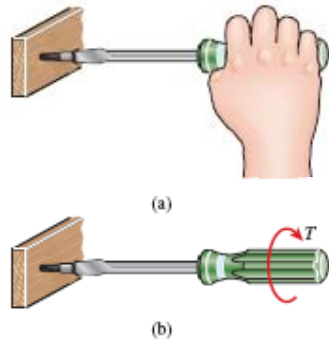
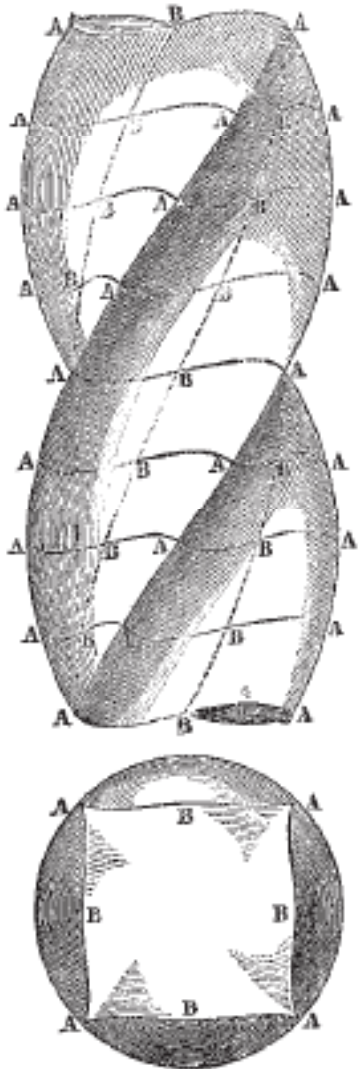


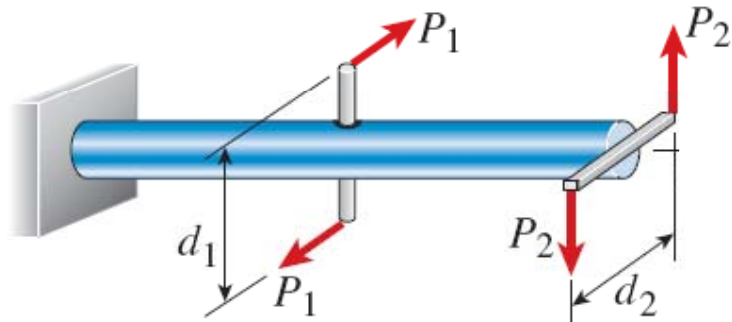
# Vvijanje



\*Grupa autora, *Elastostatika I*, Tehnički fakultet, Bihać, 2003  
 \*JM Gere, BJ Goodno, *Mechanics of Materials*, Cengage Learning, Seventh Edition, 2009.

# Uvijanje

## Osnovni pojmovi

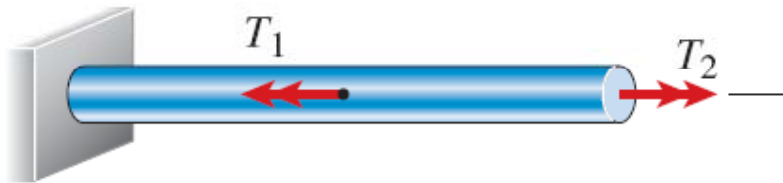


Moment sprega sila, [Nm]

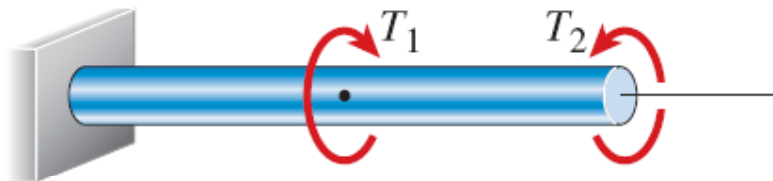
$$T_1 = P_1 d_1$$

$$T_2 = P_2 d_2$$

(4.1)



Moment sprega sila – vektorska reprezentacija  
(pravilo desne ruke)

