# Vektorska teorija polja

Skalarno polje je f-ja $u = f(T) = f(x, y, z)$ u oblasti prostora ili na površi (na primjer, temperatura u svakoj tački prostora, nadmorska visina tačke i dr.) Skalarno polje se predstavlja nivoskim površima tj. površima s jednačinom $u = c \cdot f(T) = c \cdot f(x, y, z)$ (gdje je c-konstanta) i u ima neprekidne parcijalne izvode koji se ne anuliraju istovremeno).

Na primjer $u = x^2 + y^2 + z^2$ je skalarno polje.

Ranije smo spomenuli da je gradijent f-je $u = f(x, y, z)$, date u nekoj oblasti prostora, vektor čije su projekcije na ose Dekartovog koordinatnog sistema $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ i $\frac{\partial u}{\partial z}$. Označava se simbolom

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Izvod u pravcu gradijenta u datoj tački dostiže najveću vrijednost jednaku $|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$ tj. pravac gradijenta je pravac najbržeg rasta f-je.

Vektorsko polje je oblast prostora u čijoj je svakoj tački definisan vektor.

$$\vec{v} = (V_x, V_y, V_z) = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$ gdje su $V_x, V_y, V_z$ skalarna polja.

Na primjer $\vec{v} = (y^2 + z^2)\vec{i} + x^2\vec{j} + xyz^2\vec{k}$ je vektorsko polje.

Nabla operator ($\nabla$ operator ili Hamiltonov operator) je diferencijalni operator oblika $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ gdje su $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični ortogonalni vektori.

Ako je $u = f(x, y, z)$ skalarna f-ja biće

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \operatorname{grad} f$$

Ako je $\vec{v} = (V_x, V_y, V_z)$ vektorska f-ja onda je $\nabla \vec{v} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$

Važne osobine vektorskog polja su divergencija i rotor vektorskog polja

$$\operatorname{div}\vec{v} = \nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$ (skalarni proizvod $\nabla$ i $\vec{v}$)

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$ (vektorski proizvod $\nabla$ i $\vec{v}$)

Ako je $\operatorname{div}\vec{v}=0$ tada kažemo da je $\vec{v}$ solenoidno polje.
Ako je $\operatorname{rot}\vec{v}=\vec{0}$ tada kažemo da je $\vec{v}$ potencijalno polje.
F-ju $u$ za koju vrijedi da je $\vec{v}=\operatorname{grad} u$ zovemo potencijalom polja $\vec{v}$.

relacija $u(x,y,z)=C$ gdje je $C$ konstanta, predstavlja površ koju zovemo ekviskalarna površ (nivo površ) skalarnog polja

(#) Naći veličinu i pravac gradijenta skalarnog polja: a) $u = x^2+y^2+z^2$ u tački $T(2,-2,1)$

b) $u = xyz$ u tački $T(1,2,3)$.

Rj. a)

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\operatorname{grad} u = (2x, 2y, 2z) \Rightarrow \operatorname{grad} u(T) = (4,-4,2)$$

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{16+16+4} = 6$$ veličina gradijenta

$$\frac{\operatorname{grad} u(T)}{|\operatorname{grad} u(T)|} = \left(\frac{4}{6}, -\frac{4}{6}, \frac{2}{6}\right) = \left(\underbrace{\frac{2}{3}}_{\cos\alpha}, \underbrace{-\frac{2}{3}}_{\cos\beta}, \underbrace{\frac{1}{3}}_{\cos\gamma}\right)$$ jedinični vektor pravca gradijenta

$\alpha = \arccos\frac{2}{3}$

$\beta = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$

$\gamma = \arccos\frac{1}{3}$

b) $|\operatorname{grad} u(T)| = 7$ $\qquad \dfrac{\operatorname{grad} u(T)}{|\operatorname{grad} u(T)|} = \left(\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}\right)$

(#) Dato je skalarno polje $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. U kojim tačkama je a) $\operatorname{grad} u = \vec{0}$

b) $\vec{k} \cdot \operatorname{grad} u = 0$.

Rj.

a) $\operatorname{grad} u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$

$\operatorname{grad} u = (3x^2 - 3yz,\ 3y^2 - 3xz,\ 3z^2 - 3xy)$

$$\operatorname{grad} u = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 3x^2 - 3yz = 0 \\ 3y^2 - 3xz = 0 \\ 3z^2 - 3xy = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} x^2 - yz = 0 & (I) \\ y^2 - xz = 0 & (II) \\ z^2 - xy = 0 & (III) \end{array}$$

Trivijalno rješenje sistema je $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

Ako pomnožimo (I) sa $\underset{x \neq 0}{x}$, (II) sa $\underset{y \neq 0}{y}$ i (III) sa $\underset{z \neq 0}{z}$ dobijamo

$$\begin{array}{l} x^3 - xyz = 0 \\ y^3 - xyz = 0 \\ z^3 - xyz = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} xyz = x^3 \\ xyz = y^3 \\ xyz = z^3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} x^3 = y^3 = z^3 \\ x = y = z \end{array}$$

Ako ovu zadnju jednakost napišemo u obliku $\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1}$ (prava u prostoru) vidimo da je $\operatorname{grad} u = \vec{0}$ za sve tačke ove prave.

b) $\operatorname{grad} u = (3x^2 - 3yz)\vec{i} + (3y^2 - 3xz)\vec{j} + (3z^2 - 3xy)\vec{k}$

$\vec{k} \cdot \operatorname{grad} u = 3z^2 - 3xy = 0$

$\vec{k} \cdot \operatorname{grad} u = 0$ je za sve tačke krive $z^2 - xy = 0$

(#) Odrediti ugao kojeg zatvaraju gradijenti polja $z=\sqrt{x^2+y^2}$ i $u=x-3y+\sqrt{3xy}$ u tački $A(3,4)$.

Rj.

Gradijent f-je $z=f(x,y)$ se računa po formuli

$$\operatorname{grad} z=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

$$\operatorname{grad} z=\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x,\ \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y\right)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$u=x-3y+\sqrt{3xy},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=1+\frac{1}{2\sqrt{3xy}}\cdot 3y=1+\frac{3y}{2\sqrt{3xy}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-3+\frac{3x}{2\sqrt{3xy}}$$

$$\operatorname{grad} u=\left(1+\frac{3y}{2\sqrt{3xy}},-3+\frac{3x}{2\sqrt{3xy}}\right).$$

$$A(3,4),\quad \operatorname{grad} z(A)=\left(\frac{3}{\sqrt{9+16}},\frac{4}{\sqrt{9+16}}\right)=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j},$$

$$\operatorname{grad} u(A)=\left(1+\frac{12}{2\sqrt{36}},-3+\frac{9}{2\sqrt{36}}\right)=\left(1+1,-3+\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{12}_{4}}\right)=$$

$$=\left(2,-\frac{9}{4}\right)=2\vec{i}-\frac{9}{4}\vec{j}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\varphi \implies \cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

U našem slučaju $\vec{a}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$, $\vec{b}=\left(2,-\frac{9}{4}\right)$ ∴

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{5}\cdot 2+\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)=\frac{6\cdot 4}{5\cdot 4}-\frac{36}{20}=\frac{24-36}{20}=\frac{-12}{20}=\frac{-3}{5}$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=1,\quad |\vec{b}|=\sqrt{4+\frac{81}{16}}=\sqrt{\frac{64+81}{16}}=\frac{\sqrt{145}}{4}$$

$$\cos\varphi=\frac{-\frac{3}{5}}{1\cdot\frac{\sqrt{145}}{4}}=\frac{-12}{\sqrt{145}}\implies \varphi=\arccos\left(\frac{-12}{\sqrt{145}}\right)$$ ugao kojeg zatvaraju gradijenti polja

# Odrediti divergenciju i rotor vektorskih polja

a) $\vec{v} = (y^2+z^2)\vec{i} + (z^2+x^2)\vec{j} + (x^2+y^2)\vec{k}$

b) $\vec{v} = x^2yz\,\vec{i} + xy^2z\,\vec{j} + xyz^2\,\vec{k}$

Rj. a)

$$\operatorname{div}\vec{v} = \nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad (\vec{v} = (V_x, V_y, V_z))$$

$V_x = y^2 + z^2$ $\qquad \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$

$V_y = z^2 + x^2$ $\qquad \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$ $\qquad \operatorname{div}\vec{v} = 0+0+0 = 0$

divergencija vektorskog polja

$V_z = x^2 + y^2$ $\qquad \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$

Kako je $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ to je polje $\vec{v}$ solenoidno

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla\times\vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\times(V_x, V_y, V_z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$\frac{\partial V_z}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial V_y}{\partial z} = 2z$

$\frac{\partial V_z}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial V_x}{\partial z} = 2z$

$\frac{\partial V_y}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial V_x}{\partial y} = 2y$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = (2y-2z)\vec{i} - (2x-2z)\vec{j} + (2x-2y)\vec{k} = (2y-2z,\ 2z-2x,\ 2x-2y)$$

rotor vektorskog polja

Kako je $\operatorname{rot}\vec{v} \neq 0$ to polje nije potencijalno polje.

b) URADITI ZA VJEŽBU

Rj. $\operatorname{div}\vec{v} = 6xyz$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = (yx^2 - yz^2)\vec{j} + (zy^2 - zx^2)\vec{k} + (xz^2 - xy^2)\vec{i}.$$

(#) Dokazati da je vektorsko polje potencijalno i naći njegov potencijal:

$$\vec{v} = 2x(y^2+z^2)\vec{i} + 2y(x^2+z^2)\vec{j} + 2z(x^2+y^2)\vec{k}.$$

Rj. Vektorsko polje $\vec{v}$ je potencijalno ako je $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$.
Rotor vektorskog polja $\operatorname{rot}\vec{v}$ se računa . . .

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

(vektorski proizvod Nabla ($\nabla$) operatora i vektorskog polja $\vec{v}$)

$V_x = 2x(y^2+z^2)$, $\quad \frac{\partial V_x}{\partial y} = 4xy$, $\quad \frac{\partial V_x}{\partial z} = 4xz$

$V_y = 2y(x^2+z^2)$, $\quad \frac{\partial V_y}{\partial x} = 4xy$, $\quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = 4yz$

$V_z = 2z(x^2+y^2)$, $\quad \frac{\partial V_z}{\partial x} = 4xz$, $\quad \frac{\partial V_z}{\partial y} = 4yz$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \vec{i}(4yz-4yz) - \vec{j}(4xz-4xz) + \vec{k}(4xy-4xy)$$

$$= (0,0,0) = \vec{0}$$ vektorsko polje je potencijalno

Potencijal polja $\vec{v}$ je f-ja $u$ za koju vrijedi $\vec{v} = \operatorname{grad} u$.

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x(y^2+z^2) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2y(x^2+z^2) \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 2z(x^2+y^2) \end{aligned}\right\} \dots (1)$$

$u = u(x,y,z)$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$u = \int 2x(y^2+z^2)\,dx + \varphi(y,z)$$

$u = x^2(y^2+z^2) + \varphi(y,z)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= 2yx^2 + \varphi'_y \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 2x^2z + \varphi'_z \end{aligned}\right\} \dots (2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$ $\varphi'_y = 2yz^2$, $\quad \varphi'_z = 2zy^2 \quad \dots (*)$

Odredimo f-ju $\varphi$: $\quad \varphi = \int 2yz^2\,dy + \psi(z)$

$\varphi = y^2z^2 + \psi(z)$

$\varphi' = 2y^2z + \psi' \quad \dots (**)$

$(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$ $\psi'_z = 0 \Rightarrow \psi(z) = C$

$\Rightarrow \varphi = y^2z^2 + C \Rightarrow u = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + C$

Potencijal vektorskog polja je $u = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + C$

(#) Odrediti konstante $a$, $b$ i $c$ tako da vektorsko polje $\vec{v} = (x+2y+az)\vec{i} + (bx-3y-z)\vec{j} + (4x+cy+2z)\vec{k}$ bude potencijalno i naći njegov potencijal.

