
Dr. Dušan Vukojević
Mr. Elma Ekinović

TEORIJA OSCILACIJA

Zenica, 2004.

TEORIJA OSCILACIJA

Dr. Dušan Vukojević, redovni profesor Mašinskog fakulteta u Zenici
Mr. Elma Ekinović, viši asistent Mašinskog fakulteta u Zenici

Recenzenti:

Prof.dr. Rudolf Kristić
Prof.dr.Božidar Stjepović

Izdavač

Mašinski fakultet u Zenici, Univerzitet u Sarajevu

Za izdavača

Prof.dr. Safet Brdarević

Naslovna strana

Mr. Elma Ekinović

Tehnička obrada:

Mr. Elma Ekinović
Marina Matanović

Štampa

GRAFORAD, Zenica

Tiraž

300 primjeraka

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i univerzitetska biblioteka Bosne i Hercegovine,
Sarajevo

UDK 534.01(075.8)

VUKOJEVIĆ, Dušan

Teorija oscilacija / Dušan Vukojević. -1.izd. -Zenica :
Mašinski fakultet, 1997. -205 str. : graf.prikazi ;
24 cm

Bibliografija: str.204-205.

Na sjednici br. 3/97 Nastavno-naučnog vijeća Mašinskog fakulteta u Zenici ova knjiga je prihvaćena kao udžbenik.

Na sjednici br. 1/04 Nastavno-naučnog vijeća Mašinskog fakulteta u Zenici prihvaćeno je II izdanje ovog udžbenika.

SADRŽAJ**PREDGOVOR**

v

1**UVOD**

1

1.1.	Uloga i zadatak teorije oscilacija	1
1.2.	Osnovni pojmovi o oscilatornom kretanju	1
1.3.	Vrste oscilacija	3

2**ELEMENTI ANALITIČKE MEHANIKE**

5

2.1.	Stabilnost ravnoteže sistema u konzervativnom polju	5
2.1.1.	Teorema Ljapunova o stabilnosti kretanja i mirovanja	5
2.2.	Linearizacija diferencijalnih jednačina kretanja	7
2.3.	Potencijalna energija	8
2.4.	Lagranž-Dirihleova teorema	11
2.5.	Kriterijum Silvestera	12
2.6.	Prva i druga teorema Ljapunova o nestabilnosti ravnoteže	14
2.7.	Kinetička energija sistema	15
2.8.	Relejeva funkcija rasipanja	20
2.9.	Neka svojstva kvadratne forme	24
2.10.	Primjeri	25

3**PRAVOLINIJSKE MALE OSCILACIJE
MATERIJALNE TAČKE**

31

3.1.	Slobodne neprigušene oscilacije	31
3.1.1.	Slobodne oscilacije pri djelovanju konstantne sile	38
3.2.	Slobodne prigušene oscilacije	40
3.2.1.	Slobodne prigušene oscilacije sa otporom proporcionalnim prvom stepenu brzine	41
3.2.2.	Prividno periodično kretanje	42
3.2.3.	Aperiodično kretanje	49

3.2.4.	Granični slučaj aperiodičnog kretanja	50
3.3.	Slobodne prigušene oscilacije tačke pri postojanju Kulonovog trenja	51
3.4.	Prinudne neprigušene oscilacije	56
3.4.1.	Dinamički faktor pojačavanja	60
3.4.2.	Rezonancija	62
3.4.3.	Podrhtavanje	64
3.5.	Prinudne prigušene oscilacije tačke pri djelovanju sile otpora proporcionalne prvom stepenu brzine tačke	65
3.6.	Primjeri	75

4 MALE OSCILACIJE SISTEMA SA JEDNIM STEPENOM SLOBODE 85

4.1.	Slobodne neprigušene oscilacije	85
4.2.	Osnovne karakteristike slobodnih oscilacija	87
4.3.	Slobodne prigušene oscilacije pod djelovanjem sila otpora proporcionalnih prvom stepenu brzine	90
4.4.	Prinudne oscilacije sistema sa jednim stepenom slobode	94
4.4.1.	Slučaj proizvoljnih poremećajnih sila	95
4.4.2.	Slučaj periodično promjenljivih poremećajnih sila	98
4.4.2.1.	Rezonancija	102
4.5.	Primjeri	105

5 MALE OSCILACIJE MATERIJALNOG SISTEMA SA DVA STEPENA SLOBODE KRETANJA 115

5.1.	Slobodne neprigušene oscilacije	115
5.1.1.	Diferencijalne jednačine kretanja	115
5.1.2.	Opšti integrali diferencijalnih jednačina kretanja	118
5.1.3.	Primjeri	126
5.1.3.1.	Dvojno matematičko klatno	126
5.1.3.2.	Lančani i torzioni sistemi sa dva stepena slobode	132
5.1.3.3.	Oscilacije vozila	137
5.2.	Glavne koordinate	139
5.2.1.	Slučaj kada je jedna od frekvencija glavnih oscilacija sistema jednaka nuli	144
5.2.2.	Slučaj kada su frekvencije glavnih oscilacija sistema jednake	145
5.2.3.	Svojstva glavnih oscilacija sistema	145
5.2.4.	Pojava podrhtavanja (bijenja)	147
5.3.	Poprečne oscilacije sistema sa dva stepena slobode	150
5.4.	Slobodne prigušene oscilacije sistema sa dva stepena slobode kretanja	154
5.4.1.	Slučaj malog prigušenja. Raut-Hurvicov kriterijum stabilnosti kretanja	158
5.4.2.	Slučaj velikog prigušenja	162
5.4.3.	Primjeri	163

5.5.	Prinudne neprigušene oscilacije sistema sa dva stepena slobode	170
5.5.1.	Pojava rezonancije	173
5.5.2.	Slučaj kada je jedna od generalisanih sila jednaka nuli. Dinamički apsorber bez prigušenja	175
5.5.3.	Rezonantni dijagrami	178
5.6.	Prinudne prigušene oscilacije sa dva stepena slobode	181
5.6.1.	Dinamički apsorber sa prigušenjem	184

6 MALE OSCILACIJE MATERIJALNOG SISTEMA SA KONAČNIM BROJEM STEPENI SLOBODE 187

6.1.	Slobodne neprigušene oscilacije	187
6.1.1.	Glavne koordinate	196
6.1.2.	Torzionne oscilacije reduktora	199
6.1.3.	Primjeri	203

7 KRITIČNE BRZINE BRZOHODNIH VRATILA 213

7.1.	Vertikalno vratilo sa jednim diskom	213
7.2.	Horizontalno vratilo sa više diskova. Obrazac Morleja	216
7.3.	Relejev obrazac	218
7.4.	Denkerlejev obrazac	220

8 PRIMJENA RAČUNARA PRI RJEŠAVANJU DINAMIČKIH I OSCILATORNIH PROBLEMA 223

8.1.	Uvod	223
8.2.	Teorijske osnove programa I-DEAS	223
8.2.1.	Slobodne neprigušene oscilacije sistema	224
8.2.2.	Prinudne oscilacije sa prigušenjem	225
8.2.3.	Primjeri dinamičkog proračuna upotrebom programa I-DEAS	225

9 LITERATURA 241

**PREDGOVOR**

Ovaj udžbenik iz oblasti teorije oscilacija prilagođen je nastavnom planu i programu mašinskih fakulteta u Bosni i Hercegovini, a izložena materija se predaje u drugom dijelu predmeta Dinamika i teorija oscilacija.

Način izlaganja i redosljed podešeni su tako da se bez većih napora, uz određeno predznanje iz dinamike, može shvatiti suština ove oblasti mehanike.

Treće poglavlje je posvećeno malim pravolinijskim oscilacijama materijalne tačke, što u izvjesnom smislu remeti kontinuitet izlaganja, ali će korisno poslužiti onima koji se prvi put susreću sa ovom materijom.

U drugom izdanju ispravljene su uočene greške, znatno je poboljšana tehnička priprema, a osmo poglavlje udžbenika izmijenjeno je u skladu sa savremenim dostignućima u oblasti numeričkog rješavanja dinamičkih i oscilatornih problema.

Zenica, januar 2004.godine

Autori

1

UVOD

1.1. Uloga i zadatak teorije oscilacija

Jedan od najrasprostranjenijih oblika kretanja u prirodi je oscilatorno kretanje. U najvećem broju svih vrsta kretanja primijenjene tehnike, oscilatorni procesi zauzimaju dominantnu ulogu.

U širem smislu oscilacije su prisutne kod svih čvrstih tijela koja se deformišu u području elastičnosti, a zatim prepuste djelovanju elastičnih sila. U tom slučaju elementarni dijelovi tijela osciluju oko svojih prvobitnih ravnotežnih položaja koja su imala u nedeformisanom stanju. Isto tako, pod određenim uslovima, čvrsta i kruta tijela pod djelovanjem vanjskih sila osciluju kao cjeline oko svojih ravnotežnih položaja kod raznih mašina i mehanizama.

Zbog svog vrlo širokog prisustva u tehnici, izučavanje oscilacija je vrlo važno radi razjašnjenja niza fizičkih i mehaničkih pojava. Naime, ukoliko se karakteristike oscilacija povećaju iznad dozvoljenih granica, može doći do lomova, velikih šteta pa i katastrofa. Uloga teorije oscilacija u ovom slučaju je da na egzaktan način ukaže na ovakve pojave, kao i na mogućnosti njihovog otklanjanja. S druge strane, ima slučajeva kada oscilatorna kretanja mogu korisno poslužiti, kao naprimjer kod oscilatornih mašina, drobilica, separatora, itd.

1.2. Osnovni pojmovi o oscilatornom kretanju

Kretanje se javlja kao oscilatorno ako se tačka kreće u jednu i njoj suprotnu stranu. Oscilacije su periodične ako se tačka ili posmatrano tijelo, nakon izvjesnog vremenskog intervala, vraća i zauzima isti polazni položaj. Dakle, oscilacije ili vibracije predstavljaju periodično kretanje koje se ponavlja poslije izvjesnog vremenskog intervala. Ovaj vremenski interval se naziva periodom oscilovanja i obično se obilježava sa T .

Najjednostavniji oblik oscilatornog kretanja tačke je, kako je već definisano u kinematici, harmonijsko oscilatorno kretanje. Ono se matematski može iskazati formulom

$$x = R \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (1.1)$$

gdje je ω kružna frekvencija oscilacija, φ_0 početna faza, a veličina R amplituda oscilovanja, Sl.1.1.

Pošto je definisano trigonometrijskom funkcijom (1.1), kretanje je periodično, što znači da će se nakon svakog vremenskog intervala dužine T kretanje ponavljati.

Ovakvo navedeno stanje uočava se, između ostalog, u vremenskim trenucima t_1 i t_2 , Sl. 1.1, pa će biti $x(t_1) = x(t_2)$, itd.

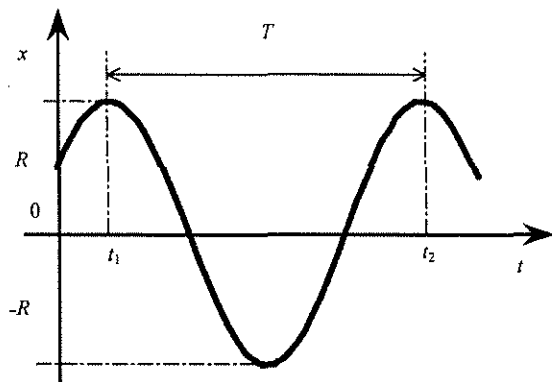
Ovakvi odnosi će važiti ukoliko trenuci t_1, t_2, \dots, t_n zadovoljavaju jednakosti

$$\omega t_1 + \varphi_0 = \omega t_2 + \varphi_0 = \dots = \omega t_n + \varphi_0 + 2\pi, \quad \text{za } n = 1, 2, \dots$$

Najmanji vremenski interval je za $n = 1$, odnosno period oscilovanja će biti

$$T = t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega}$$

i mjeri se u sekundama (s).



Sl. 1.1. Harmonijsko periodično kretanje

Broj oscilacija u sekundi naziva se frekvencija oscilovanja $f = 1/T$, a mjeri se u s^{-1} ili u Hz. Veličina $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ naziva se kružna frekvencija i predstavlja broj oscilacija u vremenu od 2π sekundi.

1.3. Vrste oscilacija

Oscilacije se mogu podijeliti na različite načine i to prema:

- fizičkoj prirodi oscilatornih kretanja,
- karakteru diferencijalnih jednačina,
- uzrocima oscilatornih kretanja,
- veličini amplituda ovih kretanja,
- broju stepeni slobode, itd.

Prema svojoj fizičkoj prirodi oscilacije mogu biti: mehaničke, termodinamičke, električne, akustične, itd. Tako naprimjer, u mehaničke oscilacije spadaju: oscilacije nosača, korita broda, krila aviona, alatnih mašina, lopatica parnih turbina, itd.

U ovom izlaganju obradit će se isključivo mehaničke oscilacije. Kako sve vrste oscilacija imaju određena zajednička svojstva i zakonitosti, to proučavanje mehaničkih oscilacija može korisno poslužiti za izučavanje drugih tipova oscilatornih kretanja. Najznačajnija podjela oscilacija je podjela na linearne i nelinearne oscilacije. Ovakvu podjelu je moguće napraviti i prema karakteru diferencijalnih jednačina kojima se opisuje posmatrani oscilatorni proces. Najpotpunija oblast teorije oscilacija proučava se u linearnoj teoriji oscilacija, gdje se koriste linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima. Kretanja kod nelinearnih oscilacija opisuju se nelinearnim diferencijalnim jednačinama i neće biti predmet ovog izučavanja.

Često se kod nelinearnih procesa, ako je moguće, vrši linearizovanje, mada, posmatrano principijelno, nelinearne zavisnosti se ne mogu linearizovati.

Sljedeća podjela svrstava oscilacije na one sa konačnim i one sa beskonačnim brojem stepeni slobode kretanja.

Tako naprimjer, svako deformabilno tijelo može se posmatrati kao sistem sa beskonačno mnogo stepeni slobode kretanja, pri čemu se posmatraju njegova elastičnost i elementarne mase sistema. Međutim, ako se u sistemu posmatraju tijela koja osciluju kao cjeline, riječ je o sistemu sa konačnim brojem stepeni slobode kretanja.

Zbog toga se pri rješavanju zadataka iz ove dvije oblasti koristi različit matematički aparat. Kod sistema sa konačnim brojem stepeni slobode kretanja koriste se linearne diferencijalne jednačine, dok se kod sistema sa beskonačnim brojem stepeni slobode koriste parcijalne diferencijalne jednačine.

U daljem razmatranju oscilacije se mogu podijeliti na slobodne oscilacije koje nastaju pod dejstvom elastičnih sila i prinudne oscilacije koje nastaju pod dejstvom poremećajnih sila. Ukoliko se u posmatranom sistemu zanemare otpori, onda elastične sile izazivaju slobodne neprigušene oscilacije, dok poremećajne sile izazivaju prinudne neprigušene oscilacije. U tehničkoj praksi se često dešavaju oscilatorna kretanja tako malih amplituda da se skoro ne mogu ni osjetiti, ali ih je moguće registrovati putem instrumenata. Ove oscilacije često se nazivaju malim oscilacijama, o čemu će se kasnije više govoriti.

2.1. Stabilnost ravnoteže sistema u konzervativnom polju

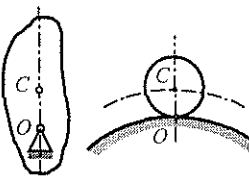
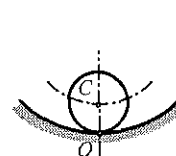
Od ranije je poznato da ravnoteža sistema može biti stabilna, labilna i indiferentna.

Ako se sistem usljed djelovanja sila pomjeri iz položaja ravnoteže, a nakon prestanka djelovanja sila nastoji vratiti u prvobitni položaj, riječ je o stanju stabilne ravnoteže, Sl. 2.1. S druge strane, ako se sistem poslije djelovanja poremećajnih sila nastoji još više udaljiti od prvobitnog položaja, za ovakav položaj ravnoteže se kaže da je labilan, Sl. 2.2. Konačno, ukoliko sistem poslije pomjeranja iz ravnotežnog stanja još uvijek bude u ravnoteži, ovakvo stanje naziva se indiferentnim, Sl. 2.3.

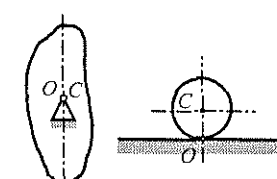
Na slikama 2.1, 2.2 i 2.3 prikazani su slučajevi stabilne, labilne i indiferentne ravnoteže dva sistema, fizičkog klatna i kugle.



Sl. 2.1. Stabilna ravnoteža



Sl. 2.2. Labilna ravnoteža



Sl. 2.3. Indiferentna ravnoteža

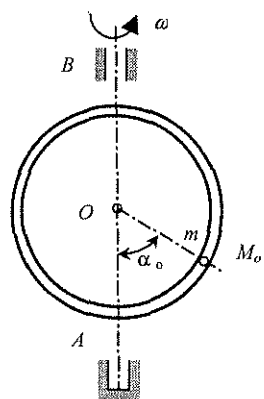
2.1.1. Teorema Ljapunova o stabilnosti kretanja i mirovanja

Ukoliko su veze materijalnog sistema holonomne, idealne i dvostrane, to se određivanje kretanja svodi na matematički zadatak integracije Lagranžovih diferencijalnih jednačina. U suštini, svaki sistem može vršiti oscilatorno kretanje samo oko položaja stabilne ravnoteže.

U tom smislu posmatraće se oscilatorno kretanje koje se vrši u odnosu na drugo kretanje. Na slici 2.4 prikazana je kružna cijev koja se obrće bez trenja oko vertikalnih oslonaca A i B ugaonom brzinom ω . Istovremeno, u cijevi se slobodno i bez trenja kreće kuglica M_o mase m .

Zavisno od veličine ugaone brzine ω , kuglica M_o u cijevi zauzeće neki relativni ravnotežni položaj definisan uglom α_o . Za ovakvo stanje kuglice se kaže da je stacionarno. Ako bi se, međutim, pod istim vanjskim uslovima, poremetilo ovo stacionarno stanje kuglice djelovanjem neke poremećajne sile u pravcu tangente, onda bi kuglica počela oscilovati oko tačke M_o .

Stoga se pri rješavanju postavljenih diferencijalnih jednačina polazi od prepostavke da se ima konačno rješenje i da je dato preko generalisanih koordinata u obliku



$$q_i = \varphi_i(t, q_{i0}, \dots, q_{s0}; \dot{q}_{i0}, \dots, \dot{q}_{s0}),$$

pri čemu rješenje zadovoljava sljedeće početne uslove pri $t = 0$:

$$q_i = q_{i0} \text{ i } \dot{q}_i = \dot{q}_{i0}, \quad i=1, \dots, s,$$

gdje je s broj stepeni slobode kretanja.

Kretanje po ovom zakonu je neporemećeno.

Ukoliko se zadrže isti vanjski uslovi na sistemu, uključujući i generalisane koordinate, a promijene početni uslovi pri $t = 0$, dobiće se

$$q_i = q_{i0}'; \dot{q}_i = \dot{q}_{i0}', \quad i=1, \dots, s.$$

Sl.2.4. Relativno oscilatorno kretanje

Prema novim uslovima u trenutku $t = 0$, ovome odgovara kretanje po zakonu

$$q_i' = \varphi_i'(t, q_{i0}', \dots, q_{s0}'; \dot{q}_{i0}', \dots, \dot{q}_{s0}'), \quad i=1, \dots, s.$$

Kretanje po ovom zakonu je poremećeno.

Razlika ovih kretanja su veličine:

$$\Delta q_{i0} = q_{i0}' - q_{i0}, \quad \Delta \dot{q}_{i0} = \dot{q}_{i0}' - \dot{q}_{i0}, \quad i=1, \dots, s,$$

koje se zovu poremećaji početnih uslova, a vremenske funkcije

$$\Delta q_i = \varphi_i'(t) - \varphi_i(t), \quad i=1, \dots, s,$$

zovu se poremećaji koordinata.

Zato je vrlo važno utvrditi koliko se poremećaji u početnim uslovima odražavaju na konačno poremećeno i neporemećeno kretanje. Ovakva stanja, odnosno stabilnosti sistema, dosta je lako proučiti kad postoji rješenje diferencijalnih jednačina kretanja u funkciji početnih uslova. Međutim u tehni, a posebno u astronomiji, u većini slučajeva ne mogu se dobiti rješenja sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina u eksplicitnom obliku, pa se zadatak znatno usložnjava. Pema Ljapunovu, stabilnost kretanja je određena sljedećom definicijom: kretanje se zove stabilnim ako je za proizvoljno malu veličinu $\varepsilon > 0$ moguće naći odgovarajuće veličine $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ i $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$, takve da pri poremećenim početnim uslovima vrijedi

$$|\Delta q_{i0}| \leq \delta_1, \quad |\Delta \dot{q}_{i0}| \leq \delta_2, \quad i=1, \dots, s,$$

pri čemu za svo vrijeme kretanja sistema poremećaji koordinata zadovoljavaju uslove

$$|\Delta q_i| = |\varphi_i'(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon, \quad i=1, \dots, s.$$

Iz ovog proizilazi da stabilnost neporemećenog kretanja ima sljedeće svojstvo: uvijek je moguće izabrati takve male početne uslove poremećaja da poremećaji koordinata za svo vrijeme kretanja ne izlaze iz unaprijed postavljenih granica.

Stabilnost definisana na ovaj način naziva se obična stabilnost. Ukoliko tokom vremena sve generalisane koordinate teže nuli, kaže se da sistem ima asimptotsku stabilnost. Ovo znači da pri običnoj stabilnosti tačke sistema pri kretanju neće izaći iz unaprijed datih granica, dok pri asimptotskoj stabilnosti tačke sistema teže početnim položajima ravnoteže.

2.2. Linearizacija diferencijalnih jednačina kretanja

Pri postavljanju diferencijalnih jednačina malih oscilacija sistema, generalisane koordinate q_1, q_2, \dots, q_s i generalisane brzine $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ predstavljene su kao male veličine prvog reda. Postupak kojim se vrši odbacivanje nelinearnih članova u diferencijalnim jednačinama kretanja naziva se linearizacija diferencijalnih jednačina. Ovo se prvenstveno odnosi na odbacivanje članova generalisanih koordinata i brzina koji sadrže kvadrat ili viši stepen, tako da se integracijom ovakvih linearnih diferencijalnih jednačina dobija rješenje u zatvorenom obliku. Pošto se linearizacijom problem oscilatornog kretanja svodi na problem takozvanih

malih oscilacija (sa malim amplitudama), time se stvarni problem oscilatornog kretanja ustvari rješava približno, ali dovoljno tačno za male promjene koordinata i odgovarajućih brzina.

Sistemi koji se ovdje posmatraju imaju prvenstveno holonomne, stacionarne, idealne i zadržavajuće veze, tako da je kinetička energija funkcija generalisanih koordinata q_i i generalisanih brzina \dot{q}_i , a potencijalna energija funkcija samo generalisanih koordinata q_i .

Pošto se diferencijalne jednačine formiraju primjenom Lagranžovih jednačina II vrste, to se proces linearizacije može uprositi korištenjem aproksimativnih izraza za kinetičku i potencijalnu energiju.

Kako prvi izvodi $\frac{\partial E_k}{\partial q_i}, \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}, \frac{\partial E_p}{\partial q_i}$, koji su sadržani u Lagranžovim jednačinama II vrste, smanjuju red malih veličina za jedan, to znači da formiranje aproksimativnih funkcija E_k i E_p može ići do malih veličina drugog reda.

2.3. Potencijalna energija

Posmatraće se materijalni sistem na koji djeluju holonomne i stacionarne veze, a koji je određen generalisanim koordinatama. Potencijalna energija u opštem obliku biće funkcija generalisanih koordinata

$$E_p = E_p(q_1, \dots, q_s), \quad (2.1)$$

gdje je s – broj stepeni slobode kretanja.

Ako se potencijalna energija E_p razvije u Maklorenov red po stepenima generalisanih koordinata i s tačnošću do malih veličina drugog reda, dobiće se

$$\begin{aligned} E_p(q_1, \dots, q_s) = & E_p(0, \dots, 0) + \left[\left(\frac{\partial E_p}{\partial q_1} \right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial E_p}{\partial q_2} \right)_0 q_2 + \dots + \left(\frac{\partial E_p}{\partial q_s} \right)_0 q_s \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1^2} \right)_0 q_1^2 + \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_2^2} \right)_0 q_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_s^2} \right)_0 q_s^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0 q_1 q_2 + \right. \\ & + 2 \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1 \partial q_3} \right)_0 q_1 q_3 + \dots + 2 \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1 \partial q_s} \right)_0 q_1 q_s + \dots + 2 \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_{s-1} \partial q_s} \right)_0 q_{s-1} q_s \left. \right] + \\ & + \text{članovi reda višeg od II.} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Gore navedeni izraz može se napisati u kraćem obliku:

$$E_p(q_1, \dots, q_s) = E_p(0, \dots, 0) + \sum_{r=1}^s \left(\frac{\partial E_p}{\partial q_r} \right)_0 q_r + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 q_j q_k + \dots \quad (2.3)$$

Usvajajući pretpostavku da je ravnotežni položaj nulti, to će generalisane koordinate u tom položaju biti jednake nuli, pa će prvi član reda (2.3) biti jednak nuli:

$$E_p(0, \dots, 0) = 0. \quad (2.4)$$

Takođe, u položaju ravnoteže i generalisane site su jednake nuli.

Pošto se posmatra sistem koji je konzervativan, to je

$$Q_r = -\frac{\partial E_p}{\partial q_r} = 0, \quad r=1, 2, \dots, s. \quad (2.5)$$

To znači da su svi linearni članovi u redu (2.2), odnosno u redu (2.3), jednaki nuli

$$\sum_{r=1}^s \left(\frac{\partial E_p}{\partial q_r} \right)_0 = 0. \quad (2.6)$$

Zanemarujući u redu (2.3) sve članove reda višeg od drugog po generalisanim koordinatama, funkcija za potencijalnu energiju sistema izračunava se do male veličine drugog reda. Na taj način dobija se

$$E_p(q_1, \dots, q_s) \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 q_j q_k. \quad (2.7)$$

Ovaj izraz može se pisati u obliku

$$E_p(q_1, \dots, q_s) \approx \frac{1}{2} \sum_{j=k=1}^s c_{jk} q_j q_k, \quad (2.8)$$

pri čemu su uvedene oznake

$$\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 = c_{jk}; \quad c_{jk} = c_{kj}; \quad j \neq k. \quad (2.9)$$

Veličine c_{jk} date izrazom (2.9) nazivaju se koeficijenti generalisane krutosti ili koeficijenti elastičnosti. Izračunavaju se u položaju ravnoteže sistema pri $q_1 = q_2 = \dots = q_s = 0$, pa su stoga svi konstantni i simetrični brojevi $c_{jk} = c_{kj}$ za $j, k = 1, \dots, s, j \neq k$

Izraz za potencijalnu energiju dat jednačinom (2.8) može se pisati u razvijenom obliku:

$$E_p(q_1, \dots, q_s) \approx \frac{1}{2} \left[(c_{11} q_1^2 + c_{22} q_2^2 + \dots + c_{ss} q_s^2) + 2(c_{12} q_1 q_2 + c_{13} q_1 q_3 + \dots + c_{1s} q_1 q_s + c_{23} q_2 q_3 + c_{24} q_2 q_4 + \dots + c_{2s} q_2 q_s + \dots + c_{s-1,s} q_{s-1} q_s) \right].$$

U slučaju kada sistem ima jedan, odnosno dva stepena slobode, funkcija (2.8) iznosi

$$E_p(q_1) \approx \frac{1}{2} c_{11} q_1^2 \approx \frac{1}{2} c q^2,$$

$$E_p(q_1, q_2) \approx \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2).$$

U matricnom obliku potencijalna energija E_p data izrazom (2.8) može se pisati u vidu

$$E_p = \frac{1}{2} \{q\}^T [c] \{q\},$$

gdje su: $\{q\}$ - vektor kolona generalisanih koordinata,

$[c]$ - matrica krutosti,

$\{q\}^T$ - transponovani vektor vektora generalisanih koordinata

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \end{Bmatrix}, \quad \{q\}^T = [q_1 \ \dots \ q_s],$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{ss} \end{bmatrix}.$$

2.4. Lagranž-Dirihleova teorema

U konzervativnom polju, posmatraće se sistem materijalnih tačaka koji je podvrgnut holonomnim, stacionarnim, zadržavajućim i idealnim vezama i ima s stepeni slobode kretanja.

Jednačine ravnoteže konzervativnih sila pod gore navedenim uslovima glase:

$$Q_r = -\frac{\partial E_p}{\partial q_r} = 0, \quad r=1,2,\dots,s. \quad (2.10)$$

Kako je potencijalna energija E_p materijalnog sistema funkcija od svih generalisanih koordinata $q_r, r=1,2,\dots,s$, uslovi (2.10) su potrebni, ali ne i dovoljni za ekstremne vrijednosti potencijalne energije koja zavisi od više promjenljivih. Naime, prema jednačini (2.10) ne može se utvrditi da li je posmatrani položaj materijalnog sistema stabilan ili nestabilan.

Dopuna jednačine (2.10) izvršena je Lagranž-Dirihleovom teoremom.

Teorema glasi:

Za materijalni sistem koji se nalazi u polju konzervativnih sila, a podvrgnut je holonomnim, stacionarnim, zadržavajućim i idealnim vezama, potencijalna energija ima minimum ako je položaj ravnoteže stabilan.

Polazeći od ranije uvedene pretpostavke da je položaj stabilne ravnoteže sistema istovremeno i nulti položaj, tj. $E_p = 0$, proizilazi da će u blizini položaja stabilne ravnoteže uvijek biti

$$E_p > 0. \quad (2.11)$$

Iz ovoga se može dobiti i drugačije tumačenje Lagranž-Dirihleove teoreme, koje glasi:

Ako je pri svakom dovoljno malom pomjeranju sistema iz posmatranog položaja ravnoteže prirastaj potencijalne energije pozitivan, onda je taj položaj ravnoteže stabilan.

Iz Lagranž-Dirihleove teoreme proizilazi i Toričelijev princip, koji glasi:

Položaj materijalnog sistema jeste položaj stabilne ravnoteže ako njegov centar inercije zauzima najniži položaj od svih mogućih.

Izraz (2.8) predstavlja homogenu pozitivnu definitnu kvadratnu formu generalisanih koordinata sa konstantnim koeficijentima. Pošto je izraz za potencijalnu energiju sistema uvijek pozitivan, a izraz (2.8) jednak nuli tek kada su sve promjenljive jednake nuli u položaju stabilne

ravnoteže, to je i kvadratna forma (2.8) uvijek pozitivna. Ovaj zaključak je izveden koristeći izraz dat jednačinom (2.11).

