{6}\cdot z^3+C_1+\frac{F_2\cdot(z-\frac{l}{2})^2}{2};$$

$$EI_Y=\frac{F_1}{6\cdot}z^3+\frac{q}{24}\cdot z^4+C_1 z+\frac{F_2\cdot\left(z-\left(\frac{l}{2}\right)^3\right)}{6}+C_2;$$

Za $z=l$, $y'=0$ $\qquad C_1=-F_1\cdot\frac{l^2}{2}-F_2\cdot\frac{l^2}{8}-\frac{q\cdot l^3}{6};$

$y=0$ $\qquad C_2=F_1\cdot\frac{l^3}{3}+\frac{5}{48}\cdot F_2\cdot l^3+\frac{ql^4}{48};$

$$y=\frac{l^3}{48\cdot E\cdot I}\cdot(16\cdot F_1-F_2+6\cdot q\cdot l);\qquad y=1,4\ mm;$$

7. STATIČKI NEODREĐENI ZADACI

134. ZADATAK

Kontinualni nosač ABC raspona L=a+b, oslonjen je na tri oslonca i opterećenjem po cijelom rasponu jednoliko podjeljenim teretom q. Odrediti otpore oslonaca:

DATO JE:

$a=b=l=1/2L=3\ m;$

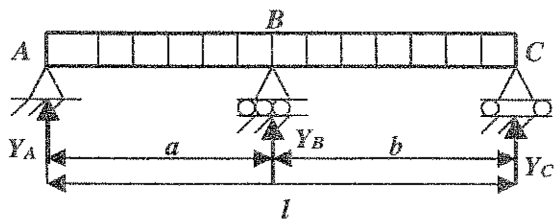
$q=10\ kN/m;$

$$y_B=y(q)+y(Y)=\frac{q\cdot L^4}{24EI}\cdot\left[\frac{a}{L}-2\left(\frac{a}{L}\right)^3+\left(\frac{a}{L}\right)^4\right]-\frac{Y_B\cdot L^3}{48EI}=0;$$

$$y_B=\frac{5q(2l)^4}{384\cdot E\cdot I}\cdot\frac{Y_B\cdot(2l)^3}{48EI}=0$$

$$y_B=\frac{5}{4}\cdot(q\cdot l)$$

$y_B=37,5\ kN$



Otpori oslonaca:

$\Sigma Yi=0: Y_A+Y_C+Y_B-q\cdot 2\cdot l=0$

$\Sigma M^A=0: Y_B\cdot l+Y_C\cdot 2\cdot l-q\cdot 2\cdot l\cdot l=0\Rightarrow$

$Y_C=-8,75kN;$

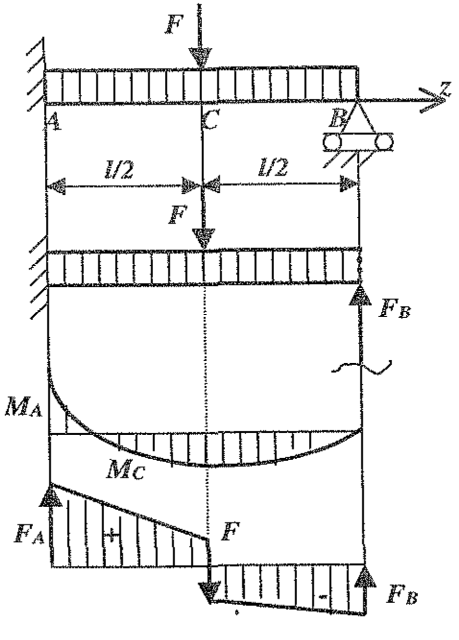
$Y_A=31,25\ kN;$

135. ZADATAK

Nosač AB, dužine l, const. momenta inercije, uklješten je na jednom i slobodno oslonjen na drugom kraju, opterećen je po cijeloj dužini teretom q i silom F=ql na sredini dužine. Nacrtati statičke dijagrame nosača i naći ugib na polovini dužine.

DATO JE:

$q=12kN/m;$
$l=1{,}8m;$
$F=q\cdot l;$
$E=2{,}1\cdot10^5 N/mm^2;$
$I=8000cm^4;$



Riješenje:

zadatak je 1x statički neodređen;

F_B-*statički prekobrojna* $Y_B=0;$

$y_B=y(F)+y(q)-y(F_B)=0;$

$$\frac{\frac{5}{48}\cdot F\cdot l^3}{E\cdot I}+\frac{q\cdot l^4}{8\cdot E\cdot I}-\frac{F_B\cdot l^3}{3EI}=0;$$

$$F_B=\frac{11}{16}(q\cdot l)=\frac{11}{16}F;$$

$\Sigma Yi=0$:

$$F_A=\frac{21}{16}F;\quad M_A=-\frac{5}{16}F\cdot l;\quad M_C=\frac{7}{32}F\cdot l;$$

$$y_C=y(F)+y(q)-y(F_B)=\frac{F\cdot l^3}{24EI}+\frac{17\cdot F\cdot l^3}{16\cdot 24EI}-\frac{5\cdot F_B l^3}{2\cdot 24EI}=\frac{11\cdot Fl^3}{24\cdot 32EI};$$

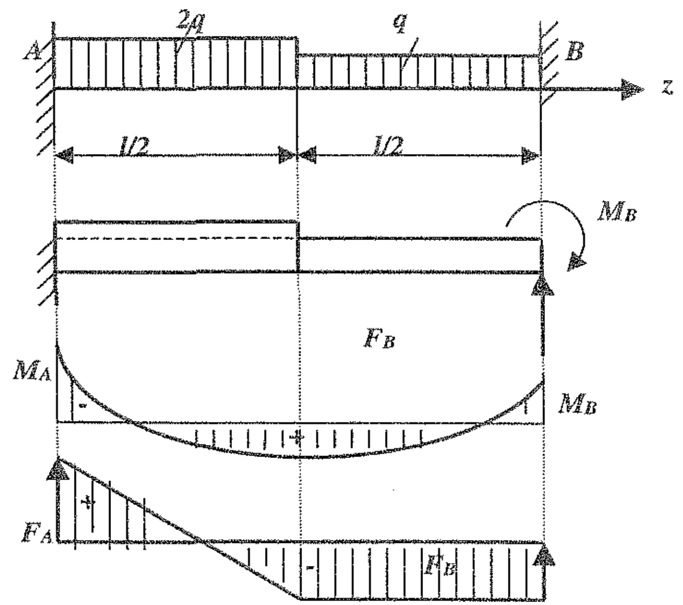
$y_C=0{,}107mm;$

136. ZADATAK

Nosač AB, dužine l, const. momenta inercije, uklješten na oba kraja, opterećen je ravnomjernim teretom 2q do polovine raspona i sa q na preostalom dijelu. Nacrtati statičke dijagrame.

DATO JE:

$q=5Kn;$
$l=2m;$



zadatak je 2 x statički neodređen

slovi: $y_B=0\ldots(1);\beta_B=0\ldots(2);$

) ... $y_B=y(q)+y(q')+y(M_B)-y(F_B)=0$

$$\frac{q\cdot l^4}{\cdot E\cdot I}+\frac{7\cdot q\cdot l^4}{384\cdot E\cdot I}+\frac{M_B\cdot l^2}{2\cdot E\cdot I}-\frac{F_B\cdot l^3}{3\cdot E\cdot I}=0,$$

2) ... $\beta_B=\beta(q)+\beta(q')+\beta(M_B)-\beta(F_B)=0$

$$\frac{\cdot l^3}{5EI}+\frac{q\cdot l^3}{48EI}+\frac{M_B\cdot l}{EI}-\frac{F_B\cdot l}{2EI}=0;$$

$_B=\frac{38}{64}\cdot q\cdot l$

$_B=5{,}92kN;$

$_A=\frac{58}{64}\cdot q\cdot l$

$_A=9{,}06kN;$

$M_B=\frac{7}{64}\cdot q\cdot l^2$

$M_B=2{,}18kNm;$

$M_A=-\frac{9}{64}\cdot q\cdot l^2$

$M_A=-2{,}81kNm;$

$M_C=\frac{4}{64}\cdot q\cdot l^2$

$M_C=1{,}25\ kNm;$

37. ZADATAK

Kontinualni nosač ACB, oslonjen je na tri oslonca, opterećen je ravnomjerno teretom q i spregom M prema datoj slici. Nacrtati statičke dijagrame nosača. Dimenzionirati nosač ako je poprečni presjek [profil i odrediti max tangentni napon.

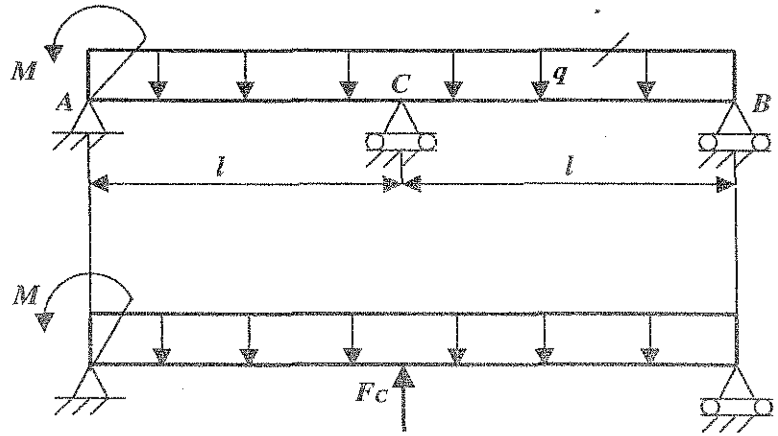
DATO JE:

$l=2\ m;$
$q=20\ kN/m;$
$M=q\cdot l^2/2=40\ kNm;$
$\sigma_d=125\ N/mm^2.$

zadatak je 1 x SN

$y_C=0$ uslov deformacije

$$\frac{5}{384}\cdot\frac{q\cdot(2\cdot l)^4}{E\cdot l}-\frac{M\cdot(2\cdot l)^2}{16El}-\frac{F_C(2\cdot l)^3}{48El}=0;\quad F_C=\frac{q\cdot l}{2}=20kN;$$



$F_B=20kN;$

$F_A=q\cdot l=40kN;$

$M_C=-M+F_A\cdot l-q\cdot\frac{l^2}{2}=0;$

$M_{max}=M=40kNm;$

$W_X=\frac{M_{max}}{\sigma_d}=320\ cm^3;$

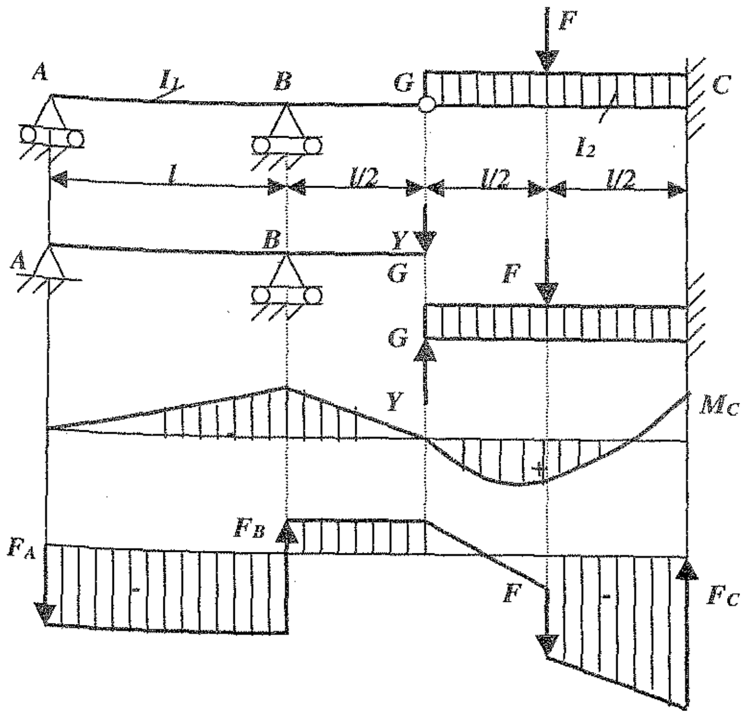
Za profil [26 iz tablica je

$W_X=371\ cm^3;I_X=4820cm^4;S_X=221cm^3;$

$$\tau_{max}=\frac{F_A\cdot S_X}{I_X\cdot\xi}\Rightarrow\tau_{max}=18{,}3\ N/mm^2$$

138. ZADATAK

Nosač ABG, momenta inercije I_1 i nosač GC momenta inercije I_2, vezani su u G zglobom i opterećeni prema datoj slici. Odrediti otpore oslonaca, otpor i moment uklještenja i nacrtati statički dijagram nosača. Izračunati nagib zgloba.



zadatak je 1x statički neodređen

Y statički prekobrojna

$y_G^{(GR)} = y_G^{(konz)}$ *uslov deformacije.*

$$\frac{M_B \cdot l}{3EI_1} \cdot \frac{l}{2} + \frac{Y \cdot (\frac{l}{2})^3}{3EI_1} = Y_G^{(GR)};$$

$$Y_G^{(konz)} = \frac{q \cdot l^4}{8EI_2} + \frac{5 \cdot F \cdot l^3}{48EI_2} - \frac{Y \cdot l^3}{3EI_2};$$

$$\frac{M_B \cdot l^2}{6EI_1} + \frac{Y \cdot l^3}{24EI_1} = \frac{q \cdot l^4}{8EI_2} + \frac{5 \cdot F \cdot l^3}{48EI_2} - \frac{Y \cdot l^3}{3EI_2}$$

$Y = \frac{22}{56} F$

$Y = 7{,}9\ kN;$

$F_A = -\frac{11}{56} F$

$F_A = -3{,}9\ kN;$

$F_B = \frac{33}{56} F$

$F_B = 11{,}8\ kN;$

$F_C = \frac{90}{56} F$

$F_C = 32{,}1 kN;$

$M_C = \frac{17}{28} F\, l$

$M_C = 48{,}6\ kNm;$

$M_B = Y \cdot \frac{l}{2}$

$M_B = 15{,}8\ kNm;$

$y_G = \frac{Y \cdot l^3}{8 \cdot E \cdot I_1}$

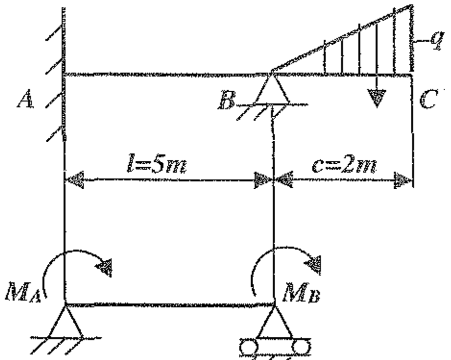
$y_G = 8{,}7\ mm;$

139. ZADATAK

Nosač ABC horizontalno je ukliješten kod A i oslanja se na pokretni oslonac B. AB=l, a na slobodnom dijelu BC=c opterećen je kontinualnim opterećenjem q=20kN/m. Poprečni presjek grede je profil INP20. Proračunati širinu i dužinu lamela, debljine 10 mm koji treba dodati pojasevima profila pa da bude $\sigma f < 10kN/cm^2$.

$$M_B=\frac{1}{2}\cdot q\cdot 2\cdot\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{4q}{3}$$

$$M_B=\frac{80}{3}\ kNm=26{,}67\ kNm;$$



$$\alpha = 0$$

$$\frac{1}{3}\cdot M_A\cdot l-\frac{1}{6}\cdot M_B\cdot l=0$$

$$M_A=\frac{M_B}{2}=\frac{40}{3}\ kNm;$$

$$\sigma=\frac{M}{W_X}\le\sigma_{df}$$

$$W_x=\frac{M_B}{\sigma_{df}}=266{,}7\ cm^3$$

$$\Delta W_X=52{,}7cm^3;$$

140. ZADATAK

Konzola,dužine l_1, horizontalno ukliǰštena na jednom kraju, naliježe drugim krajem, na sredinu obostrano ukljěštene grede, dužine l_2. Konzola je opterećena po cijeloj dužini ravnomjernim teretom q. Odrediti uzajamni pritisak između konzole i grede te nagib tog mjesta,ako je:

DATO JE:

$l_1=\frac{l_2}{2}=4m;$

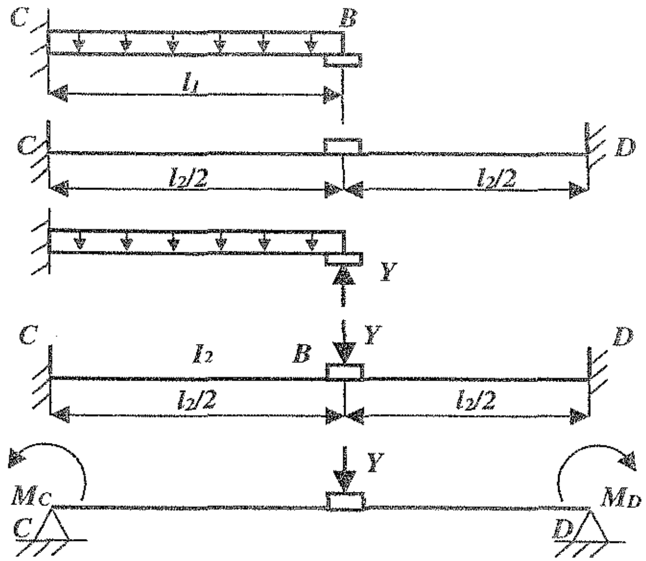
$q=10kN/m;$

$I_1=I_2=5740cm^4;$

$E=2\cdot 10^5 N/mm^2;$

2 x SN

$Y_B^{(konz)}=Y_B^{(GR)};\alpha^{(GR)}\Rightarrow 2$ dopu.uslova;



$$\frac{q\cdot l_1^4}{8EI_1}-\frac{Y\cdot l_1^3}{3EI_1}=\frac{Y\cdot l_2^3}{48EI_2}-2\frac{M_C l_2^2}{16EI_2}\quad \dots\ (1)$$

$$\frac{Y\cdot l_2^2}{16EI_2}-\frac{M_C\cdot l_2}{3EI_2}-\frac{M_D\cdot l^2}{6EI_2}=0\quad \dots\ (2)$$

(1) i (2) $\rightarrow Y=\frac{q \cdot l_1}{3}=\frac{40}{3}$ $kN;$

$M_C=M_D=\frac{q \cdot l_1^2}{12}$

$M_C=M_D=\frac{40}{3}$ $kNm;$

$F_A=\frac{2 \cdot q \cdot l_1}{3}$

$F_A=\frac{80}{3}$ $kN;$

$M_A=M_{max}=\frac{-q \cdot l_1^2}{6}$

$M_A=-\frac{80}{3}$ $kNm;$

$F_C=F_D=\frac{Y}{2}$

$F_C=\frac{20}{3}$ $kNm;$

$y_B=\frac{Y \cdot l_2^3}{48EI_2}-2\frac{M_C \cdot l_2^2}{16EI_2}$

$y_B=3{,}1$ m

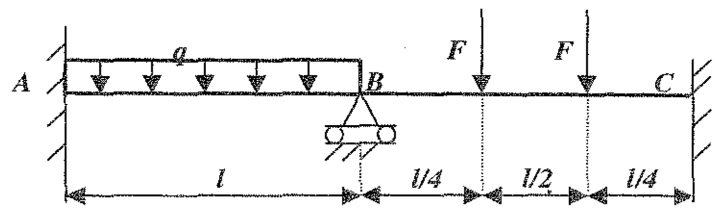
141. ZADATAK

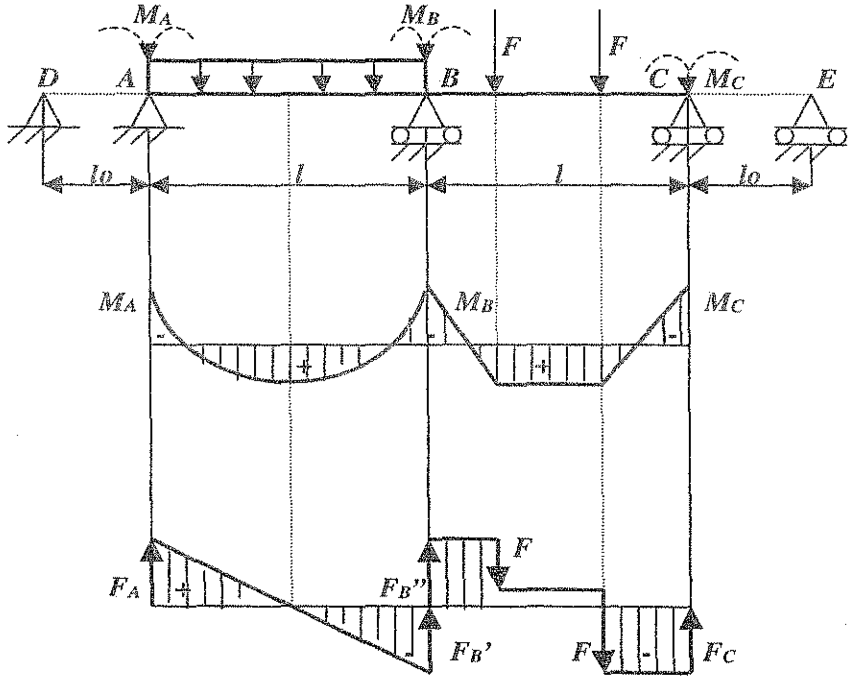
Greda ABC, konstantnog poprečnog presjeka, ukliještena na oba kraja, slobodno oslonjena u B, opterećena je ravnomjernim teretom q i silama F, prema datoj slici. Odrediti otpor oslonaca B, otpor i moment uklještenja i nacrtati statičke dijagrame nosača, ako je:

DATO JE:

$F=\frac{ql}{3}=20$ $kN;$

$l=6$ $m;$





3xSN

korističemo se metodom tri momenta (Clapeyronova jednačina)

$M_{k-1} \cdot l_k+2 \cdot M_k(l_k+l_{k+1})+M_{k+1} \cdot l_{k+1}=6 \cdot E \cdot I[\sum(\alpha_{k+1})-\sum(\beta k)]$

DAB: $2M_A+M_B=(6 \cdot E \cdot I) \cdot \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I};$

$2M_A+M_B=\frac{3 \cdot F \cdot l}{4}$ ... (1)

BC: $M_A\cdot l+2\cdot M_B\cdot 2\cdot l+M_C\cdot l=(6\cdot E\cdot I)\left[\frac{3\cdot F\cdot l^2}{32}-\left(\frac{-3Fl}{4}\right)\right]$

$$M_A\cdot l+4\cdot M_B\cdot l+M_C\cdot l=\frac{21}{16}F\cdot l\ \dots\ (2)$$

CE: $M_B+2\cdot M_C=(6\cdot E\cdot I)\left[-\left(\frac{-3Fl}{4}\right)\right]$

$$M_B+2\cdot M_C=\frac{9\cdot F\cdot l}{16}\ \dots\ (3)$$

$M_A=\frac{17}{64}F\cdot l \Rightarrow M_A=31{,}9kNm;$

$F_A=\frac{99F}{64};\ F_A=30{,}9\ kN;$

$M_B=\frac{14}{64}F\cdot l \Rightarrow M_B=26{,}3\ kNm;$

$F_A=\frac{160F}{64};\ F_B=50\ kN;$

$M_C=\frac{11}{64}F\cdot l \Rightarrow M_C=20{,}6\ kNm;$

$F_A=\frac{61F}{64};\ F_C=19{,}1\ kN;$

42. ZADATAK

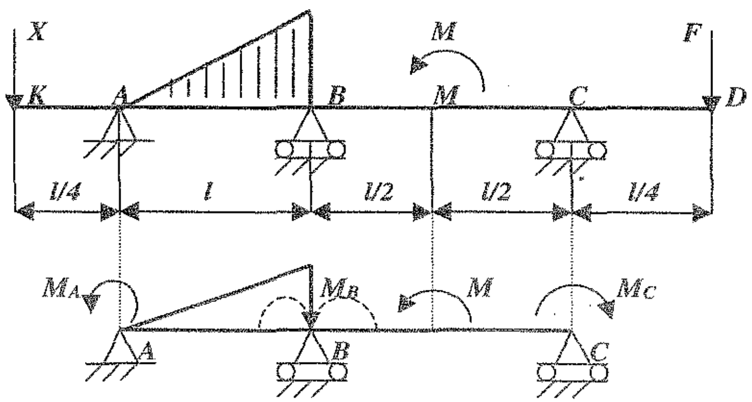
Greda na tri oslonca constantnog momenta inercije opterećen je po skici. Za date vrijednosti:

DATO JE:

$q=12k\ N/m,$
$M=10\ kNm;$
$F=3\ kN;\ I=85\ cm^4;$
$l=2\ m;$
$E_č=2\cdot 10^5\ Mpa=2\cdot 10^5\ kNPa/m^2;$

a)Kolika je sila X ako je ugib tačke D poznat $y_D=3$ mm;

b)Koliki je ugib tačke K;



a)

$M_C=F\cdot\frac{l}{4};$

$M_{k-1}\cdot l_k+2\cdot M_k\cdot(l_k+l_{k+1})+M_{k+1}\cdot l_{k+1}=6\cdot E\cdot I\cdot[\Sigma(\alpha_s)-\Sigma(\beta_s)];$

$M_A\cdot l+2\cdot M_B\cdot 2l+M_C\cdot l=6EI\left[\frac{M\cdot l}{24EI}-\left(\frac{-8\cdot q_o\cdot l^3}{360EI}\right)\right];$

$M_A\,l+4\,M_B\,l+M_C\,l=\frac{M\cdot l}{4}+\frac{2}{15}\,q_0\,l^3$

$M_A+4\cdot M_B+M_C=\frac{M}{4}+\frac{2}{15}\cdot q_o\cdot l^2\quad \dots\quad (1)$

$X\cdot\frac{l}{4}+4\cdot M_B+F\cdot\frac{l}{4}=\frac{M}{4}+\frac{2}{15}\cdot q_o\cdot l^2\ \dots\quad (1')$

$y_D=y_{D1}+y_{D2}+y_{D3}+y_{D4}=\beta_1\frac{1}{4}+\beta_2\frac{1}{4}+\beta_3\frac{1}{4}+y_{D4};$

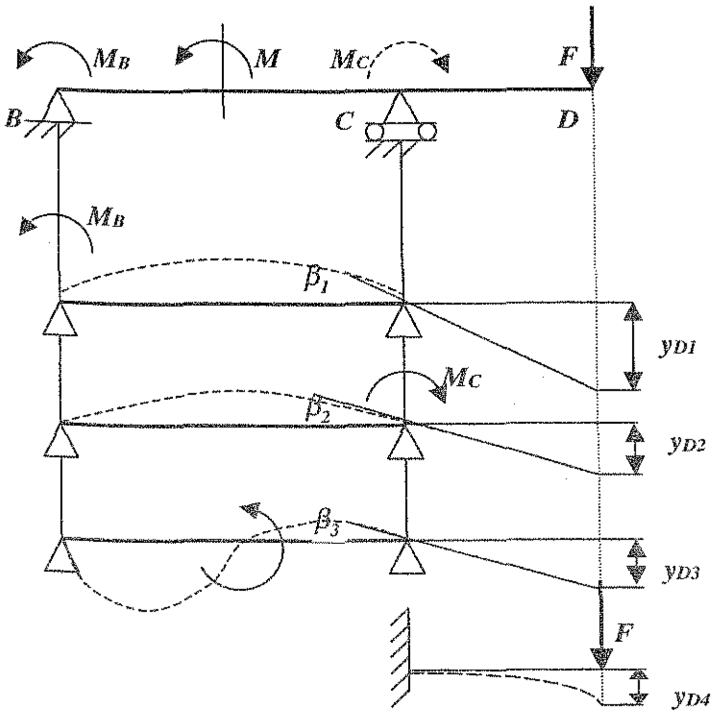
$y_D=\frac{M_B\cdot l^2}{24EI}+\frac{M_C\cdot l^2}{24EI}+\frac{F\cdot l^3}{64\cdot 3EI}+\frac{M\cdot l^2}{96EI};$

$M_B=\frac{8\cdot M_C\cdot l^2+2M\cdot l^2+F\cdot l^3-192\cdot E\cdot I\cdot Y_D}{8\cdot l^2};$

$M_B=1{,}70\ kNm;$

$X\cdot 0{,}5+6{,}8+1{,}5=2{,}5+6{,}4$

$X=1{,}2\ kN;$



b)

$y_K = y_{K1} + y_{K2} - y_{K3} + y_{K4};$

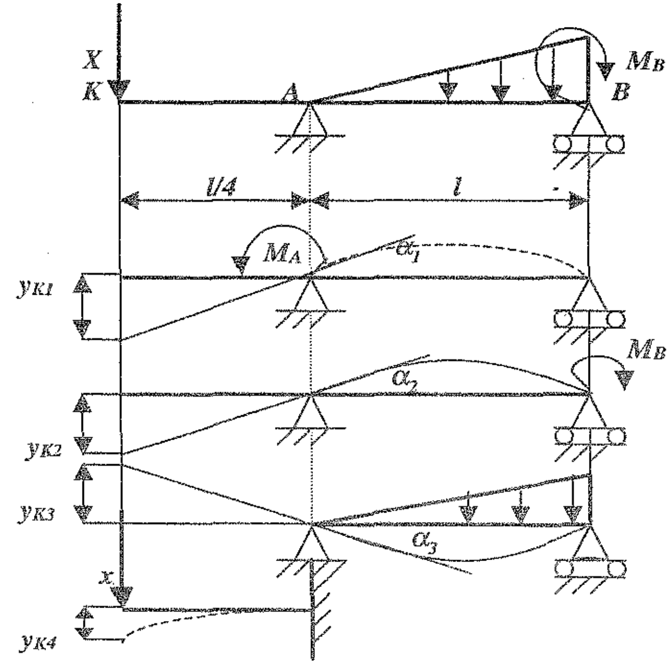
$$y_K = \alpha_1 \cdot \frac{l}{4} + \alpha_2 \cdot \frac{l}{4} - \alpha_3 \cdot \frac{l}{4} + y_{K4};$$

$$y_k = \frac{X\cdot\frac{l}{4}\cdot l}{3EI}\cdot\frac{1}{4} + \frac{M_B\cdot l}{6EI}\cdot\frac{l}{4} - \frac{7}{360}\cdot\frac{q_0\cdot l^3}{EI}\cdot\frac{l}{4}\;\frac{X\cdot(\frac{l}{4})^3\cdot}{3EI};$$

$$y_k = \frac{Xl^3}{48EI} + \frac{\frac{M_B l^2}{24EI}}{\frac{7q_0 l^4}{1400EI} + \frac{Xl^3}{192EI}};$$

$y_k = 1{,}176\cdot 10^{-3} + 1{,}67\cdot 10^{-3} - 5{,}5\cdot 10^{-3} + 2{,}94\cdot 10^{-4} =$

$y_k = -2{,}35\ mm;$

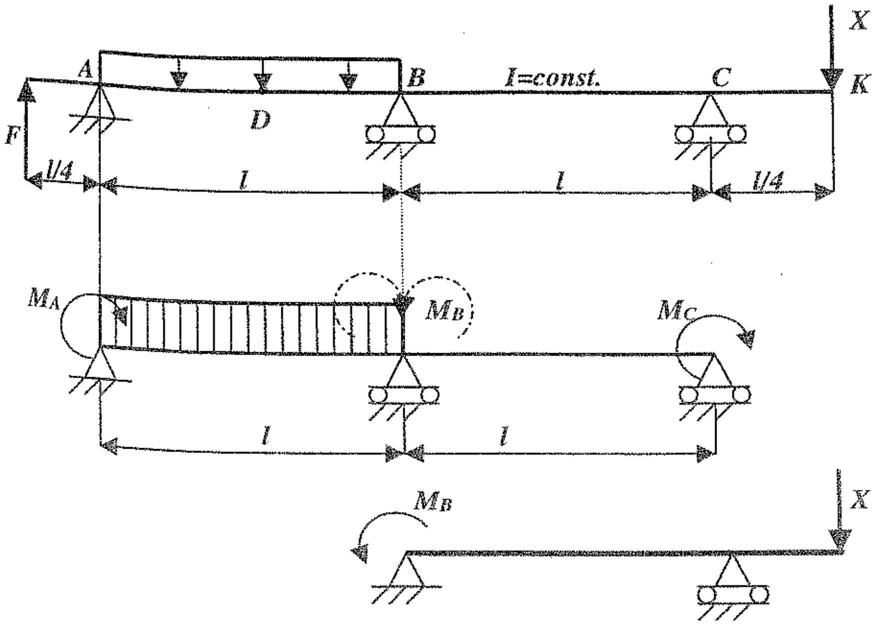


143. ZADATAK

Greda na tri oslonca i const. moment inercije, opterećena je silama F i X kao i specifičnim teretom q. Odrediti silu X pod uslovom da je ugib u tački D prvog polja y_D. Koliki je u ovom slučaju ugib tačke K.

