

Domaće zadaće iz nuklearne fizike

Matko Milin

Prosinac 2, 2007

1 Simetrije i algebra momenta impulsa

1. (1 bod) Izračunajte veličinu c u relaciji:

$$J^-|j m\rangle = c|j m - 1\rangle .$$

2. (1 bod) Pokazati:

$$[J^\pm, J_z] = \mp J^\pm .$$

3. (1 bod) (a) Pokazati:

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = J^- J^+ + J_z^2 + J_z ,$$

- (b) Pomoću gornjeg izraza, pokazati:

$$J^2|j\rangle = j(j+1)|j\rangle$$

4. (1 bod) Izračunajte $d_{-2,1}^2$ (pomoću Wignerove formule).

5. (4 boda) Dokažite operatorsku jednakost:

$$e^{-i\Phi\hat{J}_i} e^{i\Theta\hat{J}_k} e^{i\Phi\hat{J}_i} = e^{i\Theta\{\cos(\Phi)\hat{J}_k + \sin(\Phi)\epsilon_{ikl}\hat{J}_l\}}$$

gdje su s \hat{J}_l dane komponente momenta impulsa koje zadovoljavaju uobičajene komutacijske operacije:

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_k] = i\epsilon_{ikl}\hat{J}_l.$$

Pomoć: pokažite da vrijedi

$$e^{-i\Phi\hat{J}_i} \hat{J}_k e^{i\Phi\hat{J}_i} = \cos(\Phi)\hat{J}_k + \sin(\Phi)\epsilon_{ikl}\hat{J}_l \quad (i \neq k)$$

6. (3 boda) Izračunajte : $\langle l_1 l_2; LM | \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 | l'_1 l'_2; LM \rangle$ (Uputa: odredite izborna pravila, za neišćezavajuće matricne elemente napisati izraze bez uporabe 3j, Clebsch-Gordan ili sličnih simbola).

7. (4 boda) Pokažite da operator:

$$\hat{J} = \sqrt{10} [a_2^\dagger \tilde{a}_2]^1$$

zadovoljava komutacijske relacije momenta impulsa. a_2 je operator poništenja bozonskog stanja momenta impulsa $J=2$ (\tilde{a}_2 je odgovarajući sferični tenzorski operator).

8. (1 bod) Pokažite da je reducirana Wignerova d -matrica za $j=1/2$ dana s

$$d^{(1/2)} = \cos(\beta/2) - i\sigma_y \sin(\beta/2)$$

gdje je

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

odgovarajuća Paulijeva matrica.

9. (2 boda) Vektorski zbrojite momente impulsa \vec{J}_1 ($j_1=1$), \vec{J}_2 ($j_2=1/2$), \vec{J}_3 ($j_3=1/2$) na dva načina:

- 1) $\vec{J}_{12} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$, pa $\vec{J} = \vec{J}_{12} + \vec{J}_3$;
- 2) $\vec{J}_{23} = \vec{J}_2 + \vec{J}_3$, pa $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_{23}$.

Napišite odgovarajuće vektore stanja za $j=1$, $m=1$ (kvantni broj j odgovara vektoru \vec{J}). Usporedite i komentirajte rezultate dobivene na dva načina.

10. (3 boda) Pokažite da se vezanjem spina i orbitalnog momenta impulsa dobiva vlastita spinorna valna funkcija za nukleone oblika:

$$Y_l^{j=l\pm 1/2, m} = \begin{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{l\pm m+1/2}{2l+1}} Y_l^{m-1/2} \\ \sqrt{\frac{l\mp m+1/2}{2l+1}} Y_l^{m+1/2} \end{pmatrix}$$

koja je vlastita valna funkcija skupa operatora:

$$\left\{ \hat{J}^2, \hat{J}_z, \hat{L}^2, \hat{S}^2 \right\}$$

11. (3 boda) Prikažite vlastiti vektor proizvoljnog operatora $\hat{n} \cdot \vec{J}$ (\hat{n} je proizvoljan jedinični vektor) definiranog s:

$$(\hat{n} \cdot \vec{J}) |\hat{n}, + \rangle = \frac{\hbar}{2} |\hat{n}, + \rangle$$

kao linearnu kombinaciju stanja kanonske baze spina $1/2$ $|1/2; \pm 1/2 \rangle$. Pomoć: koristite izraz za Wignerova d -matricu iz zadatka 8.

12. (2 boda) Upotrebom Wigner-Eckartovog teorema i Gauntove formule:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{l_1 m_1}^*(\theta, \phi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \phi) Y_{l_3 m_3}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \\ & = (-1)^{m_1} \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ -m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pokažite da za reducirani matricni element vrijedi:

$$\langle l' || \mathbf{Y}_L || l \rangle = (-1)^{l'} \sqrt{\frac{(2l'+1)(2L+1)(2l+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l' & L & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

13. (2 boda) Pokažite da je za operator identiteta $\mathbf{1}$, operator momenta impulsa \mathbf{J} , sferni harmonik \mathbf{Y}_L i operator spina \mathbf{S} , reducirani matricni element definiran Wigner-Eckartovim teoremom dan s:

$$\langle j' || \mathbf{1} || j \rangle = \delta_{jj'} \sqrt{2j+1} \quad ;$$

$$\langle j' || \mathbf{J} || j \rangle = \delta_{jj'} \hbar \sqrt{j(j+1)(2j+1)} \quad ;$$

$$\langle l' || \mathbf{Y}_L || l \rangle = (-1)^{l'} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{(2l'+1)(2L+1)(2l+1)} \begin{pmatrix} l' & L & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$\langle 1/2 || \mathbf{S} || 1/2 \rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \hbar .$$

14. (1 bod) Pokažite da za Paulijeve matrice reducirani matični element dan s:

$$\langle 1/2 || \sigma || 1/2 \rangle = \sqrt{6} .$$

15. (1 bod) Izračunajte reducirani matični element:

$$\langle n'l' || r || nl \rangle .$$

16. (2 boda) Magnetski dipolni moment μ neke jezgre definiran je kao:

$$\mu(\alpha, J) = \langle \alpha J, M = J | \mu_z | \alpha J, M = J \rangle ,$$

gdje je J ukupni moment impulsa, M njegova projekcija na os z , a s α su označeni svi ostali kvantni brojevi koji definiraju dano stanje. Izrazite μ kao produkt geometrijskog faktora i reduciranog matičnog elementa. Zašto je μ različit od nule samo za $J \geq 1/2$?

17. (3 boda) Dokažite da za svaki j vrijedi:

$$\sum_{m=-j}^j m^2 |d_{m,m}^j(\beta)|^2 = \frac{1}{2} j(j+1) \sin^2 \beta + \frac{1}{2} m'^2 (3 \cos^2 \beta - 1) .$$

18. (2 boda) Napišite xy , xz i (x^2-y^2) kao komponente ireducibilnog sferičnog tenzora ranga 2.

19. (3 boda) Sistem za koji vrijedi $L=1$ nalazi se u stanju:

$$\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ;$$

kolika je vjerojatnost da će mjerenje L_x dati vrijednost 0?

20. (4 boda) Valna funkcija neke čestice može se napisati kao:

$$\Psi(x, y, z) = N(x + y + z) e^{-[(x^2+y^2+z^2)/\alpha^2]} ,$$

gdje je N normalizacijska konstanta, a α zadani parametar. Mjerimo li vrijednosti L^2 i L_z , nađite vjerojatnost da rezultat mjerenja bude:

- (a) $L^2 = 2\hbar^2$, $L_z = 0$;
 (b) $L^2 = 2\hbar^2$, $L_z = \hbar$;
 (c) $L^2 = 2\hbar^2$, $L_z = -\hbar$.

21. (2 boda) Zapišite vektor položaja \hat{r} kao sferični tenzorski operator; raspišite

$$\langle l_f m_f | \hat{r} | l_i m_i \rangle$$

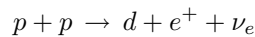
preko Wigner-Eckartovog teorema.

22. (2 boda) Izračunajte:

$$\langle l_f 1/2 j_f | \sigma \cdot \hat{r} | l_i 1/2 j_i \rangle$$

2 Nukleosinteza

- (1 bod) Procijenite visinu kulonske barijere za sistem $^{12}\text{C}+^{12}\text{C}$ (rezultat izraziti u MeV-ima)!
- (1 bod) Na kojoj je udaljenosti dva protona kulonski potencijal jednak 200 keV?
- (1 bod) Najvjerojatnija brzina čestica koje se ponašaju po Maxwell-Boltzmannovoj raspodjeli odgovara energiji kT . Izračunajte najvjerojatnije brzine deuteronu i tritonu u plazmi na temperaturi $kT=20$ keV. Izrazite tu temperaturu u Kelvinima.
- (1 bod) Koristeći tablice masa, izračunajte energiju oslobođenu reakcijom $^3\text{He}(^3\text{He},2p)^4\text{He}$ (rezultat izraziti u MeV-ima)!
- (3 boda) Ocjenite temperaturu za fuziju $p+p$ iz kulonske barijere i Boltzmannove raspodjele (uz obvezno obrazloženje izračuna). Odredite ukupnu oslobođenu energiju u prvoj reakciji lanca "izgaranja" protona:



(koristite tablice nuklearnih masa i činjenicu da je srednja energija izračenih neutrina približno $\langle E_\nu \rangle \simeq 0.26$ MeV).