Kod sistema sa jednim stepenom slobode kretanja, potencijalna energija će biti funkcija samo od jedne promjenljive:

$$E_p = f(q). \quad (2.12)$$

Zato se utvrđivanje minimuma potencijalne energije u položaju stabilne ravnoteže, prema Lagranž-Dirihleovoj teoremi, može izvesti korištenjem uslova da vrijednosti funkcije od jedne promjenljive budu minimalne:

$$\frac{\partial E_p}{\partial q} = 0, \quad q = q_0 \quad (2.13)$$

$$\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q^2} \right)_{q=q_0} > 0.$$

Jednačine (2.13) koriste se pri rješavanju zadataka o stabilnosti ravnoteže sistema sa jednim stepenom slobode kretanja u konzervativnom polju sila.

Iako Lagranž-Dirihleova teorema važi i za sisteme sa konačnim brojem stepeni slobode kretanja, zbog matematičkih poteškoća ona se praktično koristi samo za sisteme sa jednim stepenom slobode kretanja.

2.5. Kriterijum Silvestera

Kako je prethodno rečeno, primjena Lagranž-Dirihleove teoreme o stabilnosti materijalnog sistema sa više stepeni slobode kretanja je relativno dosta komplikovana. Ovo se prevazilazi kriterijumom Silvestera, koji se u suštini zasniva na rješavanju znaka proizvoljne kvadratne forme.

Teorema Silvestera glasi:

Da bi kvadratna forma potencijalne energije bila pozitivno definitna (pozitivno određena), potrebno je da svi glavni minor kvadratne forme budu pozitivni.

Dokaz ovog stava se neće ovdje izvoditi, nego će se dati samo njegovo tumačenje.

Matrica kvadratne forme glasi

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{ss} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Diskriminanta kvadratne forme $E_p = E_p(q_1, \dots, q_2)$ je eliminanta sistema homogenih linearnih jednačina:

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial E_p}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial E_p}{\partial q_s} = 0$$

i predstavlja determinantu reda s .

Kako pozitivna kvadratna forma ima oblik (2.8), to je prema kriterijumu Silvestera, pored uslova ravnoteže (2.13), potrebno da budu zadovoljeni i sljedeći uslovi oblika nejednakosti da bi ravnoteža bila stabilna:

$$\Delta_1 = c_{11} > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad (2.15)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_s = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{ss} \end{vmatrix} > 0.$$

Na ovaj način, kriteriji za pozitivnu definitnu kvadratnu formu se mogu pisati jednostavnije u obliku:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_s > 0. \quad (2.16)$$

Koeficijenti krutosti c_{jk} u navedenim uslovima glase:

$$c_{11} = \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1^2} \right)_0, \quad c_{22} = \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_2^2} \right)_0, \quad \dots,$$

$$c_{12} = \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0, \quad c_{21} = \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_2 \partial q_1} \right)_0, \quad \dots,$$

pri čemu je, svakako, $c_{kj} = c_{jk}$ za $k \neq j$.

Dakle, jedan sistem sa većim brojem stepeni slobode biće u položaju stabilne ravnoteže ako je zadovoljen određeni odnos između parametara sistema, pri čemu će svakom priraštaju generalisane koordinate odgovarati pozitivan priraštaj potencijalne energije. S porastom stepeni slobode, broj uslova će se u istom odnosu povećavati.

Naprimjer, materijalni sistem sa dva stepena slobode kretanja biće u položaju stabilne ravnoteže, ako su zadovoljeni sljedeći uslovi:

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial E_p}{\partial q_2} = 0; \quad (2.17)$$

$$c_{11} = \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1^2} \right)_0 > 0, \quad (c_{11}c_{22} - c_{12}^2) = \left[\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1^2} \right)_0 \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_2^2} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0^2 \right] > 0.$$

2.6. Prva i druga teorema Ljapunova o nestabilnosti ravnoteže

Na osnovu Lagranž-Dirihleove teoreme i kriterija Silvestera može se odrediti uslov za stabilnost ravnoteže konzervativnog sistema. Međutim, u slučaju da potencijalna energija nema minimum u položaju ravnoteže, ne može se odrediti da li će ravnoteža biti stabilna ili nestabilna.

Odgovor na ovo pitanje daju dvije teoreme Ljapunova, koje se ovdje neće dokazivati.

Prva teorema glasi:

Ravnoteža konzervativnog sistema je nestabilna ako funkcija potencijalne energije, koja je određena članovima drugog reda i razvijena u red po stepenima, nema minimum.

Prema ovoj teoremi, nije potrebno uzimanje članova reda višeg od drugog pri razvijanju funkcije E_p .

Druga teorema glasi:

Položaj sistema je labilan ako funkcija potencijalne energije u tom položaju ima maksimum.

Ova teorema pokazuje da se položaj maksimuma potencijalne energije može odrediti i na osnovu članova prvog reda, kao naprimjer u slučaju kada ne postoje članovi drugog reda u redu za potencijalnu energiju.

2.7. Kinetička energija sistema

Posmatraće se sistem od n materijalnih tačaka koji je određen sa $2n$ Dekartovih koordinata x_i, y_i, z_i i podvrgnut djelovanju idealnih holonomnih veza.

Ukoliko postoji k veza, njihove jednačine u opštem smislu se mogu pisati u obliku:

$$f_\alpha(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) \quad (2.18)$$

gdje je $\alpha=1, 2, \dots, k$.

Kao što se vidi, ovaj sistem ima $s = 3n - k$ nezavisnih koordinata ili stepena slobode.

Na osnovu prethodnog proizilazi da se sistem može definisati sa s generalisanih koordinata $q_i, i=1, 2, \dots, s$.

Vektori položaja tačaka sistema $\vec{r}_i, i=1, \dots, n$, zavise u opštem smislu od generalisanih koordinata i vremena

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_s, t), \quad i=1, \dots, n.$$

Poznato je da ovim vektorskim jednačinama odgovara $3n$ skalarnih jednačina.

Kinetička energija materijalnog sistema glasi:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2. \quad (2.19)$$

Pošto je vektor brzine i -te tačke dat u obliku:

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

i uzevši u obzir da je $v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$, izraz za kinetičku energiju se može pisati u obliku

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2. \quad (2.20)$$

Ukoliko se izvrši kvadriranje, može se pisati da je

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3}, \quad (2.21)$$

gdje su:

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \right)^2 \dot{q}_1^2 + \dots + \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \right)^2 \dot{q}_s^2 + \right. \\ \left. 2 \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + 2 \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_{s-1}} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_{s-1} \dot{q}_s \right],$$

$$E_{k2} = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \dot{q}_s \right), \quad E_{k3} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right)^2.$$

Uvođenjem oznaka

$$A_{jk} = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right), \\ B_k = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right), \quad (2.22) \\ E_{k3} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right)^2,$$

funkcije E_{k1} i E_{k2} se mogu pisati u vidu

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad E_{k2} = \sum_{k=1}^s B_k \dot{q}_k. \quad (2.23)$$

Kako je $A_{jk} = A_{kj}$, $j \neq k$, tj. ako važi zakon komutacije, može se zaključiti da su ovi koeficijenti simetrični u odnosu na svoje indekse.

Očigledno je da koeficijenti A_{jk} i B_k zavise od generalisanih koordinata q_i , $i=1, \dots, s$, i vremena t , a ne zavise od generalisanih brzina \dot{q}_i , $i=1, \dots, s$.

Ako su veze stacionarne, svi vektori $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$ su jednaki nuli, pa su i kinetičke energije E_{k2} i E_{k3}

jednake nuli. Zato u izrazu za E_k ostaje samo E_{k1} u obliku kvadratne forme po generalisanim brzinama, pa se dobija

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (2.24)$$

Ovaj izraz predstavlja homogenu kvadratnu formu generalisanih brzina sa promjenljivim koeficijentima A_{jk} , koji su određeni izrazom

$$A_{jk} = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right). \quad (2.25)$$

Ovi koeficijenti imaju osobinu da je $A_{jk} = A_{kj}$, $j \neq k$, a nazivaju se još i koeficijenti inercije i zavise isključivo od generalisanih koordinata položaja tačaka sistema

$$A_{jk} = f(q_1, q_2, \dots, q_s). \quad (2.26)$$

Na osnovu gore navedenog, kinetička energija je funkcija generalisanih koordinata i generalisanih brzina

$$E_k = f(q_1, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s). \quad (2.27)$$

Gore navedene konstatacije odnose se na generalni slučaj kretanja sistema. Međutim, ovdje se postavlja pitanje u vezi sa ponašanjem sistema pri malim oscilacijama oko ravnotežnog položaja.

Za postavljanje diferencijalnih jednačina oscilovanja koriste se Lagranžove jednačine II vrste, pa kinetičku energiju treba aproksimirati polinomom drugog reda po promjenljivim q_i i \dot{q}_i , $i=1, \dots, s$, sa malim veličinama prvog reda ili u obliku kvadratne forme drugog reda po navedenim promjenljivim veličinama.

U tom cilju koeficijenti A_{jk} će se razviti u Maklorenov red po stepenima od generalisanih koordinata, pa se dobija

$$A_{jk}(q_1, \dots, q_s) = A_{jk}(0, \dots, 0) + \left[\left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial q_1} \right)_0 q_1 + \dots + \left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial q_s} \right)_0 q_s \right] + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 A_{jk}}{\partial q_1^2} \right)_0 q_1^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 A_{jk}}{\partial q_s^2} \right)_0 q_s^2 + 2 \left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0 q_1 q_2 + \dots + 2 \left(\frac{\partial^2 A_{jk}}{\partial q_{s-1} \partial q_s} \right)_0 q_{s-1} q_s \right] + \text{članovi višeg reda} \quad (2.28)$$

Izraz (2.28) se može napisati u kraćem obliku:

$$A_{jk}(q_1, \dots, q_s) = A_{jk}(0, \dots, 0) + \sum_{r=1}^s \left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial q_r} \right)_0 q_r + \frac{1}{2} \sum_{j=k=1}^s \left(\frac{\partial^2 A_{jk}}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 q_j q_k. \quad (2.29)$$

Da bi kinetička energija bila izračunata sa tačnošću do malih veličina drugog reda, to se u redovima (2.28) i (2.29) treba zadržati samo na prvim konstantnim članovima. Ako se prvi konstantni članovi ovih redova obilježe sa a_{jk} , dobiće se:

$$A_{jk}(q_1, q_2, \dots, q_s) = A_{jk}(0, 0, \dots, 0) = a_{jk} \quad (2.30)$$

Na osnovu ovoga će izraz (2.24) za kinetičku energiju sistema preći u aproksimativni oblik

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (2.31)$$

Za konstante a_{jk} vrijedi $a_{jk} = a_{kj}$, $k \neq j$.

Ove konstante nazivaju se koeficijentima inercije sistema, a njihova dimenzija zavisi od dimenzija generalisanih koordinata.

Poznato je da je kinetička energija po svom obliku definisanja uvijek pozitivna veličina

$$E_k > 0. \quad (2.32)$$

Na osnovu navedenog može se zaključiti da E_k predstavlja homogenu kvadratnu formu generalisanih brzina sa konstantnim koeficijentima.

Zbog toga će se u slučaju malih oscilacija sistema izraz za Lagranžovu jednačinu II vrste donekle pojednostaviti.

Naime, pošto u ovom slučaju E_k ne zavisi od generalisanih koordinata, odnosno

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_r} = 0, \quad r=1, \dots, s, \quad (2.33)$$

to se Lagranžova jednačina II vrste može pisati u obliku

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_r} = Q_r, \quad i=1, \dots, s. \quad (2.34)$$

Ukoliko sistem vrši male oscilacije u konzervativnom polju sila, generalisana sila se dobije kao parcijalni izvod E_p po generalisanoj koordinati, pa se dobija Lagranžova jednačina II vrste u obliku

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial E_p}{\partial q_r} = 0, \quad r=1, \dots, s. \quad (2.35)$$

Izraz za kinetičku energiju materijalnog sistema sa više stepeni slobode kretanja iz praktičnih razloga pogodno je iskazati u matričnoj formi. Matrični oblik izraza (2.31) za kinetičku energiju materijalnog sistema glasi

$$E_k = \frac{1}{2} \{ \dot{q} \}^T [a] \{ \dot{q} \}, \quad (2.36)$$

gdje su: $\{ \dot{q} \}$ - vektor-kolona generalisanih brzina, $\{ \dot{q} \}^T$ - njemu transponovani vektor i $[a]$ - inercijska matrica ili matrica masa, tj.

$$\{ \dot{q} \} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_s \end{Bmatrix}, \quad \{ \dot{q} \}^T = \{ \dot{q}_1 \dots \dot{q}_s \}, \quad (2.37)$$

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{bmatrix},$$

gdje je

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = A_{jk} (0, 0, \dots, 0).$$

Po istoj analogiji se pišu odgovarajuće matrice za sisteme sa jednim, dva ili više stepeni slobode.

Tako naprimjer, za sisteme sa jednim, odnosno dva stepena slobode, biće

$$E_k(\dot{q}_1) = \frac{1}{2} \{\dot{q}_1\}^T [a_{11}] \{\dot{q}_1\} = \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}_1^2,$$

odnosno

$$E_k(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2).$$

2.8. Relejeva funkcija rasipanja

U uvodnom izlaganju pomenute su među vrstama oscilacija i prigušene oscilacije.

Kada su sile otpora proporcionalne prvim stepenima brzine tačaka sistema, generalisane sile koje nastaju usljed takvih sila otpora mogu se odrediti preko funkcije rasipanja, odnosno disipativne Relejeve funkcije.

Posmatraće se slučaj kada na i -tu tačku sistema djeluje sila otpora viskoznog trenja, koja je određena izrazom:

$$\bar{F}_{wi} = -\beta_i \bar{v}_i, \quad (2.38)$$

gdje su: β_i - pozitivan konstantan koeficijent, \bar{v}_i - brzina posmatrane tačke.

Generalisane sile, kao što je poznato, mogu se odrediti pomoću izraza

$$Q_r = \sum_{i=1}^n \left(\bar{F}_i, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_r} \right) = \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_r} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \right), \quad (2.39)$$

gdje su: \bar{r}_i - vektor položaja napadne tačke sile \bar{F}_i , koja djeluje na i -tu tačku, a x_i , y_i i z_i pripadajuće koordinate.

Generalisana sila koja potiče od sile otpora \bar{F}_w dobija se polazeći od izraza (2.38), a određuje se na analogan način:

$$Q_r^w = \sum_{i=1}^n \left(\bar{F}_{wi} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_r} \right) = \sum_{i=1}^n \left(X_{wi} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + \dots + Z_{wi} \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \right). \quad (2.40)$$

Kod izvođenja Lagranžovih jednačina II vrste koriste se izrazi

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_r}, \quad r=1, \dots, s,$$

odnosno

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial x_i}{\partial q_r}, \quad \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial y_i}{\partial q_r}, \quad \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial z_i}{\partial q_r}. \quad (2.41)$$

Imajući u vidu jednakosti (2.38) i (2.41), generalisane sile se mogu napisati:

$$Q_r^w = -\sum_{i=1}^n \beta_i \left(\bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_r} \right) = -\sum_{i=1}^n \beta_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_r} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_r} \right), \quad r=1, \dots, s, \quad (2.42)$$

ili

$$Q_r^w = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r} \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{\bar{v}_i^2}{2}, \quad r=1, \dots, s,$$

odnosno

$$Q_r^w = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \beta_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2), \quad r=1, \dots, s. \quad (2.43)$$

Funkcija

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \beta_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \beta_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \quad (2.44)$$

naziva se funkcija rasipanja ili disipativna funkcija Releja. Iz izraza (2.44) se vidi da je ova funkcija uvijek pozitivna

$$\Phi > 0. \quad (2.45)$$

Na osnovu gore navedenog, generalisane sile koje nastaju usljed djelovanja sila otpora proporcionalnih prvim stepenima brzine tačke sistema mogu se iskazati preko funkcije rasipanja na sljedeći način

$$Q_r^w = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_r}, \quad r=1, \dots, s. \quad (2.46)$$

Polazeći od funkcije rasipanja određene izrazom

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \beta_i (\bar{v}_i, \bar{v}_i) \quad (2.47)$$

i uvrštavanjem izraza za brzinu (2.47)

$$\bar{v}_i = \sum_{r=1}^s \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_r} \dot{q}_r, \quad (2.48)$$

dobiće se, pošto su veze stacionarne, funkcija rasipanja u obliku

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s B_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (2.49)$$

gdje su koeficijenti B_{jk} određeni izrazima:

$$B_{jk} = \sum_{i=1}^n \beta_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right), \quad (2.50)$$

pri čemu je $B_{jk} = B_{kj}$, $k \neq j$.

Koeficijenti B_{jk} zavise od generalisanih koordinata. Ako se ovi koeficijenti, slično kao A_{jk} , razviju u Maklorenov red po generalisanim koordinatama q_r , $r=1, \dots, s$, dobiće se u slučaju prigušenih oscilacija izraz za funkciju rasipanja

$$\Phi \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (2.51)$$

gdje su $b_{jk} = B_{jk}(0, \dots, 0)$ konstantni koeficijenti.

Koeficijenti b_{jk} se nazivaju koeficijenti prigušenja, pri čemu važi odnos $b_{jk} = b_{kj}$, $k \neq j$.

Funkcija rasipanja (2.51) može se prikazati i u razvijenom obliku

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[(b_{11} \dot{q}_1^2 + b_{22} \dot{q}_2^2 + \dots + b_{ss} \dot{q}_s^2) \right] + 2 \left[b_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + b_{13} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \dots + b_{1s} \dot{q}_1 \dot{q}_s + b_{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + b_{24} \dot{q}_2 \dot{q}_4 + \dots + b_{s-1,s} \dot{q}_{s-1} \dot{q}_s \right] \quad (2.52)$$

Izrazi (2.51) i (2.52) predstavljaju aproksimativni oblik funkcije rasipanja, koja je istovremeno homogena kvadratna forma generalisanih brzina sa konstantnim koeficijentima.

Kvadratne forme (2.51) i (2.52) su pozitivne i definite. U slučaju da sistem ima jedan, dva ili tri stepena slobode kretanja, funkcija rasipanja ima oblik

$$\begin{aligned} \Phi(\dot{q}_1) &\approx \frac{1}{2} b_{11} \dot{q}_1^2 = \frac{1}{2} b \dot{q}^2, \\ \Phi(\dot{q}_1, \dot{q}_2) &\approx \frac{1}{2} (b_{11} \dot{q}_1^2 + 2 b_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + b_{22} \dot{q}_2^2), \\ \Phi(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) &\approx \frac{1}{2} [b_{11} \dot{q}_1^2 + b_{22} \dot{q}_2^2 + b_{33} \dot{q}_3^2 + 2(b_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + b_{13} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + b_{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3)]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

U slučaju da sistem vrši male oscilacije, funkcija rasipanja, kao i kinetička energija, zavisi od generalisane brzine

$$\Phi = f(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s). \quad (2.54)$$

Prema ovome, Lagranžove jednačine II vrste za slučaj da sistem vrši male prigušene oscilacije glase:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial E_p}{\partial q_r} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_r} = 0, \quad r=1, \dots, s. \quad (2.55)$$

Funkcija rasipanja Φ prema izrazu (2.51) se može prikazati u matričnom obliku

$$\Phi = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [b] \{\dot{q}\}, \quad (2.56)$$

gdje su:

$$[b] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & \dots & \dots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{ss} \end{bmatrix}, \quad \{\dot{q}\}^T = \{\dot{q}_1 \dots \dot{q}_s\}, \quad \{\dot{q}\} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_s \end{Bmatrix}.$$

2.9. Neka svojstva kvadratne forme

Pojam definitnosti, odnosno pozitivno definitne kvadratne forme, često se susreće u mehanici, tj. pri njenoj praktičnoj primjeni u teoriji oscilacija, teoriji stabilnosti itd.

Kvadratna forma promjenljivih q_1, q_2, \dots, q_s je funkcija drugog reda oblika

$$V = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s d_{jk} q_j q_k, \quad d_{jk} = d_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, s.$$

Tako naprimjer, za funkciju sa dvije promjenljive q_1 i q_2 kvadratna forma ima oblik

$$V = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 d_{jk} q_j q_k = d_{11} q_1^2 + d_{22} q_2^2 + 2d_{12} q_1 q_2.$$

Determinanta sastavljena od koeficijenata forme oblika

$$\Delta_s = \Delta = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1s} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{s1} & d_{s2} & \dots & d_{ss} \end{vmatrix},$$

zove se diskriminanta kvadratne forme.

Kvadratna forma je definitna (određena) ako je jednaka nuli kada su sve promjenljive jednake nuli.

Kvadratna forma je pozitivno definitna ako je pozitivna za sve vrijednosti promjenljivih, a koje nisu istovremeno sve jednake nuli.

U tom smislu može se postaviti sistem homogenih linearnih jednačina:

$$\sum_{j=1}^s d_{jk} q_j = 0, \quad k=1, \dots, s.$$

Očigledno je da ovaj sistem ima uvijek nulto rješenje $q_j = 0$, $j=1, \dots, s$, a ukoliko je $\Delta = 0$, sistem ima rješenje različito od nule.

Ako se rješenja jednačina označe sa q'_j , $i=1, \dots, s$, dobiće se

$$\sum_{j=1}^s d_{jk} q'_j = 0, \quad k=1, \dots, s,$$

a to je sistem u kojem nisu sve promjenljive jednake nuli.

Množenjem jednačina sa q'_k za $k=1, \dots, s$ i njihovim sabiranjem dobiće se

$$V = \sum_{k=1}^s q'_k \sum_{j=1}^s d_{jk} q'_j = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s d_{jk} q'_j q'_k = 0.$$

Ovim izvođenjem se pokazalo da je kvadratna forma V jednaka nuli ako su vrijednosti promjenljivih q'_1, \dots, q'_s i pri uslovu da je $\Delta = 0$.

Međutim, kod pozitivno određene forme ovo nije moguće i za nju važi da je $\Delta \neq 0$.

Bez daljih dokazivanja, navešće se još i to da je kvadratna forma pozitivno definitna ako su ispunjeni uslovi:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_s > 0.$$

Kvadratna forma je negativno definitna ako su:

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0, \dots, \Delta_s < 0.$$

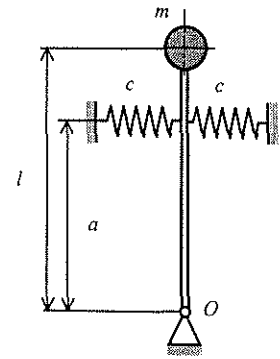
2.10. Primjeri

Primjer br. 1.

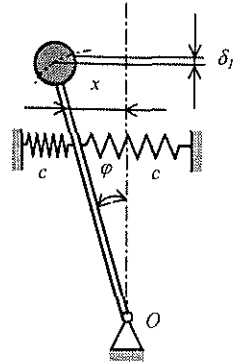
Klatno prikazano na slici 2.5 sastoji se od krutog štapa, dužine l i zanemarljive mase, na čijem kraju se nalazi masa m . Štap se može slobodno obrtati oko tačke O , a u vertikalnom položaju ga održavaju dvije horizontalne opruge krutosti c , koje su uvršćene na odstojanju a od oslonca. Koliko mora biti odstojanje a pa da vertikalni ravnotežni položaj klatna bude stabilan?

Rješenje:

Sistem ima jedan stepen slobode. Generalisana koordinata je ugao φ , koji se mjeri zakretanjem štapa od vertikalnog ravnotežnog položaja, Sl. 2.6.



Sl. 2.5. Klatno u ravnotežnom položaju



Sl. 2.6. Položaj generalisane koordinate klatna

Potencijalna energija je u vezi sa pomjeranjem mase m

$$E_{p1} = -mg\delta_1 = -mg(l - l \cos \varphi)$$

i potencijalnom energijom opruga

$$E_{p2} = 2 \int_0^x c x dx \quad (a)$$

Kako je $x = a \sin \varphi$, to je $dx = a d(\sin \varphi)$, pa se dobija

$$E_{p2} = 2ca^2 \int_0^\varphi \sin \varphi d(\sin \varphi) = ca^2 \sin^2 \varphi \quad (b)$$

Ukupna potencijalna energija sistema iznosi

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} = ca^2 \sin^2 \varphi - mgl + mgl \cos \varphi \quad (c)$$

Stabilan položaj ravnoteže određuje se primjenom Lagranž-Dirihleove teoreme. U tom smislu potrebno je naći prvi i drugi izvod potencijalne energije po generalisanoj koordinati:

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = (2ca^2 \cos \varphi - mgl) \sin \varphi \quad (d)$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi^2} = 2ca^2 \cos^2 \varphi - 2ca^2 \sin^2 \varphi - mgl \cos \varphi \quad (e)$$

Iz uslova $\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0$, dobijaju se dva položaja ravnoteže:

- 1) $\sin \varphi_1 = 0, \varphi_1 = 0$;
- 2) $2ca^2 \cos \varphi_2 - mgl = 0, \cos \varphi_2 = \frac{mgl}{2ca^2}$.

Da bi ravnotežni položaj bio stabilan, prema Lagranž-Dirihleovoj teoremi mora biti zadovoljen uslov $\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi^2} > 0$.

Za prvi slučaj biće

$$\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_1} = 2ca^2 - mgl > 0, \quad (f)$$

pa se može odrediti

$$a > \sqrt{\frac{mgl}{2c}} \quad (g)$$

Dakle, vertikalni položaj štapa je ravnotežni, a da bi bio stabilan rastojanje a mora zadovoljiti nejednakost (g).

U drugom slučaju je $\cos \varphi_2 = \frac{mgl}{2ca^2}$, pa se dobija

$$\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_2} = \frac{(mgl)^2}{2ca^2} - 2ca^2 > 0. \quad (h)$$

Uslov da ravnotežni položaj φ_2 bude stabilan je

$$a < \sqrt{\frac{mgl}{2c}} \quad (i)$$

Primjer br. 2

Odrediti uslove pod kojima će ravnotežni položaj sistema sa dva stepena slobode kretanja biti stabilan, ako je potencijalna energija tog sistema data izrazom

$$E_p = \frac{1}{2}(kx^2 - 2mxy + ny^2),$$

gdje su x i y generalisane koordinate, a k , m i n pozitivne konstante.

Rješenje:

Za sistem sa konačnim brojem stepeni slobode, utvrđivanje stabilnog položaja ravnoteže traženjem prvog i drugog izvoda potencijalne energije, odnosno njenog minimuma, često je matematski veoma komplikovano. Zato je za rješavanje ovih zadataka preporučljivije koristiti kriterijum Silvestera. Ako je položaj ravnoteže stabilan, tada je potencijalna energija sistema definitna kvadratna forma. Kriterijum Silvestera tvrdi: da bi kvadratna forma bila pozitivno definitna, potrebno je i dovoljno da svi glavni minori njene diskriminante budu pozitivni.

U ovom slučaju potencijalna energija ima oblik

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s c_{jk} q_j q_k, \quad s - \text{broj stepeni slobode,} \quad (a)$$

$$c_{kj} = c_{jk} = \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0, \quad \text{koeficijenti krutosti.} \quad (b)$$

Da bi potencijalna energija bila pozitivno definitna, mora biti:

$$c_{11} > 0 \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0. \quad (b)$$

Koeficijenti krutosti su:

$$c_{11} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1^2} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} = k, \quad c_{22} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_2^2} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial y^2} = n, \quad (c)$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} = -m,$$

a uslovi stabilnosti položaja ravnoteže su:

$$c_{11} = k > 0, \quad (d)$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & -m \\ -m & n \end{vmatrix} > 0, \quad kn - m^2 > 0$$

Primjer br. 3

Odrediti uslove pozitivne definitnosti potencijalne energije sistema koji izvodi male oscilacije oko položaja ravnoteže $q_1 = q_2 = q_3 = 0$.

Rješenje:

Potencijalna energija u ovom slučaju ima oblik

$$E_p = \frac{1}{2} \{q\}^T [c] \{q\} = \frac{1}{2} \{q_1 \ q_2 \ q_3\} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \quad (a)$$

$$= \frac{1}{2} c_{11} q_1^2 + \frac{1}{2} c_{22} q_2^2 + \frac{1}{2} c_{33} q_3^2 + c_{12} q_1 q_2 + c_{13} q_1 q_3 + c_{23} q_2 q_3.$$

Ovaj izraz prikazat će se u obliku

$$E_p = An_1^2 + Bn_2^2 + Cn_3^2, \quad (b)$$

koji je podesniji za analizu. Grupisanjem članova u izrazu (a) i formiranjem potpunih kvadrata, dobija se

$$2E_p = c_{11} \left(q_1^2 + 2 \frac{c_{12}}{c_{11}} q_1 q_2 + 2 \frac{c_{13}}{c_{11}} q_1 q_3 \right) + c_{22} q_2^2 + c_{33} q_3^2 + 2c_{23} q_2 q_3 =$$

$$= c_{11} \left(q_1 + \frac{c_{12}}{c_{11}} q_2 + \frac{c_{13}}{c_{11}} q_3 \right)^2 + \left(c_{22} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right) q_2^2 + 2 \left(c_{23} - \frac{c_{12} c_{13}}{c_{11}} \right) q_2 q_3 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} \right) q_3^2 = c_{11} \left(q_1 + \frac{c_{12}}{c_{11}} q_2 + \frac{c_{13}}{c_{11}} q_3 \right)^2 + \\
& + \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{11}} \left(q_2^2 + 2 \frac{c_{11}c_{23} - c_{12}c_{13}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} q_2 q_3 \right) + \left(c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} \right) q_3^2 = \\
& = c_{11} \left(q_1 + \frac{c_{12}}{c_{11}} q_2 + \frac{c_{13}}{c_{11}} q_3 \right)^2 + \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{11}} \left(q_2 + \frac{c_{11}c_{23} - c_{12}c_{13}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} q_3 \right)^2 + \\
& + \left[\frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{11}} - \frac{(c_{11}c_{23} - c_{12}c_{13})^2}{c_{11}(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)} \right] q_3^2.
\end{aligned} \tag{c}$$

Upoređujući (b) i (c), vidi se da su tražene vrijednosti:

$$\begin{aligned}
n_1 = q_1 + \frac{c_{12}}{c_{11}} q_2 + \frac{c_{13}}{c_{11}} q_3, \quad n_2 = q_2 + \frac{c_{11}c_{23} - c_{12}c_{13}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} q_3, \quad n_3 = q_3, \\
A = c_{11} = \Delta_1,
\end{aligned} \tag{d}$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}}{c_{11}} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{11}} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad C = \frac{1}{\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2},$$

gdje su Δ_1, Δ_2 i Δ_3 glavni minori matrice $[c]$ (vidjeti (a)).

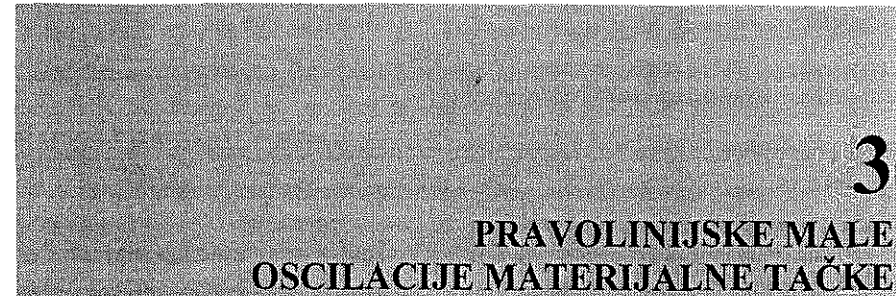
Iz izraza (b) slijedi da je $E_p > 0$ za bilo kakve n_1, n_2, n_3 (osim za istovremeno jednake nuli) ako su $A > 0, B > 0$ i $C > 0$, što je na osnovu relacije (d) ekvivalentno sa

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0. \tag{e}$$

Uslovi (e) predstavljaju Silvesterov kriterijum za sistem sa tri stepena slobode.

