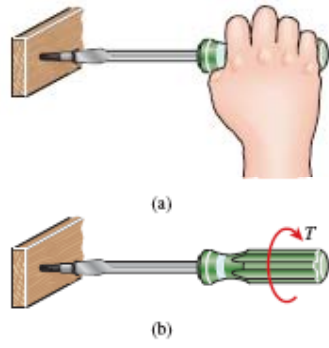
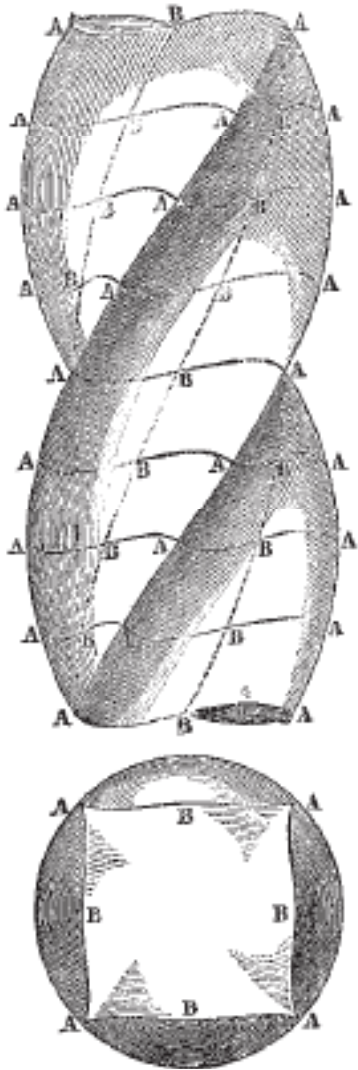


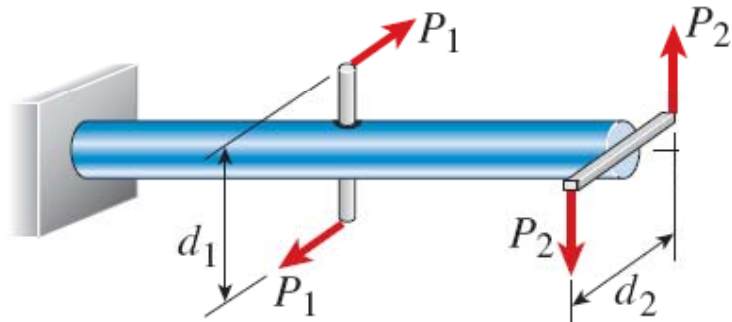
Vvijanje



*Grupa autora, *Elastostatika I*, Tehnički fakultet, Bihać, 2003
 *JM Gere, BJ Goodno, *Mechanics of Materials*, Cengage Learning, Seventh Edition, 2009.

Uvijanje

Osnovni pojmovi

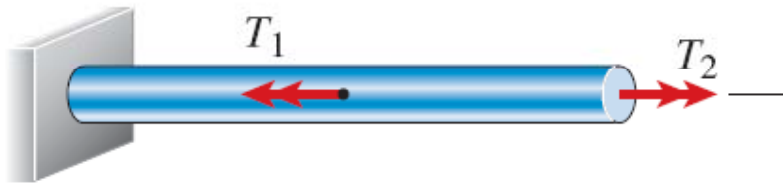


Moment sprega sila, [Nm]

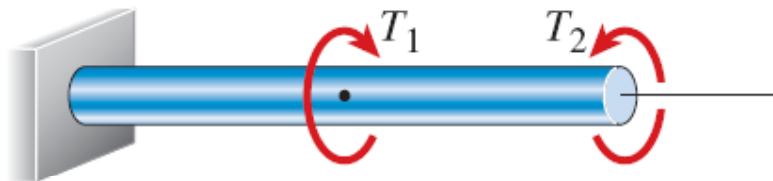
$$T_1 = P_1 d_1$$

$$T_2 = P_2 d_2$$

(4.1)



Moment sprega sila – vektorska reprezentacija
(pravilo desne ruke)