- (2 boda) Za $p+^{12}\text{C}$ reakciju CNO-ciklusa izmjereno je $S(0)=1.4$ keV b. Procijenite srednje vrijeme potrebno da se u središtu Sunca jezgra ^{12}C pretvori u ^{13}N .
- (1 bod) Ako se reakcija $^2\text{H}(p,\gamma)^3\text{He}$ odvija na vrlo niskim energijama, pokažite da je u sustavu centra mase energija gama-zrake E_γ veća od energije helijevog iona E_{He} za faktor $2m_{\text{He}}c^2/E_\gamma$. Izračunajte obje energije (koristiti $Q=5.49$ MeV)! Masa ^3He je $m_{\text{He}}=3.016$ u.
- (3 boda) Brzina odvijanja termonuklearne reakcije $X(a,b)Y$ može se općenito zapisati kao produkt dva faktora: prvi faktor, $\sqrt{E}e^{-E/kT}$, daje termalnu raspodjelu broj jezgara (u ovisnosti o energiji E) na danoj temperaturi T , dok drugi, $\frac{1}{\sqrt{E}} \cdot e^{-2G}$, opisuje penetraciju kroz kulonsku barijeru. G je tzv. Gamovljev faktor definiran s:

$$G = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi Z_1 Z_2}{\hbar v} .$$

Izvedite izraz za energiju (tzv. Gamovljevu energiju) na kojoj brzina odvijanja reakcija ima maksimum:

$$E_G = 1.220(Z_1^2 Z_2^2 A T_6^2)^{\frac{1}{3}} \text{ keV} .$$

T_6 je standardna oznaka za temperaturu izraženu u milijunima Kelvina ($T_6=T/10^6$).

- (1 bod) Izračunajte Gamovljevu energiju definiranu u prethodnom zadatku (u MeV-ima) za reakcije $^{12}\text{C}+^{12}\text{C}$ na temperaturi $T=10^9$ K. Objasnite zašto je eksperimentalno mjerenje udarnih presjeka za termonuklearne reakcije teško.
- (1 bod) CNO-ciklus u zvijezdama sličnim Suncu započinje reakcijom $p+^{12}\text{C}\rightarrow^{13}\text{N}+\gamma$. Izračunajte Gamovljevu energiju (definiranu u zadatku 8.) za ovu reakciju na temperaturi središta Sunca (15×10^6 K).

11. (1 bod) Pokažite da se Gamovljev faktor definiran u zadatku 8. može zapisati i kao:

$$G = \frac{1}{2} \frac{Z_1 Z_2 \sqrt{A}}{\sqrt{E}} ,$$

gdje je:

$$A = \frac{A_a A_X}{A_a + A_X}$$

12. (2 boda) Do otprilike 3 sekunde nakon Velikog Praska, omjer neutrona i protona je bio u termičkoj ravnoteži uspostavljenoj putem reakcija:

$$p + \bar{\nu}_e \leftrightarrow n + e^+ ,$$

$$n + \nu_e \leftrightarrow p + e^- .$$

Neutroni su nešto teži od protona (za 1.29 MeV), pa ih u ravnoteži ima manje u skladu s Boltzmannovom formulom:

$$\frac{N_n}{N_p} = e^{-(m_n - m_p)c^2/kT} .$$

Temperatura je u času ispadanja iz termičke ravnoteže ($t=3\text{s}$) bila oko 10^{10} K . U $t \approx 300\text{ s}$ nakon Velikog Praska, svi preostali neutroni fuzionirali su se s protonima u jezgre ${}^4\text{He}$; tu se prvobitna nukleosinteza i zaustavila (stvoren je još vrlo malo litija i berilija - svi ostali izotopi stvoreni su u zvijezdama). Pokažite da je maseni udio helija (u ukupnoj hadronskoj masi) nakon prvobitne nukleosinteze $\approx 25\%$ (ostatak, dakako, otpada na vodik).

Važno: slobodan neutron je β -nestabilan i vrijeme poluživota mu je 10.24 minute.

13. (1 bod) Sunce (mase $2 \times 10^{30}\text{ kg}$) se pri nastanku sastojalo od 71% vodika (maseni udio). Pretpostavite da se energija u Suncu tijekom vremena (starost Sunca je $\approx 5 \times 10^9$ godina) generirala brzinom kojom se oslobađa i danas ($3.86 \times 10^{26}\text{ W}$), te procijenite koliko će dugo goriti 10% od ukupne količine preostalog vodika. Energija oslobođena pretvorbom vodika u helij je 26 MeV po jezgri helija.
14. (1 bod) Procijenite tok Sunčevih neutrina na površini Zemlje krećući od Sunčevog luminoziteta ($L_0 = 3.83 \times 10^{26}\text{ Js}^{-1}$) i činjenice da se pri svakoj pretvorbi četiri protona u α -v cesticu proizvode 2 neutrina i oslobađa energija od 26.72 MeV (dakle, pretpostavlja se da je pp -ciklus dominantan i da se ostali ciklusi mogu zanemariti).
15. (2 boda) Sunce ima srednju gustoću 1.4 g cm^{-3} . Thomsonov udarni presjek za fotone na elektronima u Sunčevoj plazmi je:

$$\sigma_T(\gamma e^- \rightarrow \sigma_T(\gamma e^-) \approx 0.665 \cdot 10^{-28}\text{ m}^2 .$$

Izračunajte srednji slobodni put fotona u Suncu. Izračunajte vrijeme potrebno da foton stvoren u jezgri napusti Sunce, ako za njegov nasumični hod vrijedi izraz $\tau = (R/l)^2(l/c)$. Dobivena vrijednost red je veličine manja od prave jer je izlazak fotona iz jezgre Sunca bitno usporen njezinom velikom gustoćom. Polumjer Sunca je $R = 700\,000\text{ km}$.

3 Struktura nukleona

1. (2 boda) Eksperimenti s raspršenjem brzih elektrona pokazuju da se gustoća naboja protona može približno opisati funkcijom:

$$\rho(r) = \frac{a^3}{8\pi} e^{-ar} ,$$

gdje je $a = 4 \cdot 10^{13}\text{ cm}^{-1}$. (a) Odredite form-faktor protona. (b) Odredite srednji kvadrat polumjera raspodjele naboja $\langle r^2 \rangle$.

2. (1 bod) Pomoću Heisenbergovog principa neodređenosti i izraza $R = (1.2 \text{ fm}) \times A^{1/3}$ procijenite srednju kinetičku energiju nukleona u jezgri.
3. (1 bod) Sa ovog popisa reakcija tri su posve nemoguće, dok se četvrta ne odigrava putem jake nuklearne sile. Koje su to reakcije? Objasnite!
- $K^- + p \rightarrow \bar{K}^0 + n$,
 - $\pi^+ + p \rightarrow K^+ + \Sigma^+$,
 - $\pi^- + p \rightarrow K^+ + \Sigma^0 + \pi^-$,
 - $\pi^- + p \rightarrow K^- + \Sigma^+$,
 - $\bar{K}^0 + p \rightarrow K^- + p + \pi^+$,
 - $\bar{p} + p \rightarrow 3\pi^+ + 2\pi^-$,
 - $\pi^+ + p \rightarrow K^0 + \Sigma^0 + \pi^+ + K^+ + \bar{K}^0$,
 - $K^- + p \rightarrow \Sigma^+ + n + \pi^-$,
 - $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^+ + \Sigma^- + K^0 + \bar{p} + \bar{\Sigma}^+ + n$,
 - $\pi^- + p \rightarrow \bar{\Sigma}^- + \Sigma^0 + p$.
4. (1 bod) I ρ^0 -mezon i K^0 -mezon se uglavnom raspadaju u kanal $\pi^+ + \pi^-$. No, srednje vrijeme raspada za ρ^0 -mezon je $\tau(\rho^0) = 10^{-23}$ s, dok za K^0 -mezon vrijedi: $\tau(K^0) = 0.89 \cdot 10^{-10}$ s. Što je uzrok tako velike razlike?
5. (1 bod) Srednje vrijeme raspada $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ je puno duže ($\tau = 2.6 \cdot 10^{-8}$ s) od srednjeg vremena raspada $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ ($\tau = 8.0 \cdot 10^{-17}$ s). Zašto?
6. (1 bod) Pokažite da je energija stanja pozitronija s glavnim kvantnim brojem n dana s:

$$E_n = -\frac{\alpha^2 m_e c^2}{4n^2}.$$

7. (1 bod) Navedite, s kratkim objašnjenjem, mogu li se navedene reakcije ili raspadi odvijati jakom nuklearnom, elektromagnetskom ili slabom nuklearnom silom:
- $n + p \rightarrow d + \gamma$,
 - $\Xi^- \rightarrow \Lambda + \pi^-$,
 - $p + p \rightarrow d + \pi^+$,
 - $D^+ \rightarrow K^- + 2\pi^+$,
 - $K^- + p \rightarrow K^0 + n$,
 - $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda$,
 - $e^+ + e^- \rightarrow W^+ + W^-$,
 - $Z^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$,
 - $\Omega^- \rightarrow \bar{K}^0 + K^-$.
8. (1 bod) Visokoenergijski gama-kvant interagira s protonom u mirovanju i proizvodi neutralni π -mezon (pion). Odredite minimalnu energiju tog gama-kvanta pri kojoj je takva reakcija moguća.
9. (2 boda) Snop negativnih π -mezona sudara se s vodikovom metom. Uhvatom mezona stvara se mezoatom vodika, koji se raspada emisijom gama-kvanta i neutrona. Pomoću neutronske detektora nađeno je da kinetička energija neutrona iznosi 8.9 MeV. Procijenite masu mirovanja piona.
10. (2 boda) Navedite koji su od sljedećih procesa (ne)mogući i objasnite zašto:
- foton pogađa elektron u mirovanju i predaje mu svu svoju energiju;
 - visoko-energijski foton se u "praznom prostoru" pretvara u par elektron-pozitron;
 - brzi pozitron i miran elektron se anihiliraju stvarajući jedan foton.