Za sisteme sa n stepeni slobode, mogu se identičnim, ali matematski zahtjevnijim postupkom, dobiti uslovi stabilnosti u obliku

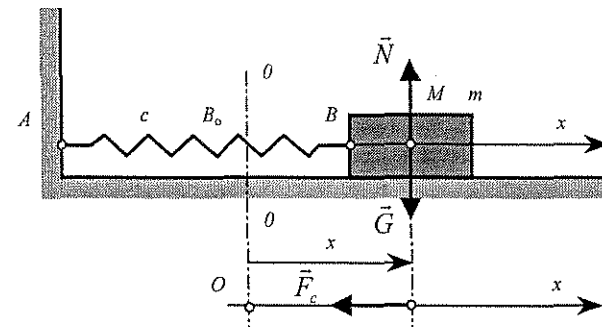
$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0.$$



3.1. Slobodne neprigušene oscilacije

Male oscilacije materijalnih sistema su često prisutne, a samim tim i veoma značajne u mašingradnji. Kako se u skoro svim mašinama dešavaju određeni dinamički procesi, svi dijelovi konstrukcije su u tom smislu izloženi oscilatornom kretanju. Pošto su konstrukcione izvedbe mašina dovoljno čvrste i dimenzionisane tako da se sve deformacije nalaze u području elastičnosti uz odgovarajući stepen sigurnosti, to su i oscilovanja mala i vrše se oko ravnotežnih položaja.

Kod razmatranja malih pravolinijskih oscilacija, posmatraće se slučaj pravolinijskog oscilatornog kretanja materijalne tačke. Ovo kretanje objasniće se na modelu koji je predstavljen na slici 3.1.



Sl. 3.1. Pravolinijsko oscilatorno kretanje

Pravolinijsko oscilatorno kretanje materijalne tačke nastaje kada se tačka M , mase m , otkloni od svog ravnotežnog položaja, pa na nju djeluje sila \vec{F}_c koja nastoji da je vrati u

polazni položaj. Kao što je prikazano na slici 3.1, sila \vec{F}_c djeluje duž prave Ox i naziva se sila uspostavljanja ili restitucije, a zavisi od rastojanja tačke M od ravnotežnog položaja i usmjerena je u stranu suprotnu od otklona tačke.

Priroda sile restitucije može biti različita. U tehnici je najčešći slučaj kada je sila restitucije po intezitetu linearno srazmjerna rastojanju tačke od položaja ravnoteže, $F_c = c \overline{OM}$, gdje je c koeficijent proporcionalnosti. Ovakav slučaj nalazi se kod svih konstrukcija koje se deformišu u području elastičnosti. U ovom primjeru usvojena je elastična opruga, kod koje sila restitucije zavisi linearno od deformacije opruge $F_c = c x$ i mijenja se po Hukovom zakonu. U ovom slučaju koeficijent proporcionalnosti c naziva se koeficijentom krutosti ili koeficijentom elastičnosti, a ima dimenziju $[F/L]$.

Materijalna tačka pod dejstvom prinudne sile restitucije vrši slobodne oscilacije. Pri ovom razmatranju reakcija veze \vec{N} , odnosno uticaj vlastite težine \vec{G} materijalne tačke na podlogu, a samim tim i trenje su zanemareni.

U položaju statičke ravnoteže tačka M se nalazi u O i vezana je nedeformisanom oprugom krutosti c u tački B_o , dok se sile \vec{G} i \vec{N} međusobno uravnotežuju.

Ukoliko se tačka M izvede iz ravnotežnog položaja, osim sila \vec{G} i \vec{N} koje su uravnotežene, na tačku djeluje i sila elastičnosti $\vec{F}_e = \vec{F}_c$, koja nastoji da vrati tačku u ravnotežni položaj. Kao što je pokazano na slici 3.1, tačka M se kreće po pravolinijskoj trajektoriji, pa će se za početak ose x usvojiti ravnotežni položaj O . Projekciju na osu x ima samo sila restitucije \vec{F}_c , koja zavisi direktno od rastojanja tačke M od koordinatnog početka. Tako naprimjer, ako se u nekom trenutku tačka M nalazi na udaljenosti x od tačke O , sila restitucije iznosi $F_c = c x$.

Prije razmatranja konačnog oscilovanja datog sistema usvojiće se sljedeće pretpostavke:

- masa opruge je mala u odnosu na masu materijalne tačke m , pa se može zanemariti,
- deformacijom opruge nastaje elastična sila srazmjerna deformaciji,
- smatra se da je horizontalna ravan idealno glatka, tj. da nema trenja.

Ako se materijalna tačka mase m izvede iz ravnotežnog položaja, sila u opruzi \vec{F}_c nastoji da tačku vrati u položaj stabilne ravnoteže. Ukoliko se tačka M oslobodi iz nekog položaja x , Sl. 3.1, ona će se početi kretati pod dejstvom sile ubrzano prema ravnotežnom položaju, ali se neće zaustaviti u tački O već će nastaviti kretanje u negativnom smjeru ose Ox . Nakon prolaska kroz ravnotežni položaj O , sila restitucije će promijeniti smjer pa će biti usmjerena ka pozitivnom smjeru ose Ox . Pod dejstvom ovakve sile materijalna tačka će se početi kretati

usporeno, zatim će se u jednom trenutku zaustaviti, promijeniti smjer kretanja i nastaviti tako naizmjenično kretanje oko ravnotežnog položaja O .

Ovakve oscilacije materijalne tačke, dakle, kada se zanemare svi otpori pri kretanju, nazivaju se slobodne ili neprigušene oscilacije.

Diferencijalna jednačina pravolinijskog kretanja materijalne tačke prema Njutnovom zakonu ima oblik

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_c. \quad (3.1)$$

Kako je $F_c = -c x$, dobija se

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -c x \quad \text{ili} \quad m \ddot{x} = -c x. \quad (3.2)$$

Dijeljenjem jednačine (3.2) sa m , ova diferencijalna jednačina kretanja se može napisati u obliku u kojem svaki njen član ima dimenziju ubrzanja, a ne dimenziju sile.

Pri ovome se uvodi oznaka

$$\frac{c}{m} = \omega^2 \quad \text{ili} \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad (3.3)$$

gdje je ω kružna frekvencija.

Dimenzija veličine ω je

$$[\omega^2] = \frac{c}{m} = \frac{[F/L]}{[FT^2/L]} = \left[\frac{1}{T^2} \right].$$

Na taj način, diferencijalna jednačina pravolinijskog slobodnog oscilovanja prelazi u sljedeći oblik

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (3.4)$$

Diferencijalna jednačina (3.4) predstavlja homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Integracija ove diferencijalne jednačine obaviti će se na način predstavljen u daljem tekstu.

Karakteristična jednačina diferencijalne jednačine (3.4) ima oblik

$$\lambda^2 + \omega^2 \lambda = 0, \quad (3.5)$$

a njeni korijeni su:

$$\lambda_{1,2} = \pm \omega i. \quad (3.6)$$

Opšti integral diferencijalne jednačine (3.5) je

$$x = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} = A e^{\omega i t} + B e^{-\omega i t}. \quad (3.7)$$

Primjenom Moavrovog izraza koji glasi

$$e^{\pm \omega i t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t, \quad (3.8)$$

opšti integral (3.7) diferencijalne jednačine prelazi u oblik

$$x = (A+B) \cos \omega t + i(A-B) \sin \omega t. \quad (3.9)$$

Uvođenjem smjena

$$C_1 = A+B, \quad C_2 = i(A-B),$$

izraz (3.9) može se napisati u konačnom obliku

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (3.10)$$

Brzina materijalne tačke je

$$\dot{x} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t. \quad (3.11)$$

Integracione konstante C_1 i C_2 su proizvoljne, a mogu se odrediti iz početnih uslova.

Ako početni uslovi glase:

$$t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{array} \right. \quad (3.12)$$

vrijednosti integracionih konstanti C_1 i C_2 su

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega}, \quad (3.13)$$

na osnovu čega opšti integral prelazi u partikularni oblik

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (3.14)$$

Kako je prikazano izrazom (3.14), kretanje materijalne tačke sastoji se od dva harmonijska kretanja istih kružnih frekvencija ω , a različitih amplituda i faza, što je prikazano na slikama 3.2.a i 3.2.b.

Ova dva harmonijska kretanja mogu se superponirati u jedno harmonijsko kretanje koje će imati istu kružnu frekvenciju. U tom smislu proizvoljne integracione konstante C_1 i C_2 izraze se u obliku

$$C_1 = A \cos \varphi_0, \quad C_2 = A \sin \varphi_0, \quad (3.15)$$

gdje su A i φ_0 nove integracione konstante.

Ako se izraz (3.15) uvrsti u (3.10), dobiće se zakon kretanja materijalne tačke u obliku

$$x = A \cos(\omega t - \varphi_0). \quad (3.16)$$

Ove oscilacije su po svome karakteru harmonijske, pa se nazivaju i slobodnim harmonijskim oscilacijama, Sl. 3.2.c.

U izrazu (3.16), A predstavlja amplitudu slobodnih neprigušenih oscilacija materijalne tačke, a prema slici 3.2, to je najveća udaljenost tačke od centra oscilovanja O . Njena vrijednost je

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}. \quad (3.17)$$

Ugao

$$\omega t - \varphi_0 \quad (3.18)$$

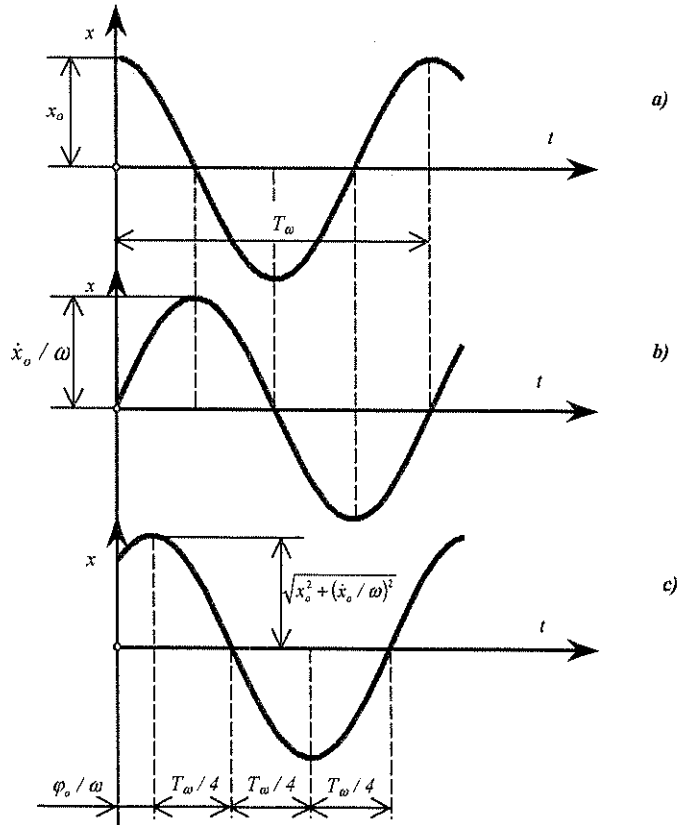
naziva se fazom oscilacije materijalne tačke, a ugao φ_0 je fazna razlika između rezultujućeg kretanja i referentnog kretanja $x_0 \cos \omega t$, što je prikazano na slici 3.3. Ova veličina je za sve tačke sistema ista, pa su oscilacije sinhronne. Trenuci prolaza kroz ravnotežne položaje određeni su sa $\omega t - \varphi_0 = n \frac{\pi}{2}$, $n = \pm 1, \pm 3, \dots$, dok su trenuci dostizanja maksimalnih udaljenosti $\omega t - \varphi_0 = n \pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Ugao fazne razlike φ_0 iz izraza (3.15) se može napisati kao

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}. \quad (3.19)$$

Period slobodnih neprigušenih oscilacija materijalne tačke iznosi

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \quad (3.20)$$



Sl. 3.2. Harmonijska kretanja istih kružnih frekvencija

Kako se može vidjeti iz izraza (3.20), period T slobodnih neprigušenih oscilacija ne zavisi od početnih uslova, već od kružne frekvencije ω . Kružna frekvencija ω takođe ne zavisi od

početnih uslova, već od mase m i krutosti opruge c . S druge strane, amplituda oscilacija i fazni ugao zavise od početnih uslova.

Kako je već rečeno u uvodu, kružna frekvencija ω predstavlja broj izvršenih punih ciklusa u 2π jedinica vremena.

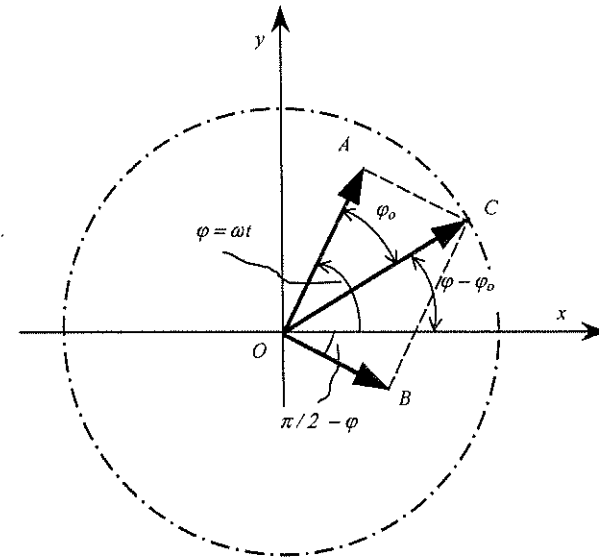
Pored kružne frekvencije ω , u teoriji oscilacija se koristi i frekvencija f , koja predstavlja broj punih ciklusa u jedinici vremena

$$f = \frac{1}{T}, \quad (3.21)$$

odnosno

$$f = \omega/2\pi. \quad (3.22)$$

Radi boljeg objašnjenja, izvršiće se superponiranje dva harmonijska kretanja (3.14) geometrijski pomoću obrtnih vektora, Sl. 3.3.



Sl. 3.3. Vektorska interpretacija harmonijskih kretanja

Prema slici 3.3, posmatraju se dva obrtna vektora:

- vektor $\overline{OA} = C_1 = x_0$, koji se obrće sa $\omega = \text{const.}$ oko tačke O ,

- vektor $\vec{OB} = C_2 = \frac{\dot{x}_o}{\omega}$, koji se obrće sa $\omega = \text{const.}$ oko tačke O .

Ova dva vektora su međusobno zakrenuta u fazi za $\pi/2$ i obrću se istom konstantnom ugaonom brzinom ω .

U nekom proizvoljnom trenutku t , vektor \vec{OA} zaklapa ugao $\varphi = \omega t$ sa osom Ox , a vektor \vec{OB} ugao $(\pi/2 - \varphi)$.

Projektovanjem ovih vektora na osu Ox dobije se:

$$\begin{aligned} (\vec{OA})_x &= C_1 \cos \varphi = x_o \cos \omega t, \\ (\vec{OB})_x &= C_2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{\dot{x}_o}{\omega} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Zakon kretanja (3.14) može se dobiti kao zbir projekcija vektora (3.23) na x osu:

$$x = (\vec{OA})_x + (\vec{OB})_x = x_o \cos \omega t + \frac{\dot{x}_o}{\omega} \sin \omega t. \quad (3.24)$$

Ovaj zakon kretanja može se dobiti i projektovanjem rezultujućeg vektora \vec{OC} na osu Ox :

$$x = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cos(\omega t - \varphi_o) = A \cos(\omega t - \varphi_o). \quad (3.25)$$

3.1.1. Slobodne oscilacije pri djelovanju konstantne sile

Neka na tijelo, odnosno materijalnu tačku M mase m , osim elastične sile \vec{F}_c djeluje još i sila \vec{F} , koja je konstantna po intezitetu, pravcu i smjeru, Sl. 3.4. Neka se kretanje po glatkoj podlozi vrši bez otpora.

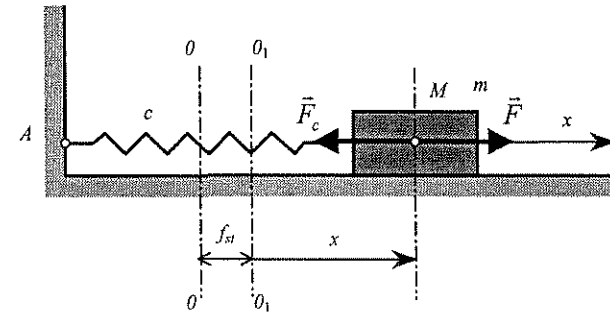
Očito je da će se usljed djelovanja sile \vec{F} ravnotežni položaj O pomjeriti u O_1 . Tačka O_1 udaljena je od tačke O za rastojanje $\vec{OO}_1 = f_{st}$, što je određeno jednačinom ravnoteže

$$f_{st} c = F \quad \text{ili} \quad f_{st} = \frac{F}{c}. \quad (3.26)$$

Dakle, sile koje izazivaju kretanje materijalne tačke u ovom slučaju su konzervativna sila u opruzi \vec{F}_c i konstantna sila \vec{F} .

Sila $\vec{F} = F \vec{i} = \text{const.}$ je takođe konzervativna, pošto ispunjava uslov (kako je pokazano u dinamici):

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.27)$$



Sl. 3.4. Slobodno oscilatorno kretanje pri $F = \text{const.}$

Isto tako, ukupna sila koja djeluje na materijalnu tačku je konzervativna i može se odrediti na osnovu potencijalne energije. Za nulti, odnosno referentni položaj za proračunavanje potencijalne energije, kako je već ranije objašnjeno, uzima se ravnotežni položaj. Za koordinatni početak usvojioće se tačka O_1 , jer je ovo tačka statičke ravnoteže.

Sila restitucije \vec{F}_c proporcionalna je deformaciji opruge, a njena projekcija na osu Ox iznosi

$$F_c = -c (f_{st} + x). \quad (3.28)$$

Diferencijalna jednačina pravolinijskog kretanja tačke M ima oblik

$$m \ddot{x} = \sum_{i=1}^n X_i = -c (x + f_{st}) + F$$

ili

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (3.29)$$

gdje su X_i projekcije sila na osu Ox , dok je $\omega^2 = \frac{F}{m f_{st}} = \frac{c}{m}$.

Diferencijalna jednačina (3.29) za slobodne oscilacije materijalne tačke pod dejstvom konstantne sile \vec{F} istovjetna je, kako se može vidjeti, diferencijalnoj jednačini (3.4).

Iz ovog se može zaključiti da konstantna sila \vec{F} ne mijenja karakter oscilacija materijalne tačke M , već samo pomjera centar oscilovanja u smjeru sile \vec{F} za veličinu statičke deformacije opruge f_{st} . Novi centar oscilovanja u ovakvim uslovima je tačka O_1 .

Period slobodnih neprigušenih oscilacija tačke izložene djelovanju konstantne sile može se izraziti i preko statičkog izduženja.

Pošto je $\omega^2 = c/m$, to se zamjenom c prema jednačini (3.26) dobija

$$\omega^2 = \frac{F}{m f_{st}}. \quad (3.30)$$

Period oscilovanja T iznosi:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{F} f_{st}}. \quad (3.31)$$

3.2. Slobodne prigušene oscilacije

U slučaju kada se oscilovanje tačke vrši u realnim uslovima, pri kojima osim sile restitucije na materijalnu tačku djeluje i sila otpora, riječ je o slobodnim prigušenim oscilacijama materijalne tačke. Zakon promjene sile otpora zavisi od njene fizičke prirode, ali je ona uvijek usmjerena suprotno od kretanja tačke.

U ovim izlaganjima, navedena problematika će se ograničiti na dva slučaja:

- kada na tačku djeluju sile viskoznog trenja, koje su proporcionalne prvom stepenu brzine tačke,
- kada djeluju sile suhog trenja, proporcionalne normalnom pritisku tačke na podlogu.

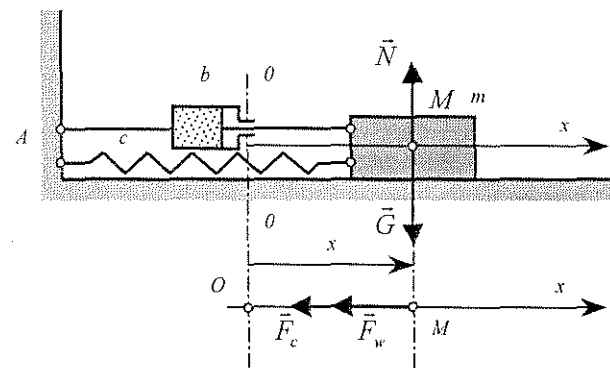
I u ovim slučajevima će se podrazumijevati da na sistem, odnosno tačku, djeluju holonomne, stacionarne i realne veze.

3.2.1. Slobodne prigušene oscilacije sa otporom proporcionalnim prvom stepenu brzine

Posmatraće se slučaj kada na materijalnu tačku M , mase m , pored sile restitucije \vec{F}_c , djeluje i sila otpora \vec{F}_w proporcionalna prvom stepenu brzine tačke

$$\vec{F}_w = -b \vec{v}. \quad (3.32)$$

Mehanički model dejstva sile otpora na tačku M prikazuje se, kao na slici 3.5, u vidu amortizera sa klipom. Pri kretanju klipa stvara se sila otpora tečnosti u cilindru proporcionalna prvom stepenu brzine.



Sl. 3.5. Model slobodnih prigušenih oscilacija pri djelovanju viskoznog otpora

Za koordinatni početak ose Ox usvojioće se ravnotežni položaj tačke M .

Diferencijalna jednačinu kretanja tačke M duž ose Ox postavioće se na osnovu Njutnovog zakona

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n X_i = F_w + F_c = -b\dot{x} - cx,$$

ili

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0. \quad (3.33)$$

Uvođenjem oznaka:

$$\frac{b}{m} = 2\delta \quad \text{i} \quad \frac{c}{m} = \omega^2, \quad (3.34)$$

diferencijalna jednačina (3.33) svodi se na oblik:

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (3.35)$$

Ovdje je δ koeficijent prigušenja, a ω kružna frekvencija, pri čemu obje veličine imaju istu jedinicu (s^{-1}).

Jednačina (3.35) predstavlja diferencijalnu jednačinu slobodnih prigušenih oscilacija materijalne tačke pod dejstvom sile otpora proporcionalne prvom stepenu brzine tačke.

Izvrši li se integraljenje diferencijalne jednačine (3.35), dobiće se karakteristična jednačina

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0, \quad (3.36)$$

čiji su korijeni:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}. \quad (3.37)$$

Karakter kretanja tačke M zavisi od prirode korijena karakteristične jednačine, odnosno od δ i ω , pa mogu nastupiti sljedeća tri slučaja:

- $\delta < \omega$, korijeni su konjugovano-kompleksni,
- $\delta > \omega$, korijeni su realni i različiti,
- $\delta = \omega$, korijeni su realni i jednaki.

U prvom slučaju kretanje je prividno periodično, u drugom slučaju kretanje je aperiodično, dok je u trećem slučaju riječ o graničnom slučaju aperiodičnog kretanja. S gledišta oscilacija, najvažniji je prvi slučaj.

3.2.2. Prividno periodično kretanje

Kako je već rečeno, u slučaju prividno periodičnog kretanja je $\delta < \omega$, pa će se uvesti oznaka

$$\delta^2 - \omega^2 = -p^2. \quad (3.38)$$

Korijeni karakteristične jednačine (3.37) će iznositi:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm pi. \quad (3.39)$$

Opšti integral jednačine (3.35) biće:

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = Ae^{(-\delta+pi)t} + Be^{(-\delta-pi)t}. \quad (3.40)$$

Primjenom Moavrovog izraza i uvođenjem oznaka

$$C_1 = A + B, \quad C_2 = i(A - B), \quad (3.41)$$

opšti integral (3.40) glasi

$$x = e^{-\delta t}(C_1 \cos pt + C_2 \sin pt). \quad (3.42)$$

Izraz (3.42) predstavlja ujedno i zakon kretanja tačke M .

Brzina materijalne tačke M određena je prvim izvodom izraza (3.42):

$$\dot{x} = -\delta e^{-\delta t}(C_1 \cos pt + C_2 \sin pt) + p e^{-\delta t}(-C_1 \sin pt + C_2 \cos pt). \quad (3.43)$$

Iz početnih uslova određiće se integracione konstante C_1 i C_2 :

$$\text{za } t=0 \begin{cases} x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \end{cases},$$

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\delta x_0 + \dot{x}_0}{p},$$

pa će se dobiti partikularni integral

$$x = e^{-\delta t} \left(x_0 \cos pt + \frac{\delta x_0 + \dot{x}_0}{p} \sin pt \right). \quad (3.44)$$

Iz izraza (3.44), koji predstavlja zakon kretanja materijalne tačke koja vrši slobodne prigušene oscilacije, vidi se da se kretanje dobija superponiranjem dva harmonijska kretanja koja imaju različite faze i amplitude, a iste frekvencije p .

Ako se u jednačinu opšteg rješenja (3.42) uvede smjena

$$C_1 e^{-\delta t} = D \cos \theta_0, \quad C_2 e^{-\delta t} = D \sin \theta_0, \quad (3.45)$$

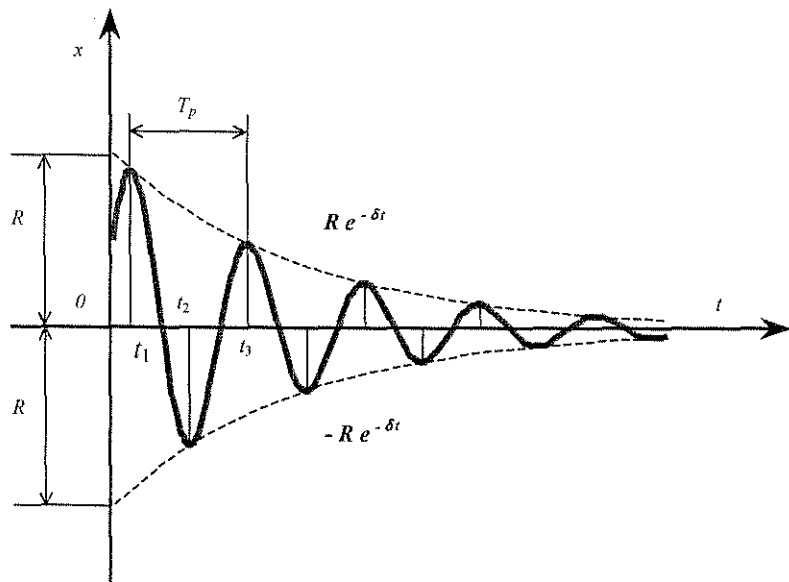
gdje su D i θ_0 nove integracione konstante, dobiće se

$$x = R e^{-\delta t} \cos(pt - \theta_0), \quad (3.46)$$

gdje je

$$R = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\delta x_0 + \dot{x}_0}{p}\right)^2}.$$

Ovim izrazom (3.46) je izvršeno superponiranje dva harmonijska kretanja u novi jednostavniji oblik. Pored matematičkog, može se izvršiti i geometrijsko superponiranje preko obrtnih vektora kao u prethodnom slučaju, Sl. 3.7.



Sl. 3.6. Prigušeno oscilatorno kretanje

U izrazu (3.46) veličina $R e^{-\delta t}$ predstavlja amplitudu oscilovanja izraženu u funkciji od vremena, dok se fazni ugao θ_0 može dobiti iz izraza

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\delta x_0 + \dot{x}_0}{p x_0}. \quad (3.47)$$

Zakon kretanja materijalne tačke M određen je jednačinom (3.46), a predstavljen je na slici 3.6.

Prema zakonu kretanja materijalne tačke (3.44), vidi se između ostalog da amplitude nisu konstantne, već se tokom vremena smanjuju. To znači da kada vrijeme teži beskonačnosti $t \rightarrow \infty$, udaljenost tačke teži nuli $x \rightarrow 0$, jer $e^{-\delta t} \rightarrow 0$. Zbog toga se ovo se kretanje naziva prigušenim, Sl. 3.6. Krive $R e^{-\delta t}$ i $-R e^{-\delta t}$ predstavljaju granice unutar kojih je smješten dijagram posmatranog kretanja.

Sa dijagrama se vidi da kretanje nije periodično jer se amplitude tokom vremena smanjuju. Međutim, ovo kretanje jeste oscilatorno, ali se vremenom oscilovanje amortizuje usljed naizmjeničnog smanjenja amplituda.

Periodom slobodnih prigušenih oscilacija naziva se vremenski interval koji se nalazi između dva uzastopna prolaska tačke u istom smjeru kroz isti položaj, Sl. 3.6. Period u ovom slučaju se naziva prividnim periodom prigušenja i iznosi

$$T_p = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}}. \quad (3.48)$$

Period slobodnih prigušenih oscilacija T_p veći je od perioda slobodnih neprigušenih oscilacija T_ω , odnosno

$$T_p > T_\omega.$$

Aproksimativna veza između ova dva perioda može se dobiti ako se desni član izraza (3.48) podijeli sa ω

$$T_p = \frac{\frac{2\pi}{\omega}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2}},$$

a zatim primijeni Njutnov obrazac

$$T_p = T_\omega \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2 + \dots \right]. \quad (3.49)$$

Uvođenjem bezdimenzijskog koeficijenta prigušenja $\psi = \delta/\omega$, izraz (3.49) se može napisati u približnom obliku do druge potencije

$$T_p \approx T_\omega \left(1 + \frac{1}{2} \psi^2 \right) \quad (3.50)$$

Na slici 3.7 prikazan je geometrijski način superponiranja dva harmonijska kretanja partikularnog integrala (3.44). Interpretacija je data preko obrtnih vektora.

Vektor \vec{OA} , koji se obrće oko tačke O konstantnom ugaonom brzinom p i u proizvoljnom trenutku t zaklapa sa pozitivnom osom Ox ugao φ . Ovaj vektor se može usvojiti kao vodeći.