DATO JE:

$l = 2\ m;$
$F = 12\ kN;$
$q = 10\ kN/m;$
$y_D = 0{,}003\ m;$
$I = 100\ cm^4;$
$E = 2\cdot 10^5\ MPa;$

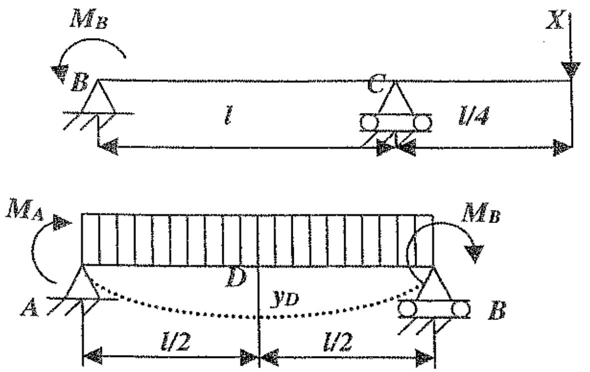


1x SN

$M_{K-1}\cdot l_k+2M_K(l_k+l_{K+1})+M_{K+1}\cdot l_{K+1}=6\cdot E\cdot I[\Sigma(\alpha_{K+1})-\Sigma(\beta k)]$;

$-M_A\cdot l+2M_B\cdot 2\cdot l+M_C\cdot l=6\cdot E\cdot I\left[-\left(-\frac{ql^3}{24EI}\right)\right]$;

$M_A=-\frac{Fl}{4}$; $M_C=\frac{Xl}{4}$; $X=q\cdot l-16\cdot\frac{M_B}{l}+F$ ... (1)



$y_D=\frac{5ql^4}{384EI}+\frac{M_A l^2}{16EI}-\frac{M_B l^2}{16EI}$ ... (2)

$y_D=\frac{5ql^4}{384EI}+\frac{F(\frac{l}{4})l}{16EI}-\frac{M_B l^2}{16EI}$;

$M_B\Rightarrow$

(2) ... $M_B=9kNm$;

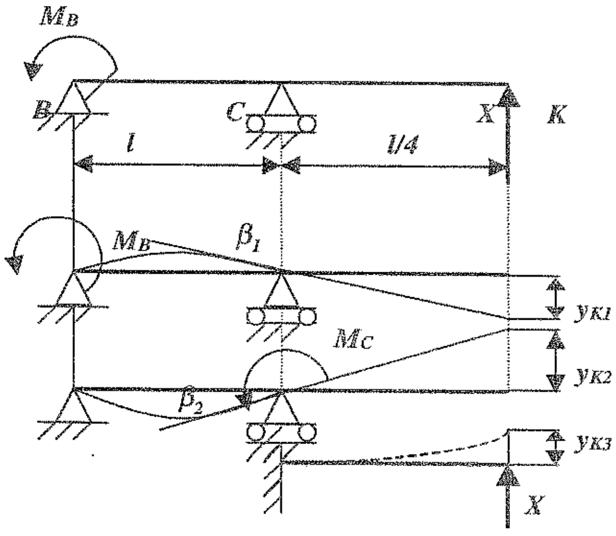
$X=20-72+12=-40\ kN$;

$y_K=y_{K1}-y_{K2}-y_{K3}$; $y_K=\beta_1\cdot(\frac{l}{4})-\beta_2\cdot(\frac{l}{4})-y_{K3}$;

$y_K=\frac{M_B l}{6EI}\frac{l}{4}-\frac{M_C l}{6EI}\frac{l}{4}-\frac{X(\frac{l}{4})^3}{3EI}$;

$y_K=7{,}5\cdot10^{-3}-0{,}106-8{,}33\cdot10^{-3}=-0{,}0168\ mm$

$y_K=-16{,}83\ mm$;

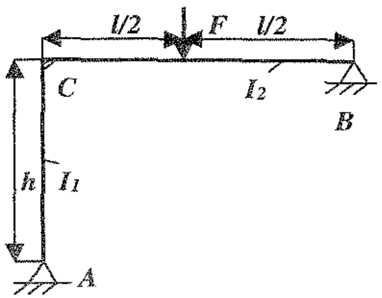


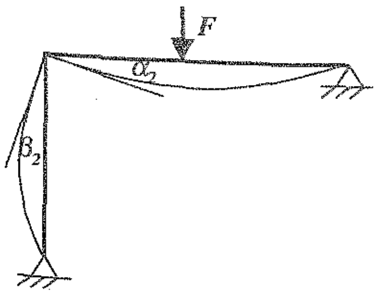
144. ZADATAK

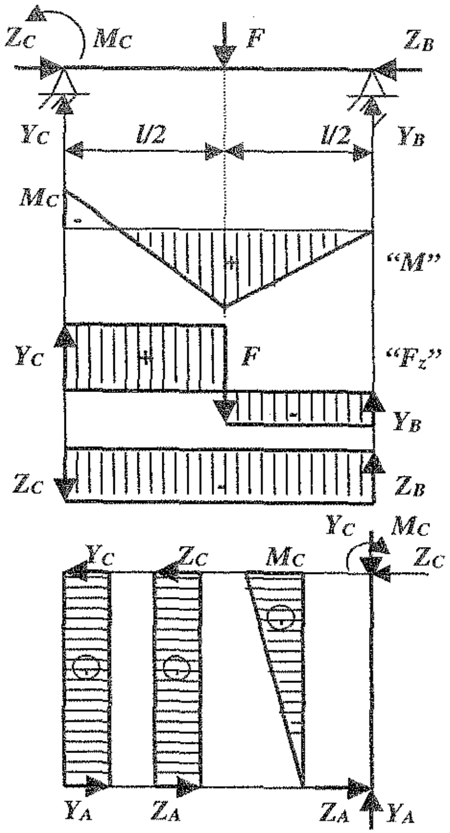
Okvirni nosač ACB, const. momenta inercije, zglobno vezan u A i B, opterećen je koncetrisanom silom F prema datoj skici. Odrediti otpore oslonaca i nacrtati statičke dijagrame nosača.

DATO JE:

$F=28kN;$
$l=4h/3=4m;$
$E_1=E_2; I_1=I_2;$







I x SN

$\beta_1=\alpha_2$ *uslov deformacije*

$$\frac{M_C h}{3EI_1}=-\frac{M_C l}{3EI_2}+\frac{Fl^2}{16EI_2}$$

$$M_C=\frac{3Fl}{28}\Rightarrow M_C=12kN;$$

GREDA AC:

$\Sigma Zi=0:\ Z_A-Z_C=0;$

$\Sigma Yi=0:\ Y_A-Y_C=0;$

$\Sigma M_C=0:\ Z_A\cdot h-M_C=0\ \Rightarrow\ Z_A=\frac{M_C}{h}$

$Z_A=4kN;\quad Z_C=4kN;$

GREDA BC:

$\Sigma Zi=0:\ Z_C=Z_B$

$Z_B=4kN;$

$\Sigma Yi=0\ :\ Y_C+Y_B-F=0;$

$\Sigma M_B=0:$

$$Y_C\cdot l-\frac{Fl}{2}-M_C=0$$

$Y_C=17\ kN;$

$Y_C=Y_A=17\ kN;$

$Y_B=11\ kN;$

$$M_{max}=Y_C\cdot\frac{l}{2}-M_C$$

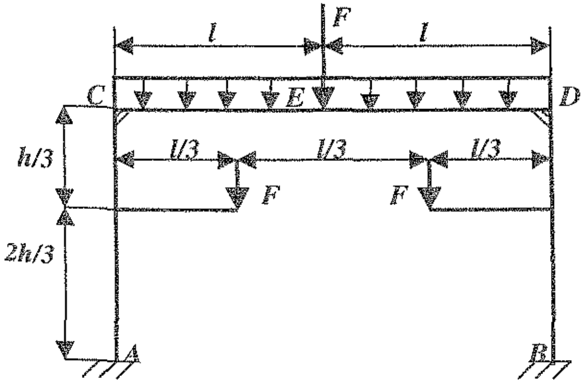
$M_{max}=22\ kNm;$

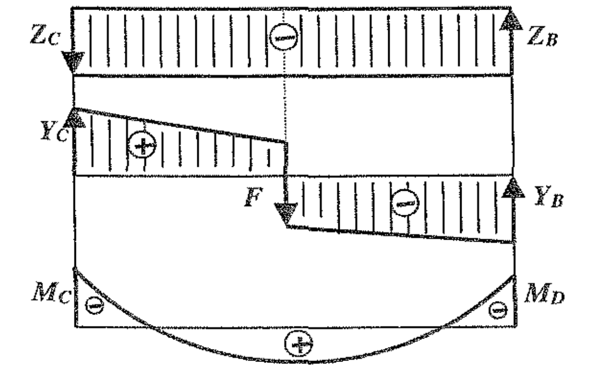
145. ZADATAK

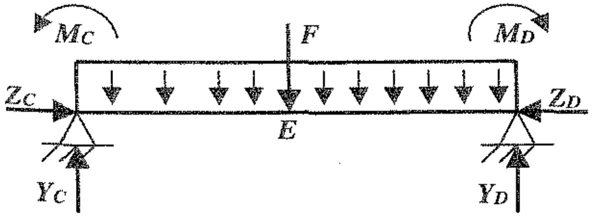
Simetrični okvirni nosač ACDB, raspona i visine h=l, uklješten u A i B i opterećen je teretima prema datoj slici. Odrediti otpore veza i nacrtati statičke dijagrame nosača.

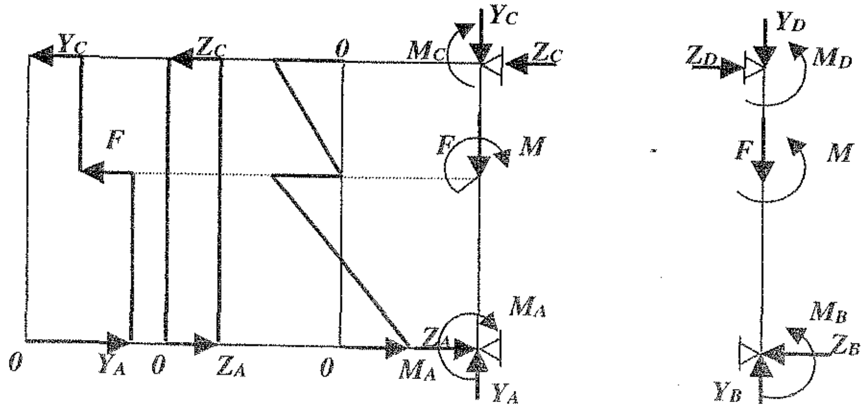
DATO JE:

$F=10\ kN;\quad F_q=q\cdot l=30\ kN;\quad l=6m;\quad M=F\cdot\frac{l}{3}=20\ kNm;$









Zadatak je 2XSN

Zbog simetrije $M_A=M_B; M_C=M_D;$

$\alpha_1=0$ *i* $\beta_2=\alpha_2 \Rightarrow$ *dop. uslov*

$$\frac{M_A l}{3EI_1}-\frac{M_C l}{6EI_1}-\frac{Ml}{9EI_1}=0\ \dots\ (1)$$

$$-\frac{M_A l}{6EI_1}+\frac{M_C l}{3EI_1}-\frac{Ml}{18EI_1}=-\frac{M_C l}{3EI_2}+\frac{Fl^2}{16EI_2}+\frac{ql^2}{24EI_2}-\frac{M_D l}{6EI_2}\ \dots (2)$$

IZ (1) i (2) $\Rightarrow$

$M_A=12\ kNm=M_B;$

$M_C=21{,}5\ kNm=M_D;$

GREDA AC:

$\sum Zi=0:\ Z_A-Z_C=0;$

$\sum Yi=0:\ F_A-F-Y_C=0;$

$\sum M^C=0:\ M_A-Z_A\cdot l+M+M_C=0 \Rightarrow\ Z_A=9kN;\quad Z_C=9kN;$

GREDA CD:

$\sum Zi=0:\ Z_C-Z_D=0$ *gdje je* $Z_C=Z_D$

$Z_D=9kN;$

$\sum Yi=0:\ Y_C+Y_D-F-q\cdot l=0;$

$\Sigma M^D=0: Y_C\cdot l - M_C - F\cdot(\frac{l}{2}) - F\cdot q\cdot(\frac{l}{2}) + M_D = 0;$

$Y_C=20\ kN;$

$Y_A=Y_B=30\ kN;$

$M_E = Y_C\cdot\frac{l}{2} - M_C - q\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4}$

$M_E=16\ kNm;$

146. ZADATAK

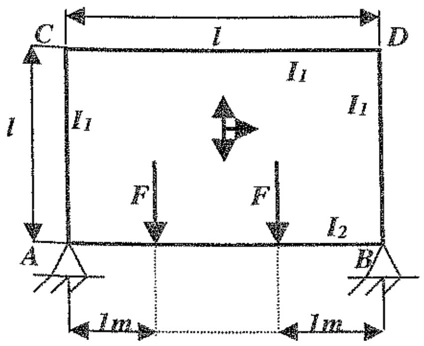
Ram po skici opterećen je sa dvije simetrično postavljene sile F. Tri strane rama su momenti inercije I_1 a četvrta I_2. Za date vrijednosti:

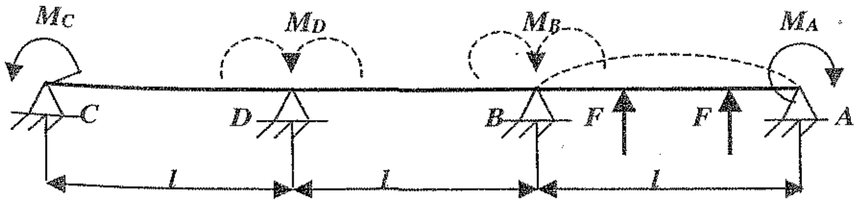
DATO JE:

$F=20kN;$
$I_1=150cm^4;$
$I_2=I_1/2;$
$l=h=3m;$

Odrediti :

a) moment inercije u tjemenima (Clajperonova jednačina)
b) max ugib u intervalu AB





Zadatak je 2 X statički neodređen

$M_C=M_D;\ M_A=M_B;$

Za CDB: $M_C\cdot l+2\cdot M_D\cdot 2\cdot l+M_B\cdot l=0\ \ldots\ (1)$

Za DBA : $M_D\cdot l+2\cdot M_B\cdot(h+l\cdot\frac{I_1}{I_2})+M_A\cdot l(\frac{I_1}{I_2})=6EI\cdot\left[-\frac{F(l^2-c^2)}{8EI}\right];\ \ldots(2)$

$M_C\cdot l+4\cdot M_C\cdot l+M_B\cdot l=0;$

$M_C\cdot l+6\cdot M_B\cdot l+2\cdot M_B\cdot l= -(\frac{3}{4})\cdot F\cdot(l^2-c^2);$

$M_B= -5\ M_C;$

$M_C=3{,}076\ kNm$

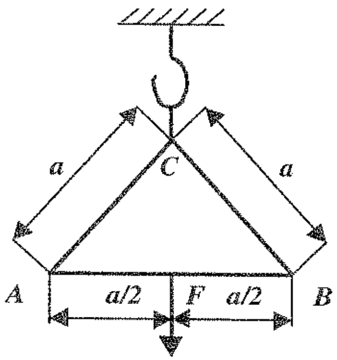
$M_B= -15{,}40\ kNm;$

147. ZADATAK

Okvir konstantnog poprečnog presjeka od istog materijala obješen je u tački C, a opterećen je sa silom F.

a) Izračunati veličinu reakcije momenata u rogljevima

b) Za poprečni presjek I NP18; a=3m; F=2kN; izračunati veličinu najvećeg normalnog napona u presjeku D (Uticaj aksijalnih sila zanemariti pri iznalaženju statički neodređenih veličina).



$M_A=M_B$

$\alpha_{AC}=\alpha_{AB}\ldots(1)$

$$\frac{M_A a}{3EI}+\frac{M_C a}{6EI}=\frac{Fa^2}{16EI}-\frac{M_A a}{3EI}-\frac{M_B a}{6EI};$$

$$\frac{1}{3}(M_A\cdot a)+\frac{1}{6}(M_C\cdot a)=\frac{1}{16}F\cdot a^2-\frac{1}{2}M_A\cdot a\quad\ldots(1)$$

$\beta_{AC}=0\ldots(2);$

$-(\frac{1}{6})M_A a-(\frac{1}{3})M_C\cdot a=0;$

$M_A=(\frac{1}{2})\cdot F\cdot a\Rightarrow M_A=M_B=0{,}5\ kNm;$

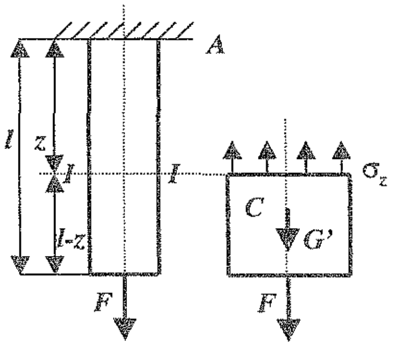
$M_C= -(\frac{1}{24})\cdot F\cdot a\Rightarrow M_C = -0{,}25\ kNm;$

$M_D= 1\ kNm;$

8. DEFORMACIONI RAD

148. ZADATAK

Odrediti deformacioni rad i izduženje čeličnog štapa dužine l=84 m, poprečnog presjeka A=32 cm², aksijalno zatežućom silom F=40kN, uzimajući u obzir i sopstvenu težinu štapa.