Rj. Ako je $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ tada je vektorsko polje $\vec{v}$ potencijalno.

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$V_x = x + 2y + az$

$V_y = bx - 3y - z$

$V_z = 4x + cy + 2z$

$\frac{\partial V_z}{\partial y} = c \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = -1 \quad \frac{\partial V_y}{\partial x} = b$

$\frac{\partial V_z}{\partial x} = 4 \quad \frac{\partial V_x}{\partial z} = a \quad \frac{\partial V_x}{\partial y} = 2$

$\operatorname{rot}\vec{v} = (c+1)\vec{i} - (4-a)\vec{j} + (b-2)\vec{k}$
$= (c+1,\ a-4,\ b-2)$

Za vrijednosti $a=4$, $b=2$ i $c=-1$ vektorsko polje $\vec{v}$ je potencijalno polje.

$\vec{v} = (x+2y+4z,\ 2x-3y-z,\ 4x-y+2z)$

Potencijal polja $\vec{v}$ je f-ja $u$ koja zavisi od 3 promjenjive $u = u(x,y,z)$ i za koju vrijedi $\vec{v} = \operatorname{grad} u$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

Nađimo f-ju $u$.

$\frac{\partial u}{\partial x} = x+2y+4z$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x-3y-z \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 4x-y+2z \quad \ldots (*)$

$u = \int (x+2y+4z)\,dx + \varphi(y,z)$

$u = \frac{1}{2}x^2 + (2y+4z)x + \varphi(y,z) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 2x + \varphi'_y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 4x + \varphi'_z \overset{(*)}{\Longrightarrow}$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \varphi'_y = -3y - z$ i $\varphi'_z = -y + 2z \quad \ldots (**)$ Odredimo f-ju $\varphi$.

$\varphi = \int(-3y-z)\,dy + \psi(z) = -\frac{3}{2}y^2 - yz + \psi(z)$

$\varphi'_z = -y + \psi'_z \overset{(**)}{\Longrightarrow} \psi'_z = 2z \Rightarrow \psi(z) = \int 2z\,dz = z^2 + c$

$\varphi(y,z) = -\frac{3}{2}y^2 - yz + z^2 + c \Longrightarrow u = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 4xz - \frac{3}{2}y^2 - yz + z^2 + c$

# Cirkulacija i fluks vektorskog polja

Neka je $\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)$ dato vektorsko polje.
Cirkulacija vektorskog polja $\vec{v}$ duž krive $c$ je integral

$$C=\int_c \vec{v}\,d\vec{r}=\int_c v_x\,dx+v_y\,dy+v_z\,dz \qquad \text{gde je } \vec{r}=(x,y,z),\ d\vec{r}=(dx,dy,dz)$$

Ako je $c$ zatvorena kontura možemo koristiti formulu Stoksa u vektorskom obliku

$$C=\oint_c \vec{v}\,d\vec{r}=\iint_S \vec{n}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{v}\,dS=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} dS$$

Fluks (tok, proticanje) vektorskog polja (kroz površ $S$) je površinski integral

$$\phi=\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_S (V_x\cos\alpha+V_y\cos\beta+V_z\cos\gamma)\,dS$$

$$=\iint_S V_x\,dy\,dz+V_y\,dx\,dz+V_z\,dx\,dy$$

Ako je $S$ zatvorena površ, fluks polja se može računati pomoću formule Gauss-Ostrogradski

$$\phi=\oiint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_\Omega \mathrm{div}\,\vec{v}\,dx\,dy\,dz=\iiint_\Omega \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

gde je $\Omega$ oblast u prostoru koja je ograničena površinom $S$.

(#) Izračunati cirkulaciju vektorskog polja $\vec{v}=-y\vec{i}+x\vec{j}+a\vec{k}$ (a = konstanta) duž kruga $(x-2)^2+y^2=1$, $z=0$.

Rj. $\vec{v}=-y\vec{i}+x\vec{j}+a\vec{k}$

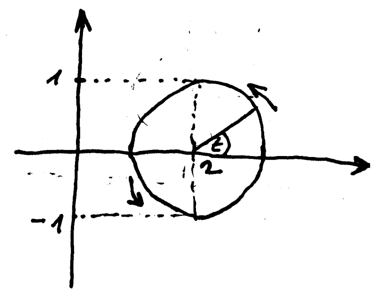
$c:\ (x-2)^2+y^2=1,\quad z=0$

$$C=\int_c \vec{v}\,d\vec{r}=\int_c v_x\,dx+v_y\,dy+v_z\,dz$$

cirkulacija polja $\vec{v}$

Imamo krivolinicki integral

$$C=\int_c -y\,dx+x\,dy+a\,dz \quad \text{gdje je}\quad c:\begin{cases}(x-2)^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$$




Parametrizirajmo kružnicu tj. uvedimo smjene

$$\begin{cases}x-2=\cos t\\ y=\sin t\\ z=0\end{cases}\qquad 0\le t\le 2\pi \qquad \begin{aligned}dx&=-\sin t\,dt\\ dy&=\cos t\,dt\\ dz&=0\end{aligned}$$

$x=2+\cos t$

$$C=\int_0^{2\pi}(-\sin t)(-\sin t)\,dt+(2+\cos t)\cos t\,dt+0=$$

$$\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+2\cos t+\cos^2 t)\,dt=\int_0^{2\pi}(1+2\cos t)\,dt=(t+2\sin t)\Big|_0^{2\pi}=2\pi$$

II način: pomoću Stoksove formule

$$C=\int_c \vec{v}\,d\vec{r}=\iint_S \vec{n}\cdot\operatorname{rot}\vec{v}\,dS=\iint_S \begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix} dS$$

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -y & x & a\end{vmatrix}=0\vec{i}+0\vec{j}+2\vec{k}=(0,0,2)$$

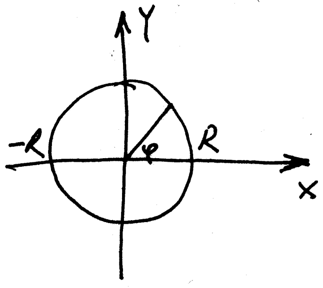
$$C=\iint_S \vec{n}\cdot\operatorname{rot}\vec{v}\,dS=\iint_S 2\cos\gamma\,dS=2\underbrace{\iint_S dx\,dy}_{\text{površina kruga}}=2\cdot 1^2\cdot\pi=2\pi$$

Iz formule Stoksa znamo da je $\cos\gamma\,dS=dx\,dy$

(#) Izračunati cirkulaciju vektorskog polja $\vec{v}=x^2y^3\vec{i}+\vec{j}+z\vec{k}$ duž kružnice c koja je data kao presjek kružnice $x^2+y^2=R^2$ i $xOy$ ravni.

Rj.

$$c:\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\ z=0\end{cases}$$




$$C=\oint_c \vec{v}\,d\vec{r}=\oint_c V_x\,dx+V_y\,dy+V_z\,dz$$

cirkulacija polja $\vec{v}$

I način

Parametrizirajmo kružnicu $\begin{cases}x=R\cos t\\ y=R\sin t\\ z=0\end{cases}$ ... ZAVRŠITI ZA VJEŽBU

II način Pomoću formule Stoksa:

$$C=\oint_c \vec{v}\,d\vec{r}=\iint_S \vec{n}\cdot \operatorname{rot}\vec{v}\,dS \qquad \operatorname{rot}\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2y^3 & 1 & z\end{vmatrix}=(0,0,-3x^2y^2)$$

$$C=\iint_S(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\cdot(0,0,-3x^2y^2)\,dS=\iint_S -3x^2y^2\cos\gamma\,dS=$$

$$=-3\iint_S x^2y^2\,dx\,dy \quad \text{gdje je sad } S:\left\{x^2+y^2=R^2\right.$$

Uvodimo polarne koordinate $\begin{matrix}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{matrix} \Rightarrow S':\begin{cases}0\le r\le R\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$

$dx\,dy=r\,dr\,d\varphi$

$$C=-3\iint_{S'} r^2\cos^2\varphi\, r^2\sin^2\varphi\cdot r\,dr\,d\varphi=-3\int_0^R r^5\left[\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\cdot\underbrace{4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}_{(\sin 2\varphi)^2}\,d\varphi\right]dr$$

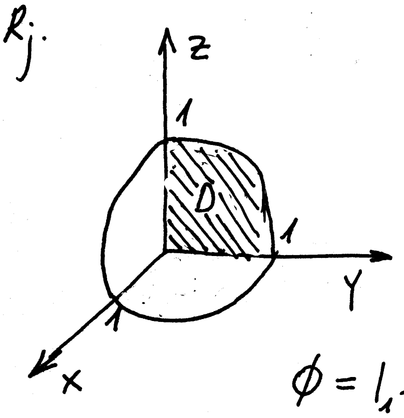
$$=-3\int_0^R r^5\left[\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi\,d\varphi\right]dr=-\frac{3}{4}\int_0^R r^5\left[\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi\right]dr$$

$$=-\frac{\cancel{3}^{\,1}}{4}\left[\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{4}\sin 4\varphi\Big|_0^{2\pi}\right]\cdot\frac{1}{\cancel{6}_{\,2}}r^6\Big|_0^R=-\frac{1}{8}R^6\cdot\pi$$

$$\boxed{\begin{matrix}1=\cos^2 2\varphi+\sin^2 2\varphi\\ \cos 4\varphi=\cos^2 2\varphi-\sin^2 2\varphi\end{matrix}}$$

# Naći fluks polja $\vec{v} = xy\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + zx\,\vec{k}$ kroz dio sfere $x^2+y^2+z^2=1$ u I oktantu.

Rj.




I način

$$\phi = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_S (v_x\cos\alpha + v_y\cos\beta + v_z\cos\gamma)\,dS$$

$$= \iint_S v_x\,dy\,dz + v_y\,dx\,dz + v_z\,dx\,dy$$

$$\phi = I_1+I_2+I_3 = \iint_S xy\,dy\,dz + \iint_S yz\,dx\,dz + \iint_S zx\,dx\,dy$$

Zbog simetrije $I_1=I_2=I_3$ pa je $\phi = 3I_1$. Računamo samo $I_1$

$$I_1 = \iint_S xy\,dy\,dz = +\iint_D \sqrt{1-(y^2+z^2)}\;y\,dy\,dz \quad \text{gdje je } D: y^2+z^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0$$

$x^2 = 1-(y^2+z^2)$

$x = \pm\sqrt{1-(y^2+z^2)}$

uzimamo + jer smo u prvom oktantu

Vektor normale zaklapa ugao $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ sa x-osom. $\cos\alpha > 0$ (u I oktantu).