11. (1 bod) Konstruirajte izospinske valne funkcije za sistem koji se sastoji od protona i π -mezona.

4 Nukleon-nukleon međudjelovanje

- (1 bod) Kolika je minimalna energija fotona potrebna za disocijaciju deuterona ($\gamma+d\rightarrow p+n$)? Za koliko je ta energija veća od energije vezanja deuterona? Energija vezanja deuterona je $E_B = 2.225$ MeV, a masa $M = 1875.628$ MeV.
- (2 boda) Neutron i proton vrlo malene relativne brzine interagiraju putem reakcije “radijativnog uhvata”: $p+n\rightarrow d+\gamma$. (a) Kolika je minimalna energija fotona emitiranog u ovom procesu? Može li se energija odboja deuterona zanemariti? (b) Procijenite kolika mora biti energija neutrona (u sustavu u kojem proton prije reakcije miruje) ako se radijativni uhvat s nezanemarivom vjerojatnošću odigrava preko p -stanja (tj. s $l=1$)! Polumjer deuterona je $R_d \approx 4 \cdot 10^{-15}$ m.
- (1 bod) Izračunajte magnetski moment čistog D -stanja sistema neutron-proton s $J=1$! Pretpostavite da se spinovi neutrona i protona vežu u ukupan spin \hat{S} , koji se tada veže s orbitalnim kutnim impulsom \hat{L} u ukupan kutni impuls \hat{J} . Rezultat izrazite u jedinicama nuklearnih magnetona. Protonski i neutronske magnetski momenti su $\mu_p = 2.79\mu_0$ i $\mu_n = -1.91\mu_0$ (μ_0 je nuklearni magneton).
- (1 bod) Pokažite da su raspad $\omega \rightarrow 3\pi^0$ i $\omega \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ zabranjeni (sa stanovišta jake nuklearne sile) zbog zakona očuvanja izospina.
- (1 bod) Objasnite zašto je zabranjen raspad $\rho \rightarrow \eta + \pi$.
- (2 boda) Napišite pomoću Clebsch-Gordanovih koeficijenata sve moguće valne funkcije sustava nukleon-pion u apstraktnom izospinskom prostoru koje odgovaraju stanjima izospina $1/2$ i $3/2$. Da li konstrukcija ovakvih valnih funkcija ima ikakvog fizikalnog smisla?
- (3 boda) Pretpostavite da je nukleon-nukleon interakcija dobro opisana potencijalom oblika:

$$V(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 - V_0 \quad .$$

Odredite vrijednosti parametara ω i V_0 koje dobro opisuju veličinu i energiju vezanja deuterona. Je li stanje s $l=1$ vezano u ovom modelu? Pomoć: valna funkcija osnovnog stanja harmoničkog oscilatora dana je s:

$$\psi(r, \theta, \phi) \sim e^{-m\omega r^2/2\hbar} \quad .$$

5 Globalna svojstva atomskih jezgara

- (2 boda) Izračunajte vjerojatnost da se elektron u osnovnom stanje atoma vodika nalazi unutar jezgre (protona).
- (1 bod) Uz pretpostavku da je atomska jezgra kugla jednolike gustoće polujera $1.2 \times A^{1/3}$ fm, izrazite nuklearnu gustoću u SI-jedinicama

3. (1 bod) Izračunajte form-faktor $F(q)$ za slijedeću distribuciju naboja: $\rho(r) = \rho_0 e^{-(ln2)r^2/R^2}$.
4. (1 bod) Izračunajte kvadropolni moment homogeno nabijenog elipsoida (oblika cigarete) male poluosi a i velike poluosi b .
5. (1 bod) Pretpostavljajući da jezgra ^{176}Lu ima oblik rotacionog elipsoida bliskog sfernom obliku, nađite odnos velike poluosi prema maloj (b/a), ako je poznata vrijednost njegovog kvadropolnog momenta: $Q_0 = 7$ barna.
6. (2 boda) Odredite form faktor za model atomske jezgre s raspodjelom naboja:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Koristeći ovaj model promotrite raspršenje elektrona impulsa 330 MeV/c na atomu Ca pod kutem od 10° . Zanimajući odboj, odredite prijenos impulsa i reduciranu de Broglie valnu duljinu. Izračunajte Mott-ov diferencijalni udarni presjek (točkasta meta) te odredite za koji faktor će se smanjiti Mottov udarni presjek u promatranom raspršenju.

7. (2 boda) a) Izvedite izraz za elektrostatsku energiju naboja Q ravnomjerno raspoređenog po kugli polumjera R !
b) Jezgre $^{27}_{14}\text{Si}$ i $^{27}_{13}\text{Al}$ su “zrcalne jezgre” i njihova osnovna stanja su identična (osim po naboju). Razlika u masi između ove dvije jezgre je 6 MeV. Pretpostavljajući da je ta razlika uzrokovana elektrostatskom energijom i zanemarujući razliku u masi između protona i neutrona, procijenite polumjer ovih jezgara!
8. (1 bod) Energije vezanja zrcalnih jezgara ^{11}B i ^{11}C su 76.205 i 73.443 MeV. Pretpostavite da je ta razlika u potpunosti posljedica kulonskih efekata, te odredite polumjer ovih jezgara (pretpostavite da su one jednoliko nabijene sfere). Usporedite s $R = 1.2A^{1/3}$ fm i komentirajte razliku.
9. (3 boda) Ukoliko je gustoća naboja dana s $\rho(r) = \rho_0 e^{-r/a}$ odredite Fourier form faktor $F(q)$.

- Odredite $\langle r^2 \rangle$ i pokažite da vrijedi:

$$F(q) \simeq 1 - \frac{q^2 \langle r^2 \rangle}{6}$$

- Uz koji uvjet vrijedi jednakost?

- Elektroni energije $E = 200$ MeV se elastično raspršuju na atomskoj jezgri. Za $a = 1.5$ fm odredite omjer diferencijalnih udarnih presjeka na 20° i 40° koristeći izraz za Mottov diferencijalni udarni presjek.

10. (1 bod) Nuklearni električni kvadropolni moment sferične jezgre s jednim valentnim protonom dobro se opisuje kao očekivana vrijednost operatora:

$$Q_{20} = 3z^2 - r^2 \quad ,$$

u stanju s maksimalnom projekcijom spina. Nađite vrijednost kvadropolnog momenta, pretpostavljajući da je proton opisan jednočestičnom valnom funkcijom:

$$R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)\alpha \quad ,$$

gdje je α spinska funkcija koja odgovara spinu “gore”. Procijenite kvadropolni moment za proton u stanju $d_{5/2}$ ($l=2, j=l+1/2$) za jezgru s polumjerom $r = 5$ fm. Iskoristiti:

$$\int Y_{ll} Y_{20} Y_{ll} d\Omega = -\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{l}{2l+3} \quad .$$

11. (1 bod) Eksperimentalni podaci dobiveni mjerenjem raspršenja nabijenih čestica na raznim jezgrama, omogućuju određivanje dva nuklearna parametra: polumjera R i površinske debljine jezgre t . Površinska debljina jezgre definirana je kao interval polumjera u kome gustoća mase jezgre padne s 90% na 10% centralne vrijednost ρ_0 . Eksperimentalno je dobiveno da se raspodjela naboja, a time i mase jezgre, dobro opisuje funkcijom:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} ,$$

gdje je parametar a približno jednak 0.54 fm za sve jezgre s $A > 16$. Odredite površinsku debljinu jezgara za jezgre teže od $A = 16$.

