Ispitivanje toka funkcije i graf funkcije

Da bismo mogli nacrtati (što precizniji) graf neke funkcije potrebno je odrediti sljedeće:

1) područje definicije funkcije (područje u kojem funkcija egzistira, tj. u kojem je funkcija definirana),
2) asimptote,
3) nul-točke funkcije (točke u kojima je vrijednost funkcije jednaka nuli),
4) stacionarne točke i ekstreme funkcije,
5) intervale konveksnosti i konkavnosti i točke infleksije.

U sljedećim zadacima slijedi detaljan prikaz ispitivanja toka funkcije i crtanje njenog grafa.

Zadatak 1.

Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x)=(x-1)^2(x+2)$.

Rj.

Funkcija $f(x)=(x-1)^2(x+2)$ je definirana za sve realne brojeve, tj. skup $\mathbb{R}$ (realnih brojeva) je područje definicije zadane funkcije. Samim time zadana funkcija nema točke prekida, ali isto tako ni vertikalne asimptote.

<u>Napomena:</u> uočimo da vertikalne asimptote uglavnom egzistiraju u točkama prekida funkcije.

Potražimo horizontalnu asimptotu, tj.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left((x-1)^2(x+2)\right)(=\infty\cdot\infty)=\infty$$

Dobili smo da je limes zadane funkcije jednak beskonačnosti kada x teži ka beskonačnosti, na osnovu čega zaključujemo da zadana funkcija nema horizontalne asimptote.

Potražimo kosu asimptotu $y=ax+b$, gdje su $a,b\in\mathbb{R}$ takvi da je

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right)$$

Dobivamo

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2(x+2)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left((x-1)^2\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)(=\infty\cdot 1)=\infty,$$

Budući da smo dobili da je koeficijent smjera kose asimptote jednak beskonačnosti, zaključujemo da funkcija nema kose asimptote. Jasno, u ovom slučaju je nepotrebno izračunavati b.

Potražimo nul-točke funkcije $f(x)=(x-1)^2(x+2)$

Iz $f(x)=0$, tj. $(x-1)^2(x+2)=0$ proizlazi $x_1=1$, $x_2=-2$,

Na osnovu čega zaključujemo da su $(-2,0)$ i $(1,0)$ nul-točke zadane funkcije.

Odredimo sada stacionarne točke, tj. ekstreme funkcije $f(x)=(x-1)^2(x+2)$

Deriviranjem zadane funkcije dobivamo

$$f'(x)=2(x-1)(x+2)+(x-1)^2=(x-1)[2x+4+x-1]=(x-1)(3x+3)=3(x+1)(x-1),$$

stoga iz $f'(x)=0$, tj. $3(x+1)(x-1)=0$ proizlaze stacionarne točke $x_1=-1$, $x_2=1$.

Pritom je

$$f(-1)=4\cdot 1=4, \quad f(1)=0,$$

stoga imamo stacionarne točke $S_1(-1,4)$ i $S_2(1,0)$.

Odredimo sada derivaciju drugog reda zadane funkcije: $f''(x)=3\left[(x-1)+(x+1)\right]=3\cdot 2x=6x$.

Dobili smo $f''(x)=6x$

pa je $f''(-1)=-6<0 \quad \Rightarrow \quad \max(-1,4)$,

$f''(1)=6>0 \quad \Rightarrow \quad \min(1,0)$.

Odredimo točke infleksije i intervale konveksnosti i konkavnosti f-je $f(x)=(x-1)^2(x+2)$.

Iz $f''(x)=0$, gdje je $f''(x)=6x$

Proizlazi $6x=0$, tj. $x=0$ je moguća točka infleksije.

S obzirom na $x=0$ na brojevnom pravcu (koji reprezentira skup realnih brojeva) razlikujemo dva intervala: $\langle -\infty,0\rangle$ i $\langle 0,+\infty\rangle$ na kojima ćemo ispitati konveksnost, tj. konkavnost funkcije.

Uočimo:

$f''(-2)=-12<0$ tj. funkcija f je konkavna za svaki $x\in\langle -\infty,0\rangle$,

$f''(2)=12>0$ tj. funkcija f je konveksna za svaki $x\in\langle 0,\infty\rangle$.

Budući da se u točki $x=0$ mijenja konkavnost u konveksnost, zaključujemo da je $(0,2)$ točka infleksije. Pritom smo uzeli u obzir da je $f(0)=(-1)^2\cdot 2=2$.

Napomena:

Uočimo da je $f'''(0)\neq 0$, jer je $f'''(x)=6\neq 0$ za svaki x (vidi str.41).