$\sum Zi=\sigma_Z \cdot A-F-G'=0;$

$\sigma_Z=\frac{F}{A}+\gamma_m(l-z);$

$A_d=\frac{A}{2E}\cdot\int_0^l \sigma_Z^2\cdot dz;$

$A_d=\frac{F^2 l}{2EA}+\frac{FGl}{2EI}+\frac{G^2 l}{6EA};$

A_d=16067 Ncm;

$\Delta l=\frac{\partial A_d}{\partial F}=\frac{A}{E}\int_0^l \sigma_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial F}dz;$

$\Delta l=\frac{Fl}{EI}+\frac{Gl}{2EA};$

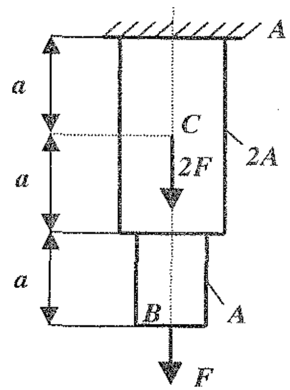
Δl=6,29 mm;

149. ZADATAK

Štap promjenjivog poprečnog presjeka ukliješten na jednom kraju opterećen je aksijalno silama prema datoj slici. Odrediti rad i izduženje štapa.

DATO JE:

F=8 kN;
A=2 cm²;
a=0,6 m;
E=2·10⁵ N/mm².



$A_d=A_{d1}+A_{d2}+A_{d3}=\frac{(2F+F)^2 a}{2E2A}+\frac{F^2 a}{2E2A}+\frac{Fa^2}{2EA};$

$A_d=\frac{9F^2 a}{4EA}+\frac{F^2 a}{4EA}+\frac{F^2 a}{2EA}=\frac{3F^2 a}{EA};$

A_d=288 Ncm;

$\Delta l_B=\frac{\partial(A_d)}{\partial F}=\frac{6Fa}{EA}$

Δl_B = 0,72 mm;

150. ZADATAK

Horizontalni štap AB, zglobno vezan u A, poduprt kosnikom CB opterećen je silom prema datoj slici. Odrediti ukupan deformacioni rad i vertikalno pomjeranje tačke B sistema:

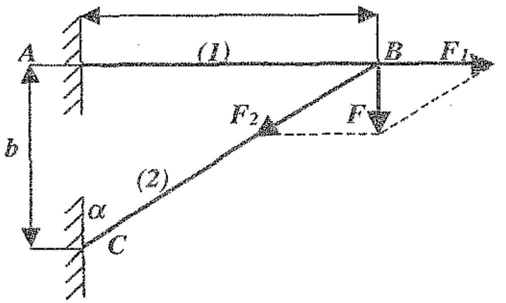
DATO JE:

$F=10\ kN;$

$a=2\ m;\ b=2\ m;$

$A_1=2\cdot A_2=8\ cm^2;$

$E_1=E_2=2{,}1\cdot 10^5\ N/mm^2;$



$F_1=F\,tg\,\alpha$

$F=10\ kN;$

$$F_2=\frac{F}{\cos\alpha}=\frac{2F}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=F\sqrt{2}$$

$F_2=14{,}1\ kN;$

$l_1=a;\ l_2=a\sqrt{2}\,;$

$A_d=A_{d1}+A_{d2};$

$$A_d=\frac{F_1^2 l_1}{2E_1A_1}+\frac{F_2^2 l_2}{2E_2A_2}=\frac{F_1^2 l_1}{2E_1A_1}+\frac{F_2^2 l_2}{E_2A_1}=\frac{a(F_1^2+2\sqrt{2}F_2^2)}{2EA}$$

$A_d\ =393\ Ncm;$

$$y_B=\frac{\partial A_d}{\partial F}=\frac{F_1\,l_1}{E_1 I_1}+\frac{F_2\,l_2}{E_2A_2}=\frac{a(F_1\ +2\sqrt{2}F_2\ )}{EA_1}=$$

$y_B=0{,}6\ mm;$

151. ZADATAK

Tri elestična štapa (1)(2)(3) od istog su materijala, vezana su u konstrukciji prema datoj slici i opterećena horizontalnom silom F. Odrediti silu u štapovima i komponentalna pomjeranja tačke D sistema.

DATO JE:

$F=30\ kN;$

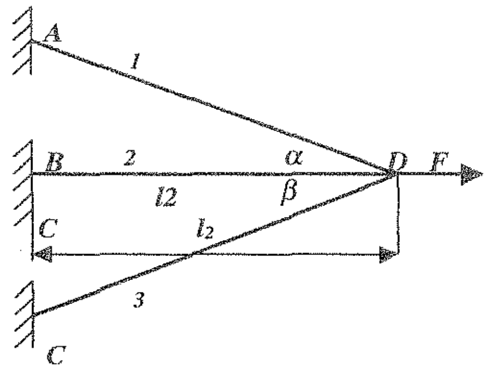
$l_2=3\ m;$

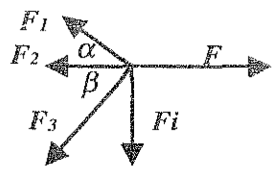
$\alpha=30°;$

$\beta=60°;$

$A_1=A_3=2\cdot A_2=9\ cm^2;$

$E=2\cdot 10^5\ N/mm^2;$





Zadatak je 1 x statički neodređen

$\partial A/\partial F_3 = 0$ *uslov*

$\sum Xi=0:\ -F_1\cos\alpha-F_2-F_3\cos\beta+F=0$

$\sum Yi=0:\ F_1\sin\alpha-F_3\sin\beta-F_i=0$

$F_1=\sqrt{3}\cdot F_3+2\cdot Fi;\quad F_2=-\dfrac{1}{2}F-(\dfrac{1}{2})F_3-\sqrt{3}\,Fi;$

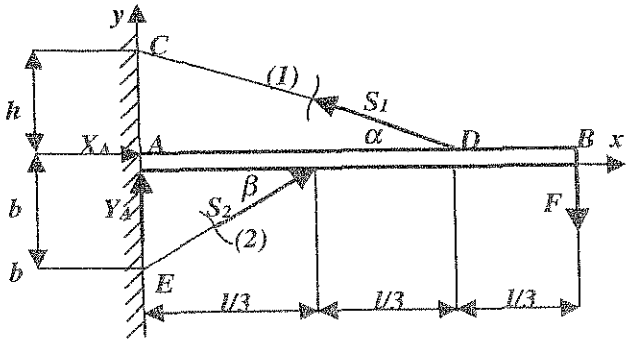
$$A_d=\frac{F_1^2 l_1}{2A_1E}+\frac{F_2^2 l_2}{2EA_2}+\frac{F_3^2 l_3}{2EA_3};$$

$$\frac{\partial A_d}{\partial F_3}=\frac{F_1 l_1}{A_1E}\left(\frac{\partial F_1}{\partial F_3}\right)+\frac{F_2\,l_2}{A_2E}\left(\frac{\partial F_2}{\partial F_3}\right)+\frac{F_3 l_3}{A_3\cdot E}=0;$$

$F_3=\ -2{,}51\ kN;\quad F_1=\ -4{,}34\ kN;\quad F_2=\ -16{,}25\ kN;$

52. ZADATAK

ruta greda AB zglobno je vezana u A a zategnuta je i poduprta čeličnim šipkama CD i EK, od istog materijala i istih poprečnih presjeka. Odrediti dimenzije okrugle šipke ako je veličina tereta F=29kN a dozvoljeni napon je σ_{de}*=1500 N/cm²; b=(l/3); h=(l/2);*



Zadatak je 1xSN

$tg\alpha=\frac{3}{4}$; $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; $\cos\alpha=\frac{4}{5}$; $tg\beta=1 \Rightarrow \beta=45°$;

$l_1=\sqrt{h^2+\left(2\cdot\frac{l}{3}\right)^2}=\frac{5l}{6}$; $l_2=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot l$;

$\Sigma xi=0$

$X_A-S_1\cos\alpha+S_2\cos\beta=0;$

$\Sigma yi=0$

$Y_A+S_2\cdot\sin\beta+S_1\sin\alpha-F=0;$

$\Sigma M^A=0$

$S_1\cdot\sin\alpha\cdot\frac{2l}{3}+S_2\cdot\sin\beta\cdot\frac{l}{3}-F\cdot l=0\Rightarrow S_2=\frac{3\cdot F}{\sin\beta}-\frac{2\cdot S_1\cdot\sin\alpha}{\sin\beta}$;

S_1 *–biramo kao statičku nepoznatu:*

$\frac{\partial S_2}{\partial S_1}=-\frac{2\cdot\sin\alpha}{\sin\beta}=-6\frac{\sqrt{2}}{5}$;

$A_{de}=\frac{S_1^2 l_1}{2AE}+\frac{S_2^2 l_2}{2AE}$;

$\frac{\partial A_{de}}{\partial S_1}=\frac{S_1 l_1}{A\cdot E}+\frac{S_2 l_2}{A\cdot E}\cdot\frac{\partial S_2}{\partial S_1}=0$

$S_1\approx 45$ *kN;*

$\sigma=\frac{S_2}{A}\leq\sigma_{de}\Rightarrow\frac{d^2\pi}{4}=30$

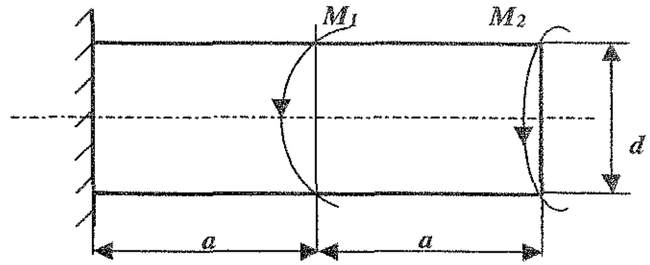
d=65 mm;

153. ZADATAK

Odrediti deformacioni rad i ugao uvijanja krajnjeg presjeka prizmatičnog štapa kružnog poprečnog presjeka opterećenog obrtnim momentom M_1 *i* M_2 *prema datoj slici.*

DATO JE :

$M=130$ *kNcm*$=M_1=M_2$;
a=4 m;
d=80 mm;
$G=8{,}1\cdot 10^4$ *N/mm;*



$A_{dt}=A_{d1}+A_{d2}=\frac{(M_1+M_2)^2\cdot a}{2GI_0}+\frac{M_2^{\,2}\cdot a}{2GI_0}=\frac{10\cdot M^2\cdot a}{Gd^2\pi}$;

$A_{dt}=5190$ *Ncm;*

$\theta=\frac{\partial A_{dt}}{\partial Mt}=\frac{(M_1+M_2)\cdot a}{GI_0}+\frac{M_2 a}{GI_0}=\frac{3Ma}{GI_0}$

$\theta=0{,}048$ *rad;*

154. ZADATAK

Sigurnosni ventil sa poprečnim presjekom prečnika D, otvara se pod pritiskom p. Hod ventila je h, a najveći dozvoljeni ugib opruge je λ_C. Odrediti prečnik žice d i broj n zavoja opruge ;

DATO JE:

$D=100\ mm$; $\tau_d=180\ N/mm^2$; $\lambda_C = 5\ mm$;
$2R=50\ mm$; $p=5\ atm$;
$a=30\ mm$; $b=30\ mm$;

$$\lambda_C=\frac{2F R^3 2\pi n}{2GI_0}=\frac{32\cdot F R^3 \pi\ n}{G\pi d^4} \quad \dots\ (1)$$

$$\tau=\frac{M_t}{I_0}\ \frac{d}{2}\le\tau_d;$$

$$M_t = F R;$$

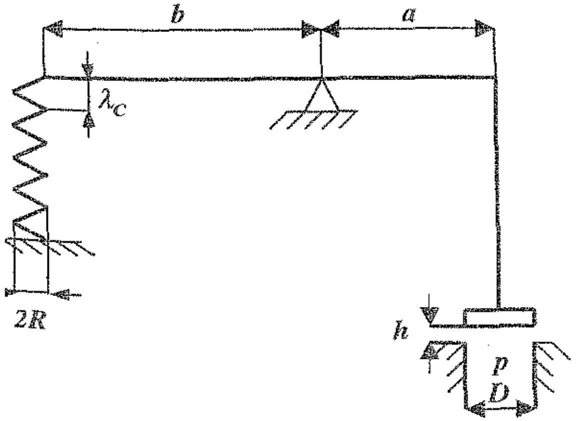
$$\frac{16 F R}{\pi d^3}\le\tau_d \quad \dots\ (2)$$

$$(3)\dots\ p\ \frac{D^2\pi}{4}\ a = F\ a \quad \Rightarrow \quad F = p\ \frac{D^2\pi}{4}\ ;$$

$F=4\ kN$;

$n=4$;

$d=14{,}05\ mm$;

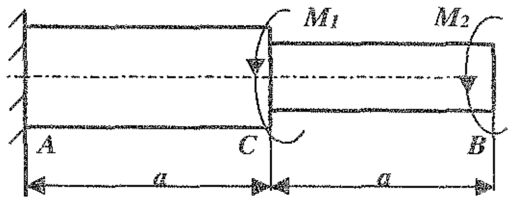


155. ZADATAK

Odrediti deformacioni rad i ugao uvijanja presjeka B i C stepenastog štapa, kružnog poprečnog presjeka opterećenog obrtnim momentima M_1 i M_2, prema datoj slici.

DATO JE:

$M_1=M_2=M=130\ kNcm$;
$a=4\ m$;
$I_{o1}=3I_{o2}=3{,}402\ cm^4$;
$G=8{,}1\cdot10^4\ N/mm^2$;



$$A_{dt}=A_{d1}+A_{d2}=\frac{(M_1+M_2)^2 a}{2GI_{01}}+\frac{M_2^{\ 2} a}{2GI_{02}}=\frac{7M^2 a}{6GI_{02}}$$

$A_{dt}=2420\ Ncm$;

$$\theta_{BA}=\frac{\partial A_{dt}}{\partial Mt}=\frac{(M_1+M_2)\cdot a}{G\cdot I_{01}}+\frac{M_2\cdot a}{G\cdot I_{02}}=\frac{5\cdot M\cdot a}{3\cdot G\cdot I_{02}}$$

$\theta_{BA}=0{,}027\ rad$;

$$\theta_{CA}=\frac{\partial A_d}{\partial Mt}=\frac{(M_1+M_2)\cdot a}{G\cdot I_{01}}=\frac{2\cdot M\cdot a}{3\cdot G\cdot I_{02}}$$

$\theta_{CA}=0{,}011\ rad$;

156. ZADATAK

Cilindrična zavojna opruga, prečnika žice d, srednjeg prečnika D, sa N zavojaka, opterećena je aksijalnom silom zatezanja F .

Odrediti:

a) silu F, pod uslovom da napon ne pređe vrijednost dozvoljenog napona na uvijanje

b) diferencijalni rad opruge

c) pomjeranje napadne tačke sile

DATO JE:

$d=4\ mm;$

$D=3\ cm;$

$N=20;$

$\tau_d=180\ N/mm^2;$

$G=8\cdot 10^4\ N/mm^2;$

a)

$$\tau=\frac{M_t}{W_0}=\frac{16FR}{d^3\cdot\pi}\leq\tau_\alpha\ \Rightarrow$$

$$F=\frac{d^3\cdot\pi\cdot\tau_d}{16R}$$

$F=150N;$

b)

$$A_d=\frac{\int_0^{2\pi NR} Mt^2\cdot dS}{2\cdot G\cdot I_0}\Rightarrow$$

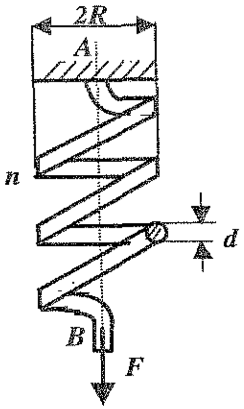
$$A_d=\frac{F^2\cdot R^3\cdot\pi\cdot N}{G\cdot I_0}=\frac{32F^2R^3N}{Gd^4}$$

$A_d=237\ Ncm;$

c)

$$y_B=\frac{\partial A_d}{\partial F}=\frac{2\cdot F\cdot R^3\cdot\pi\cdot N}{G\cdot I_0}$$

$y_B=32\ mm;$



157. ZADATAK

Odrediti deformacioni rad i vertikalno pomjeranje tačke C nosača AB, konstantnog poprečnog presjeka, opterećen teretima prema datoj slici a) i b). Koristiti metodu Castiljana.