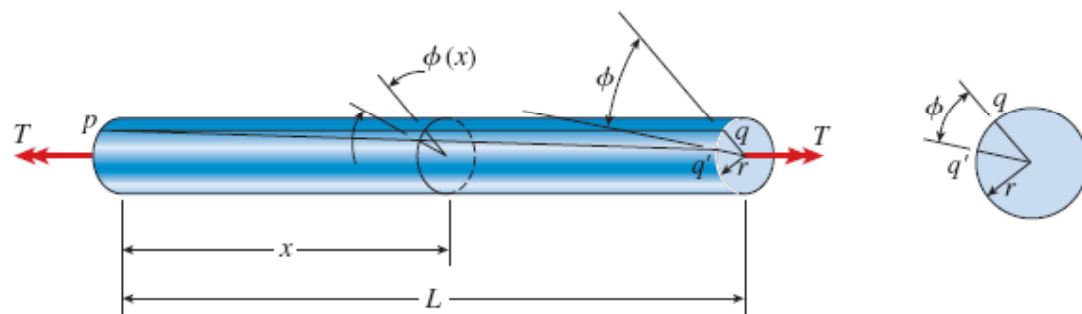


Moment sprega sila – reprezentacija uvijenom strelicom

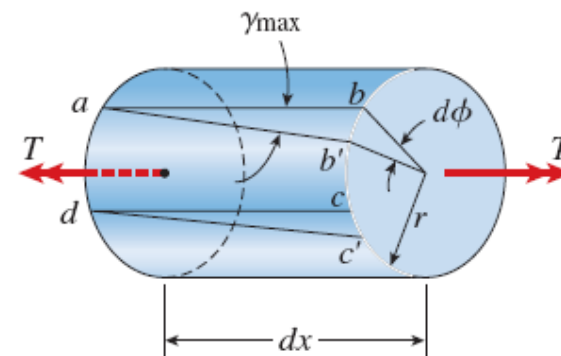
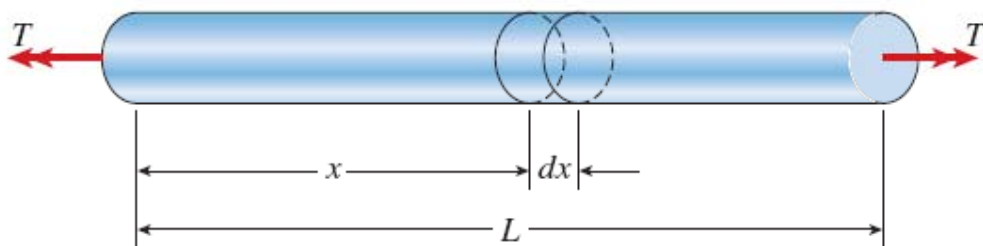
Momenti koji uvijaju neki element nazivaju se uvojni ili torzioni momenti.

# Uvijanje

## Deformacije štapova (i cijevi) kružnog presjeka



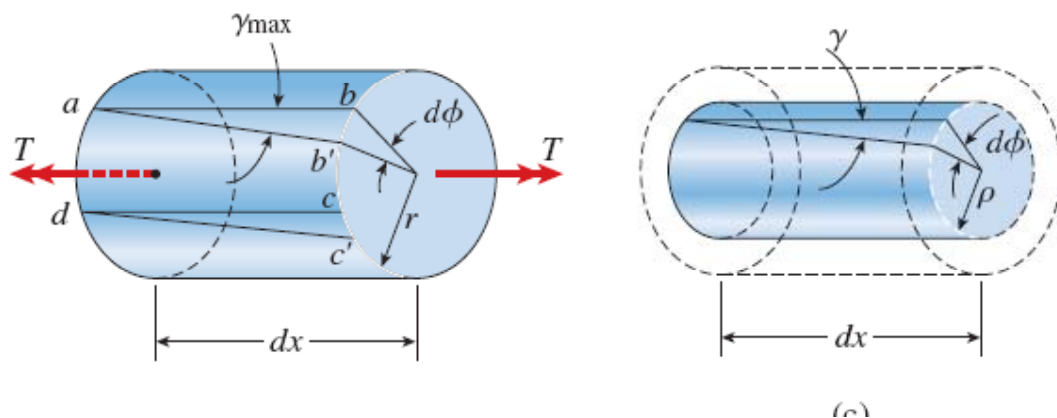
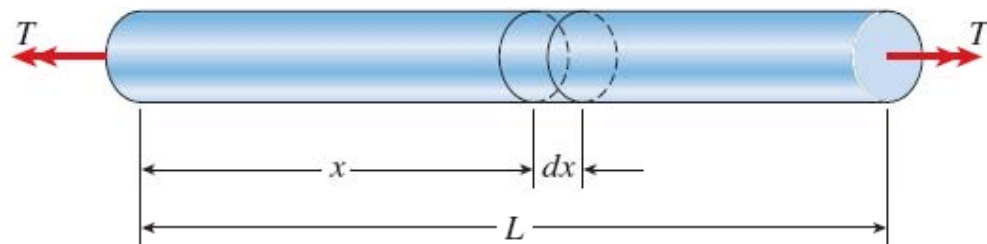
Čisto uvijanje – svi jednaki poprečni presjeci opterećeni istim momentom uvijanja  $\phi$  – ugao uvijanja (rotacije)



Element  $abcd$  postaje  $ab'c'd$ , kojem se ne mijenjaju stranice, ali se mijenja ugao između njih – čisto smicanje (element izložen samo tangencijalnim deformacijama)!