12. (1 bod) Model Fermijeva plina tretira jezgru kao plin neinteragirajućih protona i neutrona zatvorenih u potencijalnu jamu dimenzije jezgre. Pobuđivanje jezgre (tj. stupanj do kojeg su popunjena pobuđena stanja jezgre) može se shvatiti kao dodavanje određene temperature plinu nukleona. Na temperaturi $T=0$ (dakle, u osnovnom stanju jezgre), broj stanja do najvišeg popunjenog stanja jezgre jednak je baš ukupnom broju nukleona A . (a) Odredite impuls nukleona u najvišem energetskom stanju na $T=0$ i iz te vrijednosti odredite dubinu nuklearne potencijalne jame za proizvoljnu jezgru A (koristite da je energija veze po nukleonu ≈ 8 MeV za sve jezgre). (b) U modelu Fermijeva plina nađite srednju kinetičku energiju po nukleonu i na osnovu toga pokažite da nukleone u jezgri možemo tretirati nerelativistički.
13. (1 bod) Polazeći od pretpostavke da je razlika energija vezanja za zrcalne jezgre posljedica elektrostatske interakcije među protonima, nađite polumjer zrcalnih jezgara ${}^{29}_{14}\text{Si}$ - ${}^{29}_{15}\text{P}$. Energije vezanja su 245.01 MeV za ${}^{29}_{14}\text{Si}$, 239.28 MeV za ${}^{29}_{15}\text{P}$. Usporedite dobivenu vrijednost s vrijednošću koja se dobiva iz izraza:

$$R = 1.2 \times 10^{-15} A^{-1/3} \text{ m} .$$

14. (2 boda) Polazeći od semiempirijske formule mase, nađite izraz koji opisuje ovisnost broja protona (Z) i ukupnog broja nukleona u jezgri (A), za sve beta-stabilne jezgre. Pomoću dobivenog izraza odredite redni broj Z beta-stabilnog izotopa za izobarne lance s masenim brojevima $A = 23, 89$ i 114 .
15. (1 bod) Energije vezanja za izotope kalcija su: ${}^{40}\text{Ca}$: 342.055 MeV, ${}^{41}\text{Ca}$: 350.418 MeV, ${}^{42}\text{Ca}$: 361.898 MeV, ${}^{43}\text{Ca}$: 369.831 MeV, ${}^{44}\text{Ca}$: 380.963 MeV, ${}^{45}\text{Ca}$: 388.378 MeV, ${}^{46}\text{Ca}$: 398.774 MeV. Iz ovih podataka odredite veličinu člana koji opisuje sparivanje u semiempirijskoj formuli masa.
16. (3 boda) U modelu Fermijevog plina, pokažite da vrijedi sljedeća veza između broja protona i neutrona:

$$N = \left(Z^{2/3} + bZ^2 A^{1/3} \right)^{3/2} .$$

Odredite vrijednost konstante b . Pretpostavite da je jezgra jednoliko nabijena kugla.

17. (2 boda) Upotrijebite semiempirijsku formulu mase da bi (a) izračunali energiju α čestica emitiranih u α -raspadu ${}^{235}_{92}\text{U}$ i usporedite dobivenu vrijednost s eksperimentalnom (4.52 MeV). Pomoću iste formule procijenite koliku je energiju potrebno dovesti ovoj jezgri da bi se iz nje odvojio (b) proton; (c) neutron.
18. (2 boda) Poznato je da energije vezanja jezgara sistematski variraju ovisno o tome sadrži li jezgra paran ili neparan broj protona i/ili neutrona. Ova varijacija energije vezanja, poznata kao energija sparivanja, opisana je s:

$$\delta_B = \begin{cases} \Delta & Z \text{ paran}, N \text{ paran} \\ 0 & A = N + Z \text{ neparan} \\ -\Delta & Z \text{ neparan}, N \text{ neparan} \end{cases}$$

Pretpostavljajući da je energija vezanja $B(Z, N)$ glatka funkcija Z i N (kada se zanemari efekt sparivanja), izračunajte parametar Δ ako su poznate empirijske vrijednosti energija vezanja sljedećih izotopa: $(N-2, Z)$, $(N-1, Z)$, (N, Z) i $(N+1, Z)$, gdje su N i Z parni brojevi.

19. (1 bod) Procijenite polumjer prve Bohrove putanje za μ^- -mezon oko (a) protona, (b) jezgre ^{12}C . Koji je glavni kvantni broj za prvu Bohrovu putanju koja leži van jezgre olova ($Z=82$, $A=208$), ako je polumjer jezgre dan s $R=1.2 \cdot A^{1/3}$ fm?
20. (2 boda) a) Izračunajte energije pionskih M x-zraka ($n=4$ u $n=3$) za Ca, Sn i Pb.
b) Usporedite srednji polumjer pionskih stanja s $n=3$ za Ca, Sn i Pb s nuklearnim polumjerom tih jezgara.
21. (2 boda) Izračunajte kinetičku energiju (u laboratorijskom sustavu) praga za nastanak (a) para piona, (b) jednog kaona u reakcijama nukleon-nukleon.
22. (1 bod) Za jezgru s velikim masenim brojem A može se uspostaviti veza između parametra $\hbar\omega$ srednjeg nuklearnog potencijala $V(r)=1/2M\omega^2r^2-V_0$ i broja A . Odredite ovu vezu ako su u oscilatornoj jami srednja kinetička i srednja potencijalna energija jednake (računato od dna jame).
23. (1 bod) Koji su od sljedećih izobara s $A=127$ najstabilniji: Sn, Sb, Te, I, Xe, Cs, Ba? Koristite poluempiričku formulu mase.

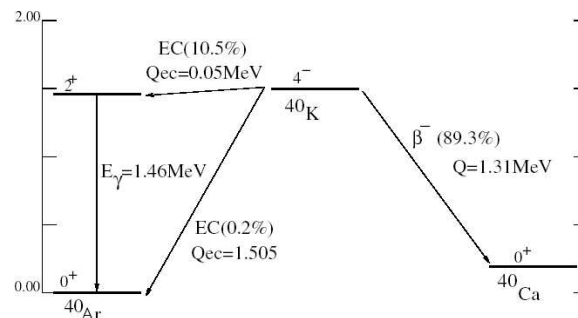
6 Pobuđenja i raspadi atomskih jezgara

1. (1 bod) Neka radioaktivna jezgra ima konstantu raspada λ_1 i raspada se u jezgru koja je također radioaktivna, s konstantom raspada λ_2 . U trenutku $t=0$, imamo N_1 prvih jezgara i $N_2=0$ jezgara kćerki; pokažite da je nakon vremena t broj jezgari kćerki dan s:

$$N_2(t) = N_1 \left(1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t} \right) e^{-\lambda_2 t} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} .$$

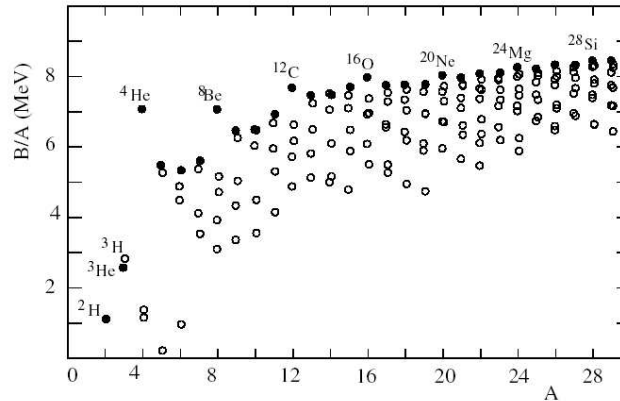
Provjerite rezultat u limitima $t \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, $\lambda_2 \ll \lambda_1$ i $\lambda_2 \gg \lambda_1$.

2. (1 bod) Period poluraspada jezgre ^{212}Bi iznosi 60.5 minuta. Ova jezgra se raspada i β -raspadom i α -raspadom. Konačan produkt sadrži 64% ^{212}Po i 36% ^{208}Tl . Izračunajte parcijalne konstante raspada λ_α i λ_β .
3. (2 boda) Kalij čini oko 0.3% čovječje mase, a 0.012% ukupne mase kalija čini njegov radioaktivni izotop ^{40}K ($t_{1/2} = 1.25 \cdot 10^9$ godina). Shema raspada ^{40}K dana je na slici (1). Procijenite prosječnu godišnju dozu koju čovjek prima zbog radioaktivnosti kalija. Na temelju sheme raspada objasnite zašto je vrijeme poluživota ove jezgre tako dugo.



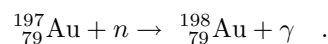
Slika 1: Shema raspada jezgre ^{40}K .

4. (1 bod) Pobuđeno stanje jezgre ^{17}O na $E_x = 4.56$ MeV ima srednji život jedan 1.6×10^{-20} s. Objasnite takvu malu vrijednost. Procijenite širinu Γ tog stanja.
5. (1 bod) Maksimalna kinetička energija pozitrona emitiranih u β^+ -raspadu jezgre ^{13}N je 1.24 MeV. Nakon tog beta-rapada, ne dolazi do daljnjih beta- i gama-raspada. Iz tih podataka odredite polumjer jezgara s $A=13$ i usporedite s izrazom $R=r_0A^{1/3}$.
6. (1 bod) Slika (2) pokazuje da je jezgra ^3H jače vezana od jezgre ^3He . Zašto se onda ^3H raspada (β -raspadom) u ^3He ?