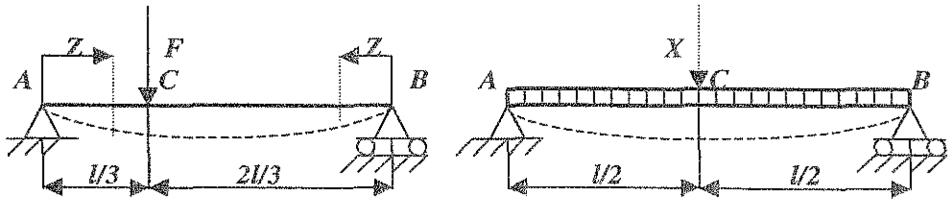
DATO JE:

$F=q\cdot l=20\ kN;$

$l=4\ m;$

$I_x=1350\ cm^4;$

$E=2{,}1\cdot 10^5\ N/mm^2;$



a)

$$F_A=2\cdot\frac{F}{3};$$

$$F_B=\frac{F}{3};$$

$$M_I^{\,l}=F_A\cdot z=\frac{2F}{3}\cdot z;$$

$$M_I^{\,d}=F_B\cdot z=\frac{F}{3}\cdot z;$$

$$A_{df}=A_{d1}+A_{d2}=\frac{1}{2\cdot E\cdot I_X}\left[\int_0^{\frac{l}{3}}\left(\frac{2F}{3}z\right)^2dz+\int_0^{\frac{2l}{3}}\left(\frac{F}{3}z\right)^2dz\right]\Rightarrow$$

$$A_{df}=\frac{6F^2l^3}{9\cdot 81\cdot EIx}$$

$A_{df}=7430\ Ncm;$

$$y_C=\frac{\partial A_{df}}{\partial F}=\frac{12Fl^3}{729\cdot EIx}$$

$y_C=7{,}43\ mm;$

b)

$F_A=F_B=\frac{ql}{2}$; $M(z)=\frac{ql}{2}\cdot z-\frac{qz^2}{2}$;

$$A_{df}=\frac{2}{2\cdot E\cdot I_X}\int_0^{\frac{l}{2}}M(z)^2\cdot dz;$$

$F_A=F_B=\frac{ql+X}{2}$;

$M(z)=\frac{ql+x}{2}\cdot z-\frac{(q-z)^2}{2}$; $\frac{\partial M(z)}{\partial X}=\frac{z}{2}$;

$$y_C=\left(\frac{\partial A_{df}}{\partial X}\right)_{Xi=0}=2\cdot\frac{1}{E\cdot I}\,{}_0\!\int^{l/2}M(z)\cdot\frac{\partial M(z)}{\partial Xi}\cdot dz$$

$$y_C=\frac{5ql^4}{384El}=$$

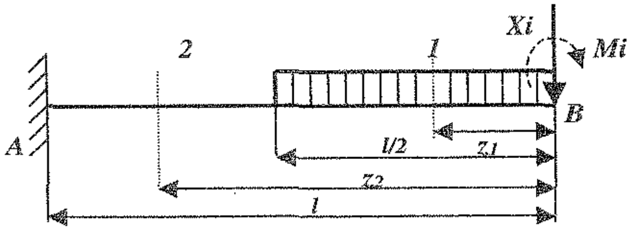
$y_C=5{,}88\ mm;$

158. ZADATAK

Odredit deformacioni rad, ugib i nagib kraja konzole konstantnog poprečnog presjeka, opterećene ravnomjernim teretom q do polovice dužine. Koristiti Castiljana.

DATO JE:

$q=10\ kN/m;$
$l=3\ m;$
$E=2\cdot10^5\ N/mm^2;$
$I_x=3600\ cm^4;$



$M_1=-\frac{qz_1^2}{2}$;

$M_2=-q\cdot\frac{l}{2}\cdot\left(z_2-\frac{l}{4}\right);$

$$A_{df}=\frac{1}{2\cdot E\cdot I_x}\int_0^{\frac{l}{2}}M_1^2\cdot dz+\frac{1}{2\cdot E\cdot I_x}\int_{\frac{l}{2}}^{l}M_2^2\cdot dz$$

$A_{df}=5977\ Ncm;$

$M_1=-\frac{q\cdot z_1^2}{2}-X_i\cdot z_1$; $\frac{\partial M_1}{\partial X_i}=-z_1$;

$M_2=-q\cdot\frac{l}{2}\cdot\left(z_2-\frac{l}{4}\right)-X_i\cdot z_2$; $\frac{\partial M_2}{\partial X_i}=-z_2$;

$$y_B=\left(\frac{\partial A_{df}}{\partial X}\right)_{Xi=0}=\frac{1}{EI_x}\int_0^{\frac{l}{2}}M_1\frac{\partial M_1}{\partial Xi}dz+\int_{\frac{l}{2}}^{l}M_2\frac{\partial M_2}{\partial X_i}dz=\frac{41}{384}\frac{ql^4}{EI}$$

$y_B=12\ mm;$

$M_1=-\frac{qz^2}{2}-M_i;$

$M_2=-\frac{ql}{2}(z-\frac{l}{4})-M_i;$

$$\beta_B=\left(\frac{\partial A_{df}}{\partial M_i}\right)_{Mi=0}=\frac{1}{EI_x}\int_o^{\frac{l}{2}}M_1\frac{\partial M_1}{\partial M_i}dz+\frac{1}{EI}\int_o^{\frac{l}{2}}M_2\frac{\partial M_2}{\partial M_i}dz=\frac{7ql^3}{48EI}$$

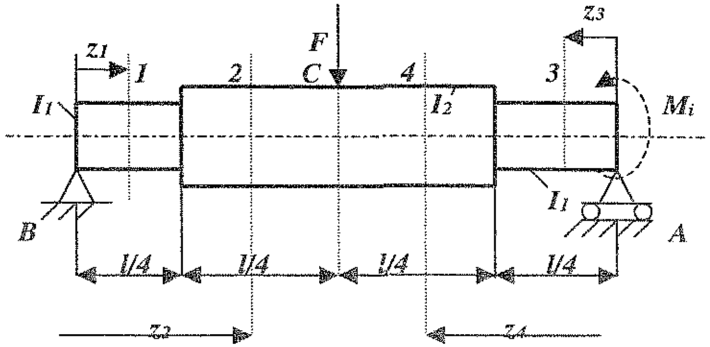
$\beta_B=0{,}0054\ rad;$

159. ZADATAK

Prosta greda AB, promjenjivog poprečnog presjeka momenta inercije I_1 i I_2, opterećena je silom F na sredini raspona. Po metodi Castiljana odrediti ugib ispod sile F i nagibe na osloncima.

DATO JE:

$F=40\ kN;$
$l=1\ m;$
$I_2=2I_1=100\ cm^4;$ $E=2\cdot10^5\ N/mm^2;$



$M_1=\dfrac{F\cdot z_1}{2}$; $M_2=\dfrac{F\cdot z_2}{2}$;

$$A_{df}= 2\cdot(A_{d1}+A_{d2})=\frac{1}{EI_1}\int_0^{\frac{l}{4}} M_1^2\,dz+\frac{1}{EI_2}\int_{\frac{l}{4}}^{\frac{l}{2}} M_2^2\,dz = \frac{3F^2l^3}{256EI_2};$$

$$y_C=\frac{\partial A_{df}}{\partial F}=\frac{3Fl^3}{128EI_2};\quad y_C = 0{,}47\ mm;$$

$$F_A\,l-F\frac{l}{2}+M_i=0;\quad F_A=\frac{F}{2}+\frac{Mi}{l};\quad F_B=\frac{F}{2}-\frac{Mi}{2l};$$

$$M_1=\left(\frac{F}{2}+\frac{Mi}{l}\right)z;\quad M_2=\left(\frac{F}{2}+\frac{Mi}{l}\right)z_2;$$

$$M_3=\left(\frac{F}{2}-\frac{Mi}{l}\right)z_3+Mi;\quad M_4=\left(\frac{F}{2}-\frac{Mi}{l}\right)z_4+Mi;$$

$$\beta=\left[\frac{\partial A_{df}}{\partial Mi}\right]_{Mi=0}=\frac{1}{EI_1}\int_0^{\frac{l}{4}} M_1\frac{\partial M_1}{\partial M_i}dz+\frac{1}{EI_2}\int_{\frac{l}{4}}^{\frac{l}{2}} M_2\frac{\partial M_2}{\partial M_i}dz+$$

$$+\frac{1}{EI_1}\int_0^{\frac{l}{4}} M_3\frac{\partial M_3}{\partial M_i}dz+\frac{1}{EI_2}\int_{\frac{l}{4}}^{\frac{l}{2}} M_4\frac{\partial M_4}{\partial M_i}dz$$

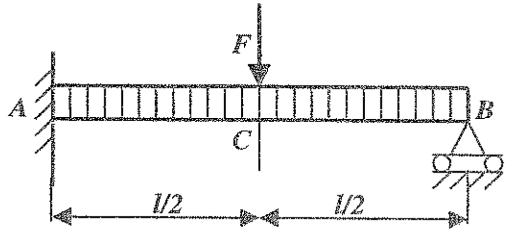
$\beta = 0{,}0016$ rad;

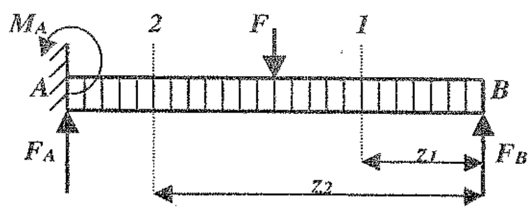
160. ZADATAK

Nosač AB, dužine l, konstantnog momenta inercije, ukliješten je na jednom i slobodno oslonjen na drugom kraju, opterećen je po cijeloj dužini ravnomjerno teretom q i silom $F=q\cdot l$ na sredini dužine. Odrediti otpor oslonaca F_B uklještenja F_A i momenta uklještenja M_A.

DATO JE:

$q=4$ kN/m;
$l=1{,}5$ m;
$F=6$ kN.





1 x SN

$$\frac{\partial A_{df}}{\partial F_B}=0;$$

$$M_1 = F_B\cdot z_1 - \frac{q\,z_1^2}{2};$$

$$M_2=F_B\,z_2-\frac{q\,z_2^2}{2}-F\left(z_2-\frac{l}{2}\right);$$

$$\frac{\partial A_{df}}{\partial F_B}=\frac{1}{EI}\int_0^{l/2} M_1\frac{\partial M_1}{\partial F_B}dz+\frac{1}{EI}\int_{l/2}^{0} M_2\frac{\partial M_2}{\partial F_B}dz=0;$$

$$\left(\frac{\partial M_1}{\partial F_B}\right)=z_1;\quad \left(\frac{\partial M_2}{\partial F_B}\right)=z_2;$$

$F_B = \frac{11F}{16}$; $F_B = 4{,}125\ kN$;

$F_A = \frac{21F}{16}$; $F_A = 7{,}875\ kN$;

$M_A = \frac{5}{16} Fl$

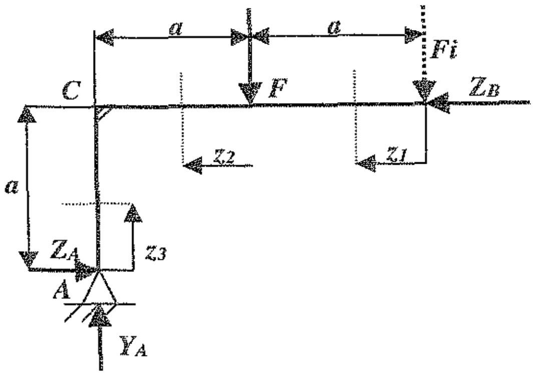
$M_A = 2{,}81 kNm$;

161. ZADATAK

Za skicirani okvirni nosač ACB, konstantnog momenta inercije odrediti vertikalno pomjeranje tačke B pokretnog ležišta.

DATO JE:

$F=8{,}4\ kN$;
$a=60\ cm$;
$I_1=I_2=600\ cm^4$;
$E=2\cdot 10^5\ N/mm^2$;



$M_1=F_i \cdot z_1 \Rightarrow (\frac{\partial M_1}{\partial F_i}) = z_1$;

$M_2=F_i(a+z_2)+Fz_2 \Rightarrow (\frac{\partial M_2}{\partial F_i}) = a+z_2$;

$M_3=Z_A \cdot z_3=(F+2Fi)\cdot z_3 \Rightarrow (\frac{\partial M_3}{\partial F_i}) = 2\cdot z_3$;

$$y_B = (\frac{\vartheta A_{df}}{\vartheta F_i})_{Fi=0} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^a M_1 \frac{\partial M_1}{\partial F_i}dz + \int_0^a M_2 \frac{\partial M_2}{\partial F_i}dz + \int_0^a M_3 \frac{\partial M_3}{\partial F_i}dz\right] = \frac{3}{2}\frac{F a^3}{EI}$$

$y_B = 2{,}2\ mm$;

$\sum x_i=0$;

$Z_A - Z_B = 0$;

$\sum y_i=0$;

$Y_A - F - F_i = 0 \Rightarrow Y_A = F + F_i$;

$Y_A = 8{,}4\ kN$;

$\sum M^B=0$:

$Z_A \cdot a + F\cdot a - Y_A \cdot 2a = 0$;

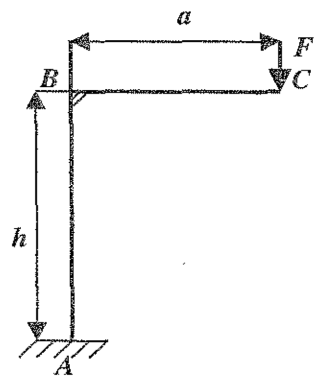
$Z_A = F + 2\ Fi$;

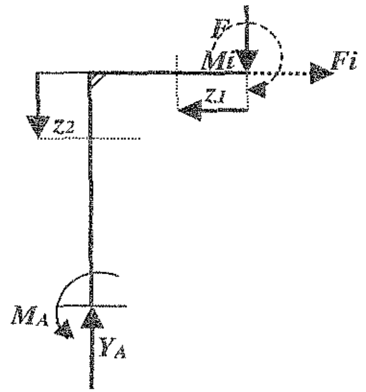
162. ZADATAK

Okvirni nosač ABC, konstantnog momenta inercije ukliješten je u A i opterećen je vertikalnom silom F prema datoj slici. Odrediti vertikalno i horizontalno pomjeranje tačke C, kao i obrtanje presjeka nosača na tom mjestu.

DATO JE:

$F=10\ kN$;
$a=2h/3=1{,}2\ m$;
$I=925\ cm^4$;
$E=2{,}1\cdot 10^5\ N/mm^2$;





Vertikalno pomjeranje tačke C:

$M_1=F\cdot z_1$;

$M_2=F\cdot a$; $\left(\frac{\partial M_1}{\partial F}\right)=z_1$; $\left(\frac{\partial M_2}{\partial F}\right)=a$;

$$y_C=\frac{\partial A_{df}}{\partial F}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^a M_1\frac{\partial M_1}{\partial F}dz+\int_0^a M_2\frac{\partial M_2}{\partial F}dz\right]$$

$$y_C=\frac{11Fa^3}{6EI}$$

$y_C=16,3\ mm$;

Horizontalno pomjeranje tačke C:

$M_1=F\cdot z_1$;

$M_2=F\cdot a+F_1\cdot z_2$; $\left(\frac{\partial M_1}{\partial F_i}\right)=0$; $\left(\frac{\partial M_2}{\partial F_i}\right)=z_2$;

$$z_c=\left(\frac{\partial A_{df}}{\partial Fi}\right)_{Fi=0}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^a M_1\frac{\partial M_1}{\partial M_i}dz+\int_0^a M_2\frac{\partial M_2}{\partial M_i}dz\right]=\frac{Fah^2}{2EI}$$

$z_c=10\ mm$;

Obrtanje presjeka C:

$M_1=F\cdot z_1+M_i$; $\left(\frac{\partial M_1}{\partial M_i}\right)=1$;

$M_2=F\cdot a+M_i$; $\left(\frac{\partial M_2}{\partial M_i}\right)=1$;

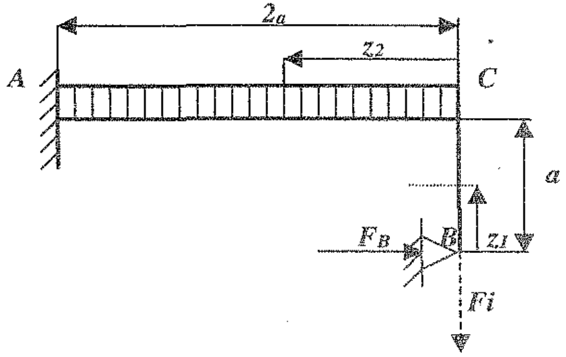
$$y_C=\left(\frac{\partial A_{df}}{\partial M_i}\right)_{Mi=0}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^a M_1\frac{\partial M_1}{\partial M_i}dz+\int_0^a M_2\frac{\partial M_2}{\partial M_i}dz\right]\Rightarrow$$

$$y_C=\frac{Fa^2}{2EI}+\frac{Fah}{EI}$$

$y_C=0,018\ rad$;

163. ZADATAK

Okvirni nosač ACB, konstantnog momenta inercije uklij̄ešten je u A, slobodno oslonjen u B, opterećen je ravnomjernim teretom q i te prema slici. Odrediti otpore oslonaca i pomjeranje tačke B.