Uvodimo polarne koordinate $y = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$

$$D': \begin{cases} 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le r\le 1 \\ dy\,dz = r\,d\varphi\,dr \end{cases} \qquad y^2+z^2=r^2$$

$$I_1 = \iint_{D'} r\cos\varphi\sqrt{1-r^2}\cdot r\,d\varphi\,dr = \int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\right]dr = \int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\cdot 1\,dr$$

$$= \left|\begin{matrix} r=\sin t \\ dr=\cos t\,dt\end{matrix}\right| = \int_0^1 \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int_0^1 \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \ldots = \frac{3\pi}{16}$$

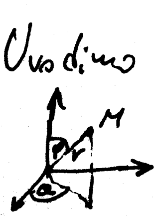
u prethodnom zadatku smo imali slično

II način: Kako je S zatvorena površ možemo primjeniti formulu Gauss-Ostrogradski.

$$\phi = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{v}\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

U našem slučaju $\phi = \iiint_\Omega (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$ gdje je $\Omega: \begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 1 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \\ z\ge 0\end{cases}$

Uvodimo sferne koordinate




$x = r\sin\varphi\cos\theta$
$y = r\sin\varphi\sin\theta$
$z = r\cos\varphi$

$$\Rightarrow \Omega': \begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\varphi\le\pi/2 \\ 0\le\theta\le\pi/2 \end{cases} \qquad dx\,dy\,dz = r^2\sin\varphi\,d\varphi\,dr\,d\theta$$

$$\phi = \iiint_{\Omega'} (r\sin\varphi\cos\theta + \ldots)\,r^2\sin\varphi\ldots = \ldots = \frac{3\pi}{16}$$

(#) Izračunati tok (fluks) vektora $\vec{v} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ kroz sferu $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Rj. $\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)=(x^3, y^3, z^3)$

Tok vektorskog polja (kroz površ S) je površinski integral

$$\phi = \iint_S v_x\,dy\,dz + v_y\,dx\,dz + v_z\,dx\,dy$$

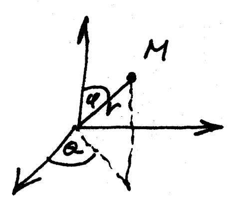
Kako je data zatvorena površina S to možemo upotrebiti formulu Gauss-Ostrogradski

$$\iint_S v_x\,dy\,dz + v_y\,dx\,dz + v_z\,dx\,dy = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 3x^2$, $\frac{\partial v_y}{\partial y} = 3y^2$, $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 3z^2$, $\Omega$ oblast ograničena sferom $x^2+y^2+z^2=R^2$

$$\phi = \iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz \overset{(\Delta)}{=\!=}$$

uvedimo sferne koordinate




$$\Omega' : \begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$x = r\sin\varphi\cos\theta$

$y = r\sin\varphi\sin\theta$

$z = r\cos\varphi$

$dx\,dy\,dz = r^2\sin\varphi$

$x^2+y^2+z^2 = r^2[\sin^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\varphi\sin^2\theta + \cos^2\varphi] = r^2$

$$\overset{(\Delta)}{=\!=} 3\iiint_{\Omega'} r^2 r^2 \sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi \int_0^R r^4\,dr = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \frac{1}{5} r^5\Big|_0^R d\varphi = 3\frac{R^5}{5}\int_0^{2\pi} (-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi} d\theta$$

$$= \frac{6R^5}{5}\pi\,\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{12R^5}{5}\pi$$ traženi tok vektora kroz sferu

(#) Izračunati cirkulaciju polja $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + (x+y-1)\vec{k}$ duž odsječka prave između tačaka $A(1,1,1)$ i $B(2,3,4)$.

Rj. Cirkulacija vektorskog polja $\vec{v}$ ($\vec{v}=(V_x,V_y,V_z)$) duž krive c je integral

$$C = \int_c V_x dx + V_y dy + V_z dz .$$

U našem slučaju $\vec{v} = (x, y, x+y-1)$, dok je c dio prave između tačaka $A(1,1,1)$ i $B(2,3,4)$.
Imamo krivoliniski integral druge vrste

$$C = \int_c x\,dx + y\,dy + (x+y-1)\,dz$$

$A(1,1,1)$
$B(2,3,4)$

Kako glasi jednačina prave kroz dvije tačke u prostoru?

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} \qquad (=t)$$

Napišimo pravu u parametarskom obliku:

$x = t+1$
$y = 2t+1$
$z = 3t+1$

Dio prave između tačke $A(1,1,1)$ i $B(2,3,4)$ je za $t \in [0,1]$.

$dx = dt, \quad dy = 2\,dt, \quad dz = 3\,dt$

$$C = \int_0^1 (t+1)\,dt + (2t+1)\,2\,dt + (3t+1)\,3\,dt = \int_0^1 (t+1+4t+2+9t+3)\,dt$$

$$= \int_0^1 (14t+6)\,dt = 14 \cdot \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 + 6t \Big|_0^1 = 7+6 = 13$$

vrijednost cirkulacije polja

\# Izračunati protok vektora

$$\vec{A}=(xy,\, yz,\, xz)$$

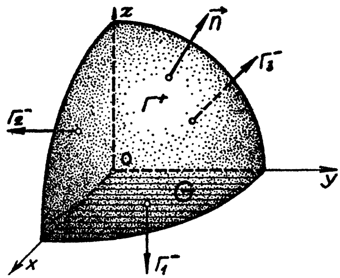
kroz površ $\Gamma$, koja je definisana relacijama:

$$x^2+y^2+z^2-1=0, \quad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0, \quad z\geqslant 0.$$

**Rešenje.**

Zadatak ćemo rešiti na tri načina. Pošto nije zadana strana površi $\Gamma$, to možemo uzeti u obzir na primer, njenu gornju stranu (u odnosu na $Oz$ osu): $\Gamma^+$.

Protok vektora izračunava se po obrascu




$$I=\iint\limits_{\Gamma^+} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma$$

koji, u razvijenom obliku glasi

$$I=\iint\limits_{\Gamma^+} (xy\cos\alpha+yz\cos\beta+xz\cos\gamma)\, d\sigma=$$

$$=\iint\limits_{\Gamma^+} xy\, dy\, dz+yz\, dx\, dz+xz\, dx\, dy.$$

**I način.**

Napišimo protok I u obliku

$$I=I_1+I_2+I_3$$

gde je

$$I_1=\iint\limits_{\Gamma^+} xy\, dy\, dz, \quad I_2=\iint\limits_{\Gamma^+} yz\, dx\, dz \quad \text{i} \quad I_3=\iint\limits_{\Gamma^+} xz\, dx\, dy.$$

Izračunaćemo najpre integral $I_3$. Projekcija površi $\Gamma$ na ravan $xOy$ je oblast $G$, određena relacijama:

$$G\colon\ x^2+y^2-1\leqslant 0, \quad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0.$$

Kako je

$$\Gamma:\ z = \underset{G}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

to je

$$I_3 = \iint\limits_{\Gamma^+} xz\,dx\,dy = +\iint\limits_{G} x\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Koristeći polarne koordinate:

$$x = \rho\cos\varphi$$

$$y = \rho\sin\varphi,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\quad J = \rho,$$

i smenu $\rho = \sin t$, nalazimo

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi \int_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho = \int_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\sin^2 t\,dt = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)\,dt = \frac{\pi}{16}.$$

Na potpuno isti način dobijamo

$$I_1 = I_2 = \frac{\pi}{16}.$$

Prema tome traženi protok je

$$I = \frac{3\pi}{16}.$$

**II način.** Odredimo jedinični vektor površi $\Gamma^+$. Kako je

$$\Gamma:\quad z = \sqrt{1-x^2-y^2},\quad z_x = \frac{-x}{z},\quad z_y = \frac{-y}{z},\quad \left(z_x = \frac{\partial z}{\partial x},\quad z_y = \cdot\cdot\right)$$

sledi

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+(x/z)^2+(y/z)^2}}\,(x/z,\ y/z,\ 1).$$

Pošto je

$$d\sigma = \sqrt{1+(x/z)^2+(y/z)^2}\,dx\,dy,$$

to je

$$I = \iint_{\Gamma+} (\vec{A}\cdot\vec{n})\,d\sigma = \iint_{\Gamma+} \left(\frac{x^2 y}{z} + y^2 + xz\right) dx\,dy$$

a odatle, prelaskom na dvojni integral, sledi

$$I = + \iint_G \left[\frac{x^2 v}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + y^2 + x\sqrt{1-x^2-y^2}\right] dx\,dy.$$

Korišćenjem polarnih koordinata, nalazimo

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \sin\varphi\,d\varphi \int_0^1 \frac{\rho^4\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} + \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\,d\varphi \int_0^1 \rho^3\,d\rho +$$

$$+ \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi \int_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho,$$

$$I = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\rho^4\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{\pi}{16} + \int_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho.$$

i dalje, putem smene $\rho = \sin t$, dobijamo

$$I = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^4 t\,dt + \frac{\pi}{16} + \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,\cos^2 t\,dt$$

dakle

$$I = \frac{3\pi}{16}.$$

Pri integraciji korišćena je rekurentna formula $\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t\,dt.$

**III način.**

Koristićemo formulu Ostrogradskog. Za zatvorenu površ $\Gamma^*$ uzećemo na primer površ koja je sastavljena od površi $\Gamma^+$ i njenih projekcija na koordinatne ravni (videti sliku), dakle

$$\Gamma^* = \Gamma^+ \cup \Gamma_1^- \cup \Gamma_2^- \cup \Gamma_3^- .$$

Imamo

$$\oint\!\!\oint_{\Gamma^*} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma = \iint_{\Gamma^+} + \iint_{\Gamma_1^-} + \iint_{\Gamma_2^-} + \iint_{\Gamma_3^-} = \iiint_{\Phi} (x+y+z)\, dx\, dy\, dz .$$

Pošto je

$$\iint_{\Gamma_1^-} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma = -\iint_{\Gamma_1^+} (\vec{A}\cdot\vec{k})\, d\sigma = -\iint_{G} (x\cdot 0)\, dx\, dy = 0,$$

$$\iint_{\Gamma_2^-} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma = 0 \quad \text{i} \quad \iint_{\Gamma_3^-} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma = 0,$$

to je

$$I = \iiint_{\Phi} (x+y+z)\, dx\, dy\, dz.$$

Korišćenjem sfernih koordinata:

$$x = \rho\cos\varphi\sin\psi$$

$$y = \rho\sin\varphi\sin\psi$$

$$z = \rho\cos\psi$$

gde je

$$J = \rho^2\sin\psi, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

dobijamo

$$I = \int_0^1 \rho^3\, d\rho \int_0^{\pi/2} \sin\psi\, d\psi \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\sin\psi + \cos\psi)\, d\varphi$$

$$I = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \left(2\sin^2\psi + \sin\psi\cos\psi\cdot\frac{\pi}{2}\right) d\psi = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

i konačno

$$I = \frac{3\pi}{16}.$$

\# Izračunati protok rotora vektora

$$\vec{A} = (x-y, z, xy)$$

kroz spoljašnju stranu dela površi

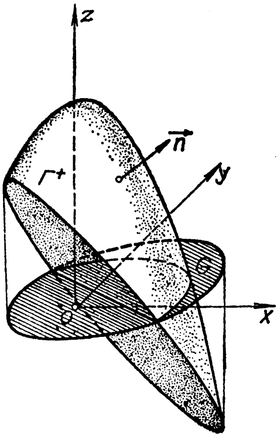
$$\Gamma:\ z = 4 - x^2 - 2y^2$$

koji se nalazi iznad ravni $\mathscr{L}: x + 2y + z = 1.$

**Rešenje.**

Koristićemo obrazac

$$I = \iint_{\Gamma^+} (\vec{B} \cdot \vec{n})\, d\sigma$$




gde je

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x-y & z & xy \end{vmatrix} = (x-1, -y, 1).$$

Kako je

$$\Gamma:\ z = 4 - x^2 - 2y^2, \quad z_x = -2x, \quad z_y = -4y$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 16y^2}} (2x, 4y, 1), \qquad d\sigma = \sqrt{1 + 4x^2 + 16y^2}\, dx\, dy$$

to je

$$(1) \qquad (\vec{B} \cdot \vec{n})\, d\sigma = (2x^2 - 2x - 4y^2 + 1)\, dx\, dy = [2(x - 1/2)^2 - 4y^2 + 1/2]\, dx\, dy.$$

Eliminacijom promenljive $z$ iz skupa jednačina

$$z=4-x^2-2y^2$$

$$x+2y+z=1$$

dobijamo jednačinu

$$x^2-x+2y^2-2y-3=0$$

konture oblasti $G$ ($G$-projekcija površi $\Gamma$ na ravan $xOy$). Svodeći prethodnu jednačinu na kanonski oblik, imamo

$$G:\quad \frac{(x-1/2)^2}{15/4}+\frac{(y-1/2)^2}{15/8}\leqslant 1.$$

Oblast $G$ možemo preslikati na jedinični krug pomoću uopštenih polarnih koordinata:

$$(2)\qquad \begin{cases} x=1/2+\sqrt{15/4}\,\rho\cos\varphi \\ y=1/2+\sqrt{15/8}\,\rho\sin\varphi \\ 0\leqslant\rho\leqslant 1,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi \end{cases}$$

pri čemu je determinantna preslikavanja (Jakobijan) $J=\dfrac{15}{4\sqrt{2}}\,\rho.$

Uzimajući u obzir (1) i (2), nalazimo

$$I=\iint\limits_{\Gamma+}(\vec{B}\cdot\vec{n})\,d\sigma=+\iint\limits_{G}[2(x-1/2)^2-4y^2+1/2]\,dx\,dy$$

$$I=\frac{15}{8\sqrt{2}}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(15\rho^3\cos 2\varphi-\rho-8\sqrt{15/8}\,\rho^2\sin\varphi)\,d\rho,$$

dakle

$$I=-\frac{15}{16}\sqrt{2}\,\pi.$$

\# Dati su:

vektor $\vec{A}=(x-z,\ \ y+z,\ \ x-y)$,

cilindrična površ $x^2+y^2=a^2$,

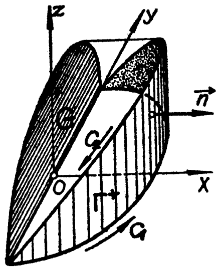
i ravni $z=x,\ \ z=0$.