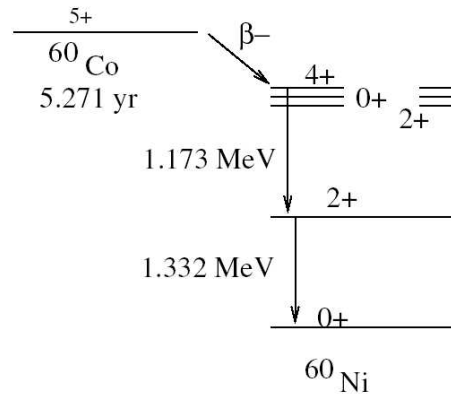


Slika 2: Energija vezanja po nukleonu B/A kao funkcija masenog broja A .

7. (1 bod) Izotopi kalcija ($Z=20$), kobalta ($Z=19$) i argona ($Z=18$) s $A=40$ imaju energije vezanja redom -332.65 MeV, -332.11 MeV i -335.44 MeV. Koji su β -raspadi mogući među ovim izotopima? Specifirajte Q -vrijednosti za svaki od mogućih β -raspada.
8. (1 bod) Koju vrstu elektromagnetskog zračenja očekujete između stanja na $E_x = 2.13$ MeV i osnovnog stanja jezgre ^{11}B ? Procijenite srednji život pobuđenog stanja.
9. (1 bod) Procijenite energiju Augerovih elektrona emitiranih nakon elektronskog k -uhvata u jezgri ^{71}Ge . Pretpostavite da unutrašnji elektroni ovog atoma popunjavaju orbitale poput vodikovih.
10. (1 bod) Izotop ^{176}Lu emitira β -čestice. Mjerenjem uzorka Lu_2O_3 mase 296 mg, na brojačkom uređaju čija je efikasnost za detekciju β -čestice 4.2%, dobijen je odbroj od 68 impulsa po minuti. Izotopski sastav Lu-izotopa je: 97.4% ^{175}Lu (stabilan izotop) i 2.6% ^{176}Lu . Izračunajte srednji život ovog izotopa u odnosu na β -raspad.
11. (1 bod) Standardni kalibracijski γ -izvor ^{60}Co baziran je na shemi danoj na slici (3). Objasnite zašto se ^{60}Co ne raspada direktno u osnovno stanje jezgre ^{60}Ni , te zašto se emitiraju dva fotona (a ne samo jedan) pri deekscitaciji jezgre ^{60}Ni . Procijenite vrijeme između β -raspada i emisije fotona.
12. (1 bod) Uzorak zlata postavljen je pod neutronsni snop konstantnog intenziteta tako da se 10^{10} neutrona u svakoj sekundi apsorbiraju putem reakcije:



Nuklid ^{198}Au raspada se (β -raspad) u nuklid ^{198}Hg sa srednjim životom od 3.89 dana. Koliko će atoma ^{198}Au biti prisutno u uzorku nakon 6 dana iradijacije? Koliko će atoma ^{198}Hg tada biti prisutno, uz pretpostavku da neutroni ne utječu na taj nuklid? Koji je ravnotežni ($t \rightarrow \infty$) broj atoma ^{198}Au ?

Slika 3: Shema raspada jezgre ^{60}Co .

13. (2 boda) Pokažite da je konstanta beta-raspada λ_β proporcionalna s Q_β^5 (Q_β je Q -vrijednost danog β^- -raspada), u slučaju kada za kinetičku energiju elektrona vrijedi: $T_e \gg m_e c^2$.
14. (2 boda) Diskutirajte energiju odboja u alfa-, beta- i gama-raspadima. Izračunajte i usporedite red veličine te energije na primjeru jezgre ^{56}Ni i istih Q -vrijednosti ($Q_\alpha = Q_\beta = Q_\gamma = 4 \text{ MeV}$). U kojim je procesima raspada energija odboja zanemariva?
15. (1 bod) Jezgra $^{62}_{30}\text{Zn}$ raspada se ili emisijom pozitrona ili K-uhvatom. Maksimalna kinetička energija pozitrona je 0.66 MeV . Zanimajući odboj jezgre i korekcije uzrokovane vezanjem elektrona, izračunajte:
 - a) maksimalnu energiju neutrina pri emisiji pozitrona;
 - b) energiju neutrina emitiranog pri K-uhvatu.
16. (1 bod) Jezgra $^{210}_{83}\text{Bi}$ (srednji život: 7.2 dana) raspada se emisijom β -čestice u jezgu $^{210}_{84}\text{Po}$ (srednji život: 200 dana), koja se pak α -raspada u jezgu $^{206}_{82}\text{Pb}$. Proizvede li se neki izvor tako da sadrži čisti ^{210}Bi , nakon koliko vremena će brzina emitiranja α -čestica dostići maksimum?
17. (1 bod) Vremena poluživota uranovih izotopa ($Z=92$) s $A=234, 235$ i 238 su redom $2.5 \cdot 10^5$ godina, $7.1 \cdot 10^8$ godina i $4.5 \cdot 10^9$ godina. Njihova relativna zastupljenost u prirodi je 0.0057% , 0.72% i 99.27% . Jesu li ovi podaci konzistentni s pretpostavkom da su sva tri izotopa nastala u istoj količini u isto vrijeme (otprilike u doba nastanka Sunčevog sustava). Nekonzistentnosti probajte objasniti činjenicom da su izotopi $^{234}_{90}\text{Th}$ i $^{234}_{91}\text{Pa}$ β -nestabilni.
18. (1 bod) Objasnite kako je moguće da se jezgra $^{40}_{19}\text{K}$ raspada i β^- -raspadom i β^+ -raspadom i uhvatom elektrona!
19. (3 boda) Procijenite razliku u konstantama raspada neutralnog ^7Be i dvostruko ioniziranog $^7\text{Be}^{2+}$. Koliko bi bilo vrijeme poluraspada iona $^7\text{Be}^{3+}$?
20. (3 boda) Pokažite da se kod raspada neutrona za Gamow-Tellerov matrični element dobiva $\langle |M_{GT}|^2 \rangle = 3$, a za Fermijev matrični element $\langle |M_F|^2 \rangle = 1$.
21. (1 bod) Odredite koji su beta-raspadi dozvoljeni, koji zabranjeni, te koji su Fermijevog tipa, a koji Gamow-Tellerovi:
 - (a) $^3\text{H} \rightarrow ^3\text{He}$;
 - (b) $^{14}\text{O}(\text{g.s.}) \rightarrow ^{14}\text{N}^*(0^+)$;

- (c) ${}_{21}^{47}\text{Sc}(7/2^-) \rightarrow {}_{22}^{47}\text{Ti}^*(7/2^-)$;
 (d) ${}_{16}^{36}\text{S}(0^+) \rightarrow {}_{17}^{36}\text{Cl}(2^-)$;
 (e) ${}_{63}^{152}\text{Eu}^*(0^-) \rightarrow {}_{62}^{152}\text{Sm}^*(0^+)$.

22. (1 bod) Pokažite da je za velike Z i A energija oslobođena kada jezgra emitira α -česticu dana s:

$$Q_\alpha = -4a_v + \frac{8}{3}a_s A^{-1/3} + 4a_c Z \left(1 - \frac{Z}{3A}\right) A^{-1/3} - 4a_a \frac{(N-Z)^2}{A^2} + B({}^4\text{He}) \quad ,$$

gdje je $B({}^4\text{He})$ energija vezanja α čestice (28.3 MeV). Jedini izotopi srebra i zlata prisutni u prirodi su ${}_{47}^{107}\text{Ag}$ i ${}_{79}^{197}\text{Au}$; objasnite njihovu stabilnost u kontekstu gornjeg izraza.

23. (1 bod) Za jezgru sa $Z=90$ i $A=230$, odredite omjere vjerojatnosti α -raspada s $l=0 : l=2 : l=4 : l=6$ (energija raspada: 5 MeV). Pretpostavite da centrifugalna barijera povećava ukupnu barijeru za:

$$\frac{1}{3} \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mR^2} \quad .$$

24. (2 boda) Izračunajte omjer prosječne i maksimalne energije elektrona u beta-raspadu pretpostavljajući da je potonja (E_{max}) puno manja od m_0c^2 , te da je kulonska funkcija, $F(Z,p)$, konstanta unutar cijelog intervala mogućih energija elektrona.

25. (2 boda) Pokažite da je za elipsoid malog ekscentriciteta i ravnomjerne raspodjele naboja, kvadrupolni moment dan s:

$$Q_0 = \frac{4}{5} ZR\Delta R \quad ,$$

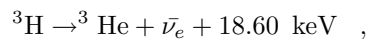
te da su parametri deformacije β i δ povezani s ekscentricitetom preko ovih relacija:

$$\pm e = \frac{|a^2 - b^2|^{1/2}}{a} = \sqrt{\frac{2\Delta R}{R}} \quad ,$$

$$\delta = \frac{\Delta R}{R} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta \quad .$$

Os simetrije elipsoida dugačka je $2a$, dok su druge dvije osi jednake $2b$. Parametri e , β i δ su pozitivni za izduženi oblik ("oblik cigare", *engl.* prolate), a negativni za spljošteni oblik ("oblik palačinke", *engl.* oblate).

26. (2 boda) Izračunajte koji se dio elektrona emitira unutar 100 keV od točke maksimalne energije pri β -raspadu tricija:



pretpostavljajući da ja masa neutrina jednaka nuli.

