

XI PREDAVANJE

NEODREDJENI INTEGRAL - METODI INTEGRACIJE

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Neka su date funkcije $u = u(x)$ i $v = v(x)$, koje su neprekidne i diferencijabilne na (a, b) . Tada važi

$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow uv' = (uv)' - u'v.$$

Integracijom ove jednakosti, dobija se

$$\int uv' dx = \int (uv)' dx - \int u' v dx \Rightarrow \int uv' dx = uv - \int u' v dx.$$

Kako je $v' dx = dv$ i $u' dx = du$, ovo se može napisati u obliku

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

Ovaj postupak zove se parcijalna integracija. Ako postoji integral na levoj strani, tada postoji i integral na desnoj strani i obratno.

Primer: $I = \int xe^x dx$.

Uzmimo $u = x$ i $dv = e^x dx$. Tada je $du = dx$ i $v = \int e^x dx = e^x$. Na osnovu toga izračunavamo

$$I = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

Kako izabrati u i v' :

- Kada biramo v' , treba da budemo u mogućnosti da odredimo v ;
- Bolje je ukoliko je u' jednostavnije od u ;
- Bolje je da v bude jednostavnije od v' .

Primer: 1) $\int \ln x dx$, 2) $\int x^6 \ln x dx$, 3) $\int \operatorname{arctg} x dx$, 4) $\int x^3 e^{x^2} dx$ (primeniti kombinaciju smene i parcijalne integracije)

INTEGRACIJA RACIONALNIH FUNKCIJA

Neka je data racionalna funkcija

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Integracija se vrši razlaganjem na elementarne razlomke.

Primer: 1) $I = \int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} dx$ 2) $\int \frac{3x^2 + 3x + 12}{(x-1)(x+2)x} dx$

**Transformacija podintegralne funkcije
i svodjenje na tablični integral**

I) INTEGRALI OBLIKA

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (a \neq 0)$$

svode se transformacijom kvadratnog trinoma na **kanonički oblik**

$$ax^2 + bx + c = a((x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}),$$

a zatim uvodjenjem smene $x + b/2a = t$, na tablične integrale:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \\ \int \frac{dx}{x^2 + a^2} &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \end{aligned}$$

Primer:

$$I = \int \frac{dx}{2x^2 + 9} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\frac{2}{9}x^2 + 1} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{(\frac{\sqrt{2}}{3}x)^2 + 1}.$$

Uvodimo smenu: $\frac{\sqrt{2}}{3}x = t \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{3}dx = dt \Rightarrow dx = 3dt/\sqrt{2}$. Odatle je

$$I = \frac{1}{9} \int \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{3}x + C.$$

Primer: $I = \int \frac{xdx}{x^2 - 2x - 1}.$

II) INTEGRALI OBLIKA

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx, \quad \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

rešavaju se kombinovanjem smene i integrala prethodnog oblika.

PRIMER. Rešiti integral

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$$

INTEGRACIJA NEKIH IRACIONALNIH FUNKCIJA

Kod integracije iracionalne funkcije cilj je da se pogodnom smenom izvrši svodenje na racionalnu funkciju.

I) Ako podintegralna funkcija sadrži izraz $\frac{ax+b}{cx+d}$ sa različitim razlomljenim stepenima, tada uvodimo smenu

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^p$$

gde je p najmanji zajednički sadržalac svih imenilaca.

PRIMER.

$$I = \int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$$

Smena: $x = t^6$.

PRIMER.

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$$

Smena: $\frac{1+x}{x} = t^2$.

II) INTEGRALI OBЛИKA $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, a \neq 0$

(OJLEROVE SMENE)

1) $a > 0$ – smena: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t$

PRIMER.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 5}}$$

2) $c \geq 0$ – smena: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$

PRIMER.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 3x + 4}}$$

3) $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta), \alpha, \beta \in R$

– smena: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = a(x - \alpha)t$

PRIMER.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}$$

INTEGRACIJA NEKIH TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

I) Integrali oblika $\boxed{\int R(\sin x, \cos x)dx}$

Smena:

$$\begin{aligned}\tan \frac{x}{2} &= t, \quad -\pi < x < \pi \\ \sin x &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2} \\ \cos x &= \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ x &= 2 \arctan t \Rightarrow dx = \frac{2}{1 + t^2} dt\end{aligned}$$

PRIMER.

$$I = \int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x}$$

II) Integrali oblika $\boxed{\int R(\tan x)dx, \quad \int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)dx}$

Smena: $\tan x = t, \quad x = \arctan x, \quad dx = \frac{dt}{1 + t^2}$

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2} \\ \cos^2 x &= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + t^2} \\ \sin x \cos x &= \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{t}{1 + t^2}\end{aligned}$$

PRIMER.

$$\int \frac{\sin^2 x}{4 + \cos^2 x} dx$$

III) Integrali oblika $\boxed{\int \sin \alpha x \cos \beta x dx, \int \sin \alpha x \sin \beta x dx, \int \cos \alpha x \cos \beta x dx}$

Koriste se transformacije:

$$\begin{aligned}\sin \alpha x \cos \beta x &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x) \\ \sin \alpha x \sin \beta x &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x) \\ \cos \alpha x \cos \beta x &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x)\end{aligned}$$

IV) Integrali oblika

$$\boxed{\int \sin^m x \cos^n x dx}$$

1) Ako su $m, n \in Z$ tada:

- za m neparno: smena $\cos x = t$
- za n neparno: smena $\sin x = t$
- za m, n parno: smena $\tan x = t$

REKURENTNE FORMULE

Rekurentne formule su formule u kojima postoji zavisnost od prirodnih brojeva.

1) Naći integral

$$I_n = \int \sin^n x dx \quad (n \in Z)$$

Neka je $n \geq 2$. Primjenjujemo parcijalnu integraciju uzimajući:

$$u = \sin^{n-1} x, dv = \sin x dx$$

Dobija se relacija

$$\boxed{I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$$

Kako je $I_0 = \int dx = x + C$, $I_1 = \int \sin x = -\cos x + C$, na osnovu gornje formule možemo izračunati I_n za svako $n \in N$.

2) Na sličan način se izračunavaju integrali

$$\int \frac{dx}{\sin^n x}, \int \cos^n x dx, \int \frac{dx}{\cos^n x}$$

PRIMER.

$$I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^{n+1} x}$$

Primjenjujemo parcijalnu integraciju sa:

$$u = \frac{1}{\cos^{n+1} x}, \quad dv = \cos x dx$$

Dobija se relacija

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{\sin x}{(n+1) \cos^{n+1} x} + \frac{n}{n+1} I_n}$$

Izračunavanje započinjemo sa integralima $I_0 = \int dx = x + C$ i

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{1 - \sin^2 x} = \int \frac{dt}{1 - t^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C \end{aligned}$$