# Uvijanje

## Deformacije štapova (i cijevi) kružnog presjeka



Maksimalan ugao uvijanja

$$\gamma_{\max} = \frac{bb'}{ab} = \frac{rd\phi}{dx} \quad (4.2)$$

Odnos tangencijalne deformacije i ugla uvijanja na površini šipke

Promjena ugla uvijanja

$$\theta = \frac{d\phi}{dx}$$

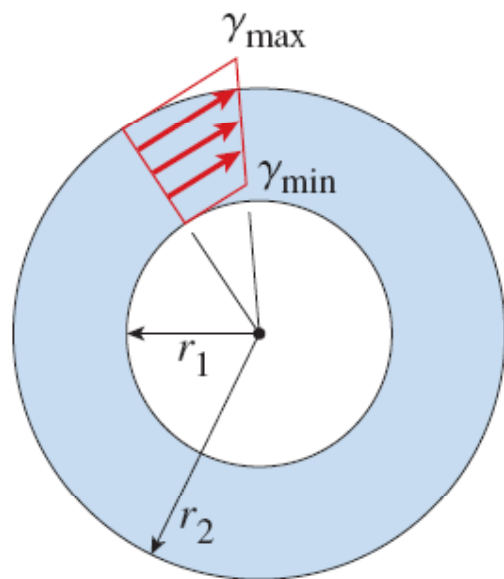
Za čisto uvijanje  $\gamma_{\max} = r\theta = \frac{r\phi}{L}$  (4.3)

Tangencijalna deformacija

$$\gamma = r\theta = \frac{\rho}{r}\gamma_{\max} \quad (4.4)$$

## Uvijanje

### Deformacije štapova (i cijevi) kružnog presjeka



$$\gamma_{\max} = \frac{r_2}{L} \phi$$

$$\gamma_{\min} = \frac{r_1}{r_2} \gamma_{\max} = \frac{r_1}{L} \phi$$

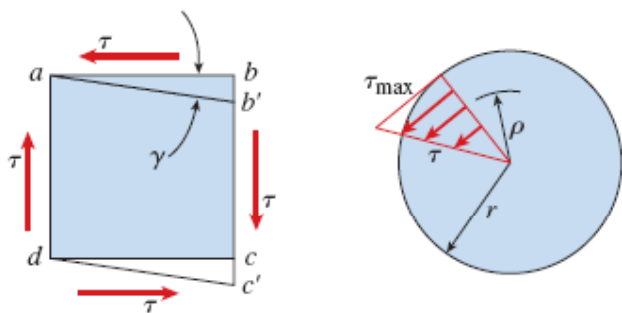
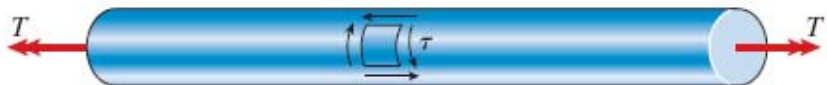
(4.5)

**Sve prethodne relacije važe za sve materijale, bez obzira da li su linearni ili nelinearni, elastični ili neelastični, ali za male uglove uvijanja i male deformacije!**

# Uvijanje

## Deformacije štapova (i cijevi) kružnog presjeka

### Veza deformacija i napona

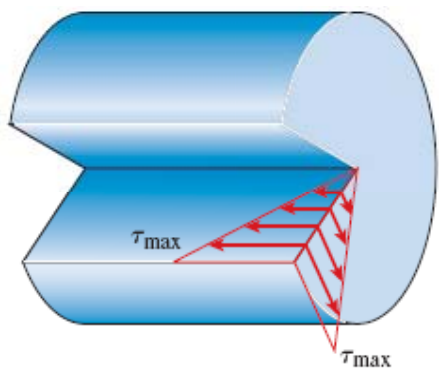


$$\tau = G\gamma$$

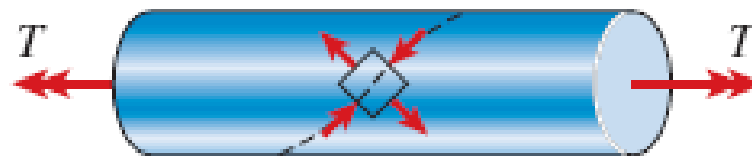
$$\tau_{max} = Gr\theta$$

$$\tau = \frac{\rho}{r} \tau_{max} \tag{4.6}$$

Linearna zavisnost napona i udaljenosti od ose uvijanja!!!



Uzdužni i transferzalni naponi



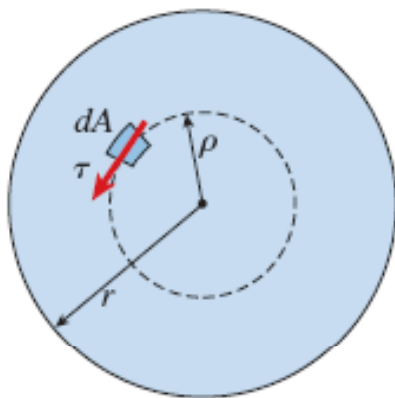
Uvijanje = čisto smicanje = dvoosno naponsko stanje bez tangencijalnih napona