27. (2 boda) Jezgra ${}^7\text{Li}$ emitira gama-zraku energije 0.48 MeV pri prijelazu is prvog pobuđenog stanja ($J^\pi = 1/2^-$) u osnovno stanje ($J^\pi = 3/2^-$).

- a) Koji su mogući multipolariteti i priroda ovog prijelaza?
 b) Koja je od tih mogućnosti najvjerojatnija?
 c) Procijenite virijeme poluživota pobuđenog stanja.

28. (1 bod) Jezgra ${}_{11}^{21}\text{Na}$ se raspada u ${}_{11}^{21}\text{Ne}$ emisijom pozitrona. Polumjer jezgri s $A=21$ je $R=3.6$ fm. Odredite maksimalnu energiju emitiranog pozitrona pretpostavljajući ravnomjernu kuglastu raspodjelu naboja jezgre!

29. (2 boda) Pozitronski raspad ${}^8\text{B}$ u ${}^8\text{Be}$ ima maksimalnu energiju 14.09 MeV. Koji dio neutrina nastalih pri ovom raspadu ima dovoljnu energiju da inducira reakciju $\nu + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$ ($Q = -0.81$ MeV)?
30. (1 bod) Magnetskim beta-spektrometrom dobivene su dvije točke elektronskog spektra nepoznatog β^- -emitera:

$$\begin{array}{ll} \text{impulsi:} & p_1 = 2\sqrt{2}m_0c \quad p_2 = 2\sqrt{12}m_0c \\ \text{izbroji:} & N(p_1) = 1152 \quad N(p_2) = 192 \end{array}$$

Koristeći dobivene vrijednosti impulsa i izbroja elektrona, ocijenite maksimalnu energiju β -spektra. (Koristite Kurie-plot i pretpostavite da je kulonski faktor jednak jedinici).

31. (1 bod) Izotop ${}^{222}\text{Rn}$ raspada se putem α -emisije u ${}^{218}\text{Po}$, koji je također radioaktivan. Periodi poluraspada su 3.825 dana (Rn) i 3.05 minuta (Po). (a) Izračunajte vrijeme nakon kojeg će se sakupiti maksimalna količina izotopa ${}^{218}\text{Po}$, ako je početan uzorak sadržavao samo čist ${}^{222}\text{Rn}$. (b) Izračunajte maksimalnu količinu jezgre ${}^{218}\text{Po}$ (u gramima) ako je početna količina ${}^{222}\text{Rn}$ odgovarala volumenu od 0.65 cm^3 .
32. (2 boda) Odredite na koji način možemo s pomoću ft -vrijednosti iz beta-raspada ${}^{30}\text{P} \rightarrow {}^{30}\text{Si}$ odrediti ft -vrijednost procesa ${}^{30}\text{S} \rightarrow {}^{30}\text{P}$ (zanemarujući učinke kulonskog međudjelovanja). Primjetite da ${}^{30}\text{S}$ i ${}^{30}\text{Si}$ imaju analogna osnovna stanja.
33. (1 bod) Maksimalna kinetička energija pozitrona emitiranog pri raspadu ${}^{11}\text{C} \rightarrow {}^{11}\text{B}$ je 1.983 ± 0.003 MeV. Iz te informacije i poznate mase jezgre ${}^{11}\text{B}$ ($M = 11.009305u$) izračunajte masu jezgre ${}^{11}\text{C}$!
34. (1 bod) Jezgre radioaktivnog elementa, čija je konstanta raspada λ , stvaraju se konstantnom brzinom q . Izvedite zakon promijene broja radioaktivnih jezgara s vremenom, ako u početnom trenutku nije bilo radioaktivnih jezgara.
35. (1 bod) Pomoću semiempirijske formule mase pokazžite da energija oslobođena u fisiji postaje maksimalna ako fisijsku produkti imaju podjednaku masu i naboj (zanemarite članove u formuli koji opisuju energiju sparivanja i simetriju).
36. (1 bod) Pacijentu je ubrizgan ${}^{24}\text{Na}$ aktivnosti $A = 2 \times 10^3$ raspada po sekundi. Poslije 5h izmjerena je aktivnost 1 cm^3 krvi i nađeno je da ona iznosi 15 raspada po minuti. Pretpostavite da se radioaktivna supstanca zadržala samo u krvi (dakle, da je ostali ograni ne apsorbiraju) i izračunajte ukupan volumen krvi pacijenta (period poluraspada ${}^{24}\text{Na}$ iznosi 14.9 h).
37. (1 bod) Izotop ${}^{14}\text{C}$ proizvodi se u atmosferi usred bombardiranja kozmičkim zrakama. Živi organizmi asimiliraju radioaktivni ${}^{14}\text{C}$ zajedno s neaktivnim ${}^{12}\text{C}$ (i ${}^{13}\text{C}$) i ugrađuju ga u svoje tkivo. U atmosferi postoji stalan omjer ${}^{14}\text{C}$ i ostalih izotopa ugljika tako da je aktivnost svakog grama ugljika jednaka 10 raspada u minuti. Smrću organizma asimilacija prestaje pa količina ${}^{14}\text{C}$ opada s periodom poluraspada jednakim 5.568×10^3 godina. Iz uzorka dobijenog iz jednog egipatskog groba dobivena je aktivnost ${}^{14}\text{C}$ od 7.64 raspada po minuti po gramu ugljika. Procijenite starost groba.
38. (1 bod) Morska voda sadrži 0.55 g kalija po litri. Prirodan kalij sadrži 0.012% ${}^{40}\text{K}$ koji je radioaktivan s periodom $T_{1/2} = 1.2 \times 10^9$ godina. Izračunajte: (a) kolika je specifična aktivnost morske vode; (b) koliko dugo treba mjeriti preparat of jednog litra morske vode, ako je ukupna efikasnost brojačkog uređaja 5%, a rezultat se traži s relativnom točnošću boljom od 1%.

39. (2 boda) (a) Izračunajte starost rude koja sadrži 50% torija, 30% urana i 8% olova, pretpostavljajući da je olovo radiogene prirode. Period poluraspada ^{238}U je 4.49×10^9 godina, a ^{232}Th 1.39×10^{10} godina. (b) Izračunajte volumen helija stvorenog u raspadu 10 g ove rude.
40. (1 bod) Koristeći zakone očuvanja energije i impulsa pokažite da foton ne može nestati pretvorbom u par elektron-pozitron.
41. (1 bod) Foton energije 2 MeV u polju neke jezgre kreira par pozitron/elektron. Ako je brzina pozitrona $0.4c$, kolika je kinetička energija elektrona?
42. (1 bod) Izotop ^{37}Ar elektronskim uхватom prelazi u stabilni ^{37}Cl . Odredite energiju odboja atoma klora i energiju neutrina koji prati elektronski uхват. Pretpostavite da jezgra atoma ^{37}Ar miruje (mase ^{37}Ar i ^{37}Cl su $36.978416u$ i $36.97754u$).
43. (1 bod) Neke jezgre mogu se raspasti i β^- i β^+ -raspadom, te K-uхватom. Pokažite da je jezgra ^{64}Cu (mase $63.9298u$) takva jezgra. Mase obližnjih jezgara su ^{64}Ni - $63.9280u$, ^{63}Zn - $63.9291u$.

7 Nuklearna struktura

1. (1 bod) Osnovna ideja modela ljusaka sastoji se u zamjeni stvarnih nuklearnih sila nekim srednjim fenomenološkim potencijalom $V(r)$. Ako je on aproksimiran izotropnim harmoničkim oscilatorom:

$$V(r) = -V_0 + \frac{M}{2}\omega^2 r^2 \quad ,$$

odredite magične brojeve za takav potencijal. Usporedite s poznatim magičnim brojevima u modelu ljusaka.

2. (1 bod) Jezgra ^{176}Lu ima oblik homogeno nabijenog rotacionog elipsoida i kvadrupolni moment jednak 7 barna. Nađite omjer velike i male poluosi elipsoida i odredite (u postocima) odstupanje od sferne simetrije.
3. (2 boda) Struktura jezgre ^6Li ugrubo je određena s dva nukleona, protonom i neutronom u ljusci $0p_{3/2}$. (a) Koji su mogući spinovi i pariteti niskoležećih stanja jezgre ^6Li uz ovakvu pretpostavku? (b) Spin i paritet osnovnog stanja ove jezgre je $J^\pi = 1^+$. Napišite eksplicitno valnu funkciju osnovnog stanja za sva tri moguća magnetska podstanja, upotrebljavajući numeričke vrijednosti Clebsch-Gordanovih koeficijenata.
4. (2 boda) Struktura niskoležećih stanja jezgre ^{28}F može se objasniti kao rezultat vezanja valentnog protona u orbitali $0d_{5/2}$ ili $1s_{1/2}$ i valentne neutronske šupljine u orbitali $0d_{3/2}$. Koji su mogući spinovi i pariteti niskoležećih stanja jezgre ^{28}F uz ovakvu pretpostavku? Napišite i odgovarajuće valne funkcije.
5. (2 boda) Za jezgre s velikim masenim brojem A moguće je uspostaviti vezu između parametra $\hbar\omega$ srednjeg nuklearnog potencijala iz zadataka 1 i broja A . Pokažite da je ta veza dana s:

$$\hbar\omega \approx 41A^{-1/3} \text{ MeV} \quad ,$$

uzimajući da su u oscilatornoj jami srednja kinetička i srednja potencijalna energija (računate od dna jame) međusobno jednake.