1° Naći proticanje vektora $\vec{A}$ kroz spoljašnju stranu dela cilindrične površi koji isecaju date ravni, pri čemu je $z\geqslant 0$. Nacrtati sliku.

2° Naći cirkulaciju vektora $\vec{A}$ duž konture koja ograničava spomenuti deo cilindrične površi.

**Rešenje.**

1° Ako sa $G$ obeležimo projekciju površi $\Gamma$ na ravan $yOz$, tada je




$$\Gamma:\ x=\sqrt{a^2-y^2}$$

$$G:\ y^2+z^2-a^2\leqslant 0,\quad z\geqslant 0.$$

Jedinični vektor površi $\Gamma^+$ (gornja strana) je

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{1+(y/x)^2}}\ (1,\ y/x,\ 0).$$

Uzevši u obzir jednakost

$$d\sigma=\sqrt{1+(y/x)^2}\,dy\,dz,\quad \text{imamo}$$

$$I=\iint_{\Gamma^+}(\vec{A}\cdot\vec{n})\,d\sigma=\iint_{\Gamma^+}\left[x-z+\frac{(y+z)\,y}{x}\right]dy\,dz=$$

$$=+\iint_G\left[\sqrt{a^2-y^2}-z+\frac{y^2+yz}{\sqrt{a^2-y^2}}\right]dy\,dz.$$

$$I=\int_{-a}^{a} dy\int_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}}\left[\sqrt{a^2-y^2}-z+\frac{y^2+yz}{\sqrt{a^2-y^2}}\right]dz$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}(a^2+y^2+y\sqrt{a^2-y^2})\,dy$$

i konačno

$$I=\frac{4a^3}{3}.$$

2° Koristićemo Stokesovu formulu

$$I=\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r}=\iint_{\Gamma+}(\vec{n}\cdot rot\,\vec{A})\,d\sigma.$$

Pošto je

$$rot\,\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x-z & y+z & x-y\end{vmatrix}=(-2,-2,0),$$

i kako su jedinični vektor površi $\Gamma+$ i njena ortogonalna projekcija na ravan $yOz$ određeni u prethodnoj tački, to je

$$I=\iint_{\Gamma+}\left(-2-\frac{2y}{x}\right)dy\,dz=+\iint_{G}\left(-2-\frac{2y}{\sqrt{a^2-y^2}}\right)dy\,dz,$$

tj.

$$I=\int_{-a}^{a}\left(-2-\frac{2y}{\sqrt{a^2-y^2}}\right)dy\int_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}}dz,$$

i konačno

$$I=-a^2\pi.$$

**Napomena.** Izračunati cirkulaciju vektora $\vec{A}$ duž krive $C=C_1\cup C_2$ direktnim putem, koristeći pri tome jednačine:

$$C_1:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=0,\end{cases}\quad \frac{-\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2};\qquad C_2:\begin{cases}x=a\sin u\\ z=a\sin u\\ y=a\cos u,\quad 0\leqslant u\leqslant\pi.\end{cases}$$

(#) Dato je vektorsko polje

$$\vec{A}=(xy-z,\ \ yz-x,\ \ xz-y).$$

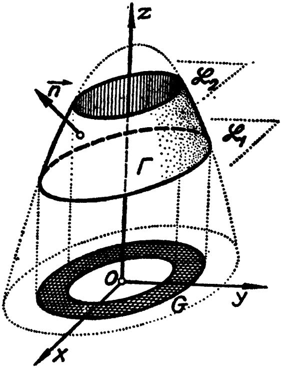
1° Izračunati protok vektora $\vec{A}$ kroz pojas površi

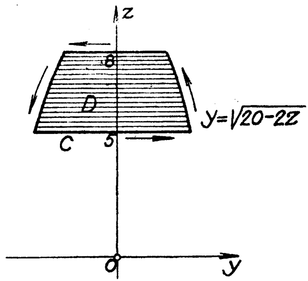
$$\Gamma:\ z=10-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

između ravni $\mathscr{L}_1$: $z=5$ i $\mathscr{L}_2$: $z=8$, u smeru spoljašnje normale na površ $\Gamma$.

2° Izračunati cirkulaciju datog vektorskog polja $\vec{A}$ po konturi $C$ u koordinatnoj ravni $yOz$, koja je određena presekom te ravni sa površi $\Gamma$ i ravnima $\mathscr{L}_1$ i $\mathscr{L}_2$, a orijentisana je tako da se, posmatrana sa pozitivnog dela $Ox$ ose, obilazi u smislu suprotnom od kazaljke na satu.

**Rešenja.**




S obzirom na slike, imamo

$$\Gamma:\ z=10-\frac{x^2+y^2}{2},\ \ (x,y)\in G;$$

$$G:\ 4\leqslant x^2+y^2\leqslant 10$$

$$D: \begin{cases} 5\leqslant z\leqslant 8 \\ -\sqrt{20-2z}\leqslant y\leqslant \sqrt{20-2z}. \end{cases}$$

1° Pošto je jedinični vektor površi $\Gamma^+$

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,(x, y, 1),$$

i kako je

$$d\sigma=\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$$

to je

$$I=\iint\limits_{\Gamma^+}(\vec{A}\cdot\vec{n})\,d\sigma=+\iint\limits_{G}\left[y\,(x^2-x-1)+y^2\left(10-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\right]dx\,dy.$$

Pošto je funkcija $f(x, y)=y\,(x^2-x-1)$ neparna po $y$ u oblasti integracije $G$, sledi

$$\iint\limits_{G} y\,(x^2-x-1)\,dx\,dy=0.$$

Uvođenjem polarnih koordinata:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi, \quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, \quad 2\leqslant\rho\leqslant\sqrt{10}; \end{cases}$$

$$J=\rho,$$

dobijamo

$$I=\iint\limits_{G} y^2\left(10-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dx\,dy=\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\int_2^{\sqrt{10}}\left(10\rho^3-\frac{\rho^5}{2}\right)d\rho,$$

dakle

$$I=132\,\pi.$$

2° Pošto se kontura $C$ oblasti $D$ nalazi u ravni $yOz\,(x=0)$ i kako su ispunjeni uslovi za primenu formule Greena (funkcija $\vec{A}$ ima neprekidne izvode), to će biti

$$I=\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r}=\oint_C yz\,dy-y\,dz=\iint_D (-1-y)\,dy\,dz.$$

Zbog toga što je oblast $D$ simetrična prema $Oz$ osi, sledi da je

$$\iint_D y\,dy\,dz=0.$$

Nastavljajući integraciju, dobijamo

$$I=-\int_5^8 dz\int_{-\sqrt{20-2z}}^{\sqrt{20-2z}} dy=\frac{2}{3}\,(8-10\sqrt{10}\,).$$

Izračunati protok vektora

$$\vec{A}=(xy^2,\;\; yz^2,\;\; zx^2)$$

kroz spoljnu stranu sfere $x^2+y^2+z^2=R^2$.

**Rezultat.**

$$I=\frac{4\pi R^5}{5}.$$

Dat je vektor

$$\vec{A}=(xz,\,xy,\,yz).$$

Izračunati protok vektora $\vec{A}$ kroz zatvorenu površ, koja je definisana jednačinama: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$, i dobiveni rezultat proveriti pomoću formule Ostrogradskog. Šta se može reći o polju vektora $\operatorname{rot}\vec{A}$?

**Rezultat.**

$I=1/8$. Polje je vrtložno.

\# Telo $\phi$ ograničeno je površima:

$$\mathscr{L}_1:\ 2z-y-5R=0,$$

$$\mathscr{L}_2:\ x^2+y^2=R^2,$$

$$\mathscr{L}_3:\ z=0.$$

Izračunati cirkulaciju vektora

$$\vec{A}=(x^2y^3, 1, z)$$

duž presečne krive $C$ površi $\mathscr{L}_1$ i $\mathscr{L}_2$, kao i protok vektora

$$\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}$$

kroz površ $\Gamma$, kojom je ograničeno telo $\phi$.

**Rezultati.** $I_1=-\dfrac{R^6\pi}{8}$ (cirkulacija); $I_2=0$ (protok).

\# Dato je vektorsko polje

$$\vec{A}=\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \text{gde je} \quad \vec{r}=(x, y, z) \quad \text{i} \quad r=|\vec{r}|.$$

1° Izračunati rad polja $\vec{A}$ duž linije $L$, koja je definisana jednačinama

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

2° Naći protok vektora $\vec{A}$ kroz spoljnu stranu sfere $x^2+y^2+z^2=R^2$

**Rezultati.**

1° $1-\dfrac{1}{\sqrt{1+4\pi^2}}$.   2°. $4\pi$.

Dato je vektorsko polje

$$\vec{A}=(z^2-x^2,\quad x^2-y^2,\quad y^2-z^2).$$

1° Izračunati protok vektora rot $\vec{A}$ kroz gornju polovinu elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad z\geqslant 0$$

iz njegove unutrašnjosti na spoljnu stranu.

2° Izračunati cirkulaciju vektorskog polja $\vec{A}$ duž linije $C$ koja je definisana jednačinama

$$x^2+y^2+z^2=4$$

$$x^2+y^2=z^2,\qquad (z>0)$$

i orijentisana je tako da se, posmatrana iz tačke $T\,(0,0,3)$ obilazi u suprotnom smislu od kazaljke na satu.

**Rezultati.** 1° 0. 2° 0.

Dato je vektorsko polje

$$\vec{A}=(x^2-yz,\quad y^2-xz,\quad z^2-xy).$$

Odrediti vrstu vektorskog polja i naći protok vektora $\vec{A}$ kroz spoljnu stranu elipsoida

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}+(z-3)^2=1.$$

**Rezultati.** Polje je potencijalno (izvor $D_2$: $x+y+z>0$, ponor $D_1$: $x+y+z<0$ i Laplaceovo polje $D_0$: $x+y+z=0$). Protok vektora je $96\,\pi$.

**Uputstvo:** Pri integraciji koristiti smene:

$$x=1+3\,\rho\cos\varphi\sin\psi$$

$$y=2+2\,\rho\sin\varphi\sin\psi$$

$$z=3+\rho\cos\psi,\quad J=6\,\rho^2\sin\psi,$$

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\,\pi,\quad 0\leqslant\psi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\rho\leqslant 1.$$

\# Vektorsko polje definisano je vektor-funkcijom

$$\vec{A}=(y-x,\ \ z-y,\ \ x-z).$$

1° Naći vektorske linije polja.