Zadatak I x SN:

$\frac{\partial A_{df}}{\partial F_B}=0$;

$M_1=F_B\, z_1$;

$M_2=F_B\cdot a-\frac{qz^2}{2}$;

$\frac{\partial M_1}{\partial F_B}=z_1$; $\frac{\partial M_2}{\partial F_B}=a$;

$$\frac{\partial A_{df}}{\partial F_B}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^a M_1\frac{\partial M_1}{\partial F_B}dz+\int_0^{2a} M_2\frac{\partial M_2}{\partial F_B}dz\right]=0;$$

$F_B=\frac{4}{7}\cdot q\cdot a$

$F_B=12\ kN$;

$\sum y_i=0$:

$Y_A=2\cdot q\cdot a$

$Y_A=42\ kN$;

$\sum M^A=0$:

$F_B-2qa^2+M_A=0$;

$M_A=2\cdot q\cdot a^2-F_B\cdot a$

$M_A = 45\ kNm;$

Vertikalno pomjeranje tačke B:

$$M_1=F_B\cdot z_1=(2\cdot Fi+2\cdot q\cdot a-\frac{M_A}{a})\cdot z_1=2\cdot Fi\cdot z_1+2\cdot q\cdot a\cdot z_1-\frac{M_A}{a}z_1;$$

$$M_2=F_B\cdot a-Fi\cdot z_2-\frac{q}{2}z_2^2;$$

$\sum y_i=0:$

$Y_A=2\cdot q\cdot a+Fi;$

$\sum M^A=0:$

$F_B\cdot a-q\cdot 2\cdot a\cdot a-Fi\cdot 2a+M_A=0;$

$$F_B=2Fi+2qa-\frac{M_A}{a};$$

$$y_B=(\frac{\partial A_{df}}{\partial F_i})=\frac{1}{EI}\left[\int_0^a M_1\frac{\partial M_1}{\partial F_i}dz+\int_0^{2a}M_2\frac{\partial M_2}{\partial F_i}dz\right]=\frac{6}{7}\frac{qa^4}{EI};$$

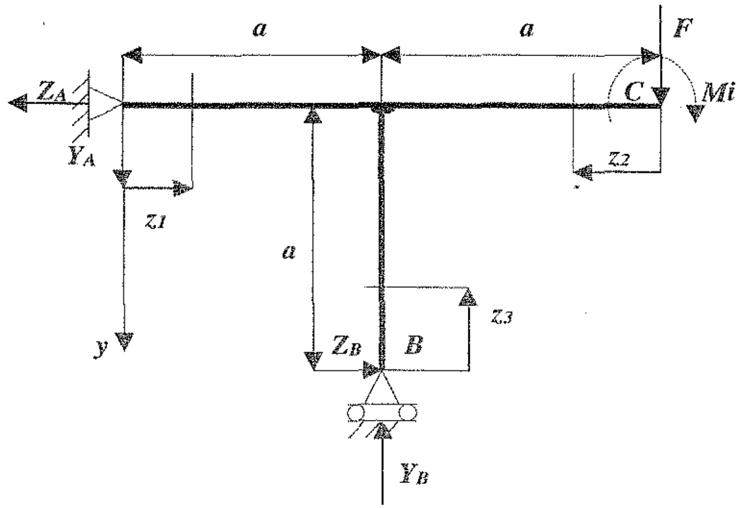
$$(\frac{\partial M_1}{\partial F_i})=2\cdot z_1;\quad(\frac{\partial M_2}{\partial F_i})=2a-z_2;\qquad y_B = 20\ mm$$

164. ZADATAK

Okvirni nosač ABC, konstantnog momenta inercije zglobno je vezan u A i B opterećen je koncentriranom silom F, prema datoj slici. Odrediti otpore oslonaca, vertikalno pomjeranja tačke C i obrtanje presjeka nosača na tom mjestu.

DATO JE:

$F=20\ kN;$
$a=1{,}4\ m;$
$I=925\ cm^4;$
$E=2\cdot 10^5\ N/mm^2;$



Zadatak je 1SXN:

$\sum y_i=0:$

$Y_A+F-Y_B=0$

$\sum M^A=0:$

$-F\cdot 2\cdot a+Y_B\cdot a+Z_B\cdot a=0;$

$Y_B=2F-Z_B;$

$Y_A=Y_B-F=F-Z_B;$

$$\frac{\partial A_{df}}{\partial Z_B}=0;Z_B-stat.prekobr.$$

$$M_1=Y_A\cdot z_1=(F-Z_B)\cdot z_1;\quad \frac{\partial M_1}{\partial Z_B}=-z_1;$$

$$M_2=F\cdot z_2;\qquad \frac{\partial M_2}{\partial Z_B}=0;$$

$$M_3=Z_B\cdot z_3;\quad \frac{\partial M_3}{\partial Z_B}=z_3;$$

$$\frac{\partial A_{df}}{\partial Z_B}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^a M_1\frac{\partial M_1}{\partial Z_B}dz+\int_0^a M_2\frac{\partial M_2}{\partial Z_B}dz+\int_0^a M_3\frac{\partial M_3}{\partial Z_B}dz\right]=0$$

uvrštavajući sve ovo naprijed u izraz dobijamo:

$Z_B = \frac{F}{2} = 10\ kN;$

$Y_A = 10\ kN;$

$Y_B = \frac{3F}{2} = 30\ kN;$

Vertikalno pomjeranje tačke C:

$$y_C = \frac{\partial A_{df}}{\partial F} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^a M_1 \frac{\partial M_1}{\partial F} dz + \int_0^a M_2 \frac{\partial M_2}{\partial F} dz + \int_0^a M_3 \frac{\partial M_3}{\partial F} dz\right] = \frac{F \cdot a^3}{2 \cdot EI}$$

$y_C = 15mm;$

Obrtanje presjeka C:

Prema Castiljanovoj metodi, u tački C se dodaje "fiktivni spreg"(Mi=0)

$\sum y_i = 0:$

$Y_A + F - Y_B = 0;$

$\sum M^A = 0:$

$-F2a + Y_B \cdot a + Z_B a - M_i = 0;$

$Y_B = 2F - Z_B + \frac{M_i}{a};$

$Y_A = F - Z_B + \frac{M_i}{a};$

$M_1 = Y_A \cdot z_1 = \left(F - Z_B + \frac{M_i}{a}\right) z_1;$

$M_2 = F \cdot z_2 + M_i;$

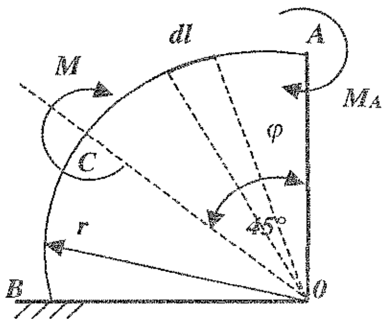
$M_3 = Z_B \cdot z_3;$

$$\gamma_C = \left(\frac{\partial A_{df}}{\partial M_i}\right)_{Mi=0} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^a M_1 \frac{\partial M_1}{\partial M_i} dz_1 + \int_0^a M_2 \frac{\partial M_2}{\partial M_i} dz_2 + \int_0^a M_3 \frac{\partial M_3}{\partial M_i} dz_3\right] = \frac{2F \cdot a^2}{3 \cdot EI}$$

$\gamma_C = 0{,}014\ rad$

165. ZADATAK

Za zakrivljeni štap zadan je moment M u tački C. Treba odrediti ugao nagiba u tački A. Za određivanje ugla nagiba koristiti Castiljanovu teoremu.



$$\alpha_A = \frac{1}{E \cdot Ix} \int_0^l M \frac{\partial M(\varphi)}{\partial M_A} dl;$$

za $0 < \varphi_1 < 45°$ *je:* $M\varphi_1 = M_A;\ \frac{\partial M\varphi}{\partial M_A} = 1;$

za: $45° < \varphi_1 < 90°:$

$M\varphi_2 = M + M_A;\ \frac{\partial M\varphi_2}{\partial M_A} = 1;$

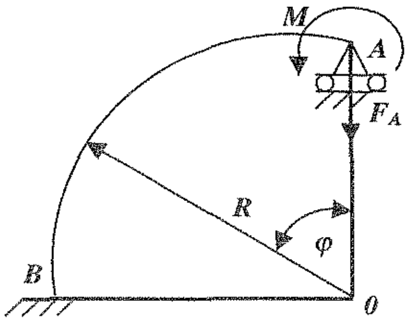
$$\alpha_A = \frac{1}{E \cdot I_x}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} M\varphi_1 \frac{\vartheta M\varphi_1}{\vartheta M_A} dl + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} M\varphi_2 \frac{\vartheta M\varphi_2}{\vartheta M_A} dl\right];$$

$$\alpha_A = \frac{1}{E \cdot I_x} \int_0^{\frac{\pi}{4}} M_A \cdot 1 \cdot R\, d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (M + M_A) \cdot 1 \cdot R\, d\varphi;$$

$$\alpha_A = \frac{M \cdot R \cdot \pi}{4 \cdot EIx};$$

166. ZADATAK

Za zakrivljeni štap nacrtati dijagram : Fa, Ft, Mf.



Zadatak je 1SxN

F_A-stati.prek.

$$y_A=\frac{1}{E\cdot Ix}\int_0^l M\varphi\frac{\vartheta M\varphi_1}{\vartheta F_A}dl=0;\quad \frac{1}{E\cdot Ix}\neq 0;$$

$$\int_0^l M\varphi\frac{\vartheta M\varphi}{\vartheta F_A}dl=0;\ M\varphi=F_A\cdot R\cdot\sin\varphi - M;$$

$$\frac{\partial M\varphi}{\partial M_A}=R\cdot\sin\varphi\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}(F_A R\sin\varphi-M)R\sin\varphi\, R\, d\varphi=0\ \Rightarrow$$

$$F_A=\frac{4M}{R\pi};$$

U proizvoljnom presjeku:

$$M\varphi=F_A\cdot R\cdot\sin\varphi - M=\frac{4\cdot M}{R\cdot\pi}\cdot R\cdot\sin\varphi - M=M\left(\frac{4}{\pi}\sin\varphi-1\right);$$

pa je za:

$\varphi=0;\ M\varphi=-M;$

$\varphi=\frac{\pi}{4}\ \ M\varphi=-0,11\,M;$

$\varphi=\frac{\pi}{2};\ M\varphi=0,27\,M;$

Uz $M\varphi=0$ *slijedi :* $\varphi=\arcsin\frac{\pi}{4}$

U proizvoljnom presjeku je: $F_t=F_A\cdot\cos\varphi=\frac{4\cdot M\cos\varphi}{R\pi}$ *pa je za:*

$\varphi=0;\ Ft=\frac{4M}{R\pi};$

$\varphi=\frac{\pi}{4};\ Ft=\frac{2\cdot\sqrt{2}M}{R\pi};$

$\varphi=\frac{\pi}{2};\ Ft=0$

za aksijalnu silu je:

$F_a=-F_A\sin\varphi=-\frac{4M}{3\pi}\cdot\sin\varphi;$

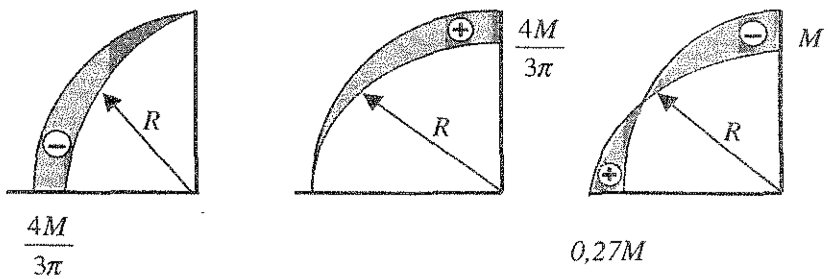
Za:

$\varphi=0\quad F_a=0;$

$\varphi=\frac{\pi}{4}\quad F_a=-\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\pi}M;$

$\varphi=\pi\quad F_a=-\frac{4M}{3\pi};$

dijagram Ft:

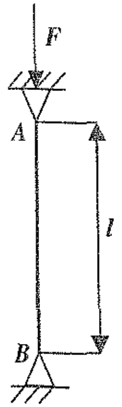


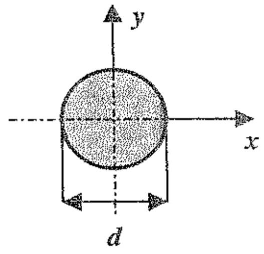
“F_t” “F_a” “M_f”

9. IZVIJANJE

167. ZADATAK

Čelični štap dužine $l=2m$; kružnog poprečnog presjeka zglobno vezan na oba kraja opterećen je aksijalnom silom pritiska $F=120$ kN. Dimenzionirani štap ako je stepen sigurnosti protiv izvijanja $\nu=3{,}5$; napon na granici proporcionalnosti $\sigma_p=210$ N/mm^2; $E=2{,}1\cdot10^5$ N/mm^2, a dozvoljen napon na čist pritisak $\sigma_{dc}=70$ N/mm^2.





Prema Euler-u je:

$$Fk=\frac{\pi^2\cdot E\cdot I_{min}}{l_r^2};$$

$$I_{min}=\frac{\nu\cdot F\cdot lr^2}{\pi^2\cdot E};\quad lr=l \text{ i } Fk=\nu\cdot F;\quad I_{min}=81{,}1\ cm^4;$$

$$I_{min}=\frac{d^4\cdot\pi}{64}=81{,}1\Rightarrow\ d=6{,}4\ cm;\qquad i_{min}=\sqrt{\frac{I_{min}}{A}}=1{,}6\ cm;$$

$$\lambda=\frac{I_r}{i_{min}}=125>\lambda_p;\qquad \lambda_p=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}=99{,}4;$$

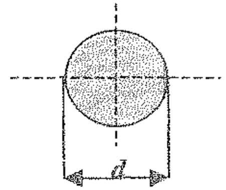
dimenzioniranje po Euler-u zadovoljava:

provjera na pritisak:

$$\sigma_C=\frac{F}{A}=\frac{4F}{d^2\cdot\pi}=37{,}3<\sigma_{DC}=70\ \ N/mm^2;$$

168. ZADATAK

Štap dužine $l=5m$, kružnog poprečnog presjeka, uklješten je na jednom kraju, opterećen je aksijalnom silom pritiska $F=30kN$. Dimenzionirati štap ako je stepen sigurnosti protiv izvijanja $\nu=6$, a modul elastičnosti za drvo $E=0{,}012\cdot10^6 MN/m^2$, a $\lambda p=100$.



$$Fk=\frac{\pi^2\cdot E\cdot I_{min}}{lr^2};$$

$$Fk=F\cdot\nu;$$

$$l_r=2\cdot l_o;$$

$$I_{min}=\frac{F\cdot\nu\cdot(2\cdot l_0)^2}{\pi^2\cdot E};\quad I_{min}=15000\ cm^4;$$

$$I_{min}=\frac{d^4\pi}{64}\quad\Rightarrow\quad d=23{,}7\ cm;$$

$$A=\frac{d^2\cdot\pi}{4};\qquad A=440\ cm^2;$$

$$i_{min}=\sqrt{\frac{I_{min}}{A}};\quad i_{min}=5{,}8\ cm;$$

$$\lambda=\frac{lr}{i_{min}}=\frac{2\,l_0}{i_{min}}=174>\cdot\lambda p;$$

Dimenzioniranje po Euler-u zadovoljava

169. ZADATAK

Čelični stub visine $l = 3{,}6$ m zglobno vezan na oba kraja, opterećen je aksijalnom silom pritiska $F=80$ kN. Dimenzionirati stub ako je poprečni presjek sastavljen iz dva [profila na takvom međusobnom rastojanju "a", da su im glavni centralni momenti inercije jednaki, $\nu=3{,}5; E=2{,}1\cdot10^5$ N/mm^2.