## Uvijanje

### Deformacije štapova (i cijevi) kružnog presjeka

*Veza deformacija i napona*

*Formula uvijanja*



Formula uvijanja



$$\tau = \frac{\rho}{r} \tau_{\max}$$

$$dM = \tau \rho dA = \frac{\tau_{\max}}{r} \rho^2 dA$$

$$T = \int_A dM = \int_A \tau \rho dA = \int_A \frac{\tau_{\max}}{r} \rho^2 dA = \frac{\tau_{\max}}{r} \int_A \rho^2 dA \quad (4.6)$$

$$I_o = \int_A \rho^2 dA \quad [\text{m}^4] \quad \text{– polarni moment inercije poprečnog presjeka}$$

$$I_o = \frac{d^4 \pi}{32} \quad \text{– za kružni poprečni presjek}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{I_o} = \frac{T}{W_o} \quad (4.7)$$

$$W_o \quad \text{– polarni moment otpora presjeka}$$

$$W_o = \frac{d^3 \pi}{16} \quad \text{– za kružni poprečni presjek}$$

Opšta formula uvijanja



$$\tau = \frac{\rho}{r} \tau_{\max} = \frac{T \rho}{I_o} \quad (4.8)$$

## Uvijanje

### Deformacije štapova (i cijevi) kružnog presjeka

#### Veza deformacija i napona

$$\tau_{\max} = Gr\theta$$

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{I_o} = \frac{T}{W_o}$$

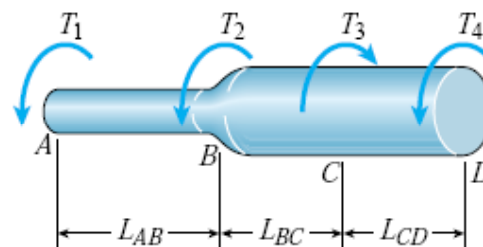
Ugao uvijanja – konstantni parametri

$$\theta = \frac{T}{GI_o}$$

$$\phi = \theta L = \frac{TL}{GI_o}$$

Promjena parametara po segmentima

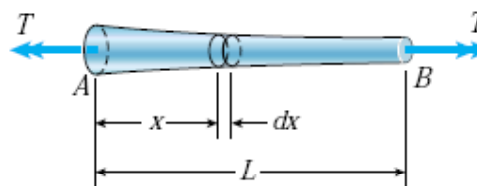
$$\phi = \sum_i \phi_i = \sum_i \frac{T_i L_i}{G_i I_{o_i}}$$



(4.8)

Proizvoljan uzdužni (kružni) poprečni presjek i/ili opterećenje

$$\phi = \int_L \frac{T(x)dx}{G(x)I_o(x)}$$



(4.10)

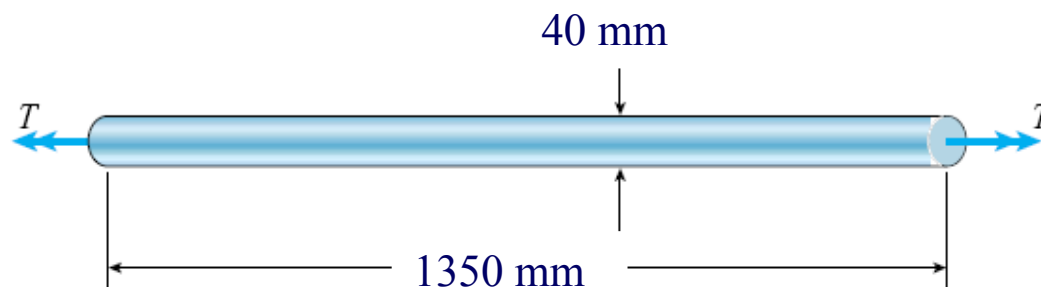


## Uvijanje

---

**Primjer 4.1:** Puni štap kružnog poprečnog presjeka, prečnika 40 mm, dužine 1350 mm i modula klizanja 80 GPa, opterećen je momentom uvijanja na svojim krajevima, kao što je dato na slici. Odrediti:

- Maksimalan tangencijalni napon u šipki, te ugao uvijanja ako je moment uvijanja 340 Nm
- Maksimalan mogući moment uvijanja, ako je dozvoljeni tangencijalni napon 40 MPa, a maksimalni dozvoljeni ugao uvijanja  $2.5^\circ$



---

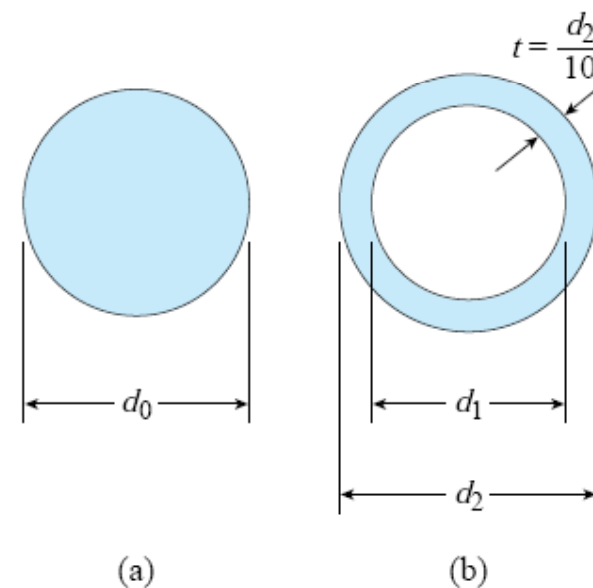
RC Hibbeler, *Mechanics of Materials*, Prentice Hall, Eight Edition, 2011.