2° Naći protok vektora $\vec{A}$ kroz spoljnu stranu elipsoida

$$\Gamma:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

**Rešenja.**

1° Iz sistema diferencijalnih jednačina vektorskih linija

$$\frac{dx}{y-x}=\frac{dy}{z-y}=\frac{dz}{x-z}$$

sledi

$$\frac{dx+dy+dz}{0}=\frac{dz}{x-z}\quad\Rightarrow\quad dx+dy+dz=0\quad\Rightarrow\quad x+y+z=C_1.$$

Zamenivši $z=C_1-x-y$ u prvoj jednačini sistema diferencijalnih jednačina, dobijamo

$$\frac{dy}{dx}=\frac{C_1-x-2y}{y-x}.$$

Pomoću smena:

$$X=x+\alpha$$

$$Y=y+\beta;\quad \alpha=\beta=\frac{1}{3}C_1,$$

prethodna diferencijalna jednačina svodi se na homogenu jednačinu

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+2Y}{X-Y}$$

čije je opšte rešenje

$$\ln(Y^2+XY+X^2)-2\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2Y+X}{X\sqrt{3}}=C_2.$$

Skup jednačina

$$\begin{cases} x+y+z=C_1 \\ \ln(Y^2+XY+X^2)-2\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2Y+X}{X\sqrt{3}}=C_2. \end{cases}$$

gde je

$$X=\frac{4x+y+z}{3}, \quad Y=\frac{4y+x+z}{3}$$

određuje dvoparametarsku familiju vektorskih linija datog polja $\vec{A}$.

2° Pošto je

$$div\,\vec{A}=-3$$

$$m(\Phi)=V=\frac{4}{3}abc\pi, \quad (V \text{ zapremina elipsoida})$$

primenom formule Ostrogradskog, nalazimo

$$I=\oint\!\!\!\oint_{\Gamma}(\vec{A}\cdot\vec{n})\,d\sigma=\iiint_{\Phi}div\,\vec{A}\,dv=-3\iiint_{\Phi}dx\,dy\,dz=-3m(\Phi)$$

odnosno

$$I=-4\,abc\,\pi.$$

#) Dato je vektorsko polje

$$\vec{A}=(2x(y^2+z^2)+yz,\ \ 2y(z^2+x^2)+xz,\ \ 2z(x^2+y^2)+xy).$$

1° Pokazati da je polje potencijalno i odrediti mu potencijal.

2° Izračunati protok vektorskog polja $\vec{A}$ kroz spoljnu stranu polusfere

$$\Gamma:\ x^2+y^2+z^2-2z=0,\quad y\geqslant 0.$$

**Rešenje.**

1° Definicioni domen vektorske funkcije $\vec{A}$ je trodimenzionalni prostor $E_3$. Dokazaćemo da je $\underset{E_3}{\operatorname{rot}}\vec{A}(M)\equiv 0$, tj. da je dato polje potencijalno. Neka je $M(x, y, z)$ proizvoljna tačka prostora $E_3$, i neka je dalje

$$P=2x(y^2+z^2)+yz$$

$$Q=2y(z^2+x^2)+xz$$

$$R=2z(x^2+y^2)+xy.$$

Kako je

$$R_y-Q_z=4yz+x-(4yz+x)=0$$

$$P_z-R_x=4xz+y-(4xz+y)=0$$

$$Q_x-P_y=4xy+z-(4xy+z)=0,$$

i pošto je

$$\operatorname{rot}\vec{A}=(R_y-Q_z,\quad P_z-R_x,\quad Q_x-P_y)$$

to je

$$\underset{E_3}{\operatorname{rot}}\vec{A}(M)\equiv 0.$$

Po definiciji, vektorsko polje $\vec{A}$ je potencijalno polje. Njegov potencijal, koji ćemo označiti $F=F(M)$, izračunava se po obrascu

$$F(M)=\int_{M_0}^{M}\vec{A}\cdot d\vec{r}$$

pri čemu je $M_0$ bilo koja fiksirana tačka polja (integracija totalnog diferencijala). Uzmimo na primer da je $M_0$, koordinatni početak. Poznatim postupkom integracije totalnog diferencijala, dobijamo

$$F(M)=\int_0^x P(x,0,0)\,dy+\int_0^y Q(x,y,0)\,dx+\int_0^z R(x,y,z,)\,dz$$

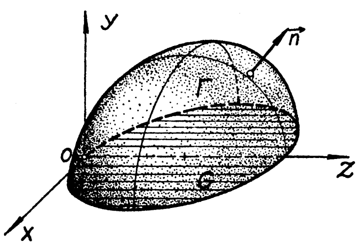
$$F(M)=\int_0^x O\cdot dx+\int_0^y 2yx^2\,dy+\int_0^z [2z(x^2+y^2)+xy]\,dz$$

tj.

$$F(M)=F(x,y,z)=x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+xyz+C$$

gde je $C$ proizvoljna konstanta. Napominjemo da se u fizici za potencijal često uzima $-F(M)$.

**2°**




Izračunaćemo protok polja $\vec{A}$ pomoću formule Ostrogradskog. Za zatvorenu površ uzećemo na primer, površ

$$\Gamma^*=\Gamma\cup G^-$$

gde je

$$\Gamma:\ y=\sqrt{2z-x^2-z^2},\quad (x,z)\in G$$

$$G:\ x^2+z^2-2z\leqslant 0,\quad y=0,\quad (G^+=G).$$

Vektor funkcija $\vec{A}$ ima neprekidne parcijalne izvode. Ispunjeni su dakle svi uslovi za primenu formule Ostrogradskog. Stoga imamo

$$\oiint_{\Gamma^*} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma = \iint_{\Gamma} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma + \iint_{G^-} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma = \iiint_{\Phi} div\vec{A}\, dv,$$

tj.

$$I = \iint_{\Gamma} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma = \iint_{G^+} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma + \iiint_{\Phi} div\vec{A}\, dv,$$

odnosno

$$I = 4 \iiint_{\Phi} (x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz,$$

jer je

$$\operatorname{div}\vec{A} = 2\,(y^2+z^2) + 2\,(z^2+x^2) + 2\,(x^2+y^2),$$

i

$$\iint_{G+} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma = \iint_{G+} (\vec{A}\cdot\vec{j})\, d\sigma = \iint_{G} Q\,(x, 0, z)\, dx\, dz = \iint_{G} xz\, dx\, dz = 0$$

pošto je oblast $G$ simetrična prema $Oz$ osi, a integrand je neparna funkcija po promenljivoj $x$. Za integraciju integrala (1) koristićemo sferne koordinate:

$$x = \rho \sin\varphi \sin\psi$$

(2) $$z = \rho \cos\varphi \sin\psi$$

$$y = \rho \cos\psi, \quad J = \rho^2 \sin\psi.$$

Pri tome se oblast $\Phi$ preslikava u oblast $\Phi^*$, koja je određena relacijama:

(3) $$\Phi^* \begin{cases} \dfrac{-\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] 0 \leqslant \psi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] 0 \leqslant \rho \leqslant 2\cos\varphi \sin\psi. \end{cases}$$

Na osnovu svega izloženog, imamo

$$I=4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{0}^{\pi/2} \sin\psi \, d\psi \int_{0}^{2\cos\varphi\sin\psi} \rho^4 \, d\rho = \frac{8\ 32}{5}\int_{0}^{\pi/2} \cos^5\varphi \, d\varphi \int_{0}^{\pi/2} \sin^6\psi \, d\psi$$

i najzad

$$I=\frac{62}{15}\pi.$$

Napominjemo, da je pri integraciji poslednjeg integrala korišćena rekurentna formula:

$$I_n=\frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad \text{gde je} \quad I_n=\int_{0}^{\pi/2} \cos^n t \, dt \quad \text{ili} \quad I_n=\int_{0}^{\pi/2} \sin^n t \, dt.$$

# Dato je vektorsko polje

$$\vec{A}=(e^x z-2xy, \ \ 1-x^2, \ \ e^x+z)$$

1° Pokazati da je polje $\vec{A}$ potencijalno i odrediti mu potencijal.

2° Izračunati integral

$$I=\int_L \vec{A}\cdot \vec{dr}$$

gde je $L$ duž $PQ$, $P(0, 1, -1)$, $Q(2, 3, 0)$, orijentisana od $P$ prema $Q$.

**Rezultati.**

1° $F(x, y, z)=(1-x^2)\,y+ze^x+\dfrac{z^2}{2}+C.$

2°. $I=-\dfrac{19}{2}.$

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

## § 1. Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент

*Скалярным полем называется плоская или пространственная область, с каждой точкой $M$ которой связано определенное значение некоторой скалярной физической величины* $u=u(M)$. Задание поля скалярной величины $u$ равносильно заданию скалярной (числовой) функции $u(M)$.

Функция $u(M)$, определяющая плоское скалярное поле, как функция точки $M(x, y)$, зависит от двух переменных $u=u(x, y)$, а функция, определяющая пространственное скалярное поле, как функция точки $M(x, y, z)$, зависит от трех переменных $u=u(x, y, z)$.

*Линией уровня плоского скалярного поля называется совокупность точек плоскости, в которых функция этого поля имеет одинаковые значения.* Линия уровня, во всех точках которой функция поля $u(x, y)$ имеет одно и то же значение $C$, определяется уравнением $u(x, y)=C$; различным постоянным значениям $C_1, C_2, C_3, \ldots$ функции поля соответствуют различные линии уровня: $u(x, y)=C_1$, $u(x, y)=C_2$, $u(x, y)=C_3, \ldots$

*Поверхностью уровня пространственного скалярного поля называется совокупность точек пространства, в которых функция этого поля имеет одинаковые значения.* Поверхность уровня, во всех точках которой функция поля $u(x, y, z)$ имеет одно и то же значение $C$, определяется уравнением $u(x, y, z)=C$.

Через каждую точку проходит только одна поверхность (линия) уровня; они заполняют всю рассматриваемую область и не пересекаются между собой.

*Производной функции $u(M)$ по направлению $\overline{MP}$ называется предел отношения разности $u(M_1)-u(M)$ к величине направленного отрезка $MM_1$, когда точка $M_1$ стремится к точке $M$, оставаясь на прямой $MP$.*

Производная функции $u$ по направлению $\overline{l}$ обозначается $\frac{\partial u}{\partial l}$

или $u'_l$:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=u'_l=\lim_{M_1\to M}\frac{u(M_1)-u(M)}{MM_1}$$

и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\overline{N}\cdot\overline{l}^0, \qquad (a)$$

где $\overline{N}\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$ — нормальный вектор к поверхности уровня, $\overline{l}^0\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ — единичный вектор направления $\overline{l}$.

Производная $u'_l$ определяет величину скорости изменения функции $u(M)$ при перемещении точки $M$ по направлению $\overline{l}$.

*В каждой точке, где функция дифференцируема, она имеет производную по любому направлению.*

Производные функции $u(x,\ y,\ z)$ по положительным направлениям осей координат $Ox$, $Oy$, $Oz$ равны ее частным производным $u'_x$, $u'_y$ и $u'_z$.

Производные по прямо противоположным направлениям отличаются только по знаку.

*Производная функции $u(x,\ y)$ по направлению линии уровня* (касательному к линии уровня) *и производная функции $u(x,\ y,\ z)$ по направлению любой линии, лежащей на поверхности уровня* (по любому направлению, касательному к поверхности уровня), *равны нулю.*

*Градиентом функции (поля) $u(M)$ называется вектор*

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}. \qquad (б)$$

Направление вектора $\operatorname{grad} u$ в каждой точке $M$ совпадает с направлением нормали к поверхности (линии) уровня, проходящей через эту точку.