$$I_{min}=\frac{\nu\cdot F\cdot lr^2}{\pi^2\cdot E};\quad I_{min}=175{,}1cm^4;\quad l_r=l;$$

$$I_x=\frac{I_{min}}{2};\qquad I_x=87{,}6\ cm^4;$$

2 x [8 profila $(Ix=106\ cm^4; A=11\ cm^2)$;

$$i_{min}=\sqrt{\frac{I_{min}}{A}}=\sqrt{\frac{2I_x}{2A}}=ix=3{,}1cm;$$

$$\lambda=\frac{l_r}{i_{min}}=116{,}1>\lambda p=100;$$

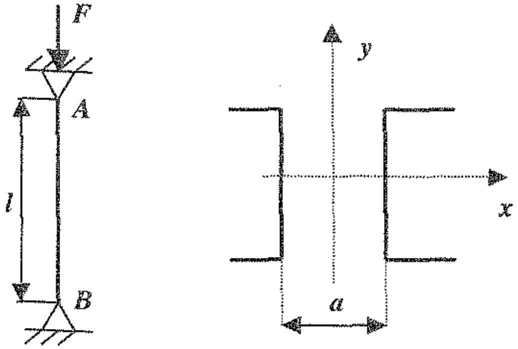
Dimenzioniranje po Euler-u zadovoljava

rastojanje "a" se dobije:

$I_1=I_2$ $(Ix=Iy)$

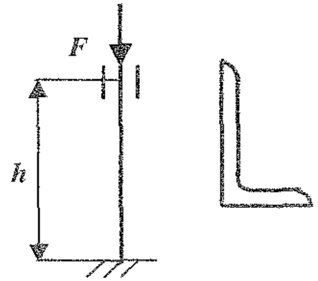
$$2\cdot106=2\left[19{,}4+11\left(1{,}45+\frac{a}{2}\right)^2\right]$$

$a=2{,}72$ cm;



170. ZADATAK

Odrediti sa kojom se silom F može opteretiti stub ugaonog presjeka L80x120x10, ako je $E=2{,}1\cdot10$ da N/cm^2; stepen sigurnosti $\nu_k=3{,}5$; $l=2{,}5m$; $\lambda_{gr}=105$.



za profil L $80\cdot120\cdot10$:

$I_{min}=56{,}1\ cm^4$;

$i_{min}=1{,}71$ cm;

$A=19{,}1\ cm^2$;

$$\lambda=\frac{l_0}{i_{min}};$$

$l_0=0{,}7l$;

$\lambda=104\approx\lambda gr$; (Važi Eulerov obrazac)

$$F=\frac{\pi^2\cdot E\cdot I_{min}}{n_k\cdot l_0^2}$$

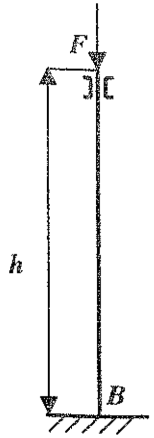
$F=10000$ daN;

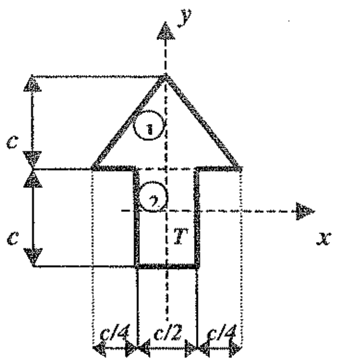
171. ZADATAK

Dimenzionirati nosač opterećen na izvijanje.

DATO JE:

$F=140\ kN;$
$l=1\ m;$
$\nu_k=4;$
$E=2\cdot 10^5\ MN/m^2;$
$\lambda_p=95;$
$a=310\ MN/m^2;$
$b=1,14\ MN/m^2;$





$$I_{min}=\frac{F\cdot \nu_k\cdot l_r^2}{\pi^2\cdot E};$$

$l_r=0,7l;$

$I_{min}=13,91cm^4;$

$I_Y=I_{Y1}+I_{Y2};$

$$I_{Y1}=\frac{h}{12}(p^3+q^3)=\frac{c}{12}\cdot[(\frac{c}{2})^3+(\frac{c}{2})^3]$$

$I_{Y1}=c^4/48;$

$$I_{Y2}=\frac{c\cdot(\frac{c}{2})^3}{12}$$

$I_{Y2}=c^4/96;$

$$I_Y=\frac{c^4}{48}+\frac{c^4}{96}=\frac{c^4}{32}$$

$I_Y=13,91cm^4;$

$c=4,59\ cm;$

$A=A_1+A_2=c^2;$

$$i_{min}=\sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$$

$i_{min}=0,81cm;$

$$\lambda=\frac{l_r}{i_{\min}}=86,2<\lambda p-\text{ne važi Eulerov obrasac}$$

Važi Tetmajerov postupak:

$\sigma_T=a-b\,\lambda;\quad \sigma_T=310-1,14\,\lambda;$

$$\sigma_k=\sigma_T=\frac{F\nu_k}{A}\Rightarrow$$

$$F=\frac{A}{\nu_k}(310-1,14\lambda)=111,519\ kN<140\ kN;$$

$\lambda_{usv}=78;$

$$i_{min}=\frac{l_0}{\lambda_{usv}};$$

$$\sqrt{\frac{c^2}{32}}=\frac{70}{78}$$

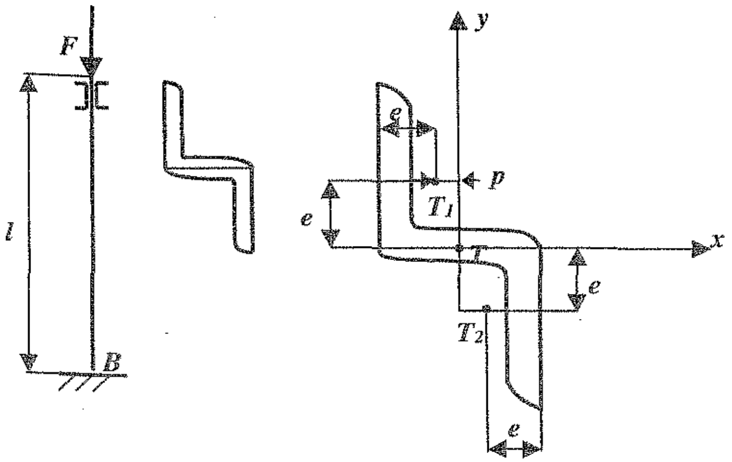
$c=5,07\ cm;$

$$F=\frac{A}{\lambda_k}(310-1,14\lambda)$$

$F=142,44\ kN>140;$

172. ZADATAK

Presjek štapa kombinovan je iz dva profila L 100 x100 x 10 . Odrediti silu F sa kojom možemo opteretiti štap na izvijanje, ako je $E=2\cdot10^6$ daN/cm², l=2m; stepen sigurnosti $\nu_k=3$ i granična vitkost $\lambda_g=105$.



L 100 · 100 · 10:

$A_1=19{,}2\ cm^2;$

$e=2{,}82\ cm;$

$I_{x1}=177\ cm^4=I_{y1};$

$I_\xi=280\ cm^4;$

$I_\eta=73{,}3\ cm^4;$

$I_x=2(I_{x1}+e^2\cdot A_1)$

$I_x=640\ cm^4;$

$I_y=2(I_{y1}+p^2\cdot A_1)$

$I_y=526\ cm^4;$

$I_{xy}=2(I_{xy1}+x_{t1}\cdot y_{t1}A_1);$

$x_{t1}=p;\ \ y_{t1}=e;$

$I_{xy1}=\pm\sqrt{I_{x1}\cdot I_{y1}-I_\xi\cdot I_\eta}\ ;$

$I_{xy1}=-102\ cm^4;$

$a=b=10\ cm;\ a=2(e+p);\ \ p=\dfrac{a}{2}-e=2{,}18\ cm;$

$I_{xy}=-396\ cm^4;$

$I_{min}=\dfrac{I_x+I_y}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{(I_x-I_y)^2+4I_{xy}^2}$

$I_{min}=298\ cm^4;$

$A=A_1+A_2=38{,}4\ cm^4;$

$I_{min}=2{,}8\ cm;$

$\lambda=\dfrac{l_r}{i_{min}}=50<105;$

$l_r=0{,}7l=140\ cm;$

$\sigma_k=\sigma_t=310-1{,}14\lambda$

$\sigma_k=283\ MN/m^2;$

$\sigma_k=\dfrac{F\cdot\nu_k}{A}\Rightarrow$

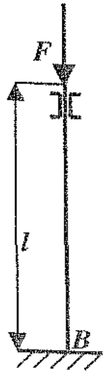
$F=323{,}84\ kN;$

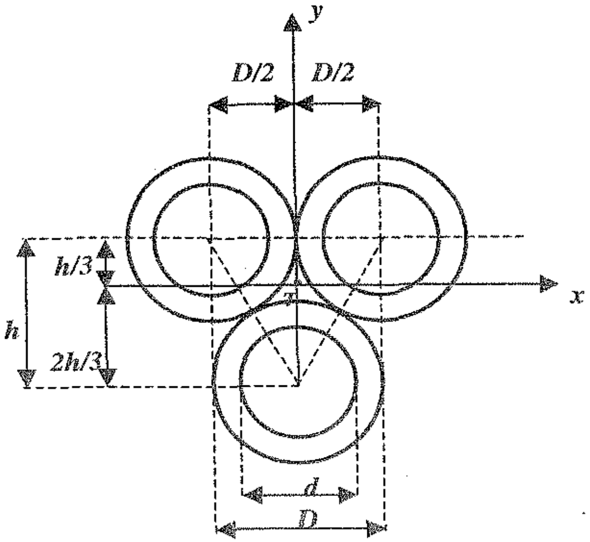
173. ZADATAK

Poprečni presjek stuba sastoji se iz tri čelične cijevi koje su međusobno spojene. Odrediti silu F ako je.

DATO JE:

$D=75\ mm;$
$d=3/4D;$
$l=6\ m;$
$E=2\cdot10^6\ daN/cm^2;$
$\nu_k=3;$
$\lambda_{gr}=105;$





$'=\frac{\pi}{4}\,(D^2-d^2);$

$'=19{,}5\ cm^2;$

$'=\frac{\pi}{64}\,(D^4\text{-}d^4)$

$'=106\ cm^4;$

${}_{in}=I_Y=3I_Y'+2\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^2\cdot A'$

${}_{in}=868\ cm^4;$

$=3\cdot A'=58{,}5\ cm^2;$

${}_{in}^{2}=\frac{I_{\min}}{A}=3{,}88\ cm;$

$=\frac{lr}{i_{\min}}=108>105$ (važi Euler-obrazac)

$=\frac{\pi^2\cdot E\cdot I_{\min}}{v_k\cdot l_0^2}=5\cdot 10^5\ daN;$

10 SLOŽENA NAPREZANJA

174. ZADATAK

Štap AB, pravougaonog poprečnog presjeka opterećen je na slabodnom kraju u vertikalnoj ravni silom F, pod uglom α. Izračunati vrijednosti najvećeg normalnog napona:

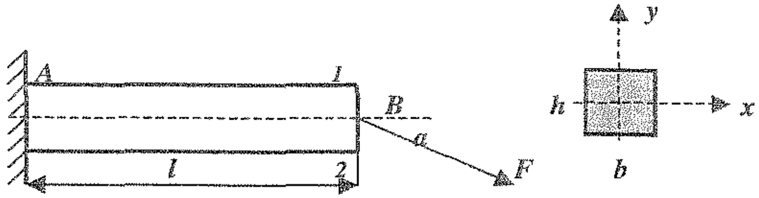
DATO JE:

$F=8\ kN,$

$\alpha=30°;$

$l=0{,}6\ m;$

$b=2h/3=6\ cm;$



$A=b\cdot h;\quad Wx=\frac{b\cdot h^2}{6};$

$Y_B=F\cdot\sin\alpha;$

$Z_B=F\cdot\cos\alpha;$

$M_{max}=F\cdot l\cdot\sin\alpha=M_A;$

Naponi krajnih tačaka presjeka ivični napon:

$\sigma_1=\sigma_1'+\sigma_1''=\frac{Z_B}{A}+\frac{M_{\max}}{Wx}$

$\sigma_1=30{,}09\ N/mm^2;$

$\sigma_2=\sigma_2'-\sigma_2''=\frac{Z_B}{A}-\frac{M_{\max}}{Wx}$

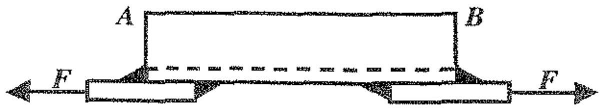
$\sigma_2=-28{,}3\ N/mm^2$

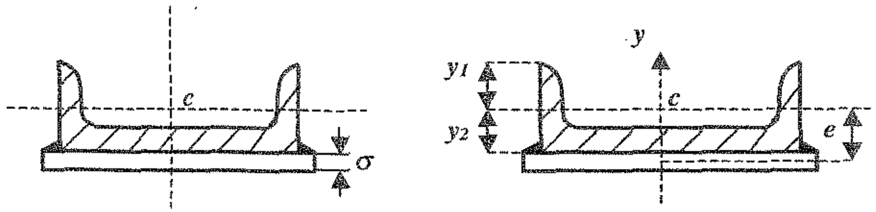
175. ZADATAK

Štap AB, poprečnog presjeka profila [10, opterećen je ekscentričnom silom zatezanja F prema datoj slici. Debljina ploče, zavarene za štap je σ. Odrediti normalne napone krajnjih tačaka poprečnog presjeka.

DATO JE:

$F = 12\ kN;$
$\delta = 9\ mm;$





$A = 13{,}5\ cm^2;$

$e = y_2 + \dfrac{\delta}{2}$

$e = 2\ cm;$

$\sigma_1 = \dfrac{F}{A} - \dfrac{F\,e}{W_{x1}};\quad W_{x1} = \dfrac{Ix}{y_1}$

$W_{x1} = 8{,}49\ cm^3;$

$\sigma_2 = \dfrac{F}{A} + \dfrac{F\,e}{W_{x2}};\quad W_{x2} = \dfrac{Ix}{y_2}$

$W_{x2} = 18{,}9\ cm^3;$

$\sigma_1 = 8{,}9 - 28{,}2$

$\sigma_1 = -\ 19{,}3\ N/mm^2;$

$\sigma_2 = 8{,}9 + 12{,}4$

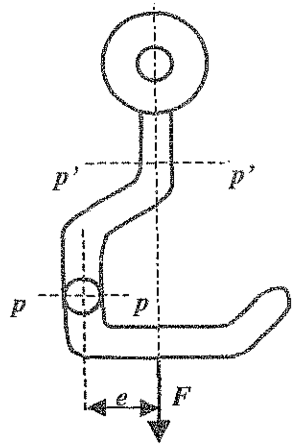
$\sigma_2 = 21{,}6\ N/mm^2;$

176. ZADATAK

Odrediti nosivost kuke, kružnog poprečnog presjeka prečnika d, opterećene aksijalnom silom zatezanja F prema datoj skici. Koliki je napon istezanja vrata kuke (presjek p'-p')?

DATO JE:

$\sigma_d = 150\ N/mm^2;$ *(dozvoljeni napon na istezanje)*
$d = 24\ mm;$
$e = 2d;$



Najveći napon istezanja u opasnom presjeku p-p:

$\sigma = \dfrac{F}{A} + \dfrac{F\,e}{W_x} \le \sigma_d;$

$A = \dfrac{d^2\pi}{4};\quad Wx = \dfrac{d^3\pi}{32}$

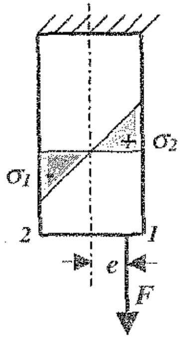
Nosivost kuke, napon istezanja presjeka p'-p':

$F \le \dfrac{d^2\pi\sigma_d}{68};\quad F = 3992\ N;$

Pa je: $\sigma = \dfrac{F}{A} = 8{,}8\ N/mm^2$

7. ZADATAK

ozdeni štap, presjeka 50 x 100(mm), uklijěšten je na gornjem kraju a na
njem opterećen ekscentričnom aksijalnom silom 10kN. Ekscentritet je 20mm.
ći graničnu vrijednost normalnih napona.



$$= \frac{F}{A} + \frac{M}{Ix} \cdot y = \frac{F}{A} \cdot (1 + \frac{e}{ix^2} \cdot y);$$

utralna osa:

$$=0; \;\; 1 + (\frac{e}{ix^2}) \cdot y = 0;$$

$$= - \frac{ix^2}{e} = b_0;$$

ʋa je prava paralelna poprečnoj težišnoj Sx-osi na udaljenju od nje za :

$$= - \frac{1}{12} \frac{h^2}{e}$$

$= 25/6$ cm;

sa suprotne je strane od napadne tačke ekscentične sile tako da je ispunjen
lov:

$$= - e \cdot b_0 = -y_0 \cdot b_0;$$

$$_{ax} = \frac{F}{A} \pm \frac{F\,e}{Wx} = \sigma_0 \pm \frac{F\,e}{Wx}; \quad \sigma_0 \text{ – težinski napon;}$$

$=440$ N/cm^2;

$= - 40$ N/cm^2

178. ZADATAK

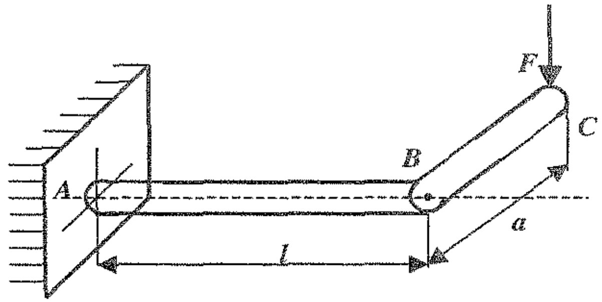
Štap AB, kružnog poprečnog presjeka opterećen je preko ručice BC, koja je sa njim kruto vezana pod pravim uglom, vertikalnom silom F prema datoj slici. Dimenzionirati štap prema hipotezama o čvrstoći materijala.