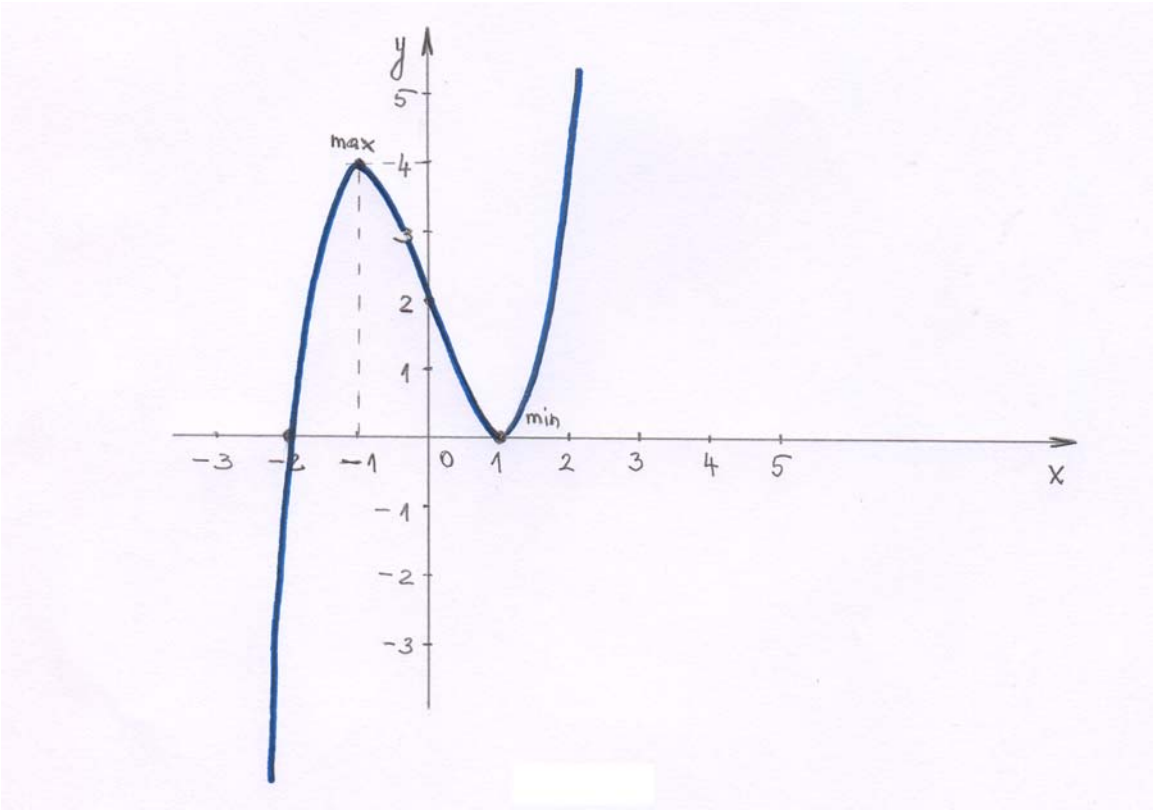
Slijedi crtanje grafa funkcije.

Prije toga resumirajmo gore izračunato:

1) područje definicije funkcije: cijeli skup realnih brojeva
2) asimptote: funkcija nema nijednu asimptotu
3) nul-točke funkcije: funkcija ima dvije nul-točke i to $(-2,0)$ i $(1,0)$
4) ekstremi funkcije: $\max(-1,4)$, $\min(1,0)$
5) točka infleksije: $(0,2)$

za svaki $x \in \langle -\infty, 0 \rangle$ funkcija f je konkavna,

za svaki $x \in \langle 0, \infty \rangle$ funkcija f je konveksna



slika 13

Zadatak 2.

Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x)=\dfrac{4x-12}{x^2-4x+4}$.

Rj.

Uočimo da se zadana funkcija može pisati u obliku: $\boxed{f(x)=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}}$

- Primijetimo da za $x-2=0$, odnosno za $x=2$ funkcija $f(x)=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$ **nije definirana** (jer u nazivniku zadane funkcije dobivamo nulu za $x=2$).

Zaključujemo da je $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ **područje definicije** zadane funkcije.

Dakle, $x=2$ je točka prekida zadane funkcije pa je za očekivati da ćemo za $x=2$ dobiti **vertikalu asimptotu**. Treba provjeriti da li je $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$ (vidi str. 46-47). Dobivamo:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{4x-12}{(x-2)^2}\left(=\frac{-4}{0}\right)=\infty.$$

Zaključujemo: $x=2$ je vertikalna asimptota zadane funkcije.