## Uvijanje

---

**Primjer 4.2:** Vratilo cilindričnog poprečnog presjeka od čelika, izrađeno u dvije varijante, kao puno i šuplje (slika), treba prenese moment uvijanja od 1200 Nm bez prekoračenja dozvoljenog tangencijalnog napona od 40MPa i dozvoljenog uzdužnog uvijanja od 0.75°/m. Treba odraditi:

- Prečnik punog vratila
- Potrebni vanjski prečnik šupljeg vratila ako je debljina stjenke vratila jedna desetina vanjskog prečnika
- Odnos prečnika ( $d_2/d_1$ ) i težina oba vratila



---

RC Hibbeler, *Mechanics of Materials*, Prentice Hall, Eighth Edition, 2011.

## **Uvijanje**

---

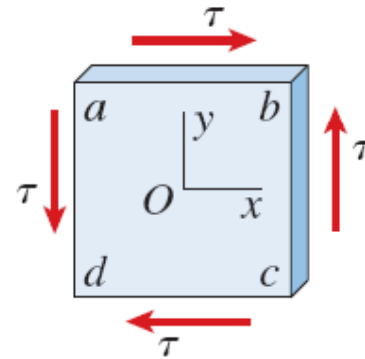
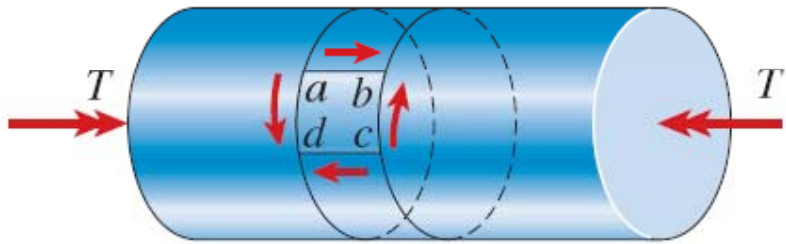
### **Deformacije štapova (i cijevi) kružnog presjeka**

#### ***Ograničenja u korištenju prethodnih jednačina***

- Samo za kružne poprečne presjeke (pune ili šuplje)
- Linearno elastični materijali
- Za dijelove vratila udaljene od koncentracija napona
- Ne mogu se koristiti za druge poprečne presjeke jer:
  - ❖ Poprečni presjek ne ostaje u ravni
  - ❖ Maksimalni naponi nisu uvijek u najudaljenijim tačkama presjeka
  - ❖ Naprednije metode analize napona neophodne za rješavanje

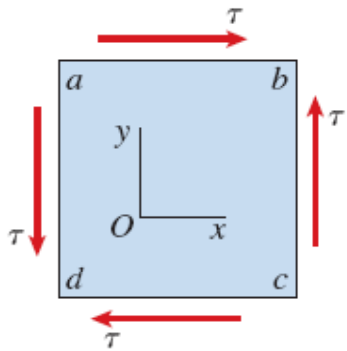
# Uvijanje

## Naponi i deformacije u čistom smicanju



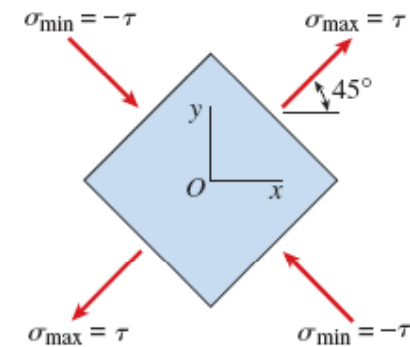
Element izložen čistom smicanju  
(nema normalnih napona)

### Naponi na kosoj ravni



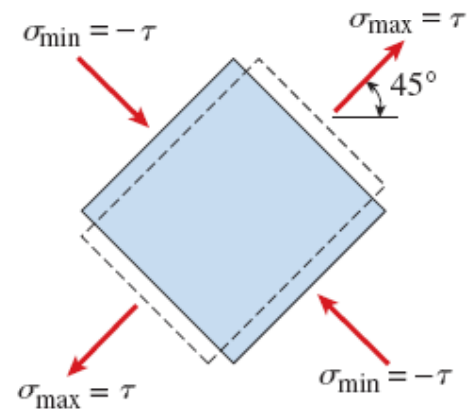
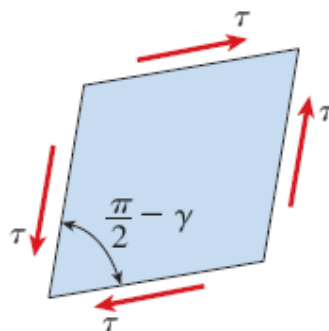
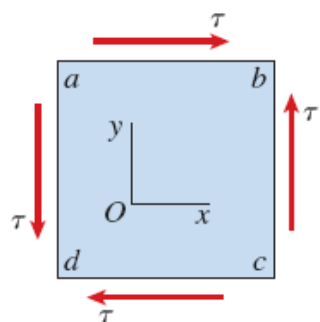
$$\sigma_{x_1} = \tau_{xy} \sin(2\theta)$$