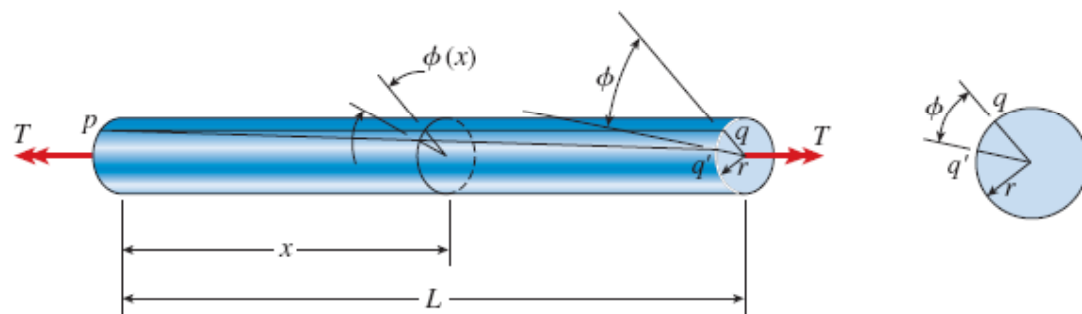


Moment sprega sila – reprezentacija uvijenom strelicom

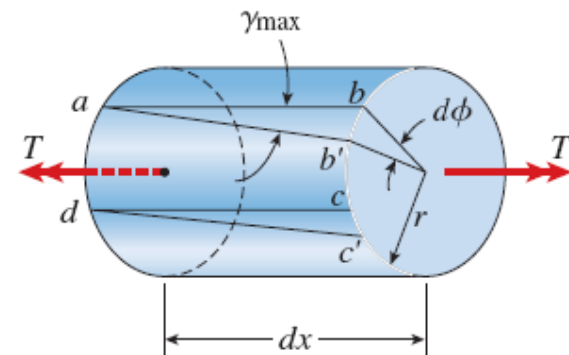
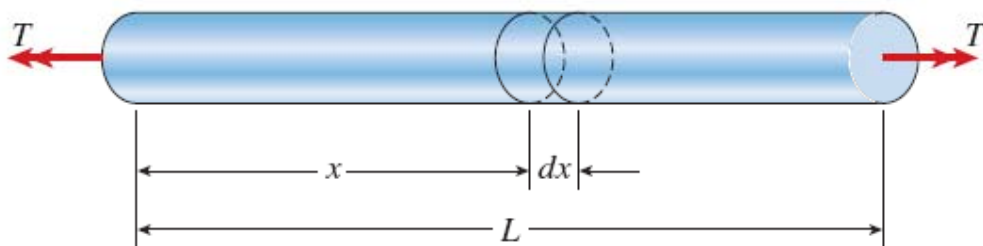
Momenti koji uvijaju neki element nazivaju se uvojni ili torzioni momenti.

Uvijanje

Deformacije štapova (i cijevi) kružnog presjeka



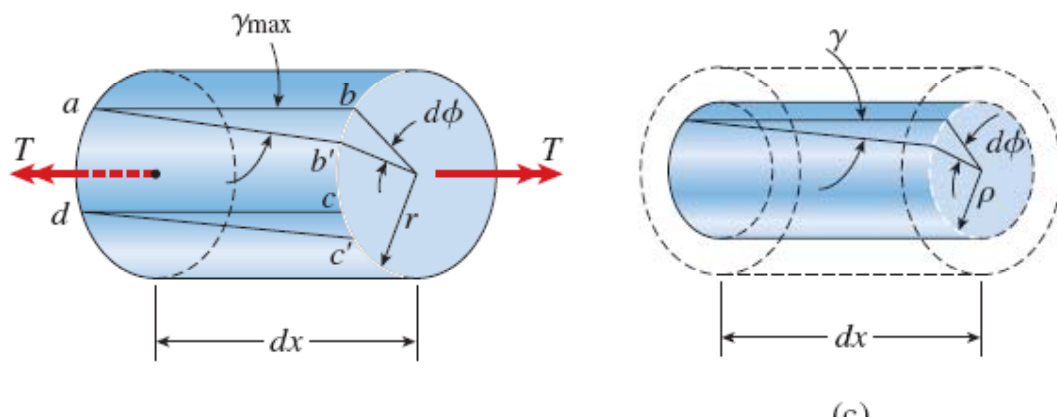
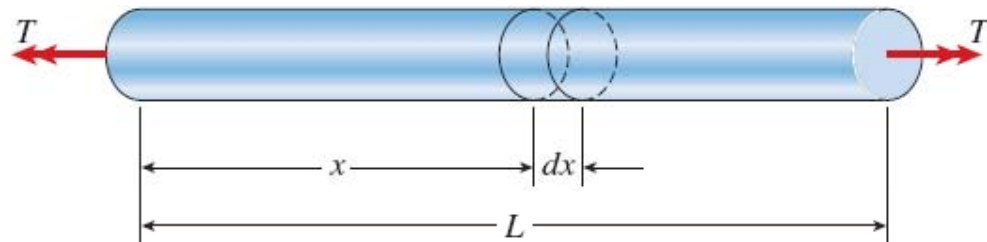
Čisto uvijanje – svi jednaki poprečni presjeci opterećeni istim momentom uvijanja ϕ – ugao uvijanja (rotacije)