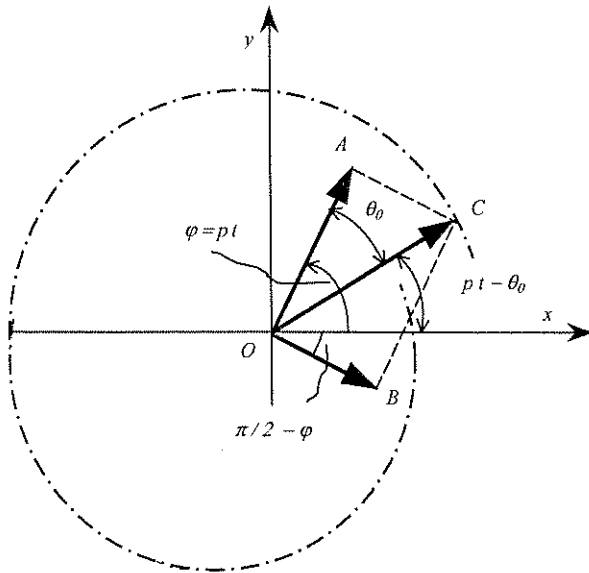
Intezitet vektora \vec{OA} je:

$$\vec{OA} = C_1 e^{-\delta t} = x_o e^{-\delta t} \quad (3.51)$$

Drugi vektor \vec{OB} upravan je na vektor \vec{OA} i ima intezitet

$$\vec{OB} = C_2 e^{-\delta t} = \frac{\delta x_o + \dot{x}_o}{p} e^{-\delta t} \quad (3.52)$$

On se takođe kao i vektor \vec{OA} obrće konstantnom ugaonom brzinom p .



Sl. 3.7. Geometrijska interpretacija prigušenog kretanja

Zakon kretanja materijalne tačke može se predstaviti kao zbir projekcija ova dva vektora na x osu:

$$x = (\vec{OA})_x + (\vec{OB})_x,$$

$$x = e^{-\delta t} \left[x_o \cos pt + \frac{\delta x_o + \dot{x}_o}{p} \sin pt \right].$$

Geometrijski zbir vektora \vec{OA} i \vec{OB} je rezultujući vektor \vec{OC}

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} \quad (3.53)$$

Ako se izvrši projektovanje izraza (3.53) na x osu, dobiće se zakon kretanja materijalne tačke

$$x = (\vec{OC})_x = (\vec{OA})_x + (\vec{OB})_x = e^{-\delta t} \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cos(pt - \theta_0) = R e^{-\delta t} \cos(pt - \theta_0).$$

Da bi se mogle upoređivati apsolutne vrijednosti dviju uzastopnih amplituda prividno periodičnog kretanja, potrebno je prvo odrediti trenutak t_1 kada će materijalna tačka dostići svoju prvu amplitudu.

Sa slike 3.6 mogu se očitati sljedeći odnosi:

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{2} T_p,$$

$$t_3 = t_1 + 2 \frac{1}{2} T_p,$$

$$t_n = t_1 + (n-1) \frac{1}{2} T_p. \quad (3.54)$$

Prvi trenutak t_1 nastupa kada materijalna tačka dostiže svoju amplitudu i tada će brzina tačke biti jednaka nuli. Prema uslovu $\dot{x}(t_1) = 0$, izraz (3.43) će se riješiti po vremenu $t = t_1$, tako da se dobija

$$\operatorname{tg} pt_1 = \frac{pC_2 - \delta C_1}{\delta C_2 + pC_1},$$

odnosno

$$t_1 = \frac{1}{p} \operatorname{arctg} \frac{pC_2 - \delta C_1}{\delta C_2 + pC_1}. \quad (3.55)$$

Amplituda x_1 u trenutku $t = t_1$ prema (3.46) iznosi

$$x_1 = R e^{-\delta t_1} \cos(pt_1 - \theta_0). \quad (3.56)$$

U trenutku $t = t_2$ amplituda će iznositi x_2

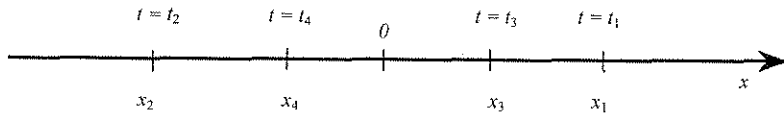
$$t_2 = t_1 + \frac{1}{2} T_p = t_1 + \frac{1}{2} \frac{2\pi}{p} = t_1 + \frac{\pi}{p},$$

odnosno

$$x_2 = R e^{-\delta \left(t_1 + \frac{\pi}{p}\right)} \cos \left[p \left(t_1 + \frac{\pi}{p} \right) - \theta_0 \right]. \quad (3.57)$$

Kako je $\cos \left[\left(pt_1 - \theta_0 \right) + \pi \right] = -\cos \left(pt_1 - \theta_0 \right)$, može se x_2 napisati u obliku prikladnijem za uporedbu sa x_1

$$x_2 = -R e^{-\delta \left(t_1 + \frac{\pi}{p} \right)} \cos \left(pt_1 - \theta_0 \right). \quad (3.58)$$



Sl. 3.8. Medusobni odnos amplituda

Uporedbom amplituda x_1 i x_2 , Sl. 3.8, dobija se

$$\frac{|x_1|}{|x_2|} = \frac{R e^{-\delta t_1} \cos(pt_1 - \theta_0)}{R e^{-\delta t_1} e^{-\delta \pi/p} \cos(pt_1 - \theta_0)} = \frac{1}{e^{-\delta \pi/p}} = e^{\frac{\delta T_p}{2}} = x.$$

U istom odnosu stoje i bilo koje druge dvije uzastopne amplitude x_n i x_{n+1} , odnosno

$$\frac{|x_n|}{|x_{n+1}|} = e^{\frac{\delta T_p}{2}} = x, \quad (3.59)$$

pri čemu je $n = 1, 2, \dots$

Na osnovu izvedenog proizilazi da veličine amplituda slobodnih prigušenih oscilacija pod dejstvom sile otpora proporcionalne prvom stepenu brzine opadaju po zakonu geometrijske progresije određene izrazom (3.59).

Ako se izraz (3.59) logaritmuje dobiće se

$$1n|x_n| - 1n|x_{n+1}| = 1nx = \frac{\delta \pi}{p} = \frac{\delta T_p}{2} = D. \quad (3.60)$$

Prirodni logaritam D odnosa amplituda naziva se logaritamski dekrement slobodnih prigušenih oscilacija, a služi za ocjenu brzine prigušenja oscilacija.

Praktičnu primjenu imaju sljedeći izrazi:

$$D = \frac{\delta T_p}{2} = \frac{\delta \pi}{p} = \frac{\delta \pi}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}} = \frac{\pi \frac{\delta}{\omega}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2}} = \frac{\pi \psi}{\sqrt{1 - \psi^2}},$$

$$\psi = \frac{D}{\sqrt{\pi^2 + D^2}}. \quad (3.61)$$

Ovim je pokazano da se uvrđeni logaritamski dekrement može iskoristiti za određivanje koeficijenta prigušenja ψ , a zatim i δ preko kružne frekvencije ω .

3.2.3. Aperiodično kretanje

Ovo je slučaj kada je $\delta > \omega$, pa će korijeni karakteristične jednačine (3.37) biti:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm q, \quad (3.62)$$

gdje je

$$\delta^2 - \omega^2 = q^2.$$

Opšti integral jednačine (3.35) glasi

$$x = e^{-\delta t} [A e^{qt} + B e^{-qt}] \quad (3.63)$$

Imajući u vidu poznatu relaciju

$$e^{\pm qt} = ch \, qt \pm sh \, qt$$

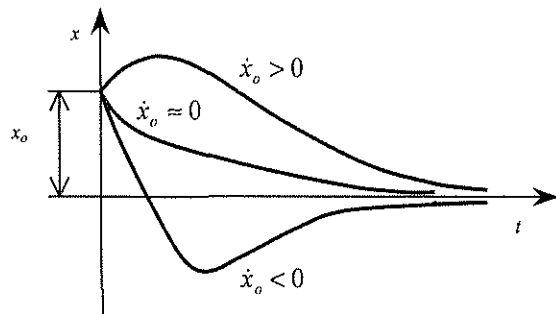
dobija se

$$x = e^{-\delta t} (C_1 ch \, qt + C_2 sh \, qt) \quad (3.64)$$

gdje je

$$C_1 = A + B, \quad C_2 = A - B.$$

Ovo kretanje će biti aperiodično i prigušeno, što se najbolje vidi sa dijagrama na slici 3.9, pri čemu kretanje zavisi od početne brzine \dot{x}_o .



Sl.3.9. Slučaj aperiodičnog kretanja

3.2.4. Granični slučaj aperiodičnog kretanja

U slučaju kada je $\delta = \omega$, korijeni karakteristične jednačine (3.37) su:

$$\lambda_{1,2} = -\delta. \quad (3.65)$$

Opšti integral diferencijalne jednačine (3.35) dobiće oblik

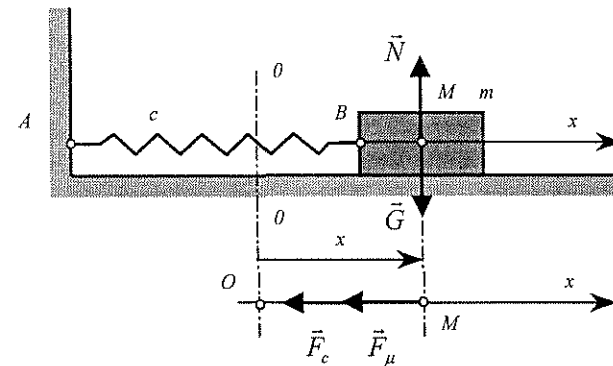
$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t} \quad (3.66)$$

Ovakav oblik zakona kretanja jasno ukazuje na to da je kretanje aperiodično.

3.3. Slobodne prigušene oscilacije tačke pri postojanju Kulonovog trenja

Posmatraće se pravolinijsko kretanje tačke M , mase m , po horizontalnoj hrapavoj podlozi, pri čemu je tačka M vezana za nepokretnu ravan oprugom krutosti c , Sl. 3.10. Pri kretanju tačke M po hrapavoj ravni javlja se tzv. Kulonova sila trenja klizanja \vec{F}_μ , koja je konstantnog inteziteta, a usmjerena suprotno od vektora brzine tačke M . Sila trenja \vec{F}_μ proporcionalna je koeficijentu trenja μ i težini tačke \vec{G} .

Da bi sila trenja bila usmjerena uvijek suprotno od brzine, uvešće se simbol $sign \dot{x}$ (signum \dot{x}), pri čemu je $sign \dot{x} = +1$ za $\dot{x} > 0$ i $sign \dot{x} = -1$ za $\dot{x} < 0$.



Sl. 3.10. Model slobodnih prigušenih oscilacija pri djelovanju Kulonovog trenja

Na osnovu ovog može se napisati apsolutni iznos sile trenja u pravcu ose x

$$F_{\mu x} = -\mu G sign \dot{x}. \quad (3.67)$$

Diferencijalna jednačina kretanja tačke u ovom slučaju glasi

$$m \ddot{x} = -c x - \mu mg sign \dot{x}. \quad (3.68)$$

U stanju mirovanja je $\dot{x} = 0$ i tada sila trenja ima maksimalnu vrijednost, pošto je statički koeficijent trenja μ_0 veći od dinamičkog koeficijenta trenja μ , ($\mu_0 > \mu$).

Pri integraciji diferencijalne jednačine (3.68) treba imati u vidu da desna strana jednačine mijenja predznak u trenutku kada je brzina tačke $\dot{x} = 0$. Zato se integracija jednačine može izvršiti samo u intervalu u kojem sila trenja ima određen smjer.

Neka početni uslovi u trenutku $t = 0$ glase $x = x_0$ i $\dot{x}_0 = 0$. Kretanje će otpočeti ukoliko je sila u deformisanoj opruzi veća od statičkog trenja klizanja, tj. ukoliko je zadovoljen uslov

$$\begin{aligned} c|x_0| &> \mu_0 mg, \\ |x_0| &> \frac{\mu_0 mg}{c}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Ako je zadovoljen prethodni uslov, tačka će početi kretanje u negativnom smjeru, Sl. 3.10, pa je $\dot{x} < 0$ i $\text{sign } \dot{x} = -1$. Diferencijalna jednačina kretanja glasi

$$m \ddot{x} = -cx + \mu mg,$$

ili

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu g, \quad (3.70)$$

gdje je

$$\omega^2 = \frac{c}{m}.$$

Diferencijalna jednačina (3.70) je nehomogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Opšte rješenje ove jednačine jednako je zbiru homogenog i partikularnog dijela

$$x = x_h + x_p. \quad (3.71)$$

Opšti integral homogene jednačine ima oblik

$$x_h = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,$$

a partikularni integral će biti

$$x_p = \frac{\mu g}{\omega^2}.$$

Opšti integral nehomogene jednačine, dakle, glasi

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{\mu g}{\omega^2}. \quad (3.72)$$

Brzina tačke M dobiće se diferenciranjem jednačine (3.72) po vremenu

$$\dot{x} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t. \quad (3.73)$$

Na osnovu početnih uslova kretanja koji glase:

$$\text{za } t = 0 \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x}_0 = 0, \end{cases}$$

dobiće se integracione konstante

$$C_1 = x_0 - \frac{\mu g}{\omega^2}, \quad C_2 = 0, \quad (3.74)$$

pa opšti integral prelazi u oblik

$$x = (x_0 - S) \cos \omega t + S \quad (3.75)$$

gdje je uvedena oznaka

$$S = \frac{\mu g}{\omega^2}.$$

Brzina tačke M prema izrazu (3.75) iznosi

$$\dot{x} = -(x_0 - S) \omega \sin \omega t. \quad (3.76)$$

Projekcija brzine \dot{x} biće negativna sve dok je $\sin \omega t > 0$, tj. u intervalu $0 < t < \pi/\omega$. U trenutku $t = t_1 = \pi/\omega$ brzina je jednaka nuli i mijenja znak. Diferencijalna jednačina kretanja važi samo u intervalu $0 < t < \pi/\omega$.

Amplituda oscilovanja tačke M u trenutku $t = t_1 = \pi/\omega$ iznosi

$$x_1 = -(x_0 - 2S).$$

Kretanje tačke će se nastaviti ako je ispunjen uslov

$$c|x_1| > \mu_0 G \quad \text{ili} \quad c|-x_0 + 2S| > \mu_0 G. \quad (3.77)$$

Od trenutka t_1 tačka se počinje kretati u pozitivnom smjeru ose Ox , pa će za $t > t_1$ biti $\dot{x} > 0$ i $\text{sign } \dot{x} = +1$.

Diferencijalna jednačina kretanja sada ima oblik

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\mu g \quad (3.78)$$

pri čemu su početni uslovi

$$t = t_1 \begin{cases} x = x_1 = -(x_0 - 2S) \\ \dot{x} = 0. \end{cases}$$

Opšti integral jednačine (3.78) će biti

$$x = C_1' \cos \omega t + C_2' \sin \omega t - \frac{\mu g}{\omega^2}, \quad (3.79)$$

a brzina tačke M se dobije na osnovu prvog izvoda jednačine (3.79) po vremenu

$$\dot{x} = -C_1' \omega \sin \omega t + C_2' \omega \cos \omega t. \quad (3.80)$$

Na osnovu početnih uslova određuju se integracione konstante

$$C_1' = x_0 - 3S, \quad C_2' = 0.$$

Partikularni integral jednačine (3.79) je ujedno i zakon kretanja tačke

$$x = (x_0 - 3S) \cos \omega t - \frac{\mu g}{\omega^2}. \quad (3.81)$$

Brzina tačke M iznosi

$$\dot{x} = -(x_0 - 3S) \omega \sin \omega t.$$

Kako je u ovom području $x_1 < 0$, to je $(x_0 - 3S) > 0$, pa će brzina tačke biti pozitivna u intervalu $\pi/\omega < t < 2\pi/\omega$, a diferencijalne jednačine (3.78) i (3.81) važe samo u tom intervalu. U trenutku $2\pi/\omega$, veličine $\sin \omega t$ i brzina \dot{x} su jednake nuli, pa brzina tačke tada trenutno mijenja znak, tj. amplituda tačke M u trenutku t_2 iznosi:

$$x_2 = x_0 - 4S.$$

Tačka M poslije trenutka t_2 nastaviće kretanje ako bude zadovoljen uslov

$$c |x_2| > \mu_0 mg, \text{ odnosno } |x_2| = |x_0 - 4S| > \frac{\mu_0 g}{\omega^2}. \quad (3.82)$$

Dakle, ukoliko je zadovoljen uslov (3.82), tačka M će nastaviti kretanje, pri čemu je $\dot{x} < 0$ i $\text{sign } \dot{x} = -1$. U ovom intervalu vremena diferencijalna jednačina kretanja tačke M će imati oblik (3.70), a početni uslovi će biti: $t = t_2$, $x = x_2 = (x_0 - 4S)$ i $\dot{x} = 0$.

Iz cjelokupne analize kretanja tačke vidi se da maksimalne udaljenosti tačke M od centra oscilovanja O iznose:

$$x_0, x_1 = -(x_0 - 2S), x_2 = x_0 - 4S, x_3 = -(x_0 - 6S), \dots$$

U opštem smislu to daje

$$x_n = (-1)^n (x_0 - 2nS), \quad (3.83)$$

što odgovara trenucima:

$$t = 0, \frac{\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega}, \dots, \frac{n\pi}{\omega}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Apsolutna vrijednost uzastopnih amplituda oscilovanja tačke M pri Kulonovom trenju smanjuje se po zakonu aritmetičke progresije sa diferencijom $2S$.

Na slici (3.11) prikazane su oscilacije tačke izložene Kulonovom trenju, koje su raspoređene između dvije prave koje se sijeku na osi t .

Interval vremena između dva uzastopna istovjetna položaja tačke M , odnosno period T iznosi

$$T = t_n - t_{n-2} = 2\pi/\omega.$$

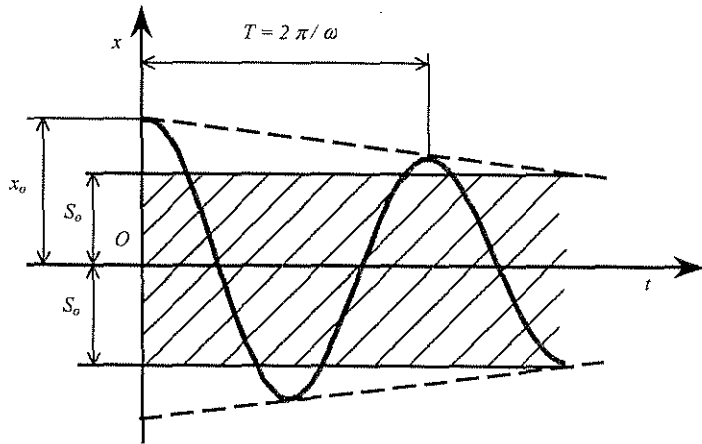
Kako se može vidjeti ovaj period je jednak periodu slobodnih neprigušenih oscilacija tačke.

Kako se amplituda oscilovanja tokom vremena smanjuje, tada će u nekom n -tom položaju kada bude $|x_n| < \frac{\mu_0 g}{\omega^2}$, a što odgovara trenutku t_n , kretanje prestati, jer sila restitucije u opruzi postaje manja od sile Kulonovog trenja.

Na slici 3.11 paralelno sa osom t povučene su dvije prave

$$x_1 = \frac{\mu_0 g}{\omega^2} = S_0 \quad \text{i} \quad x_2 = -\frac{\mu_0 g}{\omega^2} = -S_0,$$

a područje između njih se naziva zonom zastoja.



Sl. 3.11. Dijagram prigušenih oscilacija; Kulonovo trenje

3.4. Prinudne neprigušene oscilacije

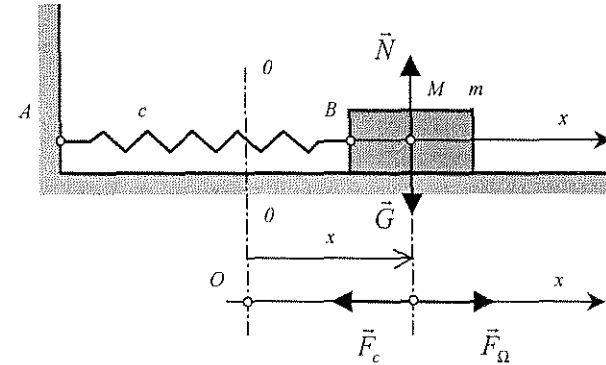
Na idealno glatko horizontalnoj podlozi, Sl. 3.12, nalazi se materijalna tačka M , mase m , pričvršćena oprugom AB , krutosti c , na koju djeluje dinamička poremećajna sila u smjeru pozitivne ose Ox .

Poremećajna sila mijenja se po zakonu

$$F_{\Omega} = F_0 \sin(\Omega t + \beta), \quad (3.84)$$

gdje su: F_0 – amplituda, Ω – kružna frekvencija poremećajne sile, $(\Omega t + \beta)$ – faza poremećajne sile, β – početna faza poremećajne sile.

Poremećajna sila $F_{\Omega} = F_0 \sin(\Omega t + \beta)$ naziva se još perturbaciona sila, jer remeti slobodne oscilacije sistema.



Sl. 3.12. Model prinudnih neprigušenih oscilacija

Oblik poremećajne sile (3.84) je takozvani prosti oblik. Postoji i složeni oblik, koji se najčešće izražava preko trigonometrijskog konačnog ili konvergentnog beskonačnog reda.

Za početak koordinatnog sistema, odnosno ose Ox , odabran je položaj statičke ravnoteže tačke M , Sl. 3.12.

Diferencijalna jednačina kretanja tačke glasi

$$m \ddot{x} = -cx + F_0 \sin(\Omega t + \beta). \quad (3.85)$$

Uvođenjem oznaka $\omega^2 = c/m$ i $h = F_0/m$, gornja jednačina se može pisati u obliku

$$\ddot{x} + \omega^2 x = h \sin(\Omega t + \beta). \quad (3.86)$$

Ova jednačina je linearna nehomogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Opšti integral jednak je zbiru integrala homogenog i partikularnog dijela:

$$x = x_h + x_p.$$

Opšti integral homogenog dijela jednačine glasi

$$x_h = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (3.87)$$

Zavisno od odnosa kružne frekvencije ω slobodnih neprigušenih oscilacija sistema i kružne frekvencije Ω poremećajne sile, partikularni integral ima različit oblik. Zato će se prvo razmotriti slučaj kada je $\omega \neq \Omega$. Partikularni integral nehomogene jednačine se u ovom slučaju traži u obliku

$$x_p = C \sin(\Omega t + \beta), \quad (3.88)$$

pri čemu je C nepoznata konstanta.

Uvodeći izraze (3.88) za x_p i $\ddot{x}_p = -C \Omega^2 \sin(\Omega t + \beta)$ u jednačinu (3.86) dobiće se

$$(\omega^2 - \Omega^2) C \sin(\Omega t + \beta) = h \sin(\Omega t + \beta), \quad (3.89)$$

odakle slijedi

$$C = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}. \quad (3.90)$$

Na osnovu ovoga partikularni integral nehomogene jednačine (3.86) glasi

$$x_p = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t + \beta). \quad (3.91)$$

Opšte rješenje jednačine (3.86) je

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t + \beta). \quad (3.92)$$

Ovaj izraz može se pisati i u obliku

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) + C \sin(\Omega t + \beta).$$

Na ovaj način je zakon kretanja tačke prikazan u vidu zbira dva harmonijska kretanja različitih amplituda, različitih kružnih frekvencija i različitih faza.

Konstante A i α određuju se iz početnih uslova, dok konstanta C ne zavisi od početnih uslova.

Opšti integral homogenog dijela diferencijalne jednačine predstavlja sopstvene oscilacije materijalne tačke, dok partikularni integral predstavlja prinudne oscilacije materijalne tačke.

Prinudne oscilacije tačke (3.91) imaju istu kružnu frekvenciju Ω kao i poremećajna sila i isti period oscilovanja $T = 2\pi/\Omega$.

Ukoliko je $\omega > \Omega$, prinudne oscilacije će biti u fazi sa prinudnom poremećajnom silom, dok će u slučaju $\omega < \Omega$ prinudne oscilacije tačke zaostajati u fazi za π u odnosu na oscilacije poremećajne sile. Stoga vrijede relacije:

$$\begin{aligned} \text{za } \omega > \Omega, \quad x_p &= C \sin(\Omega t + \beta), \\ \text{za } \omega < \Omega, \quad x_p &= -C \sin(\Omega t + \beta). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Proizvoljne integracione konstante C_1 i C_2 , prema opštem integralu (3.92), određuju se iz početnih uslova kretanja, koji u opštem slučaju glase

$$t = 0 \quad \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{cases}$$

Prvo će se izvršiti diferenciranje izraza (3.92) po vremenu, pa se dobija

$$\dot{x} = \omega(-C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) + C \Omega \cos(\Omega t + \beta). \quad (3.94)$$

Zamjenom početnih uslova u jednačine (3.92) i (3.94) dobijaju se dvije jednačine za određivanje integracionih konstanti:

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 + C \sin \beta \\ \dot{x}_0 &= \omega C_2 + C \Omega \cos \beta, \end{aligned}$$

odakle je

$$C_1 = x_0 - \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \beta, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega} - \frac{\Omega}{\omega} \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \beta.$$

Konačan izraz za zakon kretanja materijalne tačke glasi

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t - \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \left(\sin \beta \cos \omega t + \frac{\Omega}{\omega} \cos \beta \sin \omega t \right) + \\ &+ \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t + \beta). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Zakon kretanja tačke (3.95) izveden je u idealnim uslovima kada su otpori zanemareni. Ukoliko se uzmu u obzir otpori, tada će se slobodne oscilacije poslije izvjesnog vremena prigušiti, pa se obično isključuju iz dalje analize. S obzirom na to da sile otpora ne utiču na prinudne oscilacije, to će se u tekstu koji slijedi detaljnije objasniti prinudne oscilacije materijalne tačke M određene izrazom (3.91).

3.4.1. Dinamički faktor pojačavanja

Kod ove analize uzet će se u obzir statičko izduženje opruge f_{st} , koje nastaje usljed djelovanja konstantne poremećajne sile $F_{\Omega}^{st} = F_o = const.$

Pošto je

$$F_{\Omega}^{st} = F_o = c f_{st},$$

a imajući u vidu da je $F_o/m = h$, dobiće se

$$f_{st} = \frac{F_o}{c} = \frac{m h}{c} = \frac{h}{\omega^2}.$$

Da bi se mogle dobiti određene važne relacije, partikularni integral (3.91) nehomogenog dijela diferencijalne jednačine (3.86) napisaće se u sljedećem pogodnijem obliku:

$$x_p = \frac{\frac{h}{\omega^2}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \sin(\Omega t + \beta). \quad (3.96)$$

Osim toga, uvest će se tzv. koeficijent poremećaja $\lambda = \Omega/\omega$, koji predstavlja količnik kružne frekvencije prinudnih i kružne frekvencije slobodnih oscilacija.

Sada se partikularni integral dat izrazom (3.96) može pisati u obliku

$$x_p = \frac{f_{st}}{1 - \lambda^2} \sin(\Omega t + \beta), \quad (3.97)$$

pri čemu je $f_{st} = h/\omega^2$. Imajući u vidu da je f_{st} istovremeno i amplituda prinudnih oscilacija pri statičkom djelovanju poremećajne sile, to je $f_{st} = C_{st}$.

Odnos amplituda prinudnih oscilacija pri dinamičkom i statičkom dejstvu poremećajne sile naziva se dinamički faktor pojačavanja, a mijenja se po hiperboličkom zakonu

$$\eta_d = \frac{C_d}{C_{st}} = \frac{\frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}}{f_{st}} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2 \left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]} = \frac{1}{1 - \lambda^2}. \quad (3.98)$$

Dijagram međusobne zavisnosti dinamičkog faktora pojačavanja η_d i koeficijenta poremećaja λ dat je na slici 3.13.

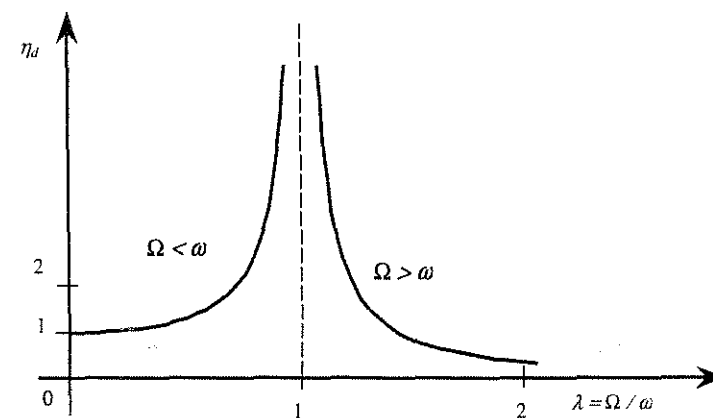
Izraz dinamički faktor pojačavanja (3.98) napisan je za slučaj kada je $\omega > \Omega$.

Ako je $\omega < \Omega$, vrijedi odnos

$$\eta_d = \frac{1}{\lambda^2 - 1}. \quad (3.99)$$

Partikularni integral (3.97) dobiće oblik

$$x_p = \eta_d f_{st} \sin(\Omega t + \beta). \quad (3.100)$$



Sl. 3.13. Dijagram dinamičkog faktora pojačavanja

Na dijagramu prikazanom na slici 3.13 mogu se uočiti dvije oblasti i to:

- lijevo od asimptote $\lambda = 1$, odnosno područje $0 < \lambda < 1$,
- dio desno od asimptote, tj. područje $1 < \lambda < \infty$.

Kako se vidi sa lijevog dijela slike, kada se smanjuje koeficijent poremećaja λ , odnosno kada njegova vrijednost $\lambda \rightarrow 0$, tada $\eta_d \rightarrow 1$. Dakle, u ovom području veličina dinamičkog faktora pojačavanja može se smanjiti najviše do jedinice, tj. amplituda prinudnih oscilacija pri dejstvu dinamičke sile poremećaja može se najviše smanjiti do veličine amplitude prinudnih oscilacija pri statičkom dejstvu poremećajne sile.

U dijelu desno od asimptote, gdje je $\Omega > \omega$, koeficijent poremećaja se mijenja u granicama $1 < \lambda < \infty$. Idući u desnu stranu, dakle kada koeficijent poremećaja $\lambda \rightarrow \infty$, tada dinamički faktor pojačavanja teži nuli $\eta_d \rightarrow 0$.

U slučaju kada je $\lambda = 1$, odnosno kada je kružna frekvencija prinudnih oscilacija jednaka kružnoj frekvenciji sopstvenih oscilacija ($\Omega = \omega$), veličina dinamičkog faktora pojačavanja biće $\eta_d \rightarrow \infty$, pa će i amplituda prinudnih oscilacija biti takođe beskonačno velika. Drugim riječima, u blizini $\lambda = 1$, odnosno kada $\lambda \rightarrow 1$, dinamički faktor pojačavanja $\eta_d \rightarrow \infty$, pa nastaje slučaj rezonancije.