$$\tau_{x_1y_1} = \tau_{xy} \cos(2\theta)$$



# Uvijanje

## Naponi i deformacije u čistom smicanju

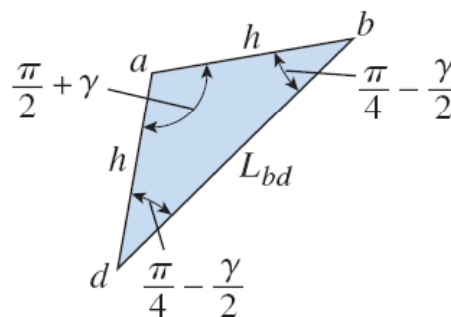
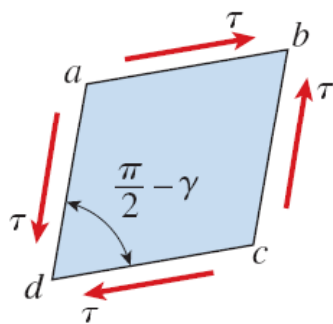
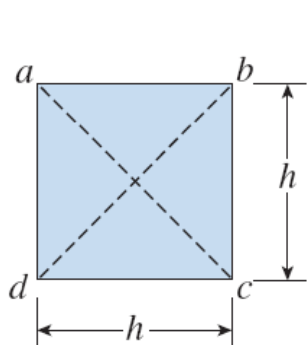


$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$\epsilon_{\max} = \frac{\tau}{E} + \frac{\nu\tau}{E} = \frac{\tau}{E}(1 + \nu)$$

# Uvijanje

## Veza modula elastičnosti i modula klizanja



$$L_{bd} = \sqrt{2}h(1 + \varepsilon_{\max})$$

$$L_{bd}^2 = h^2 + h^2 - 2h^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)$$

$$(1 + \varepsilon_{\max})^2 = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) \Rightarrow 1 + 2\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\max}^2 = 1 + \sin \gamma$$

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\gamma}{2}$$

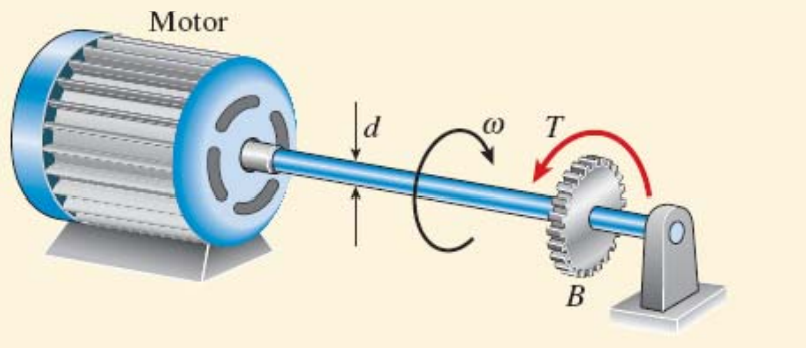
$$\varepsilon_{\max} = \frac{\tau}{E} + \frac{\nu\tau}{E} = \frac{\tau}{E}(1 + \nu)$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

# Vvijanje

## Prenos snage



*Rad momenta uvijanja*

$$dW = Td\phi$$

*Snaga momenta uvijanja*

$$P = \frac{dW}{dt} = T \frac{d\phi}{dt} = T\omega = T2\pi f = T \frac{2\pi n}{60} \quad [\text{W}] \quad (4.9)$$

$\omega$  – ugaona brzina [ $\text{rad/s}^{-1}$ ]

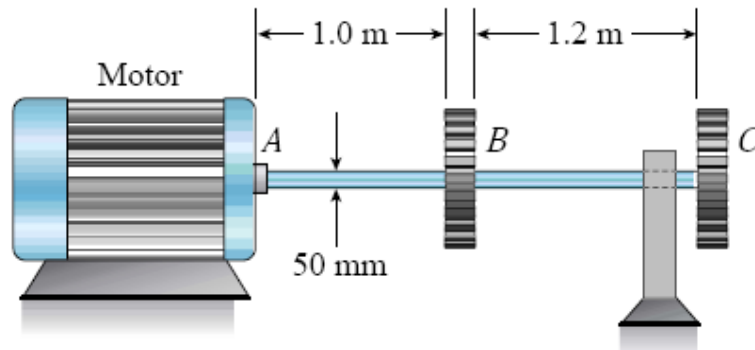
$f$  – frekvencija obrtanja [Hz]

$n$  – broj obrata u minuti [o/min]

## Uvijanje

---

**Primjer 4.3:** Puno vratilo  $ABC$  prečnika 50 mm se pokreće motorom snage 50 kW i frekvencije 10 Hz u tački  $A$ . Zupčanici  $B$  i  $C$  pokreću uređaje koji potražuju snagu od 35 i 15 kW, respektivno. Odrediti najveći tangencijalni napon  $\tau_{\max}$  u vratilu i ugao uvijanja  $\phi_{AC}$  između motora  $A$  i zupčanika  $C$ . Uzeti da je  $G=80$  Gpa.