6. (2 boda) Najniža stanja jezgre ^{10}B su: 3^+ (osnovno stanje), 1^+ ($E_x = 0.72$ MeV), 0^+ (1.74 MeV), 1^+ (2.15 MeV), 2^+ (3.59 MeV), 3^+ (4.77 MeV), ... (a) Jezikom modela ljusaka objasnite zašto najniža stanja imaju pozitivan paritet.
(b) Objasnite kako može teći gama-raspad stanja na $E_x = 1.74$ MeV u osnovno stanje (tj. koje su energije gama-zraka koje se emitiraju), te procijenite u kojem omjeru se one pojavljuju.
7. (1 bod) Jezgre ^{41}Ca i ^{41}Sc imaju po jedan nesporeni nukleon u stanju s $L=3$. Ukupni spin ovih jezgara je $I = 7/2$. Procijenite njihov magnetski dipolni moment pod pretpostavkom da dipolnom momentu doprinose isključivo nesporeni nukleoni.
8. (1 bod) Napišite eksplicitno spinsko-kutni dio valne funkcije nukleona koji se nalazi u vezanom stanju $2d_{3/2}$ s projekcijom spina $m=3/2$.
9. (1 bod) U dvostruko magičnoj jezgri ^{208}Pb zadnja popunjena ljuska je $3p_{1/2}$, a prva prazna $2g_{9/2}$. Probajte pomoću modela ljusaka objasniti strukturu niskoležećih stanja ove jezgre: $E_x = 2.615$ MeV ($J^\pi = 3^-$), $E_x = 3.198$ MeV ($J^\pi = 5^-$), $E_x = 3.475$ MeV ($J^\pi = 4^-$). Koje od ova tri stanja se ne može jednostavno opisati pomoću modela ljusaka?
10. (2 boda) Za osnovno stanje osnosimetrične atomske jezgre ^{152}Eu poznato je da posjeduje $J^\pi = 3^-$ i električni kvadrupolni moment 316 e fm². Odredite intrinzični kvadrupolni moment atomske jezgre Q_0 (pomoću rotacionog modela) i parametar δ relativne razlike polarnog i ekvatorijalnog polumjera koji je povezan s intrinzičnim kvadrupolnim momentom putem relacije :

$$Q_0 = +\frac{4}{5}Z R^2 \delta \quad \delta \simeq \frac{R_3 - R_\perp}{R}$$

Kakav oblik ima ova jezgra (R je srednji kvadratni polumjer)?

11. (1 bod) Pomoću modela ljusaka odredite spinove i paritete osnovnih stanja sljedećih jezgara: (a) ^7_3Li ; (b) ^9_4Be ; (c) $^{13}_6\text{C}$; (d) $^{27}_{13}\text{Al}$; (e) $^{53}_{25}\text{Mn}$; (f) $^{61}_{28}\text{Ni}$.
12. (1 bod) Za jezgru $^{181}_{73}\text{Ta}$ eksperimentalno je određeno postojanje rotacijske vrpce koju, uz osnovno stanje, čine stanja na $E_x = 136.2$ keV i $E_x = 303$ keV. Odredite iz ovih podataka spinove sva tri stanja vrpce. Opaska: spinovi unutar rotacijskih vrpca jezgara s neparnim A razlikuju se za $\Delta I = 1!$
13. (2 boda) Rotacijska vrpca bazirana na osnovnom stanju (0^+) jezgre ^{20}Ne sadrži još stanja na $E_x = 1.63$ MeV (2^+), $E_x = 4.25$ MeV (4^+) i $E_x = 8.76$ MeV (6^+).
(a) Izračunajte moment inercije jezgre ^{20}Ne u navedenim stanjima.
(b) Objasnite zašto se ne očekuje nalaženje stanja višeg spina za ovu vrpcu.
(c) Komentirajte u kontekstu navedenog spektra niskoležećih stanja jezgre ^{19}F : $E_x = 0.11$ MeV ($1/2^-$), $E_x = 1.35$ MeV ($5/2^-$), $E_x = 1.46$ MeV ($3/2^-$), $E_x = 4.00$ MeV ($7/2^-$), $E_x = 4.03$ MeV ($9/2^-$), $E_x = 7.17$ MeV ($11/2^-$) i $E_x = 8.29$ MeV ($13/2^-$).

8 Nuklearne reakcije

1. (2 boda) Alfa-čestica kinetičke energije 20 MeV-a raspršuje se na jezgri zlata ($A=197$).
a) Može li se za opis raspršenja koristiti Rutherford-ova formula? Obrazložite!
b) Koliko blizu α -čestica dolazi jezgri ako je sudar centralan?
c) Koliki se postotak α -čestica raspršuje na zlatnoj foliji debljine 10^{-7} m unutar kutova $\theta \geq \pi/2$? Gustoća zlata je 19.3 g/cm³.

2. (1 bod) Ukupni udarni presjek za neku nuklearnu reakciju jednak je 1 b na energiji snopa (u sustavu centra mase) koja je dva puta veća od kulonske barijere. Izračunajte polumjer interakcije pretpostavljajući da se ista može razmatrati klasično.
3. (1 bod) Pri mjerenju udarnog presjeka za reakciju $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)$ nađen je izrazit vrh za α -čestice energije 7045 keV. Objasnite što uzrokuje postojanje tog vrha! Diskutirajte da li je takvo objašnjenje moguće provjeriti mjerenjem udarnog presjeka za reakciju $^{15}\text{N}(p, \gamma)$. Višak mase proton je 7289 keV, za α -česticu 2425 keV, za ^{15}N 100 keV a za ^{16}O -4737 keV.
4. 1 bod Pri eksploziji supernove 23.02.1987. emitirano je $N \approx 10^{57}$ antineutrina na udaljenosti $R \approx 1.4 \cdot 10^5$ godina svjetlosti od Zemlje. Neki od tih antineutrina detektirani su u japanskom detektoru Kamiokande putem reakcije $\bar{\nu}_e p \rightarrow n e^+$. Udarni presjek za ovu reakciju na očekivanoj srednjoj energiji antineutrina (≈ 15 MeV) je $\sigma \approx 2 \cdot 10^{-45}$ m². Ako je detektor sadržavao oko 2000 tona vode, koji broj antineutrina je trebao biti detektiran?
5. (1 bod) Procijenite koliko parcijalnih valova igra ulogu u reakciji $n + ^{125}\text{Sn}$, $E_n = 9$ MeV. Pretpostavite da je polumjer interakcije dan s $R = 1.2 \cdot A^{1/3}$ fm.
6. (1 bod) Chadwick je 1932. godine otkrio neutron i izmjerio mu masu tako da je mjerio elastično raspršnje tada nepoznate čestice na vodikovoj i dušikovoj meti. Za maksimalnu brzinu odboja protona izmjerio je $3.3 \cdot 10^7$ m/s, dok je za maksimalnu brzinu odboja iona dušika dobio $4.7 \cdot 10^6$ m/s. Izračunajte iz tih podataka masu neutrona! Usporedite s danas poznatom vrijednošću. Kolika je bila energija upadnih neutrona?
7. (2 boda) Diferencijalni udarni presjek izmjeren je na $\theta = 168^\circ$ za reakciju $^{24}\text{Mg}(\alpha, p)^{27}\text{Al}$; za energiju snopa od 13.6 MeV dobiveno je 5.9 ± 0.2 mb/sr. Za inverznu reakciju, $^{27}\text{Al}(p, \alpha)^{24}\text{Mg}$, na odgovarajućoj energiji dobiven je diferencijalni udarni presjek od 2.0 ± 0.1 mb/sr. Iz navedenog odredite spin osnovnog stanja jezgre ^{27}Al . Q -vrijednost reakcije $^{24}\text{Mg}(\alpha, p)^{27}\text{Al}$ je -1.59 MeV.
8. (1 bod) Mjerenje udarnog presjeka za fuziju $\alpha + ^{209}\text{Bi}$ daje:

energija	MeV	21	22	24.5	30	35	40
udarni presjek	mb	100	200	500	900	1210	1370

Iz tih podataka odredite efektivni polumjer interakcije i kulonsku barijeru za ovu reakciju.