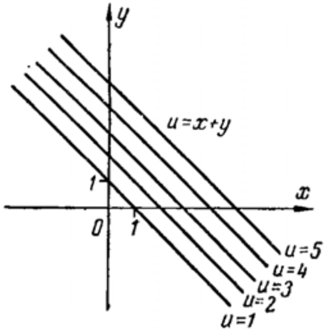
Из всех производных функции $u(M)$, взятых по различным направлениям, наибольшее значение всегда имеет производная по направлению градиента функции

$$\frac{\partial u}{\partial l}_{gr}=|\operatorname{grad} u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

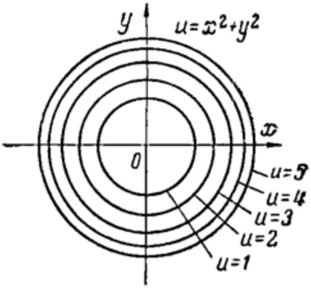
Градиент есть вектор скорости наибыстрейшего возрастания функции.

**933.** Построить линии уровня плоских скалярных полей: 1) $u=x+y$, 2) $u=x^2+y^2$, 3) $u=\frac{2y}{x^2}$, соответствующие значениям $u=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$.

Решение. 1) Полагая $u = 1, 2, 3, 4, 5$, получим уравнения соответствующих линий уровня: $x+y=1$; $x+y=2$; $x+y=3$; $x+y=4$; $x+y=5$. Построив эти линии в прямоугольной системе координат $xOy$, получим прямые, параллельные биссектрисе 2-го и 4-го координатных углов (черт. 197).

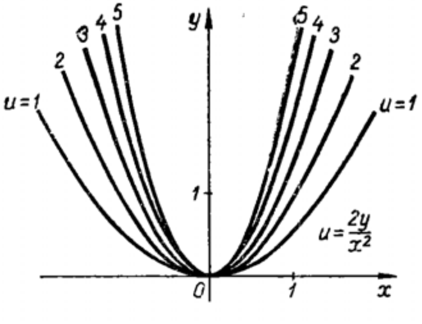



Черт. 197




Черт. 198

2) Написав уравнения линий уровня: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2$, $x^2+y^2=3$, $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=5$ и построив их в плоскости $xOy$, получим концентрические окружности с центром в начале координат (черт. 198).




Черт. 199

3) Линии уровня $2y = x^2$, $y = x^2$, $2y = 3x^2$, $y = 2x^2$, $2y = 5x^2$ представляют параболы, симметричные оси $Oy$ с общей вершиной в начале координат (черт. 199).

**934.** Найти производную функции $u = \sqrt{x^2+y^2}$ в точке $A(3; 4)$:

1) по направлению биссектрисы первого координатного угла;

2) по направлению радиуса-вектора точки $A$;

3) по направлению вектора $\overline{q}\{4; -3\}$.

Решение. Находим частные производные функции $u$ и вычисляем их значения в точке $A$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = \frac{3}{5};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = \frac{4}{5}.$$

Подставляя в формулу ($a$), найдем производную функции $u$ в точке $A$ по любому направлению $\overline{l}\,\{\cos\alpha,\ \cos\beta\}$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A=\frac{3}{5}\cos\alpha+\frac{4}{5}\cos\beta.$$

Находим далее косинусы углов $\alpha$ и $\beta$, образованных заданным направлением дифференцирования с осями координат, и производную функции $u$ по заданному направлению:

1) Для биссектрисы первого координатного угла: $\alpha=\beta=45°$, $\cos\alpha=\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l_1}\right|_A=\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

2) Для вектора $\overline{OA}\,\{3;\ 4\}$: $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$;

$\left.\frac{\partial u}{\partial l_2}\right|_A=\frac{3^2}{5^2}+\frac{4^2}{5^2}=1.$

3) Для вектора $\overline{q}\,\{4;\ -3\}$: $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=-\frac{3}{5}$; $\left.\frac{\partial u}{\partial q}\right|_A=0.$

**935.** Найти производную функции $u=xy+yz+1$ по направлению вектора $\overline{l}\,\{12;\ -3;\ -4\}$ в любой точке и в точках $A\,(0;\ -2;\ -1)$ и $B\,(3;\ 3;\ 5)$.

Решение. Найдем частные производные функции $u$ и направляющие косинусы вектора $\overline{l}$:

$$u'_x=y;\ \ u'_y=x+z;\ \ u'_z=y;$$
$$\cos\alpha=\frac{12}{13};\ \cos\beta=-\frac{3}{13};\ \cos\gamma=-\frac{4}{13}.$$

Подставляя в формулу ($a$), найдем производную функции $u$ по направлению $\overline{l}$ в любой точке:

$$u'_l=\frac{12}{13}y-\frac{3}{13}(x+z)-\frac{4}{13}y=\frac{8y-3\,(x+z)}{13}.$$

Подставляя координаты точек $A$ и $B$, получим $u'_l(A)=-1$; $u'_l(B)=0$.

**936.** С какой наибольшей скоростью может возрастать функция $u\,(M)=\frac{10}{x^2+y^2+z^2+1}$ при переходе точки $M\,(x,\ y,\ z)$ через точку $M_0\,(-1;\ 2;\ -2)$? В каком направлении должна двигаться точка $M$ при переходе через точку $M_1\,(2;\ 0;\ 1)$, чтобы функция $u\,(M)$ убывала с наибольшей скоростью?

Решение. *Наибольшая по абсолютной величине скорость изменения* (возрастания или убывания) *функции $u\,(M)$ при переходе точки $M$ через точку $P$ численно равна модулю градиента функции в точке $P$.* При этом функция будет возрастать или убывать с наибольшей скоростью, смотря по тому, будет ли точка $M$ при переходе через точку $P$ двигаться по направлению градиента функции в точке $P$ или по прямо противоположному направлению.

Руководствуясь этими положениями, находим частные производные функции $u$ и по формуле (*б*) — ее градиент в любой точке:

$$\operatorname{grad} u = -\frac{20}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}).$$

Далее находим: 1) $\operatorname{grad} u(M_0) = \frac{1}{5}(\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k})$; его модуль, численно равный искомой наибольшей скорости возрастания функции $u(M)$ при переходе $M$ через $M_0$, будет $|\operatorname{grad} u(M_0)| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$.

2) $\operatorname{grad} u(M_1) = -\frac{10}{9}\bar{i}-\frac{5}{9}\bar{k}$; искомый вектор, имеющий прямо противоположное направление, будет $-\operatorname{grad} u(M_1) = \frac{10}{9}\bar{i}+\frac{5}{9}\bar{k}$. Чтобы функция $u(M)$ убывала с наибольшей скоростью, при переходе через точку $M_1$ точка $M$ должна двигаться в направлении вектора $-\operatorname{grad} u(M_1)$.

**937.** Найти точки, в которых функция $z=e^x(x-y^3+3y)$ стационарна (т. е. точки, в которых производная по любому направлению равна нулю).

Решение. *Чтобы в некоторой точке $P$ производная функции по любому направлению была равна нулю, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке все частные производные первого порядка функции одновременно обращались в нуль.* [Согласно формуле (*а*).]

Поэтому, найдя частные производные: $z'_x = e^x(x-y^3+3y+1)$, $z'_y = 3e^x(1-y^2)$ и решая систему уравнений $z'_x=0$, $z'_y=0$, получим две точки: $(-3;\ 1)$ и $(1;\ -1)$, в которых функция стационарна.

**938.** Построить линии уровня скалярных полей:

$$1)\ z=x^2+2y,\quad 2)\ z=\frac{4x}{x^2+y^2},$$

соответствующие значениям $z=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$. Найти и построить градиент каждого поля в точках $A(1;\ -1)$ и $B(-2;\ -2)$.

**939.** Найти производную функции $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ по направлению вектора $\bar{l}=3\bar{i}+4\bar{j}$ в любой точке и в точках $A(1;\ 3)$ и $B(2;\ 1)$. Построить линии уровня соответствующего скалярного поля, проходящие через точки $A$ и $B$, и его градиент в этих точках.

**940.** Найти производную функции $u=xyz$ в точке $Q(1;\ -2;\ 2)$ по любому направлению и по направлению радиуса-вектора точки $Q$.

**941.** По какому направлению должна двигаться точка $M(x, y, z)$ при переходе через точку $M_0(-1;\ 1;\ -1)$, чтобы функция $F(M)=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ возрастала с наибольшей скоростью?

**942.** С какой наибольшей скоростью может убывать функция $u(M)=\ln(x^2-y^2+z^2)$ при переходе точки $M(x,\ y,\ z)$ через точку $M_0(1;\ 1;\ 1)$?

**943.** Показать, что в точке $A(4;\ -12)$ производная функции $z=x^3+3x^2+6xy+y^2$ по любому направлению равна нулю (функция стационарна).

**944.** Найти точки, в которых функция $\varphi(x, y)=x^3+y^3+3xy$ стационарна.

## § 2. Векторное поле. Поток и дивергенция поля

*Векторным полем называется плоская или пространственная область, с каждой точкой M которой связано определенное значение некоторой векторной физической величины* $\bar{a}=\bar{a}(M)$.

Если векторное поле отнесено к прямоугольной системе координат $Oxyz$, то вектор $\bar{a}$ будет векторной функцией, а его проекции $a_x$, $a_y$, $a_z$ на оси координат будут скалярными функциями от переменных $x$, $y$ и $z$:

$$\bar{a}(M)=\bar{a}(x,\ y,\ z)=a_x(x,\ y,\ z)\,\bar{i}+a_y(x,\ y,\ z)\,\bar{j}+a_z(x,\ y,\ z)\,\bar{k}.$$

Поэтому задание поля векторной величины $\bar{a}$ равносильно заданию трех скалярных (числовых) функций $a_x$, $a_y$, $a_z$.

Векторной линией векторного поля называется кривая, направление которой в каждой точке $M$ совпадает с направлением вектора, соответствующего этой точке поля.

Потоком векторного поля, образованного вектором $\bar{a}\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$ через поверхность $\sigma$ называется поверхностный интеграл (скаляр)

$$K=\iint\limits_{\sigma} a_x\,dy\,dz+a_y\,dx\,dz+a_z\,dx\,dy. \qquad (1)$$

Если вектор $\bar{a}$ определяет поле скоростей текущей жидкости, то интеграл $K$ выражает количество жидкости, протекающей через поверхность $\sigma$ за единицу времени. При этом если $\sigma$ — замкнутая поверхность, ограничивающая область $G$, и если интеграл (1) берется по внешней стороне $\sigma$, то величина $K$ называется потоком вектора $\bar{a}$ изнутри поверхности $\sigma$; она дает разность между количествами жидкости, вытекшей из области $G$ и втекшей в эту область за единицу времени (предполагается, что жидкость может свободно протекать через поверхность $\sigma$).

При $K>0$ из области $G$ вытекает жидкости больше, чем в нее втекает, что указывает на наличие в этой области источников, питающих поток жидкости. При $K<0$ из области $G$ вытекает жидкости меньше, чем втекает, что означает наличие в этой области стоков, где жидкость удаляется из потока. При $K=0$ из области $G$ вытекает жидкости столько же, сколько в нее и втекает.

Дивергенцией векторного поля, определяемого вектором $\bar{a}$, называется скаляр

$$\operatorname{div}\bar{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{2}$$

Если $\operatorname{div}\bar{a}(M_0)>0$, то точка $M_0$ называется источником, а если $\operatorname{div}\bar{a}(M_0)<0$, то точка $M_0$ называется стоком, ибо в первом случае в любой бесконечно малой области, окружающей точку $M_0$, жидкость возникает, а во втором случае она исчезает.

Абсолютная величина $\operatorname{div}\bar{a}(M_0)$ характеризует мощность источника или стока.