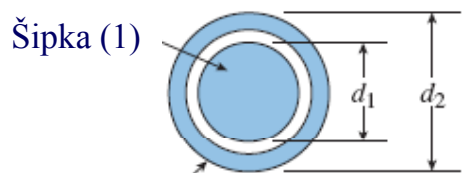


# Vvijanje

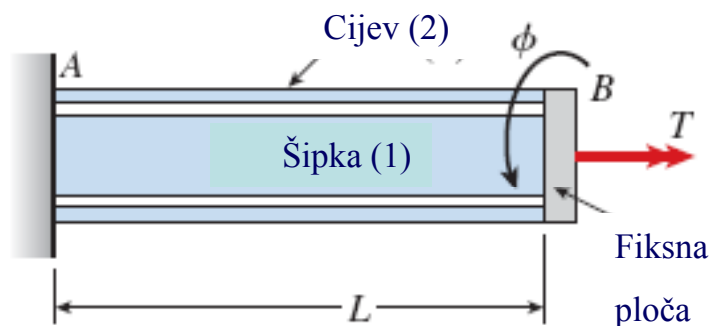
## Statički neodređeni problemi



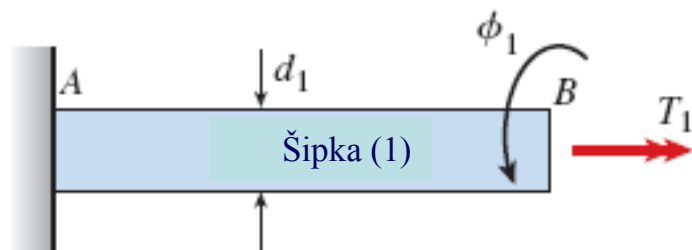
(a)



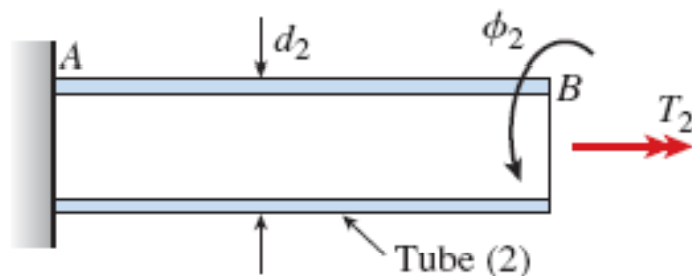
(b)



(c)



(d)



Jednačine ravnoteže

$$T_1 + T_2 = T$$

Jednačine kompatibilnosti

$$\phi_1 = \phi_2$$

Konstitutivne relacije

$$\phi_1 = \frac{T_1 L}{G_1 I_{01}} \quad \phi_2 = \frac{T_2 L}{G_2 I_{02}}$$

$$T_1 = T \left( \frac{G_1 I_{01}}{G_1 I_{01} + G_2 I_{02}} \right)$$

$$T_2 = T \left( \frac{G_2 I_{02}}{G_1 I_{01} + G_2 I_{02}} \right)$$

## Uvijanje

---

### Statički neodređeni problemi

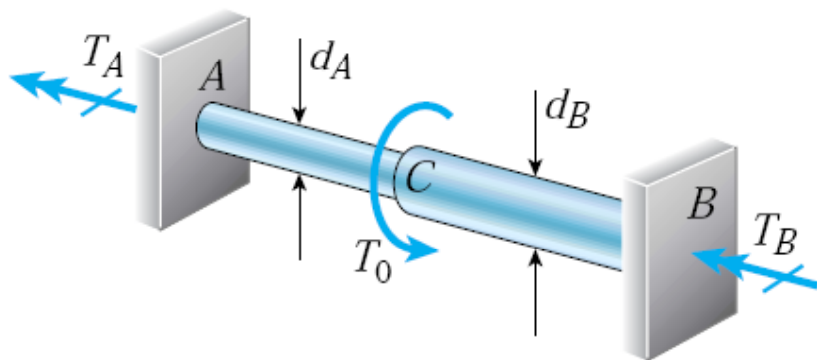
1. Postaviti jednačine ravnoteže (statičke, kinetičke jednačine) – moment uvijanja
2. Postaviti jednačine kompatibilnosti (geometrijske, kinematičke jednačine, jednačine konzistentne deformacije) – ugao uvijanja
3. Postaviti relacije moment uvijanja-ugao uvijanja (konstitutivne relacije)
4. Riješiti sistem jednačine dobiven kroz korake 1-3