9. (2 boda) Udarni presjek za reakciju $^{10}\text{B}(n, \alpha)$ je 630 b za neutrone upadne energije 1 eV. Ta se reakcija često upotrebljava za detekciju neutrona putem ionizacijskih komora napunjenih plinom $^{10}\text{BF}_3$. Jedna takva komora (plin pod standardnim uvjetima, debela 0.1 m) ima površinu izloženu snopu neutrona (energije 1 eV) jednaku $2 \cdot 10^{-2}$ m² i pri tome se opaža 1000 događaja svake sekunde. Koliki je upadni fluks neutrona?
10. (1 bod) Promotrite reakciju $^1\text{H} + ^A\text{X} \rightarrow ^2\text{H} + ^{A-1}\text{X}$. Za koju od sljedećih meta ^AX očekujete najveći udarni presjek i zašto: ^{39}Ca , ^{40}Ca i ^{41}Ca ?
11. (2 boda) Reakcija $^6\text{Li}(d, \alpha)^4\text{He}$ ima jak rezonantan vrh na energiji $E(d) = 0.6$ MeV. Kutna raspodjela na toj energiji dobro je opisana s $(1 + A \cos^2 \theta)$. Mase čestica koje sudjeluju u reakciji su: $M(d) = 2.0147u$, $M(\alpha) = 4.003u$, $M(^6\text{Li}) = 6.0170u$ i $M(^8\text{Be}) = 8.0079u$ ($1u = 938.2$ MeV). Za spin / paritet vrijedi: $J^\pi(d) = 1^+$, $J^\pi(\alpha) = 0^+$ i $J^\pi(^6\text{Li}) = 1^+$. Iz navedenih podataka odredite energiju pobuđenja, te spin i paritet stanja jezgre ^8Be preko kojeg se odvija ova reakcija.

12. (1 bod) Alfa-čestica kinetičke energije 100 MeV-a raspršuje se na jezgri ^{56}Fe . Na kojim se kutevima javljaju prva dva difrakcijska minimuma? Jezgru shvatite kao disk polumjera 5 fm.
13. (2 boda) Odredite energiju praga reakcije u kojoj nakon sudara dvije čestice masa m_a i m_b dobivamo dvije čestice masa m_c i m_d . Gibanje čestica je relativističko. Kakva je veza energije praga i Q -vrijednosti reakcije? Dokažite da je Q -vrijednost endotermne reakcije uvijek manja od energije praga (po iznosu).
14. (1 bod) Analiza mjerenja elastičnog raspršenja protona, α -čestica i iona ^{16}O ($E = 10A$ MeV) na nekoj meti pokazala je da se dobar opis postiže optičkim potencijalima čiji realan i imaginaran dio su:

$$\begin{aligned} p \dots V &= 55 \text{ MeV}, W = 8 \text{ MeV}; \\ \alpha \dots V &= 200 \text{ MeV}, W = 45 \text{ MeV}; \\ ^{16}\text{O} \dots V &= 750 \text{ MeV}, W = 525 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Izračunajte iz tih podataka odgovarajuće srednje slobodne putove i usporedite s tipičnim dimenzijama jezgara.

15. (2 boda) Navedite izospine stanja jezgara ^{14}N , ^{15}C i ^{20}Ne koji se mogu dostići reakcijama:
- $^{10}\text{B}(^7\text{Li}, t)^{14}\text{N}$;
 - $^{16}\text{O}(d, \alpha)^{14}\text{N}$;
 - $^9\text{Be}(^7\text{Li}, p)^{15}\text{C}$;
 - $^{14}\text{C}(d, p)^{15}\text{C}$;
 - $^{16}\text{O}(\alpha, \gamma)^{20}\text{Ne}$;
 - $^{18}\text{O}(^3\text{He}, n)^{20}\text{Ne}$.
16. (3 boda) U reakciji $p + ^7\text{Li} \rightarrow ^4\text{He} + ^4\text{He}$ ($E_p = 18.6$ MeV) diferencijalni udarni presjek ima maksimum od 1.67 barna/sr na kutu (u sustavu centra mase) $\theta = 75^\circ$. Na tom je kutu na udaljenosti od 12.0 cm od mete postavljen detektor površine 0.5 cm². Koliko će alfa-čestica svake sekunde pogađati taj detektor ako je debljina litija u meti 1.0 mg/cm², intenzitet snopa 1.0 μA , a snop ravnomjerno pogađa površinu mete od 1 cm²?
17. (2 boda) Izračunajte udarni presjek za reakciju $^{109}\text{Ag}(n, \gamma)$ s termalnim neutronima energije 2 eV! Prva rezonancija za neutrone nalazi se na energiji 5.1 eV i njezina svojstva su $\Gamma_\gamma = 0.14$ eV, $\Gamma_n = 1.3 \cdot 10^{-2}$ eV, a spinovi jezgara ^{109}Ag i ^{110}Ag su 1/2 i 1.
18. (1 bod) Pokažite da je ukupni udarni presjek za Rutherfordovo raspršenje za kutove veće od nekog graničnog kuta θ_0 dano s:

$$\sigma(\theta > \theta_0) = 4\pi \left(\frac{Zze^2}{16\pi\epsilon_0 E} \right) \text{ctg}^2 \frac{\theta_0}{2},$$

gdje su Z i z atomski brojevi jezgara mete i snopa, a E energija snopa.

19. (2 boda) Alfa-čestica mase $4M$ i brzine v prolazi u blizini atomske jezgre masenog broja A ($A \gg 4$). Neka je parametar upada dan s b , a kut raspršenja s θ .
- a) Pokažite da za male kuteve θ vrijedi:

$$\theta = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 Mv^2 b}$$

b) Jednolik snop α -čestica brzine $v = 2 \times 10^7 \text{ ms}^{-1}$ udara okomito u zlatnu foliju ($Z=79$, $A=197$, gustoća $1.9 \times 10^4 \text{ kgm}^{-3}$), debljine 10^{-5} m . Procijenite udio α -čestica koje "dožive" dvostruko raspršenje pri prolasku kroz foliju, a da za svako raspršenje vrijedi da je $\theta > 10^\circ$.

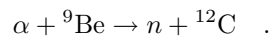
20. (1 bod) Neutron kinetičke energije od oko 1 MeV raspršuje se na jezgri masenog broja A izotropno u sustavu centra mase. Pokažite da prosječan gubitak energije po sudaru jednak $2A/(1+A)^2 E$, gdje je E upadna kinetička energija neutrona.
21. (1 bod) Odredite omjer upadne i izlazne energije alfa-čestice koja se elastično raspršuje na jezgri ^{16}O pod kutem od 180° .
22. (2 boda) Jezgra ^5Li manifestira se kao rezonanca u elastičnom raspršenju protona energije ≈ 2 MeV na ^4He . Širina rezonance je 0.5 MeV, a spin $3/2$.
- (a) Koliko je vrijeme poluživota jezgre ^5Li ?
- (b) Procijenite udarni presjek za raspršenje $p+^4\text{He}$ na rezonantnoj energiji.
23. (1 bod) Reakcija $^3\text{He}(n,p)^3\text{H}$ ima udarni presjek u barnima dan s $5000 \cdot (2000/v)$, gdje je v brzina neutrona zadana u m/s. Izračunajte udarni presjek za inverznu reakciju (zanemarujući kulonsku barijeru).

24. (3 boda) Pokažite pomoću Breit-Wignerove formule da je maksimalni mogući reakcijski udarni presjek za spore neutrone dan s:

$$\sigma_r(\text{max}) = g \frac{0.65 \cdot 10^6}{E_r(\text{eV})} (\text{barn}) \quad .$$

Kakva je u tom slučaju veza između Γ_γ i Γ_n ? Primijenite formulu na ^{135}Xe ($I=3/2$).

25. (3 boda) Jednostavan način izrade izvora neutrona je miješanje α -emitera s berilijem i upotreba egzotermne reakcije ($Q= 5.7$ MeV):



Na energijama $E_\alpha= 4-6$ MeV udarni presjek za ovu reakciju je $\approx 0.4\text{b}$; ispod $E_\alpha=4$ MeV udarni presjek eksponencijalno pada. Kolika mora biti aktivnost α -izvora kojeg ćemo okružiti berilijem da bi dobili neutronske izvor aktivnosti 1 Bq?

Pomoć: izračunajte prvo energiju stvorenih alpha-čestica. Znajući da one gube otprilike 1000 MeV po centimetru berilija, izračunajte koliki će put preći prije nego što im energija padne ispod 4 MeV. Iz izračunatog puta i poznatog udarnog presjeka odredite traženi broj neutrona. Gustoća berilija je 1.8 g cm^{-3} .

26. (2 boda) Snop neutrona energije 0.1 eV i fluksa $10^{12} \text{ s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$ pada na 1 cm^3 prirodnog urana. Udarni presjek za fisiju ^{235}U je 250 b. Udio ^{235}U u prirodnom uranu je 0.72%. Gustoća urana je 19 g cm^{-3} . U svakoj se fisiji oslobađa 165 MeV energije. Koliko se nuklearne energije oslobađa svake sekunde? Ako je koeficijent pretvorbe nuklearne u električnu energiju 30%, koliku snagu razvija opisana nuklearna elektrana? Umjesto prirodnog urana, u realnim elektranama koristi se obogaćeni (udio $^{235}\text{U} \approx 3-4\%$).
27. (1 bod) Fuzija dvije identične jezgre na niskim energijama može se desiti kada je kulonska energija odbijanja u času kada se one dotiču kompenzirana razlikom energija vezanja stvorene jezgre i početnih jezgara. Koristeći semiempirijsku formulu mase, odredite granični Z^2/A da dođe do ovako opisane fuzije. Pretpostavite da su jezgre sferično simetrične, te zanemarite energiju sparivanja i simetrije.