Element $abcd$ postaje $ab'c'd'$, kojem se ne mijenjaju stranice, ali se mijenja ugao između njih – čisto smicanje (element izložen samo tangencijalnim deformacijama)!

Uvijanje

Deformacije štapova (i cijevi) kružnog presjeka



Maksimalan ugao uvijanja

$$\gamma_{\max} = \frac{bb'}{ab} = \frac{rd\phi}{dx} \quad (4.2)$$

Odnos tangencijalne deformacije i ugla uvijanja na površini šipke

Promjena ugla uvijanja

$$\theta = \frac{d\phi}{dx}$$

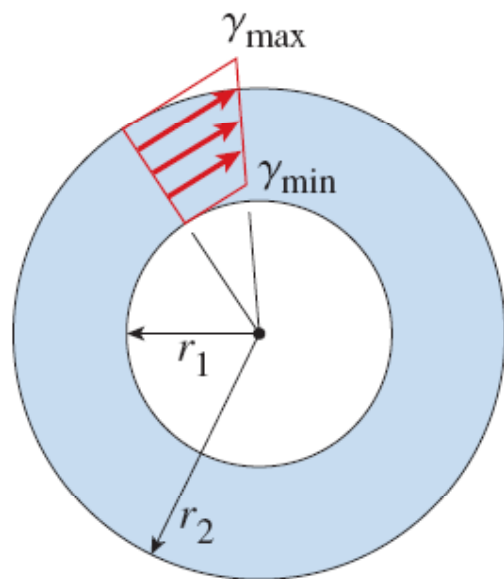
Za čisto uvijanje $\gamma_{\max} = r\theta = \frac{r\phi}{L}$ (4.3)

Tangencijalna deformacija

$$\gamma = r\theta = \frac{\rho}{r} \gamma_{\max} \quad (4.4)$$

Uvijanje

Deformacije štapova (i cijevi) kružnog presjeka



$$\gamma_{\max} = \frac{r_2}{L} \phi$$

$$\gamma_{\min} = \frac{r_1}{r_2} \gamma_{\max} = \frac{r_1}{L} \phi$$

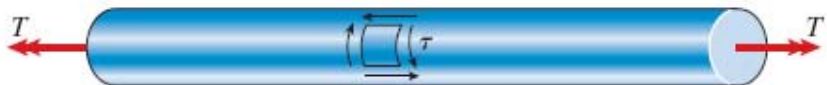
(4.5)

Sve prethodne relacije važe za sve materijale, bez obzira da li su linearni ili nelinearni, elastični ili neelastični, ali za male uglove uvijanja i male deformacije!