DATO JE:

$F=4{,}2$ kN;
$l=80$ cm;
$a=30$ cm;
$\sigma_d=100$ N/mm^2;
$M_{fmax} = M_f = 336$ kNcm;
$M_{tmax} = M_t = F\,a = 126$ kNcm;
- hipoteza najvećeg normalnog napona:

$$M_i = \frac{1}{2} \cdot (M_f + \sqrt{M_f^2 + M_t^2})$$

$M_i = 347{,}4$ kNcm;



$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_i}{\pi \sigma_d}}$$

$d = 70{,}7$ mm;

- hipoteza najvećeg tangentnog napona:

$$M_i = \sqrt{M_f^2 + M_t^2}$$

$M_i = 358{,}8$ kNcm;

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_i}{\pi \sigma_d}}$$

$d = 71{,}5$ mm;

- *hipoteza najveće deformacije: (Saint-Venant)*

$M_i = 0{,}35 \cdot Mf + 0{,}65 \cdot \sqrt{M_f^2 + M_t^2}$

$M_i = 350{,}9$ kNcm;

$d = \sqrt[3]{\dfrac{32M_i}{\pi\sigma_d}}$

$d = 71$ mm;

- *hipoteza najvećeg deformacijskog rada:*

$M_i = \sqrt{M_f^2 + (\frac{3}{4})M_t^2}$

$M_i = 353{,}3$ kNcm;

$d = \sqrt[3]{\dfrac{32M_i}{\pi\sigma_d}}$

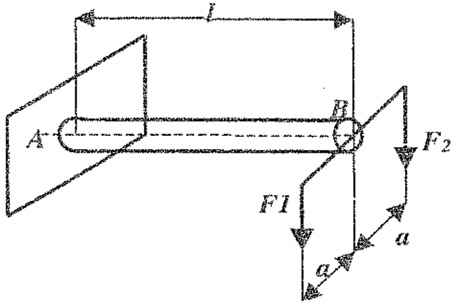
$d = 71{,}2$ mm;

179. ZADATAK

Štap AB, kružnog poprečnog presjeka opterećen je vertikalnom silom F_1 i F_2. Dimenzionirati štap prema hipotezi najveće deformacije. Koliki bi bio prečnik štapa za slučaj dejstva samo sile F_1, odnosno F_2?

DATO JE:

$F_2 = 2F_1 = 3{,}6$ kN; $\quad a = 30$ cm;
$l = 30$ cm; $\quad \sigma_d = 60$ N/mm^2.



a)

$M_{fmax} = M_f = (F_1 + F_2) \cdot l$

$M_{fmax} = 162$ kNcm;

$M_t = (F_2 - F_1) \cdot a$

$M_t = 54$ kNcm;

$M_i = 0{,}35 \cdot M_f + 0{,}65 \sqrt{M_f^2 + M_t^2}$

$M_i = 167{,}7$ kNcm;

$d = \sqrt[3]{\dfrac{32M_i}{\pi\sigma_d}}$

$d = 60$ mm;

b)

$M_{fmax} = M_f = F_1 \cdot l$

$M_{fmax} = 54$ kNcm;

$M_t = F_1 \cdot a$

$M_t = 54$ kNcm;

$M_i = 0{,}35 \cdot M_f + 0{,}65 \sqrt{M_f^2 + M_t^2}$

$M_i = 68{,}5$ kNcm;

$d = \sqrt[3]{\dfrac{32M_i}{\pi\sigma_d}}$

$d = 49$ mm;

c)

$M_{fmax} = M_f = F_2 \cdot l$

$M_{fmax} = 108$ kNcm;

$M_t = F_2 \cdot a$

$M_t = 108$ kNcm;

$M_i = 137{,}1$ kNcm;

$d = 62$ mm;

ZADATAK

...enzionirati vratilo kružnog poprečnog presjeka sa dva nasađena točka, težina ... G_2, na koji djeluju obimne sile F_1 i F_2, prema datoj skici. Primjeniti hipotezu ...većeg momenta i hipotezu najvećeg tangetnog napona.

...TO JE:

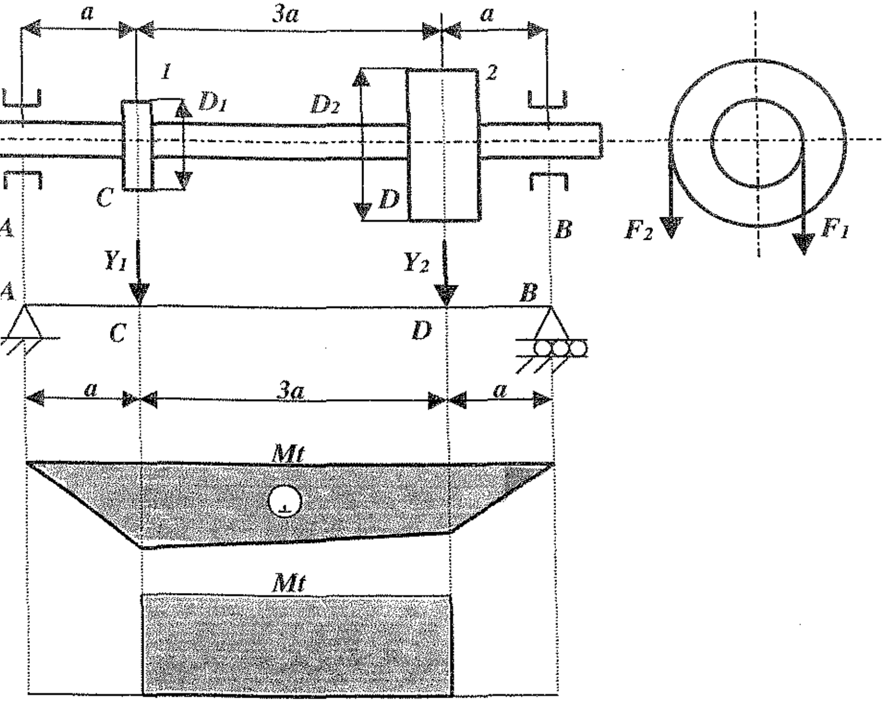
3,5 kN;

$=2 \cdot G_1=1\ kN;$

$=2 \cdot D_1=16\ m;$

,5 m;

60 N/mm^2.



$$\frac{D_1}{2} = F_2 \frac{D_2}{2}$$

$$= \frac{F_2 D_2}{D_1}$$

$F_1 = 7\ kN;$

$Y_1 = G_1 + F_1$

$Y_1 = 7{,}5\ kN;$

$Y_2 = G_2 + F_2$

$Y_2 = 4{,}5\ kN; \quad F_A = 6{,}9\ kN; \quad F_B = 5{,}1\ kN;$

$M_C = F_A \cdot a$

$M_C = 345\ kNcm;$

$M_D = F_B \cdot a$

$M_D = 255\ kNcm;$

Moment savijanja u opasnom presjeku:

$M_{fmax} = M_C = 345\ kNcm;$

Moment uvijanja na dijelu vratila CD:

$$M_t = F_2 \cdot \frac{D_2}{2} = 280\ kNcm;$$

Idealni moment. Hipoteza najvećeg normalnog napona:

$$M_i = \frac{1}{2} \cdot (M_f + \sqrt{M_f^2 + M_t^2})$$

$M_i = 394{,}7\ kNcm;$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_i}{\pi \sigma_d}}$$

$d = 88\ mm;$

idealni moment hipotenuza naj.tangente napona:

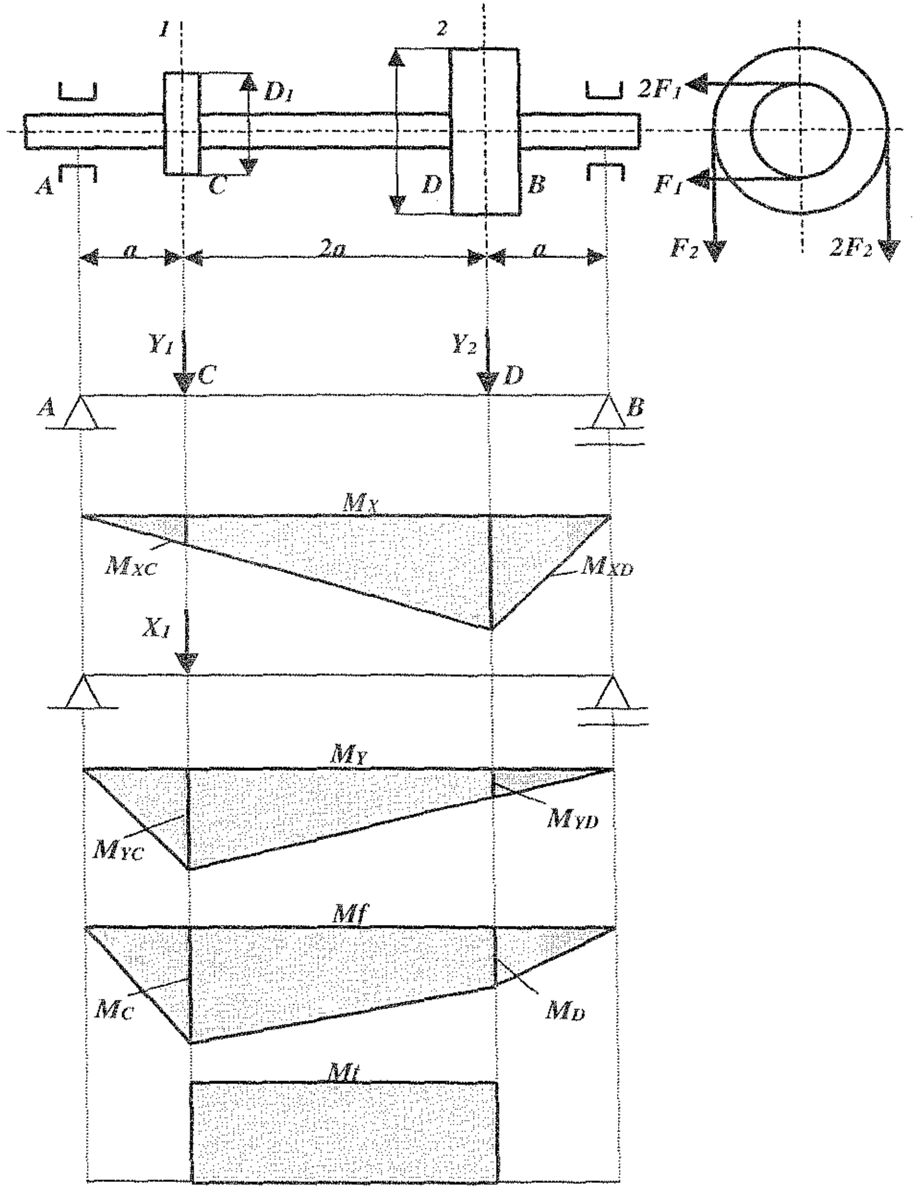
$$M_i = \sqrt{M_f^2 + M_t^2}$$

$M_i = 444{,}3\ kNcm;$

$d = 91\ mm;$

181. ZADATAK

Dimenzionirati vratilo kružnog poprečnog presjeka sa dva nasađena kaišnika, težina G_1 i G_2, na koji djeluju sile u vučnim, radnim odnosno slobodnom ogranku kaiša prema datoj slici. Kaišnik (1) prima snagu P i daje je preko kaišnika(2). Primjeniti hipotezu najvećeg normalnog napona i hipotezu najveće deformacije.



Sila u kaišnicima:

$$F_1 = \frac{2M_t}{D_1}$$

$F_1 = 3{,}18$ kN;

$$F_2 = \frac{2M_t}{D_2}$$

$F_2 = 2{,}12$ kN;

$$M_t = 955 \cdot \frac{p}{n}$$

$M_t = 95{,}5$ kNcm;

Vertikalne sile na vratilu:

$Y_1 = G_1 = 0{,}8$ kN;

$Y_2 = G_2 + 3 \cdot F_2$

$Y_2 = 7{,}56$ kN;

$Y_A = 2{,}49$;

$Y_B = 5{,}87$ kN;

$M_{XC} = Y_A \cdot a$

$M_{XC} = 49{,}8$ kNcm;

$M_{XD} = Y_B \cdot a$

$M_{XD} = 117{,}4$ kNcm;

Horizontalna sila na vratilu:

$X_1 = 3 \cdot F_1 = 9{,}54$ kN;

$X_A = 7{,}16$ kN;

$X_B = 2{,}38$ kN;

$M_{YC} = X_A \cdot a$

$M_{YC} = 143{,}2$ kNcm;

$M_{YD} = X_B \cdot a$

$M_{YD} = 47{,}6$ kNcm;

ultirajući moment sav. u C i D:

$= \sqrt{M_{XC}^2 + M_{YC}^2}$

$= 151,6\ kNcm;$

$= \sqrt{M_{XD}^2 + M_{YD}^2}$

$= 126,7\ kNcm;$

asni presjek je u C:

$= M_{fmax} = M_f$

alni moment. Hipoteza najvećeg normalnog napona:

$= \frac{1}{2} \cdot (M_f + \sqrt{M_f^2 + M_t^2})$

$= 165,4\ kNcm;$

$= \sqrt[3]{\frac{32 M_i}{\pi \sigma_d}}$

$= 59,5\ mm;$

alni moment. Hipoteza najveće deformacije (S.Venant)

$= 0,35 \cdot M_f + 0,65 \sqrt{M_f^2 + M_t^2}$

$= 169,5\ kNcm;$

$= \frac{\sqrt[3]{32 M_i}}{\pi \sigma_d}$

$= 60\ mm;$

LITERATURA

[1] Kollbrunner, C.F ., Hajdin, N.: Dužnnwandige stabe, Band I, Springer Verlag, Berlin 1972.

[2] Dunica, Š., Botović, Ž.: Zbirka riješenih zadataka iz Otpornosti materijala sa izvodima iz teorije, Naučna knjiga Beograd

[3] Musafija, B.: Primjenjena teorija plastičnosti II dio, Univerzitet u Sarajevu, 1974. g.

[4] Senjanović, I.: Metode konačnih elemenata u analizi brodskih konstrukcija, FSB-Zagreb, 1986. g.

[5] Sapunar, Z.: Nauka o čvrstoći I, Sveučilište u Zagrebu, Strojarski fakultet u Rijeci 1971 g.

[6] Sapunar, Z.: Nauka o čvrstoći II, Strojarski fakultet, Rijeka, 1967 g.

[7] Alfirević, I.: Linearna analiza konstrukcija, FSB, Zagreb, 1999. g.

[8] Timošenko, S.P.: Teorija elastičnosti, Građevinska knjiga , Beograd 1962. g.

[9] Barjanac, D.: Nauka o čvrstoći I, Tehnička knjiga Zagreb, 1974. g.

[10] Alfirević, I.: Nauka o čvrstoći I, Tehnička knjiga d.d. Zagreb 1995.

[11] Alfirević, I.: Nauka o čvrstoći ,Inžinjerski priručnik IP1, Školska knjiga, Zagreb 1996.

[12] Brnić, J.: Elastomehanika i plastomehanika, Školska knjiga, Zagreb 1996.

[13] Jecić, S.: Teorija elastičnosti, Sveučilišna naklada Liber, Zagreb 1981.

[14] Kelkar, V.S. Sewell, R.T.: Fundamentals of the Analysis and Design of Shell Structures, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1987.

[15] Zbirka tehničkih propisa u građevinarstvu, Građevinska knjiga, Beograd 1980.

[16] Brnić, J.: Nauka o čvrstoći, Školska knjiga Zagreb, 1991.

SADRŽAJ

OTPORNOST MATERIJALA I

OTPORNOST MATERIJALA II