Векторное поле, во всех точках которого дивергенция равна нулю, называется соленоидальным. Поток такого поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Согласно формуле Остроградского — Гаусса (гл. VII, § 11) поток и дивергенция векторного поля связаны между собой равенством

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{+\sigma} a_x\,dy\,dz+a_y\,dx\,dz+a_z\,dx\,dy=\\ =\iiint\limits_{G}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,\end{aligned} \tag{3}$$

которое имеет следующий смысл: *поток векторного поля через замкнутую поверхность* ($\sigma$) *равен тройному интегралу по области* ($G$), *ограниченной этой поверхностью, от дивергенции поля.*

**945.** Найти поток векторного поля $\bar{p}=x\bar{i}-y^2\bar{j}+(x^2+z^2-1)\bar{k}$ через поверхность $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (эллипсоид) изнутри этой поверхности.

Решение. Согласно формуле (1)

$$K=\oiint\limits_{+\sigma} x\,dy\,dz-y^2\,dx\,dz+(x^2+z^2-1)\,dx\,dy.$$

Расчленяем этот поверхностный интеграл (II типа) на три слагаемых интеграла и, пользуясь данным уравнением эллипсоида ($\sigma$), сводим их вычисление к вычислению двойных интегралов.

1) $K_1=\oiint\limits_{+\sigma} x\,dy\,dz=\iint\limits_{\sigma_1} x\,dy\,dz+\iint\limits_{\sigma_2} x\,dy\,dz,$

где $\sigma_1$ и $\sigma_2$ — части данного эллипсоида, расположенные по разные стороны от плоскости $yOz$ (см. черт. 98), которые имеют различные явные уравнения:

$$x_{\sigma_1} = -a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad x_{\sigma_2} = a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}.$$

Преобразуя эти поверхностные интегралы в двойные (по формуле, указанной в § 11 предыдущей главы), получим:

$$\iint\limits_{\sigma_1} x\,dy\,dz = -\iint\limits_{(\sigma_1)_{yz}} -a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dy\,dz,$$

так как поверхность $\sigma_1$ обращена в сторону отрицательного направления оси $Ox$;

$$\iint\limits_{\sigma_2} x\,dy\,dz = \iint\limits_{(\sigma_2)_{yz}} a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dy\,dz,$$

так как поверхность $\sigma_2$ обращена в сторону положительного направления оси $Ox$.

Проекции $(\sigma_1)_{yz}$ и $(\sigma_2)_{yz}$ поверхностей $\sigma_1$ и $\sigma_2$ на плоскость $yOz$ представляют один и тот же эллипс $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$. Поэтому

$$K_1 = 2a\iint\limits_{(\sigma_1)_{yz}} \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dy\,dz =$$

$$= 2a\int\limits_{-b}^{b} dy \int\limits_{-z_1}^{z_1} \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dz,$$

где $z_1$ — положительное значение $z$ из уравнения эллипса $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Вычисляя двукратный интеграл, найдем $K_1 = \frac{4}{3}\pi abc$. $\Big($Внутренний интеграл легко найти по формуле (Б), гл. IV, § 5, полагая $a = \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$, $t=\frac{z}{c}$.$\Big)$

$$2)\ K_2 = \oiint\limits_{+\sigma} y^2\,dx\,dz = \iint\limits_{\sigma_3} y^2\,dx\,dz + \iint\limits_{\sigma_4} y^2\,dx\,dz,$$

где $\sigma_3$ и $\sigma_4$ — части поверхности $\sigma$, расположенные по разные стороны от плоскости $xOz$, уравнения которых

$$y_{\sigma_3} = -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad y_{\sigma_4} = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}.$$

Преобразуя поверхностные интегралы в двойные, получим

$$K_2 = -\iint\limits_{(\sigma_3)_{xz}} b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dz +$$

$$+\iint\limits_{(\sigma_4)_{xz}} b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dz = 0,$$

так как проекции $(\sigma_3)_{xz}$ и $(\sigma_4)_{xz}$ поверхностей $\sigma_3$ и $\sigma_4$ на плоскость $xOz$ одинаковы.

3) По аналогичной причине вследствие четности подынтегральной функции поверхностного интеграла $K_3$ и симметричности поверхности $\sigma$ относительно плоскости $xOy$

$$K_3 = \oiint\limits_{+\sigma} (x^2+z^2-1)\,dx\,dy = 0.$$

Следовательно, $K = K_1 - K_2 + K_3 = \frac{4}{3}\pi abc$.

По формуле Остроградского—Гаусса эта задача решается проще: находим дивергенцию поля

$$\operatorname{div}\bar{p} = (x)'_x + (-y^2)'_y + (x^2+z^2-1)'_z = 1-2y+2z$$

и подставляем в формулу (3):

$$K = \iiint\limits_G \operatorname{div}\bar{p}\,dv = \iiint\limits_G (1-2y+2z)\,dx\,dy\,dz,$$

где область $G$ — эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

Полученный тройной интеграл расчленяем:

$$K = \iiint\limits_G dx\,dy\,dz - 2\iint\limits_{G_{xz}} dx\,dz \int\limits_{-y_1}^{y_1} y\,dy + 2\iint\limits_{G_{xy}} dx\,dy \int\limits_{-z_1}^{z_1} z\,dz,$$

где

$$y_1 = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}, \quad z_1 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Первый интеграл равен объему области $G$, т. е. объему эллипсоида $K_1 = \frac{4}{3}\pi abc$ (гл. V, § 4).

Второй и третий интегралы равны нулю, ибо равны нулю их указанные внутренние простые интегралы, как интегралы от нечетной функции (гл. V, § 2).

Следовательно, как и в первом решении, $K = \frac{4}{3}\pi abc$.

**946.** Найти дивергенцию векторного поля:

1) $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$; 2) $\bar{p} = \frac{\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}}{\sqrt[3]{(x+y+z)^2}}$;

3) $\bar{q} = e^{xy}(y\bar{j} - x\bar{i} + xy\bar{k})$.

Решение. Применяем формулу (2):

1) $\operatorname{div} \bar{r}(M) = \frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$

2) $p_x = p_y = p_z = (x+y+z)^{-\frac{2}{3}}$;

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} = \frac{\partial p_y}{\partial y} = \frac{\partial p_z}{\partial z} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(x+y+z)^5}};$$

$$\operatorname{div} \bar{p}(M) = -2(x+y+z)^{-\frac{5}{3}} = f(M).$$

3) $q_x = -xe^{xy}$; $q_y = ye^{xy}$; $q_z = xye^{xy}$;

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = -e^{xy}(1+xy) = -\frac{\partial q_y}{\partial y}; \quad \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0; \ \operatorname{div} \bar{q}(M) = 0.$$

Полученные результаты имеют следующий смысл:

1. Каждая точка поля радиус-вектора $\bar{r}$ является источником постоянной мощности.

2. Точка $M$ поля вектора $\bar{p}$ в зависимости от ее координат может быть или источником, или стоком. Например, точка $M_1(0;\ 0;\ 1)$, в которой $\operatorname{div} \bar{p} = -2$, является стоком; точка $M_2(-1;\ 0;\ 0)$, в которой $\operatorname{div} \bar{p} = 2$, является источником.

3. В поле вектора $\bar{q}$ нет ни источников, ни стоков. Поток этого соленоидального поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

**947.** Найти поток радиус-вектора $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$: 1) через боковую поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $-H \leqslant z \leqslant H$ в сторону ее внешней нормали; 2) через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \leqslant 4z^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ в сторону ее внутренней нормали; 3) через полную поверхность куба $-a \leqslant x \leqslant a$, $-a \leqslant y \leqslant a$, $-a \leqslant z \leqslant a$ изнутри этой поверхности.

**948.** Найти поток векторного поля: 1) $\bar{p} = xy\bar{i} + yz\bar{j} + xz\bar{k}$ через расположенную в первом октанте часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, в сторону ее внешней нормали; 2) $\bar{q} = x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k}$ через полную поверхность конуса $x^2 + y^2 \leqslant z^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$ изнутри этой поверхности.

**949.** Найти дивергенцию векторного поля:

1) $\bar{a} = xy^2\bar{i} + x^2y\bar{j} + z^3\bar{k}$ в точке $A(1;\ -1;\ 3)$;

2) градиента функции $u = xy^2z^3$.

**950.** Проверить, что векторное поле $\overline{p}=yz(4x\overline{i}-y\overline{j}-z\overline{k})$ является соленоидальным.

**951.** Решить задачи 947 (3) и 948 (2), пользуясь формулой Остроградского — Гаусса.

## § 3. Циркуляция и вихрь векторного поля

Линейным интегралом вектора $\overline{a}$ вдоль линии $l$ называется криволинейный интеграл

$$C=\int_l a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz. \qquad (1)$$

В силовом поле он выражает работу сил поля при перемещении точки вдоль линии $l$ (см. гл. VII, § 9).

В случае замкнутой кривой этот интеграл называется циркуляцией поля вектора $\overline{a}$ по контуру $l$. Циркуляция характеризует вращательную способность поля на контуре $l$.

Вихрем (или ротором) векторного поля, определяемого вектором $\overline{a}$, называется вектор

$$\operatorname{rot}\overline{a}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overline{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overline{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overline{k}. \qquad (2)$$

Если через точку $M$ поля $\overline{a}$ провести плоскость $P$, определяемую единичным нормальным вектором $\overline{n}$, то скалярное произведение $\operatorname{rot}\overline{a}(M)\cdot\overline{n}$ характеризует вращательную способность этого поля в точке $M$. Она зависит как от координат точки $M$, так и от направления плоскости $P$ и достигает наибольшей величины, равной $|\operatorname{rot}\overline{a}(M)|$, когда плоскость $P$ перпендикулярна вектору $\operatorname{rot}\overline{a}(M)$.

Векторное поле, во всех точках которого вихревой вектор равен нулю, называется потенциальным (или безвихревым). В потенциальном поле линейный интеграл (работа) не зависит от формы линии, соединяющей какие-либо две его точки, а циркуляция всегда равна нулю.

*Векторное поле, являющееся одновременно и соленоидальным и потенциальным, называется гармоническим.*

Согласно формуле Стокса (гл. VII, § 11) циркуляция и вихревой вектор поля связаны между собой равенством

$$\oint_l a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz=$$

$$=\iint_\sigma(\operatorname{rot}\overline{a})_x\,dy\,dz+(\operatorname{rot}\overline{a})_y\,dx\,dz+(\operatorname{rot}\overline{a})_z\,dx\,dy, \qquad (3)$$

смысл которого заключается в следующем: *циркуляция вектора по замкнутому контуру* ($l$) *равна потоку вихря вектора через поверхность* ($\sigma$), *ограниченную этим контуром.*

**952.** Вычислить циркуляцию поля вектора:

1) $\bar{r}=x\bar{j}$ вдоль окружности $x=a\cos t$, $y=a\sin t$;

2) $\bar{p}=(x-2)\bar{i}+(x+y)\bar{j}-2z\bar{k}$ вдоль периметра треугольника с вершинами $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 1)$;

3) $\bar{q}\,\{xz,\ -yz^2,\ xy\}$ вдоль замкнутой линии $(L)$ $z=x^2-y^2+2a^2$, $x^2+y^2=a^2$ (см. черт. 142, стр. 258) и вихревой вектор этого поля в точке $A(0,\ -a,\ a^2)$.

Решение. Применяя формулу (1), получим:

$$1)\ C=\oint_L x\,dy=a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}=\pi a^2.^*$$

$$2)\ C=\oint_{ABCA}(x-2)\,dx+(x+y)\,dy-2z\,dz.$$

Периметр $ABCA$ треугольника состоит из трех отрезков, которые лежат на прямых, имеющих различные уравнения. Поэтому криволинейный интеграл по контуру $ABCA$ вычисляем как сумму интегралов по отрезкам $AB$, $BC$ и $CA$.