3.4.2. Rezonancija

Kako je ranije rečeno, rezonancija nastupa kada su kružne frekvencije prinudnih i slobodnih oscilacija tačke međusobno jednake ($\Omega = \omega$). U tom slučaju, amplituda oscilovanja se uvećava do beskonačnosti, pa se partikularni integral ne može napisati u obliku koji je dat izrazom (3.91). Umjesto toga, a saglasno teoriji linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima, partikularni integral se pretpostavlja u obliku

$$x_p = Bt \cos(\Omega t + \beta). \quad (3.101)$$

Dvostrukim diferenciranjem jednačine (3.101) po vremenu dobija se

$$\ddot{x}_p = -2B\Omega \sin(\Omega t + \beta) - B\Omega^2 t \cos(\Omega t + \beta). \quad (3.102)$$

Stavljanjem (3.101) i (3.102) u (3.86), pri čemu je $\omega = \Omega$, dobiće se

$$-2B\Omega \sin(\Omega t + \beta) - B\Omega^2 t \cos(\Omega t + \beta) + B\Omega^2 t \cos(\Omega t + \beta) = h \sin(\Omega t + \beta)$$

ili

$$-2B\Omega \sin(\Omega t + \beta) = h \sin(\Omega t + \beta),$$

tako da je

$$B = -h/2\Omega.$$

Partikularni integral dobiće oblik

$$x_p = -\frac{h}{2\Omega} t \cos(\Omega t + \beta)$$

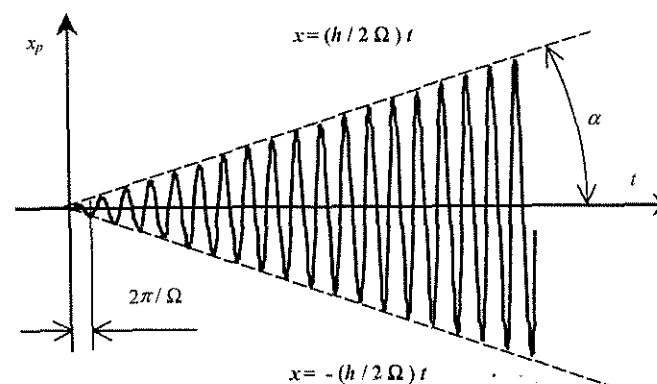
ili

$$x_p = \frac{h}{2\Omega} t \sin\left[(\Omega t + \beta) - \frac{\pi}{2}\right].$$

Iz ovoga se vidi da faza prinudnih oscilacija zaostaje za fazom poremećajnih sila za ugao $\pi/2$.

Na slici 3.14 prikazan je dijagram prinudnih oscilacija pri pojavi rezonancije. Može se vidjeti da amplitude prinudnih oscilacija tokom vremena neograničeno rastu. Tangens ugla prave povučene kroz tjemena krive određen je izrazom

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{h}{2\Omega}. \quad (3.103)$$



Sl. 3.14. Pojava rezonancije

3.4.3. Podrhtavanje

Pojava podrhtavanja nastaje u slučaju kada se kružna frekvencija slobodnih oscilacija vrlo malo razlikuje od kružne frekvencije prinudnih oscilacija, tj. kada je

$$\Omega - \omega = 2\Delta,$$

gdje je Δ - proizvoljno mala veličina.

Da bi se proučila ova pojava, polazi se od jednačine (3.95), pri čemu se uzimaju u obzir oscilacije izazvane samo djelovanjem poremećajne sile, pa se uz početne uslove

$$t_0 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = 0 \end{array} \right.,$$

dobija

$$x = -\frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \left(\sin \beta \cos \omega t + \frac{\Omega}{\omega} \cos \beta \sin \omega t \right) + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t + \beta) \quad (3.104)$$

Kako je u ovom slučaju $\Omega / \omega \approx 1$, jednačina (3.104) postaje

$$x = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} [\sin(\Omega t + \beta) - \sin(\omega t + \beta)]. \quad (3.105)$$

Ukoliko se na (3.105) primijeni poznati trigonometrijski izraz

$$\sin \alpha - \sin \gamma = 2 \sin \frac{\alpha - \gamma}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma}{2},$$

pri čemu je $\frac{\Omega + \omega}{2} \approx \Omega$, tada jednačina (3.105) prelazi u oblik

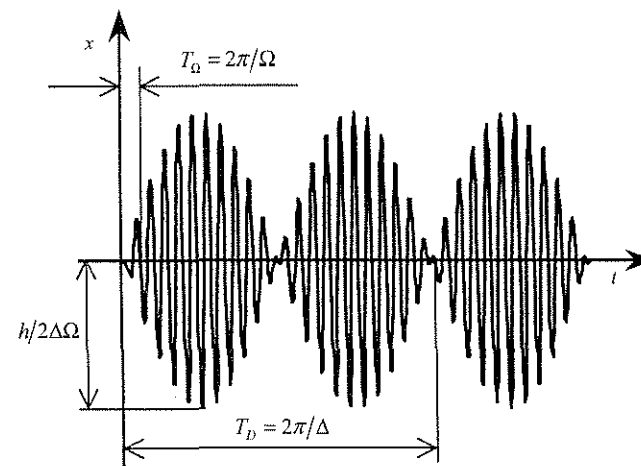
$$x = \frac{2h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \left(\frac{\Omega - \omega}{2} t \right) \cos(\Omega t + \beta) \quad (3.106)$$

Uvođenjem oznake

$$D(t) = \frac{2h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \left(\frac{\Omega - \omega}{2} t \right), \quad (3.107)$$

jednačina (3.106) postaje

$$x = D(t) \cos(\Omega t + \beta). \quad (3.108)$$



Sl. 3.15. Dijagram podrhtavanja

Ova jednačina predstavlja kretanje tačke kao oscilatorno sa kružnom frekvencijom Ω i periodom $T_\Omega = 2\pi/\Omega$. U ovom slučaju je amplituda $D(t)$ periodična funkcija određena jednačinom (3.107), čiji je period

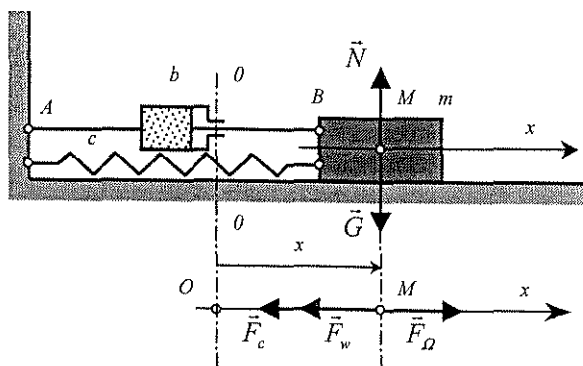
$$T_D = \frac{2\pi}{\Omega - \omega} = \frac{4\pi}{\Omega - \omega} = \frac{2\pi}{\Delta}.$$

Na slici 3.15 prikazan je dijagram oscilacija tačke prema (3.108). Pošto je $\Omega \approx \omega$, to je period amplitude T_D daleko veći od perioda oscilacija tačke T_Ω .

3.5. Prinudne prigušene oscilacije tačke pri djelovanju sile otpora proporcionalne prvom stepenu brzine tačke

Posmatra se kretanje tačke M , mase m , po horizontalnoj nepokretnoj glatkoj ravni, koja je izložena djelovanjima sile restitucije u opruzi \vec{F}_c , sile otpora srazmjerne brzini $\vec{F}_w = -b \vec{v}$ i prinudne poremećajne sile \vec{F}_Ω , čija je projekcija na Ox -osu

$$F_{\Omega} = F_o \sin(\Omega t + \beta).$$



Sl. 3.16. Model prinudnih prigušenih oscilacija

Diferencijalna jednačina kretanja materijalne tačke M glasi

$$m \ddot{x} = -cx - b\dot{x} + F_o \sin(\Omega t + \beta)$$

ili

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega^2 x = h \sin(\Omega t + \beta), \quad (3.109)$$

gdje su:

$$\frac{b}{m} = 2\delta - \text{dvostruki koeficijent prigušenja, } \frac{c}{m} = \omega^2 - \text{kvadrat kružne frekvencije; } \frac{F_o}{m} = h.$$

Jednačina (3.109) je linearna nehomogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Njen opšti integral nalazi se u vidu zbira opšteg integrala x_h , homogenog dijela i partikularnog integrala x_p , nehomogenog dijela

$$x = x_h + x_p.$$

Pošto opšti integral jednačine zavisi od odnosa δ i ω , za što je već ranije dato obrazloženje, posmatraće se slučaj kada je $\delta < \omega$. Za ovakav odnos, opšti integral homogene jednačine glasi

$$x_h = e^{-\delta t} (C_1 \cos pt + C_2 \sin pt),$$

gdje su C_1 i C_2 proizvoljne integracione konstante, a $p = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$ kružna frekvencija.

Partikularni integral će se pretpostaviti u obliku

$$x_p = A \sin(\Omega t + \beta - \gamma), \quad (3.110)$$

gdje su A i γ proizvoljne konstante.

Ukoliko se izraz (3.110) dva puta diferencira, dobiće se

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A \Omega \cos(\Omega t + \beta - \gamma), \\ \ddot{x}_p &= -A \Omega^2 \sin(\Omega t + \beta - \gamma). \end{aligned}$$

Zamjenom ovih vrijednosti u jednačinu (3.109), mogu se odrediti integracione konstante A i γ , odnosno:

$$\begin{aligned} -A \Omega^2 \sin(\Omega t + \beta - \gamma) + A 2\delta \Omega \cos(\Omega t + \beta - \gamma) + \\ + A \omega^2 \sin(\Omega t + \beta - \gamma) = h \sin(\Omega t + \beta). \end{aligned} \quad (3.111)$$

Transformacijom desne strane jednačine dobija se

$$\begin{aligned} h \sin(\Omega t + \beta) &= h \sin[(\Omega t + \beta - \gamma) + \gamma] = \\ &= h \sin(\Omega t + \beta - \gamma) \cos \gamma + h \cos(\Omega t + \beta - \gamma) \sin \gamma. \end{aligned}$$

Uvrsti li se ovaj izraz u desnu stranu jednačine (3.111), a zatim izvrši izjednačavanje koeficijenata uz iste promjenljive sa lijeve i desne strane, dobija se

$$\begin{aligned} A(\omega^2 - \Omega^2) &= h \cos \gamma, \\ A 2\delta \Omega &= h \sin \gamma. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Na osnovu ovoga se dobija amplituda prinudnih oscilacija

$$A = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}} \quad (3.113)$$

i ugao fazne razlike

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2 \delta \Omega}{\omega^2 - \Omega^2}. \quad (3.114)$$

Opšti integral nehomogene diferencijalne jednačine (3.109) biće:

$$x = e^{-\delta t} (C_1 \cos pt + C_2 \sin pt) + A \sin (\Omega t + \beta - \gamma), \quad (3.115)$$

gdje su konstante A i γ određene izrazima (3.113) i (3.114).

Proizvoljne integracione konstante C_1 i C_2 određuju se iz početnih uslova:

$$t=0 \begin{cases} x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \end{cases}$$

Prvo je potrebno diferencirati izraz (3.115) po vremenu, pri čemu se dobije

$$\dot{x} = -\delta e^{-\delta t} (C_1 \cos pt + C_2 \sin pt) + p e^{-\delta t} (-C_1 \sin pt + C_2 \cos pt) + A \Omega \cos (\Omega t + \beta - \gamma). \quad (3.116)$$

Stavljanjem početnih uslova u (3.115) i (3.116) dobiće se

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 + A \sin (\beta - \gamma), \\ \dot{x}_0 &= -\delta C_1 + p C_2 + A \Omega \cos (\beta - \gamma), \end{aligned}$$

pa su vrijednosti konstanti C_1 i C_2 sljedeće:

$$\begin{aligned} C_1 &= x_0 - A \sin (\beta - \gamma), \\ C_2 &= \frac{1}{p} [\dot{x}_0 + \delta x_0 - \delta A \sin (\beta - \gamma) - A \Omega \cos (\beta - \gamma)], \end{aligned}$$

gdje je A amplituda prinudnih oscilacija.

Kada se uvrste integracione konstante C_1 i C_2 u jednačinu (3.115), dobiće se zakon kretanja tačke u slučaju prinudnih prigušenih oscilacija u obliku

$$x = e^{-\delta t} \left(\frac{\dot{x}_0 + \delta x_0}{p} \sin pt + x_0 \cos pt \right) - e^{-\delta t} \left\{ \frac{A}{p} [\delta \sin (\beta - \gamma) + \Omega \cos (\beta - \gamma)] \sin pt + A \sin (\beta - \gamma) \cos pt \right\} + A \sin (\Omega t + \beta - \gamma). \quad (3.117)$$

Izraz (3.117) predstavlja ustvari rezultujuće kretanje koje je sastavljeno od tri oscilovanja. Prvi sabirak u jednačini (3.117) predstavlja prigušene oscilacije izazvane dejstvom elastične sile opruge na materijalnu tačku M , kada se ona izvede iz ravnotežnog položaja x_0 i saopšti joj se početna brzina \dot{x}_0 . Drugi sabirak predstavlja prigušene oscilacije frekvencije p izazvane djelovanjem poremećajne sile. Treći sabirak u posmatranoj jednačini predstavlja prinudne oscilacije izazvane poremećajnom silom.

Na slici 3.17 prikazane su navedene oscilacije. Slika 3.17.a odnosi se na prigušene oscilacije koje nastaju usljed prva dva člana u jednačini (3.117). Vidi se da se tokom vremena ove prigušene oscilacije brzo amortizuju.

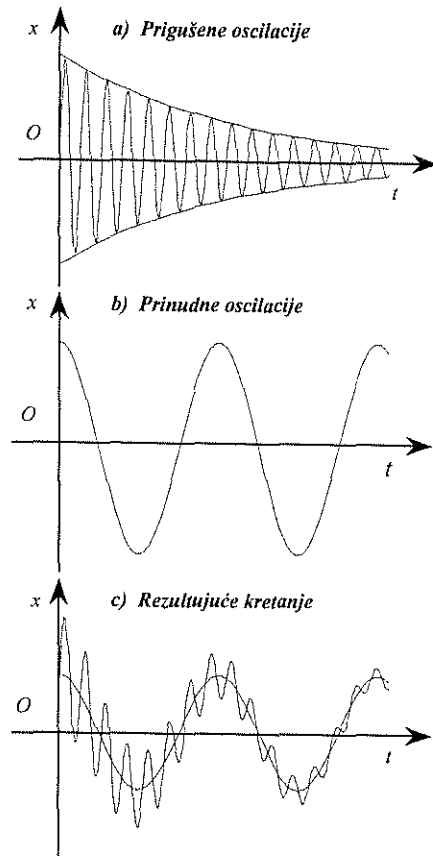
Na slici 3.17.b prikazane su prinudne oscilacije usljed dejstva poremećajne sile, dok je na slici 3.17.c prikazano ukupno rezultujuće kretanje nastalo superponiranjem sva tri kretanja.

Pošto se prva dva oblika kretanja tokom vremena prigušuju, osnovnu oscilaciju čine prinudne oscilacije sa amplitudom A i kružnom frekvencijom Ω . One su fazno pomjerene u odnosu na poremećajnu silu za veličinu γ . Prinudne oscilacije materijalne tačke pri postojanju sile otpora viskoznog trenja koja je proporcionalna prvom stepenu brzine su harmonijske oscilacije sa amplitudom A , koja se tokom vremena ne mijenja i ne prigušuje se. Otpor viskoznog trenja ne utiče na period i kružnu frekvenciju prinudnih oscilacija.

Period oscilovanja $T_\Omega = 2\pi/\Omega$ i kružna frekvencija Ω prinudnih oscilacija u ovakvim uslovima jednaki su periodu i kružnoj frekvenciji prinudne sile.

Pošto na daljnji tok kretanja materijalne tačke osnovni uticaj imaju prinudne oscilacije određene izrazom (3.110), te će se posebno analizirati ove oscilacije. Ako se u jednačinu (3.113) uvedu oznake: $\psi = \delta/\omega$ - bezdimenzioni koeficijent prigušenja i $\lambda = \Omega/\omega$ - koeficijent poremećaja, izraz za amplitudu prinudnih oscilacija (3.113) će glasniti

$$A = \frac{h}{\omega^2 \sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\psi^2 \lambda^2}}. \quad (3.118)$$

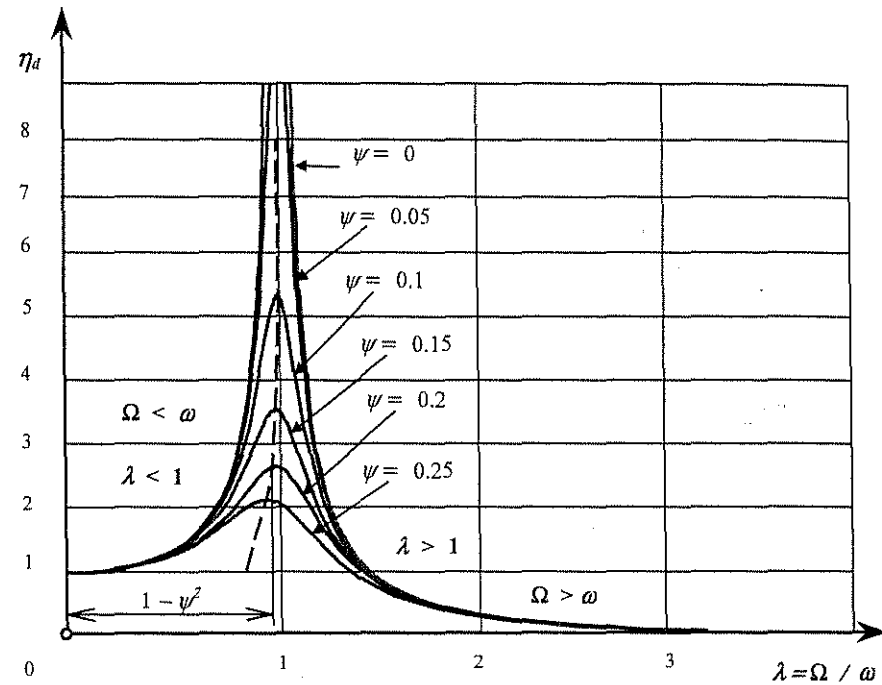


Sl. 3.17. Dijagram prinudnih prigušenih oscilacija

Kako je $\frac{h}{\omega^2} = f_{st} = A_{st}$, odnos amplitude A pri dinamičkom dejstvu i amplitude A_{st} pri statičkom dejstvu poremećajne sile koji definiše dinamički faktor pojačavanja iznositi će

$$\eta_d = \frac{A}{A_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\psi^2 \lambda^2}} \quad (3.119)$$

Na slici 3.18 prikazana promjena η_d u funkciji od λ za određene vrijednosti ψ .



Sl. 3.18. Dinamički faktor pojačavanja

Ukoliko je $\psi = 0$, dinamički faktor pojačavanja iznosi

$$\eta_d = \frac{1}{1-\lambda^2}$$

Ovaj izraz je istovjetan sa η_d za slučaj prinudnih neprigušenih oscilacija. Takođe ukoliko $\lambda \rightarrow 1$, tada $\eta_d \rightarrow \infty$, tj. amplituda prinudnih oscilacija neograničeno raste.

U slučaju kada je koeficijent poremećaja $\lambda = 0$, dinamički faktor pojačavanja biće $\eta_d = 1$. U ovom slučaju poremećajna sila djeluje statički, pa su amplitude prinudnih oscilacija jednake amplitudama ovih oscilacija pri statičkom dejstvu sile.

I u ostalim slučajevima, kada je $\psi = 0$ i $\lambda = 0$, dinamički faktor pojačanja ima konačnu veličinu.

Kao što se vidi sa slike 3.18, dijagram ima dvije karakteristične oblasti: lijevu oblast u kojoj se koeficijent poremećaja mijenja u području $0 < \lambda < 1$ i desnu oblast u kojoj se koeficijent poremećaja mijenja u području $1 < \lambda < \infty$.

U lijevoj oblasti u kojoj je $\Omega < \omega$, dinamički faktor pojačanja $\eta_d \rightarrow 1$ kada $\lambda \rightarrow 0$, za bilo koju vrijednost koeficijenta otpora ψ . U desnoj oblasti u kojoj je $\Omega > \omega$, faktor dinamičkog pojačanja $\eta_d \rightarrow 0$ kada $\lambda \rightarrow \infty$, takođe za bilo koji ψ .

Kao što se vidi, dinamički faktor pojačanja može imati vrlo visoke vrijednosti. Zbog toga se uvodi pojam tzv. oblasti rezonance, koja podrazumijeva oblast koeficijenta poremećaja u granicama

$$0,75 < \lambda < 1,30.$$

To znači da se kod praktične primjene na neku konstrukciju nastoji da koeficijent poremećaja bude izvan ovih granica, tj. da bude

$$\lambda < 0,75 \text{ ili } \lambda > 1,30.$$

Vrlo značajnu karakteristiku, prema slici 3.18, predstavlja familija krivih za različite vrijednosti koeficijenta otpora ψ , koje se slivaju u jednu krivu. To znači da u praktičnoj primjeni dinamički faktori pojačavanja imaju približno iste vrijednosti, bez obzira na veličinu koeficijenta otpora ψ .

Kako u ovom slučaju djeluje i sila otpora, dinamički faktor pojačanja η_d neće imati maksimalnu vrijednost za slučaj $\Omega = \omega$, tj. za $\lambda = 1$, već će to biti slučaj kada je λ nešto manje od 1.

Dinamički faktor pojačavanja prema (3.119) imaće maksimalnu vrijednost kad potkorjena veličina u imenitelju ima minimum. Ako se ova veličina označi sa $f(\lambda, \psi)$, tada je

$$f(\lambda, \psi) = (1 - \lambda^2)^2 + 4\psi^2 \lambda^2. \quad (3.120)$$

Potražiti će se uslovi pod kojima ova funkcija ima minimum.

Izvodi funkcije (3.120) su

$$\frac{df}{d\lambda} = -4\lambda(1 - \lambda^2) + 8\psi^2 \lambda,$$

$$\frac{d^2 f}{d\lambda^2} = -4 + 12\lambda^2 + 8\psi^2.$$

Izjednačavanjem prvog izvoda s nulom

$$\frac{df}{d\lambda} = 0$$

dobija se

$$1 - \lambda_m^2 = 2\psi^2,$$

odnosno

$$\lambda_m^2 = 1 - 2\psi^2,$$

gdje je λ_m – vrijednost faktora poremećaja koji daje ekstremnu vrijednost funkciji $f(\lambda, \psi)$.

Za ovu vrijednost λ_m drugi izvod iznosi

$$\left(\frac{d^2 f}{d\lambda^2}\right)_{\lambda=\lambda_m} = 8(1 - 2\psi^2) > 0,$$

što znači da za tu vrijednost λ_m funkcija $f(\lambda, \psi)$ ima minimum, a η_d maksimalnu vrijednost. Dakle, dinamički faktor pojačavanja $(\eta_d)_m$ će imati maksimalnu vrijednost kada je λ nešto manji od 1.

Veličina koeficijenta poremećaja λ_m može se aproksimirati izrazom

$$\lambda_m = \sqrt{1 - 2\psi^2} \approx 1 - \psi^2, \quad (3.121)$$

pa će $(\eta_d)_m$ za slučaj $\lambda = \lambda_m$ približno iznositi

$$(\eta_d)_m = \frac{1}{2\psi\sqrt{1 - \psi^2}}$$

ili

$$(\eta_d)_m \approx \frac{1}{2\psi \left(1 - \frac{1}{2}\psi^2\right)} \quad (3.122)$$

Kada je $\lambda = 1$ ili $\Omega = \omega$, dinamički faktor pojačavanja će biti prema (3.119)

$$(\eta_d)_r = \frac{1}{2\psi},$$

što znači da je

$$(\eta_d)_r < (\eta_d)_m. \quad (3.123)$$

Na slici 3.18 isprekidanom linijom je prikazana kriva koja se dobije kada se spoje tjemena familija krivih linija $\eta_d(\lambda, \psi)$ u kojima su njihove vrijednosti maksimalne.

Faza $(\Omega t + \beta - \gamma)$ prinudnih oscilacija pri postojanju otpora viskoznog trenja zaostaje za fazom poremećajne sile $(\Omega t + \beta)$ za ugao fazne razlike γ . Prema izrazu (3.114) može se pisati

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2\psi \lambda}{1 - \lambda^2}. \quad (3.124)$$

Iz ovog izraza se vidi da je fazna razlika zavisna od ψ i λ . Pri zadanoj vrijednosti ψ moguće je konstruisati krivu koja pokazuje zavisnost γ od λ , Sl. 3.19.

Ukoliko se zanemari otpor viskoznog trenja $\psi = 0$, prema (3.124) dobiće se

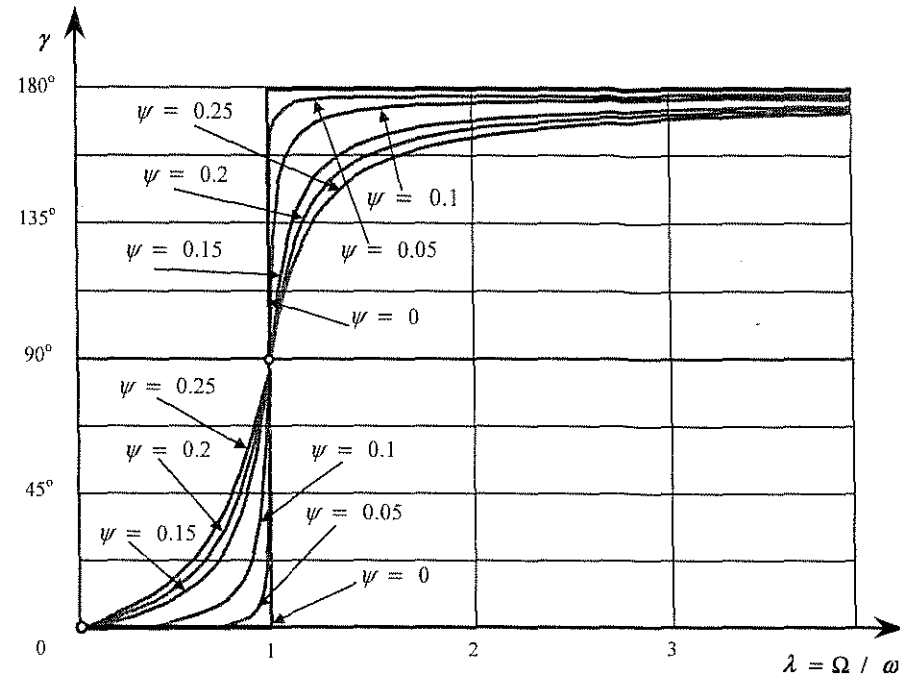
$$\operatorname{tg} \gamma = 0 \rightarrow \gamma = 0.$$

U slučaju kad je $\lambda = 1$, odnosno $\Omega = \omega$, dobija se

$$\operatorname{tg} \gamma = \infty \rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Prema dijagramu na slici 3.19, sve krive prolaze kroz tačku $\lambda = 1$ ordinate $\gamma = 90^\circ$. Iz ovoga se može zaključiti da se ugao fazne razlike naglo mijenja u oblasti rezonance, što znači da sila viskoznog trenja ima znatan uticaj na promjenu dinamičkog faktora pojačavanja η_d i

ugao fazne razlike γ , što je prikazano na slikama 3.18 i 3.19. Izvan ove oblasti sila viskoznog trenja nema većeg uticaja.



Sl. 3.19. Dijagram ugla fazne razlike γ

3.6. Primjeri

Primjer br. 1.

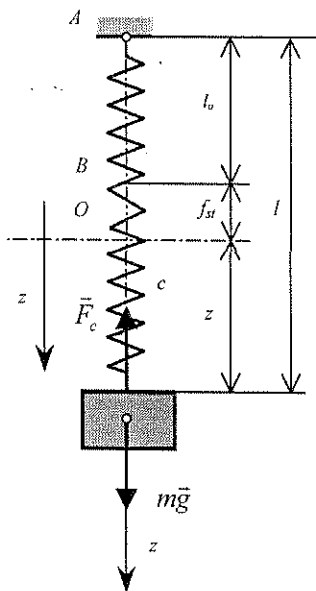
Za materijalnu tačku mase m , koja je obješena o vertikalnu oprugu krutosti c , odrediti karakter oscilovanja u uslovima prikazanim na slici 3.20. Osnovni podaci su takođe dati na slici 3.20.

Rješenje:

Kada se na oprugu, dužine l_0 u nenapregnutom stanju, objesi materijalna tačka (težine $\vec{G} = m\vec{g}$), opruga će povećati svoju dužinu za f_s , nakon uspostavljanja statičke ravnoteže.

Postavljanjem statičkih uslova ravnoteže u pravcu z-ose dobija se

$$mg - c f_{st} = 0.$$



Sl. 3.20. Vertikalne oscilacije

Ako se sada materijalna tačka izvede iz ravnoteže za neko z_0 pa slobodno pusti, doći će do njenog oscilovanja oko ravnotežnog položaja O .

Diferencijalna jednačina kretanja glasi

$$m \ddot{z} = mg - c (f_{st} + z). \quad (a)$$

Imajući u vidu da je $G = mg = f_{st}c$, jednačina (a) dobiće oblik

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0, \quad (b)$$

gdje je

$$\omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{c g}{G} = \frac{g}{f_{st}}.$$

Period oscilovanja je

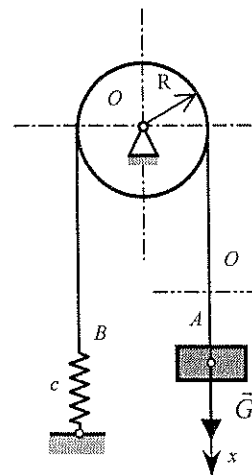
$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \text{odnosno} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{f_{st}}{g}}.$$

Iz izvedenih izraza proizilazi da, kada se postavlja diferencijalna jednačina kretanja pri vertikalnom oscilovanju u odnosu na ravnotežni položaj, težina tijela neće imati uticaj na oscilacije. Karakter oscilacija je isti kao kod tijela iste mase koje vrši slobodne horizontalne harmonijske oscilacije uz istu krutost opruge c . U ovom slučaju, dakle, pri postavljanju diferencijalne jednačine kretanja težinu ne treba uzimati u obzir.

Primjer br. 2.

Homogeni disk (kotur), mase G/g i poluprečnika R , obrće se bez trenja oko ose O , Sl. 3.21. Preko kotura je prebačeno uže čija se masa zanemaruje. Na kraju užeta A obješen je teret mase G_1/g , dok je na drugom kraju užeta B pričvršćena opruga krutosti c , koja je privezana za podlogu.

Određiti jednačinu kretanja tereta i period oscilovanja T , ako se u početnom trenutku nalazi u ravnotežnom položaju i ako mu je data početna brzina \vec{v}_0 usmjerena vertikalno naniže.



Sl. 3.21. Oscilacije homogenog diska

Rješenje:

U položaju statičke ravnoteže, suma momenata za tačku O jednaka je nuli, pa se može pisati:

$$\sum M_o^{\vec{F}} = G_1 R - c f_{st} R = 0. \quad (a)$$

Primjenom zakona o promjeni momenta količine kretanja dobija se

$$\frac{d \vec{L}_o}{dt} = \sum \vec{M}_o^{\vec{F}}.$$

Diferencijalna jednačina kretanja sistema glasi

$$I_o \ddot{\varphi} = G_1 R - c (f_{st} + x) R, \quad (b)$$

gdje je I_o – moment inercije sistema, kotura i tereta, za tačku obrtanja O .