## Uvijanje

---

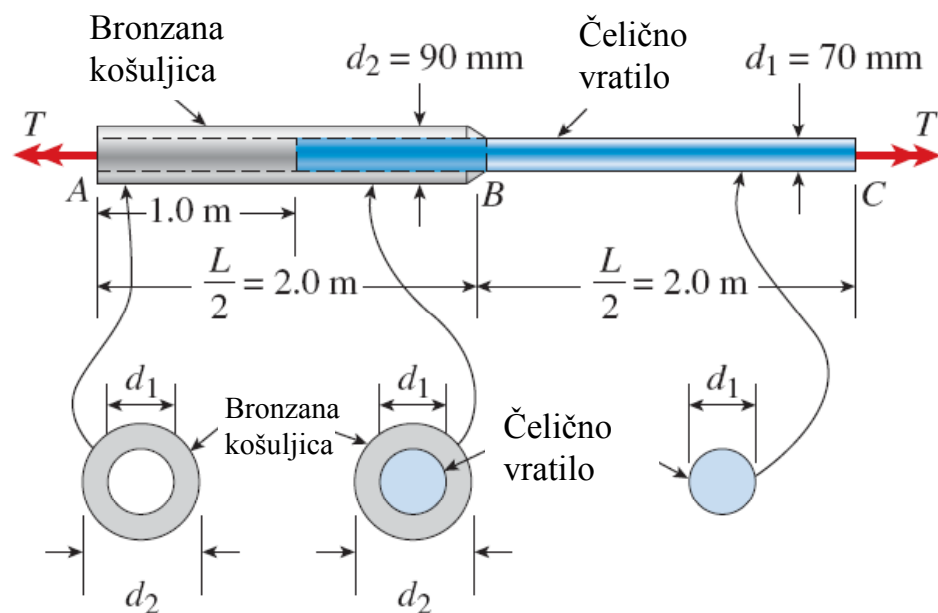
**Primjer 4.4:** Vratilo  $ABC$  je uklješteno na oba kraja i opterećeno momentom uvijanja  $T_0$  u tački  $C$ . Segmenti  $AC$  i  $CB$  vratila imaju prečnike  $d_A$  i  $d_B$  dužina  $L_A$  i  $L_B$  i polarnih momenata inercije  $I_{0A}$  i  $I_{0B}$ , respektivno. Potrebno je izvesti formule:

- za momente u uklještenjima  $A$  i  $B$
- za maksimalan tangencijalni napon  $\tau_{AC}$  i  $\tau_{CB}$  u svakom segmentu vratila
- ugao rotacije  $\phi_C$  u poprečnom presjeku gdje je primijenjen moment uvijanja  $T_0$



## Vvijanje

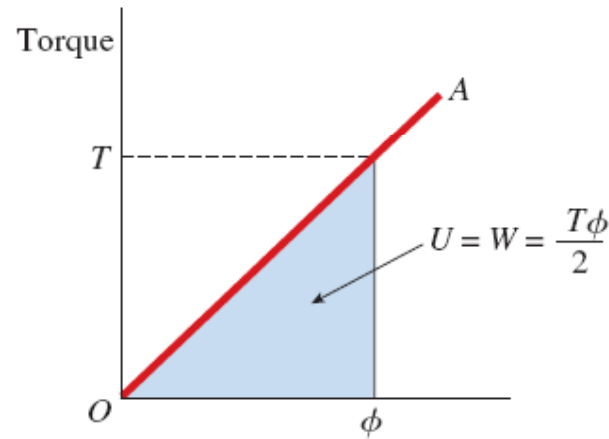
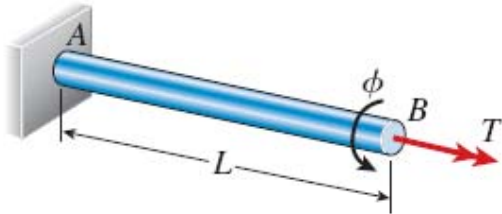
**Primjer 4.5:** Vratilo izrađeno od čelika ( $G_{\text{č}}=80 \text{ MPa}$ ), dužine 3 m, je trećinom dužine uvučeno u bronzanu košuljicu ( $G_{\text{b}}=40 \text{ GPa}$ ) koja je čvrsto povezana s vratilom. Vanjski prečnici vratila i košuljice su  $d_1=70 \text{ mm}$  i  $d_2=90 \text{ mm}$ , respektivno. Odrediti:



- Dozvoljeni moment uvijanja  $T_1$  koji se može primijeniti na krajeve ako je dozvoljeni napon uvijanja između krajeva  $8^\circ$ .
- Dozvoljeni moment uvijanja  $T_2$  ako je dozvoljni tangencijalni napon bronzne  $\tau_b=70 \text{ Mpa}$
- Dozvoljeni moment uvijanja  $T_3$  ako je dozvoljni tangencijalni napon čelika  $\tau_{\text{č}}=110 \text{ Mpa}$
- Dozvoljeni moment uvijanja  $T_{\text{max}}$  ako moraju biti zadovoljena sva tri uslova (a, b, c)

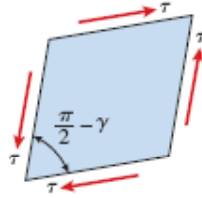
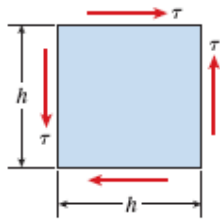
# Vvijanje

## Deformacioni rad



$$U = W = \frac{T\phi}{2}$$

$$U = \frac{T^2 L}{2GI_0} = \frac{GI_0 \phi^2}{2L}$$



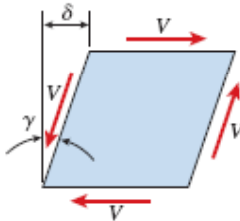
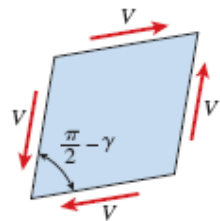
(a)

(b)

$$V = \tau ht$$

$$\delta = \gamma h$$

$$U = \frac{\tau \gamma h^2 t}{2}$$



$$U = W = \frac{V\delta}{2}$$

$$u = \frac{\tau \gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{G\gamma^2}{2}$$