Составив уравнения прямой $AB$: $x+y=1$, $z=0$ и исходя из этих уравнений, преобразуем криволинейный интеграл по отрезку $AB$ в обыкновенный интеграл с переменной $x$:

$$\int_{AB}=\int_1^0(x-3)\,dx=\frac{(x-3)^2}{2}\Big|_1^0=\frac{5}{2}.$$

Для отрезка $BC$: $y+z=1$, $x=0$; $\displaystyle\int_{BC}=\int_1^0(2-y)\,dy=-\frac{3}{2}$.

Для отрезка $CA$: $x+z=1$, $y=0$; $\displaystyle\int_{CA}=-\int_0^1 x\,dx=-\frac{1}{2}$.

Следовательно, $\displaystyle C=\oint_{ABCA}=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}=\frac{1}{2}$.

$$3)\ C=\oint_L xz\,dx-yz^2\,dy+xy\,dz.$$

Для вычисления этого интеграла преобразуем данные уравнения кривой $L$ в параметрические: полагая $x=a\cos t$, получим $y=a\sin t$, $z=a^2(2+\cos 2t)$.

---

* Если выбрать другое направление обхода данного контура, то результат будет иметь противоположный знак.

Пользуясь этими уравнениями, преобразуем криволинейный интеграл $C$ в обыкновенный интеграл с переменной $t$, затем вычисляем его:

$$C=-\frac{a^4}{2}\int_0^{2\pi}(2+\cos 2t)\sin 2t\,dt-\frac{a^6}{2}\int_0^{2\pi}(2+\cos 2t)^2\sin 2t\,dt-$$

$$-a^4\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt=\frac{a^4(2+\cos 2t)^2}{8}+\frac{a^6(2+\cos 2t)^3}{12}-$$

$$-\frac{a^4}{2}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}=-\pi a^4.$$

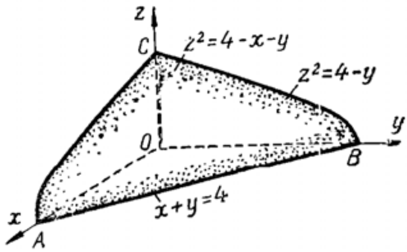
Вихревой вектор данного поля в любой его точке $M(x, y, z)$ находим по формуле (2):

$$\operatorname{rot}\bar{q}(M)=(x+2yz)\bar{i}+(x-y)\bar{j}.$$

В данной точке $A(0, -a, a^2)$, $\operatorname{rot}\bar{q}=a\bar{j}-2a^3\bar{i}$.

**953.** Пользуясь формулой Стокса, вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a}=x\bar{i}+xz\bar{j}+z\bar{k}$ по контуру $ACBA$ (черт. 200), образованному пересечением поверхности $z^2=4-x-y$ с плоскостями координат.

Решение. По формуле (2) найдем вихревой вектор данного поля: $\operatorname{rot}\bar{a}=z\bar{k}-x\bar{i}$. Подставляя его проекции в формулу (3), получим:



Черт. 200

$$C=\iint_\sigma z\,dx\,dy-x\,dy\,dz=$$

$$=\iint_\sigma z\,dx\,dy-\iint_\sigma x\,dy\,dz.$$

В качестве поверхности $\sigma$, ограниченной данным контуром, возьмем расположенную в первом октанте часть данной поверхности. Пользуясь ее уравнением, преобразуем поверхностные интегралы в двойные, учитывая при этом, что согласно формуле Стокса $\sigma$ есть внутренняя сторона (обращенная к началу координат) указанной поверхности, на которой заданный обход контура $ACBA$ направлен против часовой стрелки:

$$C_1=\iint_\sigma z\,dx\,dy=-\iint_{\sigma_{xy}}\sqrt{4-x-y}\,dx\,dy=$$

$$=\int_4^0 dx\int_0^{4-x}(4-x-y)^{\frac{1}{2}}dy=\frac{2}{3}\int_0^4(4-x-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_{y=0}^{y=4-x}dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int_4^0(4-x)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{4}{15}(4-x)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4=-\frac{128}{15}$$

($\sigma_{xy}$ есть треугольник $OAB$);

$$C_2=\iint\limits_{\sigma} x\,dy\,dz=-\iint\limits_{\sigma_{yz}} (4-y-z^2)\,dy\,dz=$$

$$=\int\limits_4^0 dy\int\limits_0^{\sqrt{4-y}} (4-y-z^2)\,dz=\int\limits_4^0 \left[(4-y)\,z-\frac{z^3}{3}\right]\Bigg|_{z=0}^{z=\sqrt{4-y}} dy=$$

$$=\frac{2}{3}\int\limits_4^0 (4-y)^{\frac{3}{2}}\,dy=\frac{4}{15}\,(4-y)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4=-\frac{128}{15}$$

($\sigma_{yz}$ есть криволинейный треугольник $OBC$).

Следовательно, искомая циркуляция $C=C_1-C_2=0$.

В потенциальном поле циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю. Но поле вектора $\bar{a}$ не потенциальное; его циркуляция по данному контуру равна нулю, а, например, по контуру окружности $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=1$ она равна не нулю, а $\pm\pi$.

**954.** Вычислить циркуляцию векторного поля:

1) $\bar{p}=x^2y^3\bar{i}+\bar{j}+z\bar{k}$ вдоль окружности $x^2+y^2=a^2$, $z=0$.

2) $\bar{q}=(x-2z)\,\bar{i}+(x+3y+z)\,\bar{j}+(5x+y)\,\bar{k}$ вдоль периметра треугольника $ACB$, данного в условии задачи 952 (2).

**955.** Найти вихревой вектор в любой точке векторного поля:
1) $\bar{p}=x\bar{i}-z^2\bar{j}+y^2\bar{k}$; 2) $\bar{q}=yz\bar{i}+xz\bar{j}+xy\bar{k}$.

**956.** Проверить, что векторное поле градиента функции $u=\sqrt{x}\,\sqrt[3]{y}\,\sqrt[4]{z}$ является потенциальным.

**957.** Проверить, что векторное поле вектора $\bar{a}=\dfrac{x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$ является гармоническим.

**958.** Решить задачи 954 (1, 2), пользуясь формулой Стокса.

$\frac{ab^3}{12}$. **843.** $\frac{5}{4}\pi R^4$; $\frac{3}{2}\pi R^4$. **844.** $\frac{a(3a^2+b^2)}{5(a^2+b^2)}$; $\frac{b(a^2+3b^2)}{5(a^2+b^2)}$, если катеты $a$ и $b$ лежат на осях координат $Ox$ и $Oy$. **845.** $\left(\frac{8a}{15}, \frac{8b}{15}\right)$. **846.** $\left(0;\ 0,\ \frac{3a}{8}\right)$. **847.** $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$. **848.** $\left(\frac{3(a+b)(2R^2-a^2-b^2)}{4(3R^2-a^2-b^2-ab)};\ 0;\ 0\right)$. **852.** $\frac{abc}{3}\times(a^2+b^2+c^2)$; $\frac{a^3h}{6}$; $\frac{1}{12}$; 30. **853.** 11. **854.** $\frac{4\pi}{3}$. **855.** $\frac{4}{9}$. **856.** 3. **861.** $\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3}-5)$. **862.** 16. **863.** $\frac{32}{3}\pi$($G_{xy}$—круг $x^2+y^2\leqslant 4$). **864.** $\frac{2R^3(3\pi-4)}{9}$ (черт. 195). **865.** $\frac{\pi abc}{24}(5\sqrt{2}-4)$. **866.** $\frac{3}{2}a^4$. **867.** $\frac{k\pi hr^4}{2}$; $\frac{m(r^2+h^2)}{3}$. **868.** $\frac{k\pi R^4}{12}$ ($G_{xy}$—круг $x^2+y^2\leqslant\frac{3}{4}R^2$). **869.** $(0,\ 0,\ c)$; $\left(\frac{3}{8}a,\ \frac{3}{8}b,\ \frac{3}{8}c\right)$; $\left(0,\ 0,\ \frac{2}{5}R\right)$. **870.** $14k$. **871.** $\frac{2(2-\sqrt{2})}{5}\pi\delta R^5$. **876.** $\frac{1}{3}$; $\frac{31}{30}$; $-\frac{8}{15}$. **877.** 2. **878.** $\ln\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$. **879.** 1,5; 1. **880.** 0. **881.** $-0{,}5$. **882.** 2. **883.** 0. **890.** $\frac{13}{3}$. **891.** $\frac{1}{2}\ln(e^2+e^{-2})\approx 1{,}01$. **892.** $6\pi$; $\frac{3}{8}\pi a^2$. **893.** $\frac{4}{3}$; $\frac{8}{15}$. **894.** $\frac{4}{9}k(63-5\sqrt{5})$; $k$. **895.** $(0,\ 0,\ m\pi)$. **896.** $\left(\frac{5a}{8}, \frac{15\pi a}{256}\right)$. **897.** $\pm 8a^2m$. **898.** $\frac{m}{2}(r_B^2-r_A^2)$. **900.** $x^3y+x-y+C$. **901.** $\sin x\cos y+\cos 2y+C$. **902.** $xy+\sin(xy)+C$. **903.** $ye^{xy}-3x+C$. **904.** $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+C$. **905.** $\ln|x+y|-\frac{y}{x+y}+C$. **910.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **911.** 0. **912.** $\frac{55+9\sqrt{3}}{65}$. **913.** $\frac{29\sqrt{2}}{8}\pi$. **914.** $\frac{\pi a^4}{2}$. **915.** 0. **916.** $-3$. **917.** $\frac{4}{3}\pi R^3$. **919.** 3; $\frac{32}{5}$. **924.** $3\pi R^2$. **925.** $4R^2$ (черт. 225). **926.** $8R^2$ (черт. 99). **927.** $42\pi$. **928.** $2\pi a^2(3-\sqrt{3})$. **929.** $2\pi k\operatorname{arctg}\frac{H}{R}$. **930.** $\frac{3}{4}$. **931.** $\left(0,\ 0,\ \frac{3R}{8}\right)$. **932.** $\left(0,\ 0,\ \frac{2b}{3}\right)$. **938.** $2\bar{i}+2\bar{j}$; $2\bar{j}-4\bar{i}$; $2\bar{j}$; $-\frac{1}{2}\bar{i}$. **939.** $\frac{4x-3y}{5(x^2+y^2)^2}$. **940.** $2(\cos\beta-2\cos\alpha-\cos\gamma)$; $-\frac{4}{3}$. **941.** $\bar{l}\{1;\ 0;\ -1\}$. **942.** $2\sqrt{3}$. **944.** $(0;0)$; $(-1;\ -1)$. **947.** $4\pi R^2H$; $-4\pi$; $24a^3$. **948.** $\frac{3}{16}\pi$; $\frac{9}{10}\pi H^5$. **949.** 29; $2xz(z^2+3y^2)$. **954.** $\pm\frac{\pi a^6}{8}$; 3. **955.** $2(y+z)\bar{i}$; 0. **963.** Да. **964.** Нет. **965.** Да. **966.** Да.

**967.** Сходится. **968.** Расходится. **969.** Сходится. **970.** Сходится. **971.** Сходится. **972.** Расходится. **973.** Сходится. **974.** Сходится. **975.** Расходится. **976.** Сходится. **977.** Сходится. **978.** Расходится. **979.** Сходится. **980.** Расходится. **981.** Расходится. **982.** Сходится. **983.** Расходится. **984.** Сходится. **985.** Сходится. **986.** Сходится. **989.** Сходится абсолютно. **990.** Сходится не абсолютно. **991.** Расходится. **992.** Сходится абсолютно. **993.** Сходится не абсолютно. **994.** Сходится не абсолютно (сравнить с гармоническим рядом). **995.** Сходится абсолютно. **996.** При $|a|>1$ сходится абсолютно; при $|a|=1$ сходится не абсолютно; при $|a|<1$ расходится. **997.** 0,96. **998.** 0,04.