Kako vrijede odnosi

$$I_o = \frac{1}{2} \frac{G}{g} R^2 + \frac{G_1}{g} R^2 \quad \text{i} \quad x = R \varphi,$$

to će, uzimajući u obzir jednačinu (a), jednačina (b) dobiti oblik

$$\left(\frac{G}{2g} + \frac{G_1}{g} \right) R^2 \ddot{\varphi} + c R^2 \varphi = 0, \quad (c)$$

ili

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad \text{gdje je} \quad \omega^2 = \frac{2g c}{G + 2G_1}.$$

Opšte rješenje ove diferencijalne jednačine ima oblik

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Iz početnih uslova koji glase u ovom slučaju

$$t = 0 \left| \begin{array}{l} x_o = 0 \\ \dot{x}_o = v_o \end{array} \right.,$$

dobiće se integracione konstante

$$C_1 = 0 \quad \text{i} \quad C_2 = \frac{v_o}{\omega}.$$

Jednačina kretanja tereta G_1 biće

$$x = \frac{v_o}{\omega} \sin \omega t, \quad (d)$$

dok će period oscilovanja iznositi

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{G + 2G_1}{2g c}}. \quad (e)$$

Primjer br. 3.

Homogeni disk, mase M i poluprečnika R , može se slobodno obrtati oko svoje horizontalne ose O . Na obodu diska nalazi se koncentrisana masa m . Položaj mase m određen uglom α održava u stabilnoj ravnoteži vertikalna opruga krutosti c , Sl. 3.22.

Odrediti konačnu jednačinu malih oscilacija diska, ako mu je u ravnotežnom položaju saopštena početna ugaona brzina $\dot{\varphi}_o$, koja je pozitivne orijentacije. Masu opruge zanemariti.

Rješenje:

Za generalisanu koordinatu usvojice se ugao φ , kojim se mjeri zakretanje diska u pozitivnom smjeru (suprotno od kazaljke na satu).

Na osnovu zakona o promjeni momenta količine kretanja dobija se

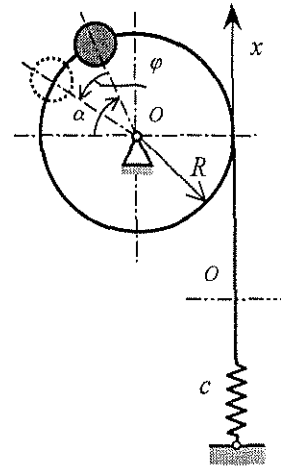
$$I_o \ddot{\varphi} = mg R \cos(\alpha - \varphi) - c(x + f_{st})R,$$

ili

$$I_o \ddot{\varphi} = mg R (\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi) - c x R - c f_{st} R. \quad (a)$$

Pošto su oscilacije male to je i φ malo, pa se može koristiti aproksimacija $\sin \varphi \approx \varphi$ i $\cos \varphi \approx 1$. Sada se jednačina (a) može pisati u obliku

$$I_o \ddot{\varphi} + c x R - mg R \varphi \sin \alpha = mg R \cos \alpha - c f_{st} R.$$



Sl. 3.22. Oscilacije koncentrisane mase

Iz statičkog uslova ravnoteže momenata za tačku O dobija se

$$\sum M_o^{\vec{F}_i} = mg R \cos \alpha - c f_{st} R = 0, \quad (b)$$

a kako vrijede odnosi

$$I_o = \frac{1}{2} M R^2 + m R^2 = \frac{1}{2} (M + 2m) R^2,$$

$$x = R \varphi,$$

diferencijalna jednačina kretanja glasi

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad (c)$$

gdje je

$$\omega^2 = \frac{2(c R - mg \sin \alpha)}{(M + 2m) R}.$$

Opšte rješenje diferencijalne jednačine je

$$\varphi = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (d)$$

Iz početnih uslova

$$t = 0 \left| \begin{array}{l} \varphi_o = 0 \\ \dot{\varphi}_o = \dot{\varphi}_o \end{array} \right.,$$

dobija se

$$C_1 = 0 \quad \text{i} \quad C_2 = \frac{\dot{\varphi}_o}{\omega},$$

pa konačna jednačina kretanja malih oscilacija diska glasi

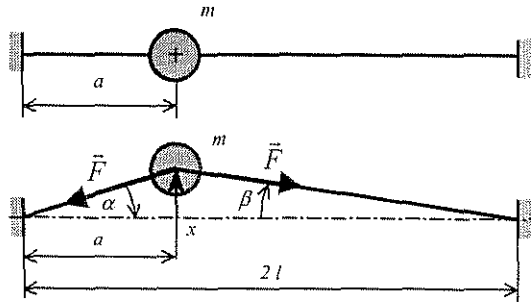
$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_o}{\omega} \sin \omega t. \quad (e)$$

Primjer br. 4.

Na zategnutoj elastičnoj struni pričvršćena je koncentrisana masa m , kako je prikazano na slici 3.23. U slučaju malih oscilacija odrediti diferencijalnu jednačinu kretanja mase m , kružnu frekvenciju i ekvivalentnu krutost strune. Masu strune zanemariti.

Rješenje:

U slučaju malih oscilacija koncentrisana masa vrši pravolinijsko oscilatorno kretanje.



Sl. 3.23. Oscilacije koncentrisane mase na elastičnoj struni

Diferencijalna jednačina kretanja glasi

$$m\ddot{x} = -F \sin \alpha - F \sin \beta. \quad (\text{a})$$

Za male uglove vrijedi

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha = x/a, \quad \sin \beta \approx \tan \beta = x/(2l - a),$$

pa se diferencijalna jednačina kretanja može napisati u obliku

$$\ddot{x} + \frac{F}{m} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2l - a} \right) x = 0, \quad (\text{b})$$

dok kružna frekvencija iznosi

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{m} \left(\frac{2l}{a(2l - a)} \right)}. \quad (\text{c})$$

Iz diferencijalne jednačine (b) slijedi ekvivalentna krutost strune

$$c_{ek} = F \frac{2l}{a(2l - a)}. \quad (\text{d})$$

U slučaju kada je $a = l$, ekvivalentna krutost strune je

$$c_{ek} = \frac{2F}{l}. \quad (\text{e})$$

Primjer br. 5.

Električni motor učvršćen je na platformi, koja je poduprta spiralnom oprugom krutosti c , Sl. 3.24. Težina platforme i elektromotora je G . Na vratilu električnog motora nalazi se teret Q , koji je ekscentrično postavljen u odnosu na osu vratila. Ugaona brzina elektromotora je Ω . Odrediti prinudne oscilacije platforme u slučaju rezonancije.

Rješenje:

U položaju ravnoteže vrijedi $G = cf_{st}$. Uz $\varphi = \Omega t$ diferencijalna jednačina kretanja platforme glasi

$$\frac{G}{g} \ddot{x} = G - c(f_{st} + x) + \frac{Q}{g} e \Omega^2 \cos \Omega t \quad (\text{a})$$

ili

$$\ddot{x} + \frac{gc}{G} x = \frac{Q}{G} e \Omega^2 \cos \Omega t. \quad (\text{b})$$

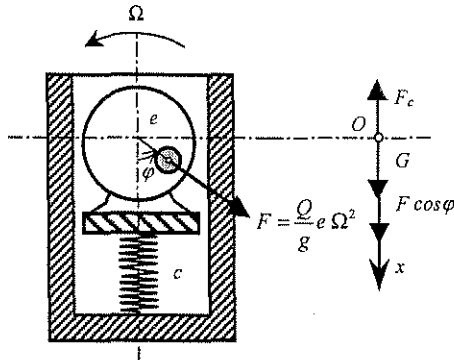
Kružna frekvencija slobodnih oscilacija platforme iznosi

$$\omega = \sqrt{\frac{gc}{G}}.$$

U slučaju rezonancije, kružna frekvencija prinudne sile jednaka je kružnoj frekvenciji sopstvenih oscilacija platforme ω i sada se više ne radi o malim oscilacijama.

Zato će se rješenje nehomogenog dijela diferencijalne jednačine (b) potražiti u obliku

$$x_p = C_1 t \cos \Omega t + C_2 t \sin \Omega t. \quad (\text{c})$$



Sl. 3.24. Oscilacije platforme

Dvostrukim diferenciranjem izraza (c) po vremenu dobija se

$$\begin{aligned} \dot{x}_o &= C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t - C_1 \Omega t \sin \Omega t + C_2 \Omega t \cos \Omega t, \\ \ddot{x}_p &= -2C_1 \Omega \sin \Omega t + 2C_2 \Omega \cos \Omega t - \Omega^2 t [C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t]. \end{aligned}$$

Zamjenom u diferencijalnu jednačinu kretanja (b), a uzimajući u obzir da je

$$\frac{g c}{G} = \omega^2 = \Omega^2,$$

dobiće se

$$-2C_1 \Omega \sin \Omega t + 2C_2 \Omega \cos \Omega t = \frac{Q}{G} e \Omega^2 \cos \Omega t.$$

Oдавde je

$$C_1 = 0; \quad C_2 = \frac{Q}{2G} e \Omega,$$

pa je zakon kretanja platforme

$$x_p = \frac{Q}{2G} e \Omega t \sin \Omega t. \quad (d)$$

Primjer br. 6.

Valjak prečnika $2R$, visine h i težine G obješen je o oprugu krutosti c i potopljen u tečnost specifične težine γ . U ravnotežnom položaju valjak je potopljen do polovine svoje visine h .

U početnom trenutku $t = 0$ valjak se potopi do visine $2h/3$ i pusti bez početne brzine, Sl. 3.25. Odrediti zakon oscilovanja valjka oko njegovog ravnotežnog položaja. Pretpostavlja se da se dejstvo tečnosti svodi na silu uzgona F_w i da je otpor tečnosti proporcionalan prvom stepenu brzine $F_w = \alpha v$.

Rješenje:

Posmatraće se uslovi ravnoteže sistema u pravcu ose x

$$G - R^2 \pi \frac{h}{2} \gamma - c f_{st} = 0, \quad (a)$$

gdje drugi član predstavlja silu uzgona, koja je proporcionalna volumenu uronjenog tijela i specifičnoj težini tečnosti.

Diferencijalna jednačina kretanja u pravcu x ose glasi

$$m \ddot{x} = G - c(f_{st} + x) - R^2 \pi \left(\frac{h}{2} + x \right) \gamma - \alpha \dot{x}. \quad (b)$$

Uzimajući u obzir jednačinu (a), jednačina (b) će biti

$$m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + (c + R^2 \pi \gamma) x = 0. \quad (c)$$

Uvedu li se oznake

$$2\delta = \frac{\alpha}{m} \quad \text{i} \quad \omega^2 = \frac{c + R^2 \pi \gamma}{m},$$

diferencijalna jednačina kretanja valjka dobija se u obliku

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (d)$$

Kod prigušenih oscilacija, ako su konstante date u opštim brojevima, kretanje će biti oscilatorno ako je $\delta < \omega$, pa se to svodi na uslov

$$\left(\frac{\alpha}{2m} \right)^2 - \frac{c + R^2 \pi \gamma}{m} < 0. \quad (e)$$

U ovom slučaju, rješenje diferencijalne jednačine (d) je dato u obliku

$$x = e^{-\delta t} [C_1 \cos pt + C_2 \sin pt] \quad (f)$$

Traženje konstanti može se uprostiti ako se iskoristi već poznato rješenje za C_1 i C_2 za opšti slučaj

$$t=0 \begin{cases} x=x_o \\ \dot{x}=\dot{x}_o \end{cases},$$

gdje su

$$C_1 = x_o \text{ i } C_2 = \frac{\delta x_o + \dot{x}_o}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}}.$$

U ovom zadatku početni uslovi su

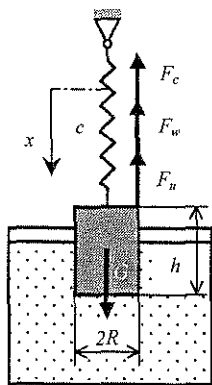
$$t=0 \begin{cases} x=x_o = \frac{2}{3}h - \frac{1}{2}h = \frac{h}{6} \\ \dot{x}=\dot{x}_o = 0 \end{cases},$$

pa su konstante

$$C_1 = \frac{h}{6} \text{ i } C_2 = \frac{\delta h}{6\sqrt{\omega^2 - \delta^2}}.$$

Rješenje diferencijalne jednačine (d) u konačnom obliku glasi

$$x = \frac{h}{6} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \delta^2}} e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} t - \alpha_o) \quad (g)$$



Sl. 3.25. Oscilacije valjka u otpornoj sredini

gdje je

$$\operatorname{tg} \alpha_o = \frac{\delta x_o + \dot{x}_o}{x_o \sqrt{\omega^2 - \delta^2}} = \frac{\delta}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}}.$$

Jednačina (g) predstavlja zakon kretanja valjka oko ravnotežnog položaja.

4

MALE OSCILACIJE SISTEMA SA JEDNIM STEPENOM SLOBODE

4.1. Slobodne neprigušene oscilacije

Posmatraće se male oscilacije sistema materijalnih tačaka M_1, \dots, M_n , koji ima jedan stepen slobode kretanja i na koji djeluju elastične sile uspostavljanja $\vec{F}_{c1}, \dots, \vec{F}_{cn}$. Pod dejstvom ovih sila, sistem materijalnih tačaka može da osciluje oko položaja ravnoteže A_1, \dots, A_n . Sile restitucije (uspostavljanja) su konzervativne.

Položaj sistema koji je podvrgnut holonomnim stacionarnim zadržavajućim i idealnim vezama definiše se generalisanom koordinatom q , koja se mjeri od položaja stabilne ravnoteže. Ovaj položaj je ujedno i nulti položaj, pa će za ovo stanje biti $q = 0$.

Kinetička i potencijalna energija ovog sistema određene su približnim izrazima:

$$E_k \approx \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad E_p \approx \frac{1}{2} c q^2. \quad (4.1)$$

Kako je

$$E_k > 0 \text{ i } E_p > 0,$$

to je i

$$a > 0 \text{ i } c > 0.$$

Kao je već ranije navedeno, a je koeficijent inercije sistema, a c koeficijent elastičnosti. Diferencijalna jednačina kretanja materijalnog sistema postavit će se korištenjem Lagranžove diferencijalne jednačine druge vrste

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial q} = 0. \quad (4.2)$$

Kako je

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} = a \dot{q}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) = a \ddot{q}, \quad \frac{\partial E_p}{\partial q} = c q, \quad (4.3)$$

to će se zamjenom izraza (4.3) u (4.2) dobiti

$$a \ddot{q} + c q = 0. \quad (4.4)$$

Uvođenjem oznake $\omega^2 = c/a$, gdje je ω realan i pozitivan broj, jednačina (4.4) poprima oblik

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0. \quad (4.5)$$

Ovo je diferencijalna jednačina slobodnih neprigušenih oscilacija materijalnog sistema sa jednim stepenom slobode kretanja.

Jednačina (4.5) se ni po čemu ne razlikuje od već ranije izvedene diferencijalne jednačine za pravolinijske slobodne neprigušene oscilacije materijalne tačke. Stoga se daljnji tok izvođenja svodi se na postupak koji je detaljno obrazložen u poglavlju 3.1.

Karakteristična jednačina diferencijalne jednačine (4.5) ima oblik

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0, \quad (4.6)$$

dok su njeni korijeni:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega. \quad (4.7)$$

Opšti integral diferencijalne jednačine (4.5) glasi

$$q = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad (4.8)$$

gdje su C_1 i C_2 – integracione konstante.

Diferenciranjem izraza (4.8) po vremenu dobiće se

$$\dot{q} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t. \quad (4.9)$$

Iz početnih uslova

$$t = 0 \quad \begin{cases} q = q_0 \\ \dot{q} = \dot{q}_0 \end{cases}$$

a prema jednačinama (4.8) i (4.9) dobiće se integracione konstante:

$$C_1 = q_0 \quad \text{i} \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega}. \quad (4.10)$$

Na osnovu ovoga opšti integral (4.8) glasi

$$q = q_0 \cos \omega t + \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (4.11)$$

Ukoliko se stavi da je $C_1 = A \cos \varphi_0$ i $C_2 = A \sin \varphi_0$, opšti integral se može napisati u obliku

$$q = A \cos(\omega t - \varphi_0). \quad (4.12)$$

Ovaj izraz predstavlja zakon promjene generalisane koordinate q tokom vremena.

I ovdje važe relacije:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{\omega}\right)^2}, \quad \text{tg } \varphi_0 = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\dot{q}_0}{\omega q_0}. \quad (4.13)$$

Period slobodnih neprigušenih oscilacija iznosi

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}}. \quad (4.14)$$

4.2. Osnovne karakteristike slobodnih oscilacija

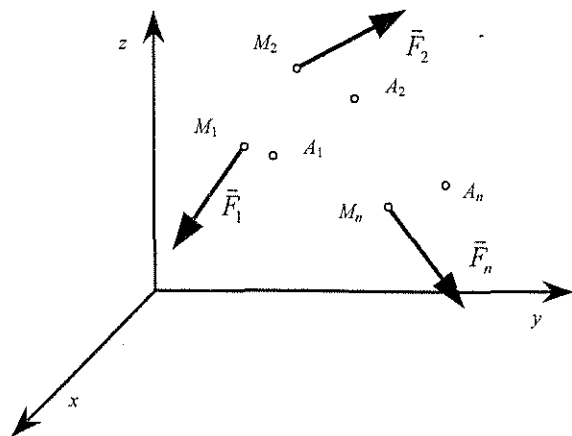
Posmatraće se materijalni sistem koji ima n materijalnih tačaka. Materijalni sistem, odnosno njegove materijalne tačke, posmatraće se u Dekartovom koordinatnom sistemu, Sl. 4.1.

Položaj svake materijalne tačke M_i sistema definisat će se odgovarajućim koordinatama x_i, y_i, z_i , a sa $(x_i)_0, (y_i)_0, (z_i)_0$ obilježiće se položaj tačaka A_i , koje predstavljaju ravnotežni položaj tačaka M_i .

Usljed poremećaja stabilne ravnoteže, doći će do pomjeranja materijalnih tačaka M_i u odnosu na njihov ravnotežni položaj A_i . Projekcije ovih pomjeranja u odnosu na referentne ose označit će se sa u_i, v_i, w_i .

Ove projekcije iznose:

$$u_i = x_i - (x_i)_o, \quad y_i = y_i - (y_i)_o, \quad w_i = z_i - (z_i)_o. \quad (4.15)$$



Sl. 4.1 Materijalni sistem

Koordinate materijalne tačke M_i mogu se izraziti u funkciji generalisane koordinate q :

$$x_i = x_i(q), \quad y_i = y_i(q), \quad z_i = z_i(q). \quad (4.16)$$

Razviju li se ove funkcije u redove po maloj veličini q u okolini $q = 0$, dobiće se vrijednosti koordinata x_i, y_i, z_i .

U položaju stabilne ravnoteže će biti:

$$\begin{aligned} x_i &= (x_i)_o + \left(\frac{\partial x_i}{\partial q} \right)_o q + \dots \\ y_i &= (y_i)_o + \left(\frac{\partial y_i}{\partial q} \right)_o q + \dots \\ z_i &= (z_i)_o + \left(\frac{\partial z_i}{\partial q} \right)_o q + \dots \end{aligned} \quad (4.17)$$

Uvedu li se oznake:

$$L^{(i)} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial q} \right)_o, \quad M^{(i)} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial q} \right)_o, \quad N^{(i)} = \left(\frac{\partial z_i}{\partial q} \right)_o, \quad (4.18)$$

koje su konstantne veličine, izrazi (4.17) se mogu napisati u obliku

$$\begin{aligned} x_i &= (x_i)_o + L^{(i)} q + \dots \\ y_i &= (y_i)_o + M^{(i)} q + \dots \\ z_i &= (z_i)_o + N^{(i)} q + \dots \end{aligned} \quad (4.19)$$

Iz ovoga proizilazi da se izrazi (4.15) mogu, sa tačnošću do veličina prvog reda, napisati u obliku

$$u_i = L^{(i)} q, \quad v_i = M^{(i)} q, \quad w_i = N^{(i)} q. \quad (4.20)$$

Na ovaj način su projekcije pomjeranja izražene preko generalisane koordinate q .

Ukoliko se žele postaviti jednačine kretanja tačke M_i u Dekartovim koordinatama, treba u izraze (4.20) uvrstiti q iz jednačine (4.12), pa se dobija

$$\begin{aligned} u_i &= L^{(i)} A \cos(\omega t - \varphi_o), \\ v_i &= M^{(i)} A \cos(\omega t - \varphi_o), \\ w_i &= N^{(i)} A \cos(\omega t - \varphi_o). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ovo su jednačine slobodnih neprigušenih oscilacija pojedinih tačaka sistema izražene preko Dekartovih koordinata.

Osnovne karakteristike ovih oscilacija su:

- slobodne neprigušene oscilacije sistema su harmonijske oscilacije;
- eliminacijom vremena iz jednačina (4.21) dobiće se jednačina prave kroz tačku A_i , odnosno kroz odgovarajući položaj stabilne ravnoteže, koja glasi

$$\frac{u_i}{L^{(i)}} = \frac{v_i}{M^{(i)}} = \frac{w_i}{N^{(i)}},$$

ili

$$\frac{x_i - (x_i)_o}{L^{(i)}} = \frac{y_i - (y_i)_o}{M^{(i)}} = \frac{z_i - (z_i)_o}{N^{(i)}}.$$

Iz ovog proizilazi da će svaka tačka materijalnog sistema vršiti pravolinijsko kretanje po pravoj koja prolazi kroz položaj stabilne ravnoteže.

Amplitude oscilacija tačke M_i duž osa Ox , Oy i Oz određene su izrazima:

$$L^{(i)} A, \quad M^{(i)} A, \quad N^{(i)} A,$$

dok je ugao φ_0 - ugao fazne razlike.

Iz izraza (4.13) vidi se da su A i φ_0 proizvoljne integracione konstante koje zavise od početnih uslova.

Početni uslovi kretanja utiču na amplitudu različitih tačaka sistema preko množitelja A , koji je zajednički za sve tačke sistema.

Faza $(\omega t - \varphi_0)$ je ista za sve tačke sistema, pa sve tačke osciluju u fazi, odnosno oscilacije su sinhronne.

Pri oscilovanju sistema, tačke jednovremeno prolaze kroz svoje ravnotežne položaje i to u trenucima kad je

$$\omega t - \varphi_0 = n \frac{\pi}{2}, \quad \text{za vrijednosti } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Takođe, tačke istovremeno dostižu svoje maksimume i to u trenucima:

$$\omega t - \varphi_0 = n\pi, \quad \text{za } n = 1, 2, \dots$$

Navedena svojstva slobodnih neprigušenih oscilacija proizašla su iz približnih linearizovanih jednačina.

Razlike od stvarnih kretanja biće utoliko manje ukoliko su manje amplitude oscilovanja pojedinih tačaka sistema.

4.3. Slobodne prigušene oscilacije pod djelovanjem sila otpora proporcionalnih prvom stepenu brzine

Posmatraće se sistem materijalnih tačaka $M_1, \dots, M_i, \dots, M_n$ na koji pored elastičnih sila $\vec{F}_{c1}, \dots, \vec{F}_{ci}, \dots, \vec{F}_{cn}$ djeluju i sile otpora $\vec{F}_{w1}, \dots, \vec{F}_{wi}, \dots, \vec{F}_{wn}$, koje su proporcionalne brzinama tačaka sistema.

Brzine pojedinih tačaka iznose $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n$, pa će se sile otpora definisati u obliku

$$\vec{F}_{w1} = -\beta_1 \vec{v}_1, \dots, \vec{F}_{wi} = -\beta_i \vec{v}_i, \dots, \vec{F}_{wn} = -\beta_n \vec{v}_n. \quad (4.22)$$

gdje su $\beta_1, \dots, \beta_i, \dots, \beta_n$ konstantni i pozitivni brojevi.

Kinetička energija, potencijalna energija i funkcija rasipanja određene su izrazima:

$$E_k \approx \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad E_p \approx \frac{1}{2} c q^2, \quad \Phi \approx \frac{1}{2} b \dot{q}^2. \quad (4.23)$$

Diferencijalna jednačina kretanja sistema dobiće se iz Lagranžove jednačine druge vrste

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial q} = Q^w,$$

gdje je Q^w generalisana sila prigušenja koja proizilazi iz sila otpora:

$$\vec{F}_{w1}, \dots, \vec{F}_{wi}, \dots, \vec{F}_{wn}.$$

Pošto je

$$Q^w = -\frac{\partial \Phi}{\partial q} = -b \dot{q}, \quad (4.24)$$

to diferencijalna jednačina kretanja sistema materijalnih tačaka glasi

$$a \ddot{q} + b \dot{q} + c q = 0. \quad (4.25)$$

Sada se postavlja pitanje određivanja koeficijenta prigušenja sistema b u jednačini (4.25). Sistemu sila otpora koji djeluje na materijalni sistem odgovara jedna generalisana sila

$$Q^w = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{wi} \frac{d \vec{r}_i}{d q}. \quad (4.26)$$

Označe li se sa X_{wi}, Y_{wi}, Z_{wi} projekcije sile otpora \vec{F}_{wi} na Dekartove ose dobija se

$$Q^w = \sum_{i=1}^n \left(X_{wi} \frac{d x_i}{d q} + Y_{wi} \frac{d y_i}{d q} + Z_{wi} \frac{d z_i}{d q} \right), \quad (4.27)$$

gdje su x_i, y_i i z_i Dekartove koordinate tačke M_i , a Q^w generalisana sila otpora prigušenja.

Kako je sila otpora \vec{F}_{wi} suprotna od brzine tačke, $\vec{F}_{wi} = -\beta_i \vec{v}_i$, to su njene projekcije na ose:

$$X_{wi} = -\beta_i \dot{x}_i, \quad Y_{wi} = -\beta_i \dot{y}_i, \quad Z_{wi} = -\beta_i \dot{z}_i.$$

Uvedu li se pomjeranja u_i, v_i i w_i tačke M_i duž pripadajućih osa, dobiće se

$$x_i = (x_i)_o + u_i, \quad y_i = (y_i)_o + v_i, \quad z_i = (z_i)_o + w_i.$$

Prema (4.20), dobija se

$$x_i = (x_i)_o + L^{(i)} q, \quad y_i = (y_i)_o + M^{(i)} q, \quad z_i = (z_i)_o + N^{(i)} q.$$

Uvrštavanjem relacija

$$\frac{d x_i}{d q} = L^{(i)}, \quad \frac{d y_i}{d q} = M^{(i)}, \quad \frac{d z_i}{d q} = N^{(i)},$$

$$\dot{x} = L^{(i)} \dot{q}, \quad \dot{y} = M^{(i)} \dot{q}, \quad \dot{z} = N^{(i)} \dot{q}, \quad (4.28)$$

$$X_{wi} = -\beta_i L^{(i)} \dot{q}, \quad Y_{wi} = -\beta_i M^{(i)} \dot{q}, \quad Z_{wi} = -\beta_i N^{(i)} \dot{q}$$

u (4.27) dobiće se

$$Q^w = -\dot{q} \sum_{i=1}^n \beta_i \left\{ [L^{(i)}]^2 + [M^{(i)}]^2 + [N^{(i)}]^2 \right\} = -b \dot{q}, \quad (4.29)$$

gdje je

$$b = \sum_{i=1}^n \beta_i \left\{ [L^{(i)}]^2 + [M^{(i)}]^2 + [N^{(i)}]^2 \right\}. \quad (4.30)$$

Ovim se potvrdilo da je generalisana sila prigušenja Q^w proporcionalna generalisanoj brzini, pri čemu je koeficijent proporcionalnosti upravo koeficijent prigušenja b određen izrazom (4.30).

Ponovnim razmatranjem diferencijalne jednačine kretanja (4.25) i uvođenjem oznaka

$$\frac{c}{a} = \omega^2 \quad i \quad \frac{b}{a} = 2\delta, \quad (4.31)$$

dobiće se

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega^2 q = 0. \quad (4.32)$$

Ovo je diferencijalna jednačina slobodnih prigušenih oscilacija materijalnog sistema pod dejstvom otpora proporcionalnog prvom stepenu brzine tačaka sistema.

Ova jednačina ima isti oblik kao i diferencijalna jednačina slobodnih prigušenih oscilacija materijalne tačke na koju djeluje sila otpora proporcionalna prvom stepenu brzine.

Karakteristična jednačina diferencijalne jednačine (4.32) glasi

$$\lambda^2 + 2\delta \lambda + \omega^2 = 0, \quad (4.33)$$

a njeni korijeni su:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}.$$

Zavisno od odnosa δ i ω , rješenje se može javiti u sljedeća tri oblika:

1) U slučaju malog prigušenja $\delta < \omega$, rješenje ima oblik

$$q = e^{-\delta t} (A \cos pt + B \sin pt), \quad \text{gdje je } p = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}. \quad (4.34)$$

Period oscilatornog kretanja je u ovom slučaju

$$T_p = \frac{2\pi}{p} = \frac{T_\omega}{\sqrt{1 - \psi^2}}, \quad \text{gdje su } \psi = \delta/\omega \text{ i } T_\omega = 2\pi/\omega$$

2) U slučaju velikog prigušenja $\delta > \omega$, oblik rješenja je

$$q = e^{-\delta t} (A \operatorname{ch} kt + B \operatorname{sh} kt), \quad \text{gdje je } k = \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \quad (4.35)$$

U ovom slučaju neće doći do oscilatornog kretanja.

3) Za granični slučaj prigušenja $\delta = \omega$, rješenje se javlja u obliku

$$q = e^{-\delta t} (A + B t). \quad (4.36)$$

I u ovom slučaju kretanje neće biti periodično.

4.4. Prinudne oscilacije sistema sa jednim stepenom slobode

Ovaj slučaj oscilacija se javlja kada na sistem materijalnih tačaka M_i , pored elastičnih sila, djeluju i poremećajne sile $\vec{F}_{\Omega 1}, \dots, \vec{F}_{\Omega n}$, koje se mijenjaju tokom vremena. Zakon promjene poremećajnih sila mogu biti proizvoljne ili periodične funkcije. Neka na pojedine tačke materijalnog sistema djeluju i sile otpora $\vec{F}_{w1}, \dots, \vec{F}_{wn}$, koje su proporcionalne prvom stepenu brzine pojedinih tačaka sistema.

Diferencijalna jednačina kretanja sistema će se postaviti korištenjem Lagranžovih jednačina druge vrste, koje u ovom slučaju glase

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial q} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + Q^\Omega, \quad (4.37)$$

gdje je Q^Ω generalisana poremećajna sila, koja iznosi

$$Q^\Omega = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{\Omega i} \frac{d \vec{r}_i}{d q},$$

ili

$$Q^\Omega = \sum_{i=1}^n \left(X_{\Omega i} \frac{d x_i}{d q} + Y_{\Omega i} \frac{d y_i}{d q} + Z_{\Omega i} \frac{d z_i}{d q} \right). \quad (4.38)$$

Ovdje su $X_{\Omega i}, Y_{\Omega i}, Z_{\Omega i}$ projekcije sile $\vec{F}_{\Omega i}$ na ose Dekartovog koordinatnog sistema, a x_i, y_i, z_i koordinate napadnih tačaka poremećajnih sila.