- Potražimo horizontalnu asimptotu, tj.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-12}{(x-2)^2}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{2(x-2)}\left(=\frac{4}{\infty}\right)=0$$

Dobili smo da je limes zadane funkcije jednak nuli (konačan realan broj, vidi str. 46) kada *x* teži ka beskonačnosti, na osnovu čega zaključujemo da je $y=0$ **horizontalna asimptota** zadane funkcije.

- Napomena:

  Ako je funkcija zadana eksplicitno, tj. sa $y=f(x)$, onda egzistencija horizontalne asimptote poništava egzistenciju kose asimptote i obratno.

Budući da smo dobili da zadana funkcija ima horizontalnu asimptotu, znamo da ona ne može imati i kosu. U slučaju da smo pokazali da funkcija nema horizontalne asimptote, morali bi provjeriti egzistenciju kose.

Dakle, zadana funkcija **nema kose asimptote**.

- Potražimo nul-točke funkcije $f(x)=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$

Iz $f(x)=0$, tj. $\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}=0$ proizlazi $4x-12=0$, tj. $x=3$.

pa je $(3,0)$ (jedina) nul-točka zadane funkcije.

Odredimo sada stacionarne točke, tj. ekstreme funkcije $f(x)=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$

Deriviranjem zadane funkcije dobivamo

$$f'(x)=\frac{4\cdot(x-2)^2-(4x-12)\cdot 2\cdot(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{(x-2)\cdot\left[4\cdot(x-2)-2\cdot(4x-12)\right]}{(x-2)^4}$$

$$=\frac{[4x-8-8x+24]}{(x-2)^3}=\frac{-4x+16}{(x-2)^3},$$

tj. $\boxed{f'(x)=\dfrac{-4x+16}{(x-2)^3}}$

stoga iz $f'(x)=0$, proizlazi $-4x+16=0$, tj. $x=4$ je stacionarna točka.

Pritom je $f(4)=\dfrac{16-12}{4}=1$,

stoga imamo da je $\mathrm{S}(4,1)$ stacionarna točka.

Odredimo sada derivaciju drugog reda zadane funkcije:

$$f''(x)=\frac{-4\cdot(x-2)^3-(-4x+16)\cdot 3\cdot(x-2)^2}{(x-2)^6}=\frac{(x-2)^2\cdot\left[-4\cdot(x-2)-3\cdot(-4x+16)\right]}{(x-2)^6}$$

$$=\frac{[-4x+8+12x-48]}{(x-2)^4}=\frac{8x-40}{(x-2)^4}.$$

Dobili smo $\boxed{f''(x)=\dfrac{8x-40}{(x-2)^4}}$

pa je $f''(4)=\dfrac{32-40}{16}=-\dfrac{1}{2}<0$ $\Rightarrow$ $\max(4,1)$.

Odredimo točke infleksije i intervale konveksnosti i konkavnosti:

Iz $f''(x)=0$, proizlazi $8x-40=0$,

tj. $x=5$ je moguća točka infleksije.

To se može potvrditi tako da se provjeri da li je vrijednost treće derivacije različita od nule za $x=5$ ili jednostavnije tako da se provjeri da li je točka $x=5$ točka u kojoj konveksnost funkcije prelazi na konkavnost (ili konkavnost funkcije prelazi na konveksnost).

Dakle, s obzirom na $x=5$ na brojevnom pravcu razlikujemo dva intervala: $\langle -\infty, 5\rangle$ i $\langle 5, +\infty\rangle$.

Uočimo:

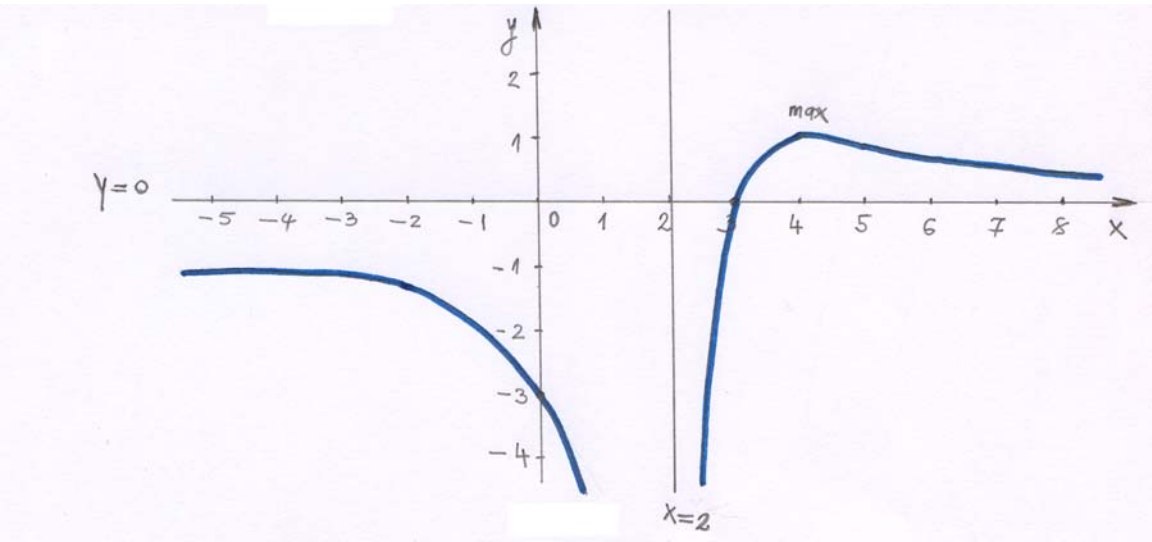
$$f''(4)=\frac{32-40}{16}=-\frac{1}{2}<0 \qquad \text{tj. funkcija } f \text{ je konkavna za svaki } x\in\langle -\infty,5\rangle,$$

$$f''(6)=\frac{48-40}{4^4}=\frac{8}{256}=\frac{1}{32}>0 \qquad \text{tj. funkcija } f \text{ je konveksna za svaki } x\in\langle 5,\infty\rangle.$$

gdje je $f''(x)=\dfrac{8x-40}{(x-2)^4}$. Budući da se u točki $x=5$ mijenja konkavnost u konveksnost, zaključujemo da je $\left(5,\dfrac{8}{9}\right)$ točka infleksije. Pritom je $f(5)=\dfrac{20-12}{9}=\dfrac{8}{9}$.

Slijedi crtanje grafa funkcije. Prije toga resumirajmo gore izračunato:

1) područje definicije funkcije: $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ (cijeli skup realnih brojeva osim broja 2)
2) asimptote: f-ja ima vertikalnu asimptotu $x=2$ i horizontalnu asimptotu $y=0$
3) nul-točke funkcije: funkcija ima jednu nul-točku $(3,0)$
4) ekstremi funkcije: $\max(4,1)$
5) točka infleksije: $\left(5,\dfrac{8}{9}\right)$, pritom je funkcija f konkavna na $\langle -\infty,5\rangle$ i konveksna na $\langle 5,\infty\rangle$.



slika 14

Zadatak 3.

Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

Rj.

- Primijetimo da za $x-1=0$, odnosno za $x=1$ funkcija $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ **nije definirana** (jer u nazivniku zadane funkcije dobivamo nulu za $x=1$).

Zaključujemo da je $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ područje definicije zadane funkcije.

Dakle, $x=1$ je točka prekida zadane funkcije pa je za očekivati da ćemo za $x=1$ dobiti vertikalu asimptotu. Treba provjeriti da li je $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$. Dobivamo:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+2}{x-1}\left(=\frac{1}{0}\right)=\infty,$$

stoga zaključujemo da je $x=1$ vertikalna asimptota zadane funkcije.

- Potražimo horizontalnu asimptotu, tj.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+2}{x-1}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-2}{1}=\infty$$

Dobili smo da je limes zadane funkcije jednak beskonačnosti kada x teži ka beskonačnosti, na osnovu čega zaključujemo da zadana funkcija nema horizontalne asimptote.

- Potražimo kosu asimptotu $y=ax+b$, gdje su $a,b\in\mathbb{R}$ takvi da je

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right)$$

Dobivamo

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-2x+2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2-x}\right)\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-2}{2x-1}\right)\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{2}\right)=1,$$

odnosno $a=1$, stoga možemo izračunati

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+2-x^2+x}{x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x+2}{x-1}\right)\left(=\frac{-\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{1}\right)=-1$$

Dobili smo da je $a=1$, $b=-1$ pa je $y=x-1$ **jednadžba kose asimptote** zadane funkcije.

Potražimo nul-točke funkcije $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

Iz $f(x)=0$, tj. $\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=0$ proizlazi $x^2-2x+2=0$.

Lako se može provjeriti da kvadratna jednadžba $x^2-2x+2=0$ nema realnih rješenja, na osnovu čega zaključujemo da zadana funkcija nema nul-točke.

Odredimo sada stacionarne točke, tj. ekstreme funkcije $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

Deriviranjem zadane funkcije dobivamo

$$f'(x)=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)-(x^2-2x+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x-2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2},$$

tj. $\boxed{f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}}$

stoga iz $f'(x)=0$, proizlazi $x^2-2x=0$, tj. $x\cdot(x-2)=0$ ili $x_1=0$, $x_2=2$ su stacionarne točke.