Uvijanje

Deformacije štapova (i cijevi) kružnog presjeka

Veza deformacija i napona

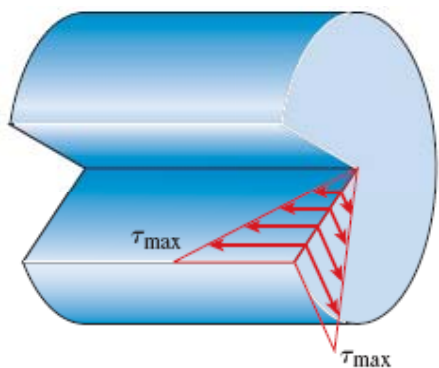
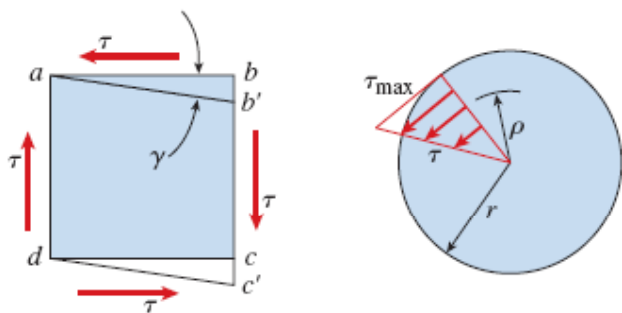


$$\tau = G\gamma$$

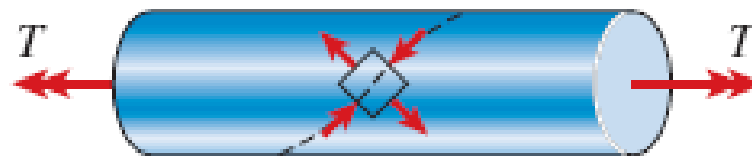
$$\tau_{\max} = Gr\theta$$

$$\tau = \frac{\rho}{r} \tau_{\max} \tag{4.6}$$

Linearna zavisnost napona i udaljenosti od ose uvijanja!!!



Uzdužni i transferzalni naponi



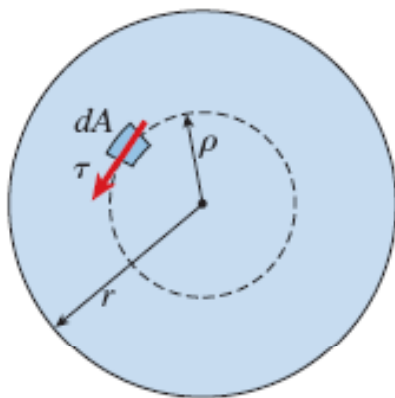
Uvijanje = čisto smicanje = dvoosno naponsko stanje bez tangencijalnih napona

Uvijanje

Deformacije štapova (i cijevi) kružnog presjeka

Veza deformacija i napona

Formula uvijanja



Formula uvijanja



$$\tau = \frac{\rho}{r} \tau_{\max}$$

$$dM = \tau \rho dA = \frac{\tau_{\max}}{r} \rho^2 dA$$

$$T = \int_A dM = \int_A \tau \rho dA = \int_A \frac{\tau_{\max}}{r} \rho^2 dA = \frac{\tau_{\max}}{r} \int_A \rho^2 dA \quad (4.6)$$

$$I_o = \int_A \rho^2 dA \quad [\text{m}^4] \quad \text{– polarni moment inercije poprečnog presjeka}$$

$$I_o = \frac{d^4 \pi}{32} \quad \text{– za kružni poprečni presjek}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{I_o} = \frac{T}{W_o} \quad (4.7)$$

$$W_o \quad \text{– polarni moment otpora presjeka}$$

$$W_o = \frac{d^3 \pi}{16} \quad \text{– za kružni poprečni presjek}$$

Opšta formula uvijanja

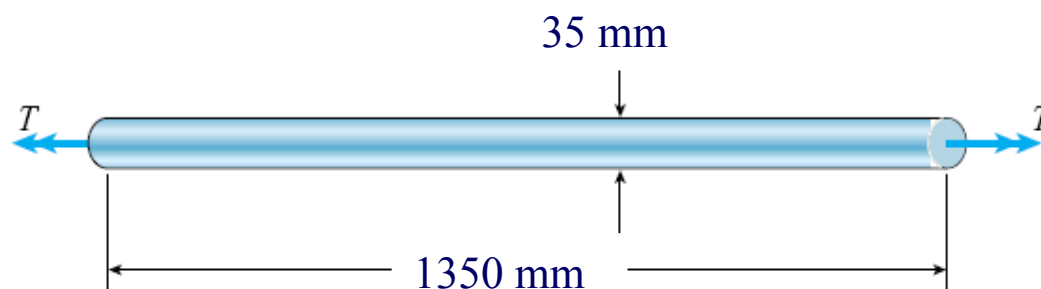


$$\tau = \frac{\rho}{r} \tau_{\max} = \frac{T \rho}{I_o} \quad (4.8)$$

Uvijanje

Primjer 4.1: Puni štap kružnog poprečnog presjeka, prečnika 40 mm, dužine 1350 mm i modula klizanja 80 Gpa, opterećen je momentom uvijanja na svojim krajevima, kao što je dato na slici. Odrediti:

- Maksimalan tangencijalni napon u šipki, te ugao uvijanja ako je moment uvijanja 340 Nm
- Maksimalan mogući moment uvijanja, ako je dozvoljeni tangencijalni napon 4 Mpa, a maksimalni dozvoljeni ugao uvijanja 2.5°

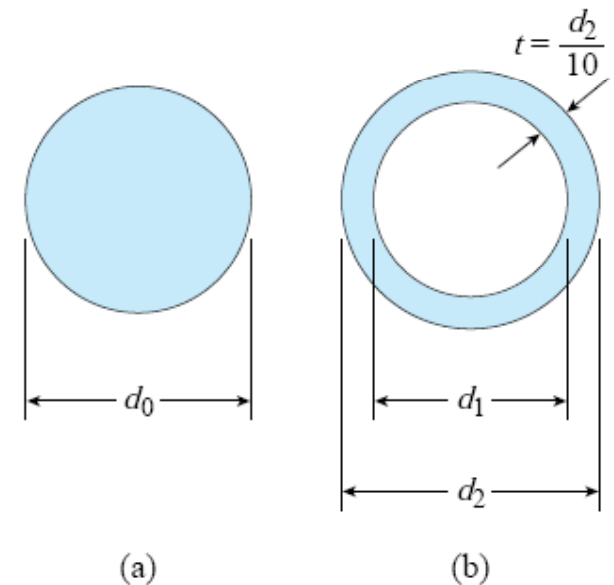


RC Hibbeler, *Mechanics of Materials*, Prentice Hall, Eight Edition, 2011.

Uvijanje

Primjer 4.2: Vratilo cilindričnog poprečnog presjeka od čelika, izrađeno u dvije avrijante, kao puno i šuplje (slika), treba prenese moment uvijanja od 1200 Nm bez prekoračenja dozvoljenog tangencijalnog napona od 40MPa i dozvoljenog uzdužnog uvijanja od 0.75°/m. Treba odraditi:

- Prečnik punog vratila
- Potrebni vanjski prečnik šupljeg vratila ako je debljina stjenke vratila jedna desetina vanjskog prečnika
- Odnos prečnika (d_2/d_1) i težina oba vratila



RC Hibbeler, *Mechanics of Materials*, Prentice Hall, Eighth Edition, 2011.

Uvijanje

Deformacije štapova (i cijevi) kružnog presjeka

Veza deformacija i napona

Ugao uvijanja – konstantni parametri

$$\theta = \frac{T}{GI_o}$$
$$\phi = \theta L = \frac{TL}{GI_o} \quad (4.8)$$

Promjena parametara po segmentima

$$\phi = \sum_i \phi_i = \sum_i \frac{T_i L_i}{G_i I_{o_i}} \quad (4.9)$$

Proizvoljan uzdužni (kružni) poprečni presjek i/ili opterećenje

$$\phi = \int_L \frac{T(x) dx}{G(x) I_o(x)} \quad (4.10)$$

Uvijanje

Deformacije štapova (i cijevi) kružnog presjeka

Ograničenja u korištenju prethodnih jednačina

- Samo za kružne poprečne presjeke (pune ili šuplje)
- Linearno elastični materijali
- Za dijelove vratila udaljene od koncentracija napona
- Ne mogu se koristiti za druge poprečne presjeke jer:
 - ❖ Poprečni presjek ne ostaje u ravni
 - ❖ Maksimalni naponi nisu uvijek u najudaljenijim tačkama presjeka
 - ❖ Naprednije metode analize napona neophodne za rješavanje