Pošto je

$$\frac{d x_i}{d q} = L^{(i)}, \quad \frac{d y_i}{d q} = M^{(i)}, \quad \frac{d z_i}{d q} = N^{(i)}, \quad (4.39)$$

to se (4.38) može napisati u obliku

$$Q^\Omega = \sum_{i=1}^n [L^{(i)} X_{\Omega i} + M^{(i)} Y_{\Omega i} + N^{(i)} Z_{\Omega i}]. \quad (4.40)$$

Upotrebom jednačine (4.37) za definisane uslove kretanja, dobiće se diferencijalna jednačina kretanja sistema u obliku

$$a \ddot{q} + b \dot{q} + c q = Q^\Omega. \quad (4.41)$$

4.4.1. Slučaj proizvoljnih poremećajnih sila

Posmatraće se slučaj kada se poremećajne sile $\vec{F}_{\Omega 1}, \dots, \vec{F}_{\Omega n}$ mijenjaju u zavisnosti od vremena po proizvoljnom zakonu. Stoga će i generalisana poremećajna sila Q^Ω , data izrazom (4.40), takođe biti proizvoljna funkcija od vremena

$$Q^\Omega = Q^\Omega(t). \quad (4.42)$$

Ako se diferencijalna jednačina kretanja (4.41) podijeli sa a i uvedu oznake $c/a = \omega^2$ i $b/a = 2\delta$, dobiće se

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega^2 q = \frac{1}{a} Q^\Omega(t) = \varphi(t). \quad (4.43)$$

Pri integraciji ove jednačine primjenjuje se postupak varijacije konstanti.

Uz pretpostavku da je otpor mali, dakle $\delta < \omega$, prvo će se odrediti opšti integral homogene diferencijalne jednačine

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega^2 q = 0. \quad (4.44)$$

Uvede li se oznaka

$$p^2 = \omega^2 - \delta^2,$$

opšti integral diferencijalne jednačine (4.44) imaće oblik

$$q = e^{-\delta t} [A \cos pt + B \sin pt]. \quad (4.45)$$

Opšti integral nehomogene jednačine (4.43) potražiće se u obliku (4.45), ali uz pretpostavku da su integracione konstante A i B vremenske funkcije

$$q = e^{-\delta t} [A(t) \cos pt + B(t) \sin pt]. \quad (4.46)$$

Diferenciranjem ovog izraza po vremenu dobija se

$$\dot{q} = -\delta e^{-\delta t} [A(t) \cos pt + B(t) \sin pt] + p e^{-\delta t} [-A(t) \sin pt + B(t) \cos pt] + e^{-\delta t} \left[\frac{dA}{dt} \cos pt + \frac{dB}{dt} \sin pt \right]. \quad (4.47)$$

Kako je već navedeno, potrebno je naći jedno posebno rješenje za dvije nepoznate funkcije $A(t)$ i $B(t)$. Neka tražene funkcije $A(t)$ i $B(t)$ trebaju zadovoljiti uslov

$$\frac{dA}{dt} \cos pt + \frac{dB}{dt} \sin pt = 0. \quad (4.48)$$

U tom slučaju izraz (4.47) dobija jednostavniji oblik

$$\dot{q} = e^{-\delta t} [-\delta(A \cos pt + B \sin pt) + p(-A \sin pt + B \cos pt)]. \quad (4.49)$$

Još jednim diferenciranjem i korištenjem uslova (4.48) dobija se

$$\ddot{q} = e^{-\delta t} \left[(\delta^2 - p^2)(A \cos pt + B \sin pt) - 2\delta p(-A \sin pt + B \cos pt) + p \left(-\frac{dA}{dt} \sin pt + \frac{dB}{dt} \cos pt \right) \right] \quad (4.50)$$

Unošenjem vrijednosti q , \dot{q} i \ddot{q} datih izrazima (4.45), (4.49) i (4.50) u diferencijalnu jednačinu (4.43), dobiće se

$$-\frac{dA}{dt} \sin pt + \frac{dB}{dt} \cos pt = \frac{e^{\delta t}}{ap} Q^{\Omega}(t). \quad (4.51)$$

Za određivanje nepoznatih funkcija $A(t)$ i $B(t)$ koristiće se jednačine (4.48) i (4.51), pa se njihovim rješavanjem dobije

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\frac{1}{ap} e^{\delta t} Q^{\Omega}(t) \sin pt, \\ \frac{dB}{dt} &= \frac{1}{ap} e^{\delta t} Q^{\Omega}(t) \cos pt. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Integracijom jednačina (4.52) dobiće se

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{ap} \int_0^t e^{\delta \tau} Q^{\Omega}(\tau) \sin p\tau \, d\tau + C_1, \\ B &= \frac{1}{ap} \int_0^t e^{\delta \tau} Q^{\Omega}(\tau) \cos p\tau \, d\tau + C_2, \end{aligned} \quad (4.53)$$

gdje su C_1 i C_2 proizvoljne integracione konstante, dok τ označava promjenljivu pod znakom integrala od 0 do t .

Zamijene li se vrijednosti za A i B u jednačini (4.45) izrazima (4.53), dobiće se

$$\begin{aligned} q &= e^{-\delta t} (C_1 \cos pt + C_2 \sin pt) + \frac{e^{-\delta t}}{ap} \left[\sin pt \int_0^t e^{\delta \tau} Q^{\Omega}(\tau) \cos p\tau \, d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \cos pt \int_0^t e^{\delta \tau} Q^{\Omega}(\tau) \sin p\tau \, d\tau \right]. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Kako se integracija vrši po τ , a ne po t , gornji izraz se može napisati u kraćem obliku

$$q = e^{-\delta t} (C_1 \cos pt + C_2 \sin pt) + \frac{1}{ap} \int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} Q^{\Omega}(\tau) \sin p(t-\tau) \, d\tau. \quad (4.55)$$

Prvi član ove jednačine odgovara slobodnim prigušenim oscilacijama, dok drugi član predstavlja prinudne oscilacije nastale usljed djelovanja poremećajnih sila \vec{F}_{Ω} .

Ako nema prigušenja, odnosno za $\delta = 0$, prethodna jednačina dobija oblik

$$q = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{1}{a\omega} \int_0^t Q^{\Omega}(\tau) \sin \omega(t-\tau) \, d\tau. \quad (4.56)$$

Izraz (4.56) predstavlja opšti integral diferencijalne jednačine prinudnih neprigušenih oscilacija materijalnog sistema sa jednim stepenom slobode, koja ima oblik

$$\ddot{q} + \omega^2 q = \frac{1}{a} Q^{\Omega}(t) = \varphi(t). \quad (4.57)$$

Ako su početni uslovi $t = 0$, $q = q_0$ i $\dot{q} = \dot{q}_0$, nakon određivanja integracionih konstanti C_1 i C_2 , jednačina (4.56) postaje

$$q = q_0 \cos \omega t + \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{a\omega_o} \int_0^t Q^\Omega(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau, \quad (4.58)$$

što predstavlja opšti integral diferencijalne jednačine prinudnih neprigušenih oscilacija materijalnog sistema sa jednim stepenom slobode kretanja.

Prva dva sabirka jednačine (4.58) predstavljaju zakon slobodnih neprigušenih oscilacija sistema.

U slučaju početnih uslova $q_0 = 0$ i $\dot{q}_0 = 0$, prethodno rješenje predstavlja zakon kretanja sistema pri djelovanju poremećajnih sila.

4.4.2. Slučaj periodično promjenljivih poremećajnih sila

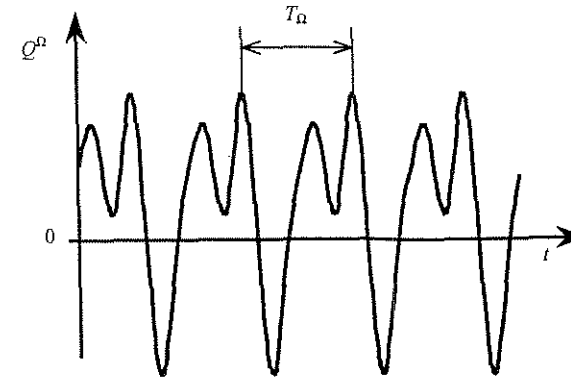
Slučaj periodične promjene poremećajnih sila vrlo je čest u tehničkoj praksi. Neka su $\vec{F}_{\Omega_1}, \dots, \vec{F}_{\Omega_n}$ poremećajne sile koje djeluju na tačke materijalnog sistema i neka se one periodično mijenjaju tokom vremena. Pod ovakvim uslovima, i generalisana poremećajna sila će takođe biti periodična.

U ovakvim slučajevima se primjenjuje drugačiji postupak integraljenja diferencijalne jednačine (4.43). Postupak koji će se ovdje primijeniti zasniva se na harmonijskoj analizi periodične funkcije $Q^\Omega = Q^\Omega(t)$, odnosno na razlaganju te funkcije u Furijeov red.

Neka je vremenska promjena funkcije $Q^\Omega = Q^\Omega(t)$ prikazana dijagramom na slici 4.2. Kako se može vidjeti, period funkcije je T_Ω , pri čemu veličina $\Omega = 2\pi/T_\Omega$ predstavlja osnovnu kružnu frekvenciju promjene generalisane poremećajne sile.

Kad je generalisana poremećajna sila $Q^\Omega(t)$ proizvoljna funkcija od vremena, koristi se postupak razlaganja funkcije u red, odnosno harmonijska analiza.

Da bi se funkcija $Q^\Omega(t)$ razvila u red, potrebno je da ona zadovoljava uslove Dirihlea, tj. da je ograničena, da ima prekide prve vrste i da u konačnom vremenskom intervalu ima konačan broj ekstremnih vrijednosti.



Sl. 4.2. Periodična funkcija

Uz pretpostavku da su ovi uslovi zadovoljeni, funkcija $Q^\Omega(t)$ se može razložiti u red oblika

$$Q^\Omega(t) = Q_o^\Omega + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\Omega t + B_n \sin n\Omega t), \quad (4.59)$$

gdje su Q_o^Ω , A_n i B_n konstantne veličine.

Član reda Q_o^Ω predstavlja srednju vrijednost generalisane sile $Q^\Omega(t)$ i može se odrediti izrazom

$$Q_o^\Omega = \frac{1}{T_\Omega} \int_0^{T_\Omega} Q^\Omega(t) dt. \quad (4.60)$$

Konstante A_n i B_n se određuju po formulama

$$A_n = \frac{2}{T_\Omega} \int_0^{T_\Omega} Q^\Omega(t) \cos n\Omega t dt \quad \text{i} \quad B_n = \frac{2}{T_\Omega} \int_0^{T_\Omega} Q^\Omega(t) \sin n\Omega t dt. \quad (4.61)$$

Član u izrazu (4.59)

$$A_n \cos n\Omega t + B_n \sin n\Omega t \quad (4.62)$$

naziva se n -tim harmonikom funkcije $Q^\Omega(t)$.

Ako se uvedu novi konstantni koeficijenti preko relacija:

$$A_n = C_n \cos \rho_n, \quad B_n = C_n \sin \rho_n, \quad (4.63)$$

gdje je $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ amplituda n -tog harmonika prinudne sile, a ρ_n ugao fazne razlike n -tog harmonika sile, koji se dobija iz

$$\operatorname{tg} \rho_n = \frac{B_n}{A_n}, \quad (4.64)$$

tada se red (4.59) može prikazati u obliku

$$Q^\Omega(t) = Q_o^\Omega + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\Omega t - \rho_n). \quad (4.65)$$

Ovaj postupak određivanja konstanti Q_o^Ω , A_n i B_n primjenjuje se samo u slučajevima kada je funkcija $Q^\Omega(t)$ jednostavnijeg oblika. U opštem slučaju određivanje funkcije $Q^\Omega(t)$ se vrši raznim približnim metodama, pri čemu se često koriste i razni mehanički pribori koji se nazivaju harmonijski analizatori.

Zamjenom reda (4.59) u desni dio diferencijalne jednačine (4.43) dobiće se

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega^2 q = \frac{Q_o^\Omega}{a} + \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\Omega t + B_n \sin n\Omega t). \quad (4.66)$$

Rješenje ove jednačine jednako je zbiru rješenja homogenog dijela i bilo kojeg njenog partikularnog rješenja.

Homogeni dio jednačine je

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega^2 q = 0, \quad (4.67)$$

čiji je opšti integral u slučaju malog otpora $\delta < \omega$

$$q_h = R e^{-\delta t} \cos(pt - \theta_o), \quad (4.68)$$

gdje su R i θ_o proizvoljne integracione konstante.

Partikularni integral diferencijalne jednačine (4.66) traži se u obliku

$$q_p = q_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t), \quad (4.69)$$

gdje su q_o , a_n i b_n neodređene konstante (koeficijenti) koje treba odrediti.

Zamjenom rješenja (4.69) i njegovih izvoda u diferencijalnu jednačinu (4.66) dobiće se

$$\begin{aligned} \omega^2 q_o + \sum_{n=1}^{\infty} \{ [(\omega^2 - n^2 \Omega^2) a_n + 2\delta n \Omega b_n] \cos n\Omega t + [(\omega^2 - n^2 \Omega^2) b_n - \\ - 2\delta n \Omega a_n] \sin n\Omega t \} = \frac{Q_o^\Omega}{a} + \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\Omega t + B_n \sin n\Omega t) \end{aligned} \quad (4.70)$$

Lijeva i desna strana ove jednačine identički su jednake ako je

$$\omega^2 q_o = \frac{Q_o^\Omega}{a},$$

$$(\omega^2 - n^2 \Omega^2) a_n + 2\delta n \Omega b_n = \frac{A_n}{a}, \quad (4.71)$$

$$(\omega^2 - n^2 \Omega^2) b_n - 2\delta n \Omega a_n = \frac{B_n}{a}.$$

Rješavanjem ovih jednačina po q_o , a_n i b_n , dobija se

$$q_o = \frac{Q_o^\Omega}{a \omega^2},$$

$$a_n = \frac{(\omega^2 - n^2 \Omega^2) A_n - 2\delta n \Omega B_n}{a [(\omega^2 - n^2 \Omega^2)^2 + 4\delta^2 n^2 \Omega^2]}, \quad (4.72)$$

$$b_n = \frac{(\omega^2 - n^2 \Omega^2) B_n + 2\delta n \Omega A_n}{a [(\omega^2 - n^2 \Omega^2)^2 + 4\delta^2 n^2 \Omega^2]}.$$

Ukoliko se ovi koeficijenti zamijene u partikularno rješenje (4.69), opšti integral nehomogene jednačine (4.66) dobiće oblik

$$q = q_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t) + R e^{-\delta t} \cos(pt - \theta_o), \quad (4.73)$$

gdje su R i θ_0 proizvoljne integracione konstante, dok q_0 , a_n i b_n imaju vrijednosti određene izrazima (4.72).

Član q_0 određuje konstantno udaljenje sistema od njegovog položaja ravnoteže, izazvano dejstvom srednje vrijednosti generalisane poremećajne sile Q_0^R .

Beskonačni red u drugom članu izraza (4.73) odgovara periodičnim oscilacijama kružne frekvencije Ω razložene u harmonike, a koje su prouzrokovane djelovanjem poremećajnih sila.

Posljednji član izraza (4.73) odnosi se na prigušene oscilacije.

4.4.2.1. Rezonancija

Posmatraće se poseban slučaj prinudnih oscilacija koji nastaje u slučaju kada je frekvencija jednog harmonika poremećajne sile jednaka frekvenciji slobodnih neprigušenih oscilacija sistema ω .

Neka je, dakle, frekvencija slobodnih oscilacija ω jednaka frekvenciji i -tog harmonika generalisane poremećajne sile sistema, tj.

$$\omega = i\Omega,$$

gdje je i - cijeli broj.

Prema izrazu (4.72) dobiće se

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{-B_i}{2\delta i \Omega a} = -\frac{B_i}{2\delta \omega a}, \\ b_i &= \frac{A_i}{2\delta i \Omega a} = \frac{A_i}{2\delta \omega a}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Na osnovu ovoga i -ti harmonik prinudnih oscilacija glasi

$$q = a_i \cos i\Omega t + b_i \sin i\Omega t = \frac{1}{2\delta \omega a} (-B_i \cos \omega t + A_i \sin \omega t). \quad (4.75)$$

Uvođenjem smjene

$$A_i = C_i \cos \varphi_i, \quad B_i = C_i \sin \varphi_i, \quad (4.76)$$

rješenje (4.75) se može pisati u obliku

$$q = \frac{C_i}{2\delta \omega a} \sin(\omega t - \varphi_i), \quad (4.77)$$

odnosno

$$q = \frac{C_i}{2\delta \omega a} \cos\left(\omega t - \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right). \quad (4.78)$$

Iz ovog izraza se vidi da će amplituda i -tog harmonika biti veća ukoliko bude manji koeficijent prigušenja δ . Pri malom prigušenju δ i pri maloj amplitudi poremećajne sile C_i , amplituda

$$\frac{C_i}{2\delta \omega a}, \quad (4.79)$$

može biti vrlo velika. U ovakvim okolnostima nastupa rezonancija.

Rezonancija nastaje u svim slučajevima kada je kružna frekvencija slobodnih oscilacija ω jednaka kružnoj frekvenciji bilo kojeg harmonika poremećajne sile

$$\omega = i\Omega \quad \text{za } i=1, 2, \dots \quad (4.80)$$

Drugim riječima, rezonancija nastaje pri svim vrijednostima kružne frekvencije poremećajne sile koje su jednake

$$\Omega = \frac{\omega}{i}, \quad (4.81)$$

gdje je i - cijeli broj.

Ove vrijednosti kružne frekvencije generalisane poremećajne sile nazivaju se kritičnim kružnim frekvencijama poremećajne sile sistema.

Za $\Omega = \omega$ rezonancija će biti izazvana prvim harmonikom generalisane poremećajne sile. Ova rezonancija se naziva rezonancijom prvog reda ($i=1$).

U slučaju $\Omega = \omega/2$, ($i=2$), rezonancija će biti izazvana drugim harmonikom generalisane poremećajne sile, pa se naziva rezonancijom drugog reda, itd.

Teorijski posmatrano, broj kritičnih kružnih frekvencija je beskonačno veliki.

Treba imati na umu da su pri velikim vrijednostima i (veliki harmonici), amplitude C_i generalisane poremećajne sile po pravilu male ($C_1 > C_2 > C_3 > \dots$).

Kako se prvo dostižu frekvencije najnižih tonova, od praktičnog su značaja upravo rezonancije najnižih tonova.

Prinudne oscilacije koje nastaju u uslovima rezonancije nazivaju se rezonantnim oscilacijama.

Ako su u pitanju rezonantne oscilacije i -tog tona i ako amplituda C_i i -tog harmonika poremećajne sile nije mala, onda će amplituda (4.79) i -tog harmonika prinudne oscilacije biti znatno veća od amplituda ostalih harmonika prinudnih oscilacija. Tada se u izrazu (4.73) mogu zanemariti svi harmonici izuzev i -tog, kao i član koji se odnosi na slobodne prigušene oscilacije sistema, pa se jednačina kretanja (4.73) može zamijeniti sa (4.78), odnosno

$$q = \frac{C_i}{2\delta\omega a} \cos\left(\omega t - \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right).$$

To znači da u ovom slučaju jednačina kretanja sistema približno pokazuje samo i -ti harmonik prinudne oscilacije. Odavde je jasno da su u slučaju jako ispoljene rezonancije oscilacije približno harmonijske sa kružnom frekvencijom jednakom frekvenciji slobodnih neprigušenih oscilacija ω . Amplituda ovih oscilacija je proporcionalna amplitudi i -tog harmonika poremećajne sile. Očigledno je da oscilacije kasne u fazi za $\pi/2$ iza odgovarajućeg harmonika generalisane poremećajne sile.

Ako se posmatraju prinudne oscilacije u uslovima koji su dovoljno daleki od rezonancije, onda se uz pretpostavku da su otpori vrlo mali mogu zanemariti članovi u izrazima (4.72) koji sadrže koeficijente otpora δ .

Na ovaj način dobijaju se članovi

$$a_n = \frac{A_n}{a(\omega^2 - n^2 \Omega^2)} \quad \text{i} \quad b_n = \frac{B_n}{a(\omega^2 - n^2 \Omega^2)} \quad (4.82)$$

a uvođenjem oznake $a\omega^2 = C$ može se pisati

$$a_n = \frac{A_n}{C\left(1 - \frac{n^2 \Omega^2}{\omega^2}\right)}, \quad b_n = \frac{B_n}{C\left(1 - \frac{n^2 \Omega^2}{\omega^2}\right)} \quad (4.83)$$

Ukoliko se ove vrijednosti uvrste u izraz (4.73), uz zanemarenje prigušenih slobodnih oscilacija sistema dobiće se

$$q = \frac{Q_0^\Omega}{C} + \frac{1}{C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos n\Omega t + B_n \sin n\Omega t}{1 - \frac{n^2 \Omega^2}{\omega^2}} \quad (4.84)$$

Pri statičkom djelovanju generalisane sile, odnosno ukoliko su sile uravnotežene, dobiće se

$$Cq = Q^\Omega \quad (4.85)$$

Ova jednačina se može dobiti iz izraza (4.41) ukoliko je

$$\dot{q} = \ddot{q} = 0.$$

Prema tome, pri statičkom dejstvu generalisane sile biće

$$q = \frac{Q^\Omega}{C} = \frac{Q_0^\Omega}{C} + \frac{1}{C} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\Omega t + B_n \sin n\Omega t) \quad (4.86)$$

Uporedi li se izraz (4.86) sa izrazom (4.84) pri dinamičkom dejstvu generalisane poremećajne sile, pojedini harmonici u redu za tu silu imaju veće ili manje vrijednosti u zavisnosti od množitelja

$$\eta_d^n = \frac{1}{1 - \frac{n^2 \Omega^2}{\omega^2}} \quad (4.87)$$

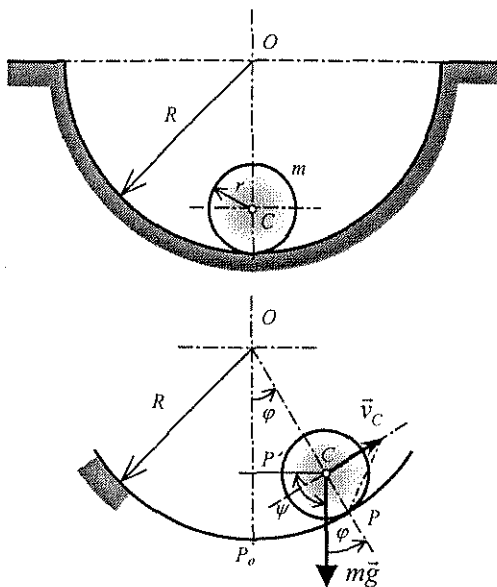
Ovaj množitelj se naziva dinamičkim faktorom pojačavanja. Svakom harmoniku odgovara i njegov faktor pojačavanja.

Treba još jednom naglasiti da izraz (4.84) važi samo u uslovima koji su dovoljno daleko od rezonance i kada se zanemari prigušenje ($\delta = 0$).

4.5. Primjeri

Primjer br. 1

Homogeni pravi kružni cilindar, poluprečnika r i mase m , može se kotrljati bez klizanja po unutrašnjoj površini nepokretnog kružnog cilindra, poluprečnika R , čije su izvodnice horizontalne. Za slučaj malih oscilacija cilindra, odrediti period oscilovanja oko položaja stabilne ravnoteže, Sl. 4.3.



Sl. 4.3. Oscilacije homogenog kružnog diska

Rješenje:

Sistem ima jedan stepen slobode kretanja i za generalisanu koordinatu izabraće se ugao φ , Sl. 4.3.

Cilindar vrši ravno kretanje ugaonom brzinom ψ i brzinom centra

$$v_C = r\psi.$$

Veza između uglova φ i ψ traži se iz uslova kotrljanja cilindra bez klizanja, odnosno iz jednakosti lukova $P_0P = PP'$, odnosno

$$R\varphi = r(\varphi + \psi).$$

Oдавde se dobije da je

$$\psi = \frac{R-r}{r} \varphi, \quad (a)$$

$$\dot{\psi} = \frac{R-r}{r} \dot{\varphi}.$$

S obzirom na (a), kinetička energija sistema je

$$E_k = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \dot{\psi}^2,$$

odnosno

$$E_k = \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{\varphi}^2. \quad (b)$$

Potencijalna energija je

$$E_p = mg(R-r)(1 - \cos \varphi),$$

a za male oscilacije sistema $\cos \varphi$ se razvija u red i predstavlja sa dva člana reda u obliku

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2},$$

pa je potencijalna energija

$$E_p = \frac{1}{2} mg (R-r) \varphi^2. \quad (c)$$

Lagranžova jednačina druge vrste glasi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0. \quad (d)$$

Nakon traženja odgovarajućih izvoda izraza (b) i (c) i uvrštavanja u (d), dobije se diferencijalna jednačina oscilovanja cilindra

$$\frac{3}{2} m (R-r) \ddot{\varphi} + mg \varphi = 0,$$

pa se upoređivanjem sa

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0,$$

dobija kružna frekvencija oscilacija cilindra

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}.$$

Traženi period oscilovanja sistema je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}.$$

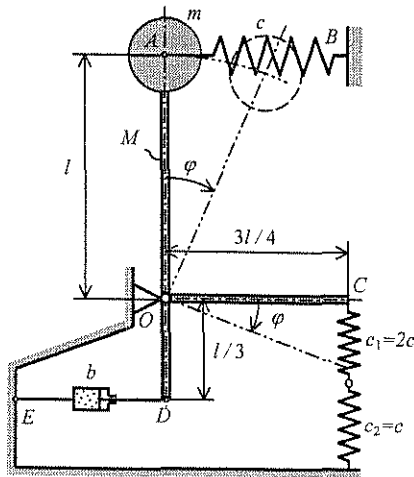
Primjer br. 2.

Na vrhu štapa OA , dužine l i mase M , koji se može obrtati oko horizontalne ose koja prolazi kroz O , nalazi se masa m koja se pridržava oprugom AB krutosti c . Štap je pomoću poluga OC i OD , sistema opruga i prigušnicom vezan za nepomični fundament, Sl. 4.4.

a) Odrediti zakon oscilovanja za date parametre sistema:

$$\frac{M}{m} = 3, \quad \frac{b}{m} = 72, \quad \frac{c}{m} = 48, \quad l = 49 \text{ cm}; \text{ mase poluga } OC \text{ i } OD \text{ zanemariti.}$$

b) Kolika je kritična vrijednost koeficijenta otporne sile?



Sl. 4.4. Oscilacije sistema

Rješenje:

Kinetička energija sistema je

$$E_k = \frac{1}{2} m (l\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} J_o \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} M l^2 \right) \dot{\varphi}^2 = m l^2 \dot{\varphi}^2. \quad (a)$$

Potencijalna energija sistema je

$$E_p = E_{pc} + E_{pckv} + E_{pm} + E_{pM}; \quad \frac{1}{c_{ekv}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}, \quad c_{ekv} = \frac{2}{3} c,$$

$$E_p = \frac{1}{2} c (l\varphi)^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{3} c \left(\frac{3l}{4} \varphi \right)^2 - \frac{1}{2} m g l \varphi^2 - \frac{1}{4} M g l \varphi^2 \quad (b)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{11}{8} c l \varphi^2 - \frac{1}{2} \frac{5}{2} m g l \varphi^2.$$

Funkcija rasipanja je

$$\Phi = \frac{1}{2} b v_D^2 = \frac{1}{2} b \left[\frac{1}{3} l \dot{\varphi} \right]^2. \quad (c)$$

Primjenom Lagranžove jednačine diferencijalna jednačina kretanja dobija oblik

$$2m l^2 \ddot{\varphi} + \frac{1}{9} b l^2 \dot{\varphi} + \frac{11}{8} c l^2 \varphi - \frac{5}{2} m g l \varphi = 0, \quad (d)$$

pa se uporedbom sa

$$\ddot{\varphi} + 2\delta \dot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0,$$

dobijaju vrijednosti:

$$2\delta = \frac{b l^2}{9 \cdot 2 m l^2}, \quad \delta = 2 \quad \text{i} \quad \omega^2 = \frac{\frac{11}{8} c l^2 - \frac{5}{2} m g l}{2 m l^2} = \frac{\frac{11}{8} c l - \frac{5}{2} m g}{2 m l}, \quad \omega^2 = 8. \quad (e)$$

a) Pošto je $\delta < \omega$, radi se o malom prigušenju, pa je

$$\ddot{\varphi} + 4\dot{\varphi} + 8\varphi = 0, \quad p^2 = \omega^2 - \delta^2 = 8 - 4, \quad p_{1,2} = \pm 2i;$$

$$\varphi = e^{-\delta t} [A \cos pt + B \sin pt], \quad (f)$$

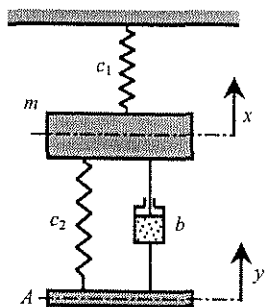
$$\varphi = e^{-2t} [A \cos 2t + B \sin 2t]$$

b) Kritična vrijednost koeficijenta otporne sile za $\delta = \omega$, iznosi:

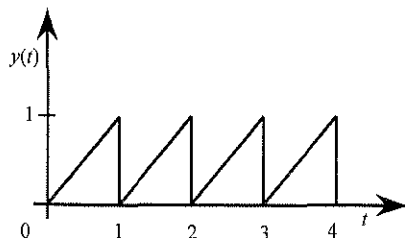
$$b_{kr} = 36m \sqrt{\frac{\frac{11}{8} c - \frac{5}{2} m g}{2}}. \quad (g)$$

Primjer br. 3

Mehanički sistem prikazan na slici 4.5.a sastoji se od mase m , opruga krutosti $c_1 = c_2 = c/2$, prigušivača karakteristike b , te platforme A zanemarljive mase. Ako se platforma kreće po zakonu $y = y(t)$, čiji je dijagram dat na slici 4.5.b, odrediti zakon kretanja mase m .