Pritom je $f(0)=\dfrac{2}{-1}=-2$, $f(2)=\dfrac{4-4+2}{1}=2$

stoga imamo da su $S_1(0,-2)$ i $S_2(2,2)$ stacionarne točke zadane funkcije.

Odredimo sada derivaciju drugog reda zadane funkcije:

$$f''(x)=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2-(x^2-2x)\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)\cdot\left[(2x-2)\cdot(x-1)-2\cdot(x^2-2x)\right]}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{\left[2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x\right]}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

Dobili smo $\boxed{f''(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}}$

pa je $f''(0)=\dfrac{2}{-1}=-2<0 \quad\Rightarrow\quad \max(0,-2)$,

$f''(2)=\dfrac{2}{1}=2>0 \quad\Rightarrow\quad \min(2,2)$.

Odredimo točke infleksije i intervale konveksnosti i konkavnosti:

Iz $f''(x)=0$, proizlazi $\dfrac{2}{(x-1)^3}=0$, što je nemoguće jer je $2\neq 0$,

tj. imamo da je $f''(x)\neq 0$ za svaki $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ (iz područja definicije funkcije f).

S druge strane uočimo da je

$f''(x)>0$ za svaki $x\in\langle 1,\infty\rangle$ (npr. $f''(2)=\dfrac{2}{1}=2>0$) pa je f konveksna na $\langle 1,\infty\rangle$,

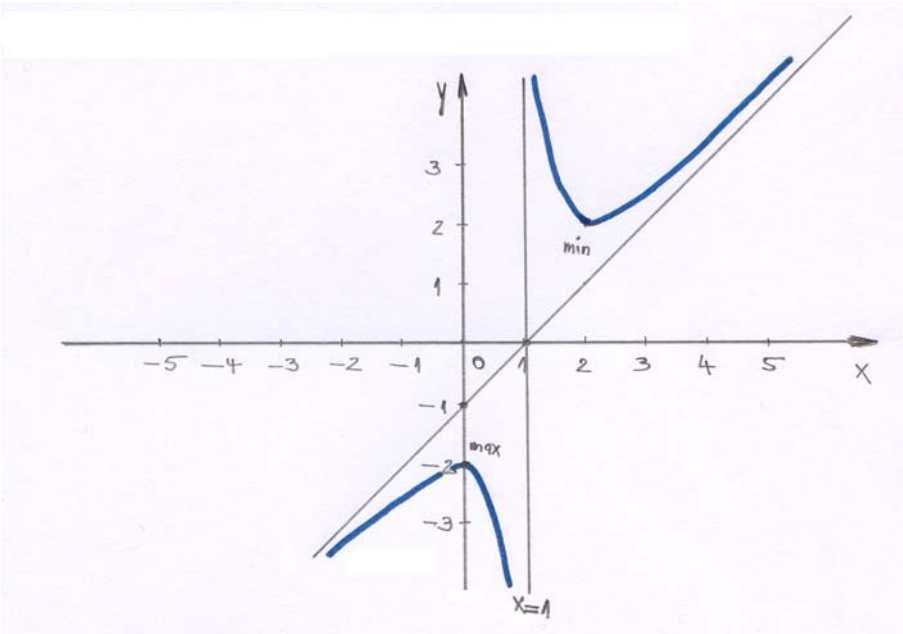
$f''(x)<0$ za svaki $x\in\langle -\infty,1\rangle$ (npr. $f''(0)=\dfrac{2}{-1}=-2<0$) pa je f konkavna na $\langle -\infty,1\rangle$.

Važno:

Iako se u točki $x=1$ mijenja konveksnost u konkavnost, zaključujemo da zadana funkcija nema točku infleksije, jer funkcija $f''(x)$ nije definirana za $x=1$.

Slijedi crtanje grafa funkcije. Prije toga resumirajmo gore izračunato:

1) područje definicije funkcije: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ (cijeli skup realnih brojeva osim broja 1)
2) asimptote: f-ja ima vertikalnu asimptotu $x=1$ i kosu asimptotu $y=x-1$
3) nul-točke funkcije: funkcija nema nul-točaka
4) ekstremi funkcije: $\max(0,-2)$, $\min(2,2)$
5) točka infleksije: nema, ali zato imamo da je funkcija f konveksna na intervalu $\langle 1,\infty\rangle$ i konkavna na intervalu $\langle -\infty,1\rangle$.



slika 15