Sl. 4.5.a. Oscilovanje s prigušenjem



Sl. 4.5.b. Zakon kretanja platforme

Rješenje:

Zakon kretanja platforme \$A\$ se može razviti u Furijeov red

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\Omega t + B_n \sin n\Omega t), \quad (a)$$

odnosno u razvijenom obliku

$$y(t) = A_0 + A_1 \cos \Omega t + A_2 \cos 2\Omega t + \dots + B_1 \sin \Omega t + B_2 \sin 2\Omega t + \dots, \quad (b)$$

gdje su koeficijenti reda (b) određeni izrazima:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt, \quad A_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos n\Omega t dt, \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin n\Omega t dt, \quad (c)$$

pri čemu je

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \text{ - period funkcije } y = y(t).$$

U ovom slučaju je \$y(t) = t\$, a \$T = 1\$, pa se dobija

$$A_0 = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}, \quad A_n = 2 \int_0^1 t \cos n\Omega t dt = 0, \quad B_n = 2 \int_0^1 t \sin n\Omega t dt = -\frac{1}{n\pi}. \quad (d)$$

Sada se Furijeov red (a) može napisati u obliku

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\Omega t. \quad (e)$$

Diferencijalna jednačina kretanja sistema postaviće se korištenjem jednačine

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0, \quad (f)$$

gdje su:

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad E_p = \frac{1}{2} c_1 x^2 + \frac{1}{2} c_2 (x - y)^2, \quad \Phi = \frac{1}{2} b (\dot{x} - \dot{y})^2. \quad (g)$$

Nakon uvrštavanja (g) u (f), dobija se diferencijalna jednačina u obliku

$$m\ddot{x} + b(\dot{x} - \dot{y}) + c_1 x + c_2 (x - y) = 0, \quad (h)$$

odnosno

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = b\dot{y} + \frac{c}{2} y. \quad (i)$$

Korištenjem (e) ova jednačina prelazi u oblik

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = -b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega}{\pi} \cos n\Omega t + \frac{c}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\Omega t \right], \quad (j)$$

odnosno

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = \frac{c}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{b\Omega}{\pi} \cos n\Omega t + \frac{c}{2n\pi} \sin n\Omega t \right]. \quad (k)$$

Korištenjem izraza

$$A \sin n\Omega t + B \cos n\Omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(n\Omega t + \alpha),$$

gdje su

$$A = \frac{c}{2n\pi}, \quad B = \frac{b\Omega}{\pi}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{B}{A} = \frac{2nb\Omega}{c}. \quad (m)$$

jednačina (k) se može pisati u obliku

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = \frac{c}{4} - \frac{c}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{1 + \left(\frac{2nb\Omega}{c} \right)^2} \sin(n\Omega t + \alpha). \quad (n)$$

Dijeljenjem ove jednačine sa m i uvođenjem oznaka:

$$2\delta = \frac{b}{m}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}, \quad \lambda = \frac{\Omega}{\omega}, \quad \psi = \frac{\delta}{\omega} \quad (o)$$

dobija se

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega^2 x = \frac{\omega^2}{4} - \frac{\omega^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{1 + (4n\psi\lambda)^2} \sin(n\Omega t + \alpha). \quad (p)$$

Ovo je diferencijalna jednačina prinudnih prigušenih oscilacija mehaničkog sistema koji ima jedan stepen slobode kretanja. Njeno opšte rješenje se dobija kao zbir opšteg rješenja homogenog dijela jednačine i jednog partikularnog integrala, tj.

$$x = x_h + x_p. \quad (r)$$

Rješenje homogenog dijela jednačine (p) je

$$x_h = e^{-\delta t} (C_1 \cos pt + C_2 \sin pt). \quad (s)$$

Partikularni integral potražiti će se u obliku

$$x_p = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\Omega t - \beta). \quad (t)$$

Nakon smjenjivanja (t) i potrebnih izvoda u jednačinu (p) i izjednačavanja koeficijenata uz iste funkcije dobija se

$$a_0 = \frac{1}{4}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi n} \frac{1}{\sqrt{(1-n^2\lambda^2)^2 + (2n\psi\lambda)^2}}, \quad \beta = \arctg \left(\frac{2n\psi\lambda}{1-n^2\lambda^2} \right) - \alpha. \quad (u)$$

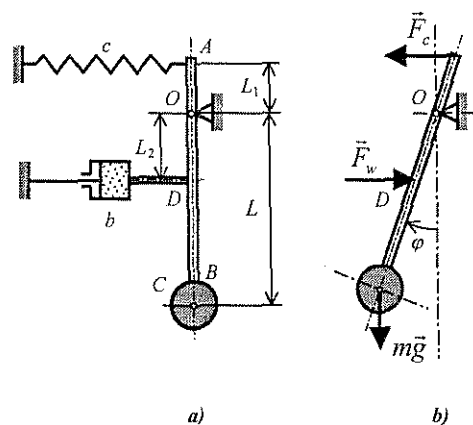
Uvrštavanjem (u) u (t), partikularni integral se može napisati u obliku

$$x_p = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sqrt{1 + (4n\psi\lambda)^2}}{\sqrt{(1-n^2\lambda^2)^2 + (2n\psi\lambda)^2}} \sin(n\Omega t - \beta). \quad (v)$$

Zakon kretanja se dobija sumiranjem izraza (s) i (v). Kako se vidi iz (s), ovaj dio kretanja će se nakon izvjesnog vremenskog intervala prigušiti. Ostat će samo prinudne oscilacije koje, kao što se vidi iz (v), neće biti prigušene i imaće frekvenciju koja je jednaka nekoj od frekvencija pobude definisane izrazom (e). Ove prinudne oscilacije nalaze se u fazi iza pobude, pri čemu je fazni ugao β definisan izrazima (u) i (m).

Primjer br. 4.

Sistem prikazan na slici 4.6 sastoji se od štapa AB zanemarljive mase, te C mase m , opruge krutosti c i prigušivača karakteristike b . Za male oscilacije sistema u vertikalnoj ravni, zanemarujući masu opruge i trenje u zglobovima O , odrediti diferencijalnu jednačinu kretanja sistema i karakteristiku prigušivača b da bi sistem vršio periodično kretanje.



Sl. 4.6. Klatno sa prigušenjem

Rješenje:

Sistem ima jedan stepen slobode kretanja i za generalisanu koordinatu usvojit će se ugao φ obrtanja štapa AB , odnosno $q = \varphi$.

Lagranžova jednačina za slučaj malog oscilovanja sistema sa jednim stepenom slobode kretanja i sa prigušenjem u sistemu glasi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = 0. \quad (a)$$

Kinetička energija sistema je

$$E_k = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\varphi}^2. \quad (b)$$

Potencijalna energija sistema je

$$E_p = \frac{1}{2} c L_1^2 \varphi^2 + mg L (1 - \cos \varphi).$$

Za male oscilacije vrši se aproksimacija $\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$, pa je

$$E_p = \frac{1}{2} (c L_1^2 + mg L) \varphi^2. \quad (c)$$

Generalisana sila od sile prigušenja \vec{F}_w koja odgovara ugaonoj generalisanoj koordinati $q = \varphi$ je $Q^w = -F_w L_2$, Sl. 4.6.b. Ova generalisana sila se može odrediti i kao izvod funkcije rasipanja po generalisanoj brzini $\dot{\varphi}$

$$Q^w = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\phi}} = -F_w L_2. \quad (d)$$

Sila prigušenja F_w je proporcionalna prvom stepenu brzine, a brzina tačke D za koju je vezan prigušivač je $v_D = L_2 \dot{\phi}$, odnosno $F_w = b L_2 \dot{\phi}$. Jednakost (d) se na osnovu ovoga može napisati u obliku

$$Q^w = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\phi}} = -b L_2^2 \dot{\phi}. \quad (e)$$

Iz izraza (e) je očigledno da funkcija rasipanja ima oblik

$$\Phi = \frac{1}{2} b L_2^2 \dot{\phi}^2. \quad (f)$$

Nakon traženja odgovarajućih izvoda izraza (b), (e) i (f) i njihovim uvrštavanjem u (a), dobiće se diferencijalna jednačina kretanja sistema

$$m L^2 \ddot{\phi} + b L_2^2 \dot{\phi} + (c L_1^2 + mg L) \phi = 0. \quad (g)$$

Jednačina (g) se može napisati u obliku

$$\ddot{\phi} + 2\delta \dot{\phi} + \omega^2 \phi = 0, \quad (h)$$

gdje je

$$\delta = \frac{b L_2^2}{2m L^2}, \quad \omega^2 = \frac{c L_1^2 + mg L}{m L^2}. \quad (i)$$

Rješenje diferencijalne jednačine (h) je detaljno proučeno u poglavlju 4.3. Da bi sistem vršio periodično kretanje mora biti $\delta < \omega$, odnosno

$$\frac{b L_2^2}{2m L^2} < \sqrt{\frac{c L_1^2 + mg L}{m L^2}},$$

odakle je tražena karakteristika prigušivača

$$b < \frac{2L}{L_2^2} \sqrt{m (c L_1^2 + mg L)}.$$

MALE OSCILACIJE MATERIJALNOG SISTEMA SA DVA STEPENA SLOBODE KRETANJA

5.1. Slobodne neprigušene oscilacije

5.1.1. Diferencijalne jednačine kretanja

Posmatraće se sistem materijalnih tačaka M_1, \dots, M_n , koji ima dva stepena slobode kretanja i na koji djeluju konzervativne elastične sile \vec{F}_{el} . Neka sistem vrši male oscilacije oko položaja stabilne ravnoteže A_1, \dots, A_n .

Položaj sistema će se određivati generalisanim koordinatama q_1 i q_2 koje se mjere od položaja stabilne ravnoteže i neka su njihove brzine \dot{q}_1 i \dot{q}_2 tokom kretanja male.

Kinetička i potencijalna energija ovog sistema sa dva stepena slobode ($s = 2$), date u približnom obliku, glase:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2), \\ E_p &= \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2), \end{aligned} \quad (5.1)$$

gdje su koeficijenti inercije a_{ij} i koeficijenti elastičnosti c_{ij} konstantne veličine.

Pošto je pri brzinama različitim od nule kinetička energija sistema pozitivna definitna kvadratna forma (5.1), to svojstvo se prema kriterijumu Silvestera može definisati nejednačinama:

$$a_{11} > 0, \quad a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0. \quad (5.2)$$

U položaju stabilne ravnoteže i potencijalna energija E_p je također pozitivno definitna i zadovoljava Silvesterov kriterijum

$$c_{11} > 0, \quad c_{11} c_{22} - c_{12}^2 > 0. \quad (5.3)$$

Iz gornjih nejednačina proizilazi da mora biti

$$a_{22} > 0, \quad c_{22} > 0. \quad (5.4)$$

Diferencijalne jednačine kretanja postaviće se korištenjem Lagranžovih jednačina druge vrste:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial E_p}{\partial q_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} + \frac{\partial E_p}{\partial q_2} &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Pošto su $a_{ij} = \text{const.}$ i $c_{ij} = \text{const.}$, prema (5.1) dobiće se

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} &= a_{11} \dot{q}_1 + a_{12} \dot{q}_2, & \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} &= a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2, \\ \frac{\partial E_p}{\partial q_1} &= c_{11} q_1 + c_{12} q_2, \end{aligned} \quad (5.6)$$

pa jednačina kretanja za generalisanu koordinatu q_1 dobija oblik

$$a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 = 0.$$

Pošto su $a_{12} = a_{21} = c_{12} = c_{21}$, slična jednačina se dobija i za koordinatu q_2 , tako da konačni sistem diferencijalnih jednačina glasi:

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 &= 0, \\ a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.7.a)$$

Ovo su, dakle, diferencijalne jednačine slobodnih neprigušenih oscilacija materijalnog sistema sa dva stepena slobode kretanja. Po svome karakteru, ove diferencijalne jednačine su homogene diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Diferencijalne jednačine kretanja (5.7.a) mogu se prikazati u matičnom obliku

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = 0. \quad (5.7.b)$$

Ovakav način matematičkog definisanja stanja u teoriji oscilacija vrlo često se koristi kod materijalnih sistema koji imaju više stepeni slobode.

U opštem slučaju, diferencijalne jednačine (5.7.a) su povezane (spregnute) po koordinatama q_1 i q_2 i po ubrzanjima \ddot{q}_1 i \ddot{q}_2 .

Članovi koji se u izrazima za kinetičku energiju sistema množe sa kvadratom generalisanih brzina, kao i članovi koji se u izrazima za potencijalnu energiju množe sa kvadratima generalisanih koordinata (5.1), a to su konkretno

$$\frac{1}{2} a_{11} \dot{q}_1^2, \quad \frac{1}{2} a_{22} \dot{q}_2^2, \quad \frac{1}{2} c_{11} q_1^2, \quad \frac{1}{2} c_{22} q_2^2, \quad (5.8)$$

nazivaju se kvadratnim članovima.

Članovi koji se u izrazu za kinetičku i potencijalnu energiju množe sa proizvodom generalisanih brzina, odnosno generalisanih koordinata

$$a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2, \quad c_{12} q_1 q_2, \quad (5.9)$$

zovu se mješoviti članovi.

Na osnovu navedenog može se uočiti da povezivanje diferencijalnih jednačina (5.7.a) po ubrzanjima zavisi od mješovitog člana $a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2$ u izrazu za kinetičku energiju, dok sprega po koordinatama potječe od mješovitog člana $c_{12} q_1 q_2$ u izrazu za potencijalnu energiju sistema.

Ukoliko su jednačine (5.7.a) spregnute samo po koordinatama, onda je $a_{12} = a_{21} = 0$. Slično tome, ako su jednačine spregnute samo po ubrzanjima, tada je $c_{12} = c_{21} = 0$. U posebnom slučaju, kada su $a_{12} = a_{21} = 0$ i $c_{12} = c_{21} = 0$, jednačine (5.7.a) nisu spregnute ni po koordinatama niti po ubrzanjima, već su razdvojene, a to znači da izrazi za E_k i E_p ne sadrže mješovite članove.

5.1.2. Opšti integrali diferencijalnih jednačina kretanja

Jedan od uobičajenih načina rješavanja linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima jeste svodenje sistema od dvije diferencijalne jednačine drugog reda na jednu jednačinu četvrtog reda u cilju provođenja integracije.

Ovdje će se, međutim, rješenje potražiti na drugi način i to koristeći svojstvo linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima da je zbir njihovih partikularnih integrala jednak opštem integralu.

U tom smislu opšte rješenje se može iskazati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1^{(1)} + q_1^{(2)}, \\ q_2 &= q_2^{(1)} + q_2^{(2)}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Prvi partikularni integrali pretpostavit će se u obliku

$$\begin{aligned} q_1^{(1)} &= A_1^{(1)} \cos(\omega_1 t - \alpha_1), \\ q_2^{(1)} &= A_2^{(1)} \cos(\omega_1 t - \alpha_1), \end{aligned} \quad (5.11)$$

a drugi partikularni integrali u obliku

$$\begin{aligned} q_1^{(2)} &= A_1^{(2)} \cos(\omega_2 t - \alpha_2), \\ q_2^{(2)} &= A_2^{(2)} \cos(\omega_2 t - \alpha_2). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Cjelokupni postupak u prvom i drugom slučaju je istovjetan, s tim što su proizvoljne konstante označene drugim indeksima. Stoga će se partikularni integrali potražiti samo jedanput izostavljajući indekse i to u oblicima:

$$\begin{aligned} q_1 &= A \cos(\omega t - \alpha), \\ q_2 &= B \cos(\omega t - \alpha), \end{aligned} \quad (5.13)$$

gdje su A , B , ω i α nepoznate konstante, uvedene nakon objedinjavanja postupka određivanja po dva partikularna integrala.

Diferenciranjem izraza za q_1 i q_2 dva puta po vremenu, dobija se

$$\ddot{q}_1 = -\omega^2 A \cos(\omega t - \alpha), \quad \ddot{q}_2 = -\omega^2 B \cos(\omega t - \alpha). \quad (5.14)$$

Zamjenom izraza (5.13) i (5.14) u jednačine (5.7.a), dobija se

$$\begin{aligned} -a_{11} \omega^2 A \cos(\omega t - \alpha) - a_{12} B \omega^2 \cos(\omega t - \alpha) + \\ + c_{11} A \cos(\omega t - \alpha) + c_{12} B \cos(\omega t - \alpha) = 0, \\ -a_{21} \omega^2 A \cos(\omega t - \alpha) - a_{22} B \omega^2 \cos(\omega t - \alpha) + \\ + c_{21} A \cos(\omega t - \alpha) + c_{22} B \cos(\omega t - \alpha) = 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Da bi jednačine (5.15) bile zadovoljene za svako t , izračunat će se koeficijenti uz $\cos(\omega t - \alpha)$ i izjednačiti sa nulom, pa se dobija sistem jednačina

$$\begin{aligned} A(c_{11} - a_{11} \omega^2) + B(c_{12} - a_{12} \omega^2) = 0, \\ A(c_{21} - a_{21} \omega^2) + B(c_{22} - a_{22} \omega^2) = 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Jednačine (5.16) očito imaju trivijalno rješenje ukoliko je $A = B = 0$. Sa aspekta teorije oscilacija ovo rješenje se ne razmatra, jer u tom slučaju sistem ne bi vršio oscilatorno kretanje, već bi mirovao.

Sistem homogenih algebarskih jednačina (5.16) će imati i druga rješenja osim trivijalnih, ako je njegova determinanta jednaka nuli, to jest ako je

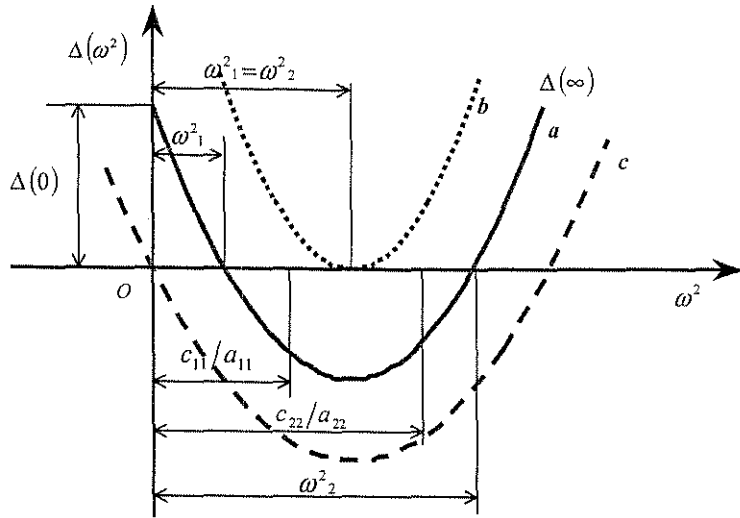
$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} (c_{11} - a_{11} \omega^2) & (c_{12} - a_{12} \omega^2) \\ (c_{21} - a_{21} \omega^2) & (c_{22} - a_{22} \omega^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (5.17)$$

Ako se determinanta (5.17) razvije, dobiće se

$$\Delta(\omega^2) = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) \omega^4 - (a_{11} c_{22} + a_{22} c_{11} - 2 a_{12} c_{12}) \omega^2 + (c_{11} c_{22} - c_{12}^2) = 0. \quad (5.18)$$

Jednačina (5.17) ili (5.18) naziva se frekventnom jednačinom. Ovo je bikvadratna jednačina i ima dva korijena ω_1^2 i ω_2^2 .

Sada treba dokazati da su oba korijena ove jednačine realni i pozitivni. Dokaz se izvodi tako što se izračunavaju vrijednosti polinoma (5.18), tj. funkcije $\Delta(\omega^2)$, za različite vrijednosti argumenta ω^2 , a zatim se spoje tačke krive $\Delta(\omega^2) = 0$, Sl. 5.1.



Sl. 5.1. Moguća rješenja frekventne jednačine

Polinom $\Delta(\omega^2)$ je parabola, a na osnovu grafičkog prikaza može se suditi o karakteru korijena frekventne jednačine. Odredit će se vrijednosti $\Delta(\omega^2)$ za sljedeće karakteristične vrijednosti ω^2 :

$$\omega^2 = 0, \frac{c_{11}}{a_{11}}, \frac{c_{22}}{a_{22}}, \pm\infty, \quad (5.19)$$

pri čemu će $\frac{c_{11}}{a_{11}}$ i $\frac{c_{22}}{a_{22}}$, s obzirom na Silvesterov kriterijum (5.2), (5.3) i (5.4), biti pozitivni brojevi.

U cilju rješavanja postavljenog zadatka, pretpostaviće se da je

$$\frac{c_{11}}{a_{11}} < \frac{c_{22}}{a_{22}}$$

Na taj način dobija se:

$$1. \quad \Delta(0) = (c_{11}c_{22} - c_{12}^2) > 0$$

$$2. \quad \Delta\left(\frac{c_{11}}{a_{11}}\right) = -\left(c_{12} - \frac{c_{11}}{a_{11}}a_{12}\right)^2 \leq 0, \quad (5.20)$$

$$3. \quad \Delta\left(\frac{c_{22}}{a_{22}}\right) = -\left(c_{12} - \frac{c_{22}}{a_{22}}a_{12}\right)^2 \leq 0,$$

$$4. \quad \Delta(\infty) = \infty.$$

Spajanjem svih ovih tačaka krive $\Delta(\omega^2) = 0$, dobiće se, kako je već rečeno, parabola, Sl. 5.1. Na osnovu ovih vrijednosti funkcije $\Delta(\omega^2)$, može se uočiti da između vrijednosti nezavisne promjenljive $\omega^2 = 0$ i $\omega^2 = \infty$, grafik funkcije presijeca apscisu u dvije tačke, Sl.5.1, koje predstavljaju rješenja, odnosno korijene frekventne jednačine (5.18).

U posebnom slučaju, korijeni karakteristične jednačine mogu biti jednaki. Ovaj uslov je ispunjen u slučaju kada je

$$\Delta\left(\frac{c_{11}}{a_{11}}\right) = \Delta\left(\frac{c_{22}}{a_{22}}\right) = 0, \quad (5.21)$$

tj. kad apscisna osa ω^2 bude tangenta parabole, Sl. 5.1.

U slučaju da je ispunjen sljedeći uslov

$$(c_{11}c_{22} - c_{12}^2) = 0. \quad (5.22)$$

jedan korijen frekventne jednačine će biti jednak nuli.

Dakle, prema gore navedenom, frekventna jednačina (5.18) ima korijene ω_1^2 i ω_2^2 , koji mogu biti:

- a) različiti $\omega_1^2 \neq \omega_2^2$, (kriva - a),
- b) jednaki $\omega_1^2 = \omega_2^2$, (kriva - b),
- c) jedan korijen jednak nuli, a drugi različit od nule tj.
 $\omega_1^2 \neq 0, \omega_2^2 = 0$ ili $\omega_1^2 = 0, \omega_2^2 \neq 0$, (kriva - c).

Poslije određivanja kvadrata frekvencija ω_1^2 i ω_2^2 , odnosno nalaženja vrijednosti ω_1 i ω_2 , pri čemu se uzimaju samo pozitivne vrijednosti za ω_1 i ω_2 , odredit će se za svaki korijen vrijednosti A, B i α , koje određuju rješenja (5.13).

Ako se u sistemu algebarskih jednačina (5.16) vrijednost ω^2 zamijeni sa bilo kojim od korjenova ω_1^2 ili ω_2^2 , dobijaju se saglasne jednačine, tj. jedna jednačina tvrdi isto što i druga. To znači da je jedna od jednačina prekobrojna i da je dovoljno posmatrati samo jednu od njih. U principu, kod rješavanja zadataka se uzima jednostavnija jednačina.

Posmatrat će se, naprimjer, druga jednačina sistema (5.16) koja glasi

$$A(c_{21} - a_{21}\omega^2) + B(c_{22} - a_{22}\omega^2) = 0. \quad (5.24)$$

Iz jednačine (5.24) može se naći odnos amplituda B/A , koji prema (5.13) i (5.16), ima oblik

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{q_2}{q_1} = -\frac{c_{21} - a_{21}\omega_1^2}{c_{22} - a_{22}\omega_1^2} = \eta_1. \quad (5.25)$$

Kod budućih razmatranja, sa ω_1 će se označiti korijen koji je manji po brojnoj vrijednosti, tj. neka je $\omega_1 < \omega_2$.

Prethodnim razmatranjem pokazano je da su korijeni frekventne jednačine pozitivni, te da partikularni integrali imaju oblik (5.12). U suprotnom, ukoliko bi korijeni bili imaginarni ili kompleksni, onda se partikularni integrali (5.12) ne bi mogli predstaviti trigonometrijskim funkcijama već hiperboličnim. Pošto hiperbolične funkcije pri povećanju argumenta neograničeno rastu, to bi značilo da sistem ne bi uopšte vršio oscilatorno kretanje.

Frekvencije ω_1 i ω_2 nazivaju se frekvencijama slobodnih neprigušenih oscilacija sistema, a oscilacije koje odgovaraju ovim frekvencijama nazivaju se glavnim oscilacijama. Niža frekvencija se naziva osnovnom frekvencijom, a prva glavna oscilacija koja ima tu frekvenciju naziva se osnovnom oscilacijom, jer oscilacije sa najnižom frekvencijom imaju najveći uticaj na rezultujuće kretanje.

Sada će se ponovo razmotriti izraz (5.25). Kružnoj frekvenciji ω_1 odgovara vrijednost η_1 , a kružnoj frekvenciji ω_2 vrijednost η_2 .

Veličine η_1 i η_2 predstavljaju odnos amplituda oscilacija pri svakoj od glavnih oscilacija sistema. One u isto vrijeme predstavljaju odnos glavnih koordinata pri svakoj od glavnih oscilacija sistema. Ove veličine definišu oblik glavnih oscilacija sistema, pa se nazivaju koeficijentima glavnih oblika oscilovanja sistema.

Postije određivanja vrijednosti η_1 i η_2 prema (5.25), mogu se naći vrijednosti:

$$B_1 = \eta_1 A_1, \quad B_2 = \eta_2 A_2 \quad (5.26)$$

pa će opšte rješenje postati

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2), \\ q_2 &= A_1 \eta_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + A_2 \eta_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2). \end{aligned} \quad (5.27)$$

U jednačini (5.27), vrijednosti ω_1 , ω_2 , η_1 i η_2 su poznate veličine, dok su A_1 , A_2 , α_1 i α_2 proizvoljne konstante koje se određuju iz početnih uslova.

Kako je već predočeno izrazom (5.10), kretanje sistema sa dva stepena slobode oko položaja stabilne ravnoteže, a sudeći prema obliku opšteg rješenja, sastoji se od dvije nezavisne oscilacije:

$$q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)}, \quad q_2 = q_2^{(1)} + q_2^{(2)}.$$

Prva oscilacija se vrši sa frekvencijom ω_1 , a druga sa frekvencijom ω_2 .

Ukoliko sistem vrši samo prvu oscilaciju, dobija se

$$q_1 = q_1^{(1)} = A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1), \quad q_2 = q_2^{(1)} = \eta_1 A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1),$$

dok u slučaju kada vrši samo drugu oscilaciju, rješenje je

$$q_1 = q_1^{(2)} = A_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2), \quad q_2 = q_2^{(2)} = \eta_2 A_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2).$$

Ove oscilacije se zovu glavne oscilacije sistema.

Iz datih rješenja je uočljivo da, ukoliko sistem vrši jednu od glavnih oscilacija, obje koordinate se mijenjaju po harmonijskim zakonima sa istom kružnom frekvencijom i istim fazama oscilovanja.

Promjene koordinata su kod ovog kretanja sinhronizovane, što znači da istovremeno dostižu maksimume i minimume.

Kružne frekvencije ω_1 i ω_2 , kao i koeficijenti η_1 i η_2 , osnovne su karakteristike malih oscilacija sistema sa dva stepena slobode kretanja.

Iz prethodno izloženog se vidi da su oscilacije $q_1^{(1)}$ i $q_1^{(2)}$, čiji zbir predstavlja koordinatu q_1 , i oscilacije $q_2^{(1)}$ i $q_2^{(2)}$, čiji zbir predstavlja koordinatu q_2 , proste harmonijske oscilacije.

Rezultujuća kretanja ovih oscilacija, koja su opisana koordinatama q_1 i q_2 , predstavljaju složena kretanja i nastala su zbrajanjem glavnih oscilacija.

Kako su kod ovih kretanja frekvencije različite, u opštem smislu kretanja neće biti periodična, ali će biti oscilatorna.

Periodično kretanje će biti samo ukoliko su kružne frekvencije ω_1 i ω_2 međusobno djeljive.

Određivanjem integracionih konstanti A_1 , A_2 , α_1 i α_2 iz početnih uslova

$$t=0 \begin{cases} q_1(0)=q_{10}, & \dot{q}_1(0)=\dot{q}_{10} \\ q_2(0)=q_{20}, & \dot{q}_2(0)=\dot{q}_{20} \end{cases} \quad (5.28)$$

dobijaju se posebna rješenja.

Kako je već izvedeno, jednačine (5.27) glase

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2), \\ q_2 &= A_1 \eta_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + A_2 \eta_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Izrazi (5.29) su opšti integrali diferencijalnih jednačina (5.7.a) i sadrže četiri integracione konstante A_1 , A_2 , α_1 i α_2 .

Ako se opšti integrali diferencijalnih jednačina (5.29) diferenciraju po vremenu, dobiće se:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= -A_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t - \alpha_1) - A_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t - \alpha_2), \\ \dot{q}_2 &= -A_1 \omega_1 \eta_1 \sin(\omega_1 t - \alpha_1) - A_2 \omega_2 \eta_2 \sin(\omega_2 t - \alpha_2). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Korištenjem početnih uslova kretanja (5.28), iz (5.27) dobiće se

$$\begin{aligned} q_{10} &= A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2, \\ q_{20} &= A_1 \eta_1 \cos \alpha_1 + A_2 \eta_2 \cos \alpha_2, \end{aligned} \quad (5.31)$$

a iz jednačina (5.30) slijedi

$$\begin{aligned} \dot{q}_{10} &= A_1 \omega_1 \sin \alpha_1 + A_2 \omega_2 \sin \alpha_2, \\ \dot{q}_{20} &= A_1 \omega_1 \eta_1 \sin \alpha_1 + A_2 \omega_2 \eta_2 \sin \alpha_2. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Rješavanjem prve dvije jednačine (5.31), dobija se

$$A_1 = \frac{\eta_2 q_{10} - q_{20}}{(\eta_2 - \eta_1) \cos \alpha_1} = \frac{k_1}{\cos \alpha_1}, \quad A_2 = \frac{q_{20} - \eta_1 q_{10}}{(\eta_2 - \eta_1) \cos \alpha_2} = \frac{k_2}{\cos \alpha_2},$$

gdje su:

$$k_1 = \frac{q_{10} \eta_2 - q_{20}}{\eta_2 - \eta_1}, \quad k_2 = \frac{q_{20} - q_{10} \eta_1}{\eta_2 - \eta_1}.$$

Uvrste li se A_1 i A_2 u druge dvije jednačine (5.31), dobija se

$$\begin{aligned} \dot{q}_{10} &= k_1 \omega_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + k_2 \omega_2 \operatorname{tg} \alpha_2, \\ \dot{q}_{20} &= k_1 \eta_1 \omega_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + k_2 \omega_2 \eta_2 \operatorname{tg} \alpha_2. \end{aligned}$$

Rješenje ovih jednačina po $\operatorname{tg} \alpha_1$ i $\operatorname{tg} \alpha_2$ glasi:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{\dot{q}_{10} \eta_2 - \dot{q}_{20}}{k_1 \omega_1 (\eta_2 - \eta_1)} = \frac{\dot{q}_{10} \eta_2 - \dot{q}_{20}}{\omega_1 (q_{10} \eta_1 - q_{20})}, \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{\dot{q}_{20} - \dot{q}_{10} \eta_1}{k_2 \omega_2 (\eta_2 - \eta_1)} = \frac{\dot{q}_{20} - \dot{q}_{10} \eta_1}{\omega_2 (q_{20} - q_{10} \eta_1)}. \end{aligned}$$

Kako je

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

to su:

$$\begin{aligned} A_1 &= k_1 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1} = \frac{q_{10} \eta_2 - q_{20}}{\eta_2 - \eta_1} \sqrt{1 + \frac{(\dot{q}_{10} \eta_2 - \dot{q}_{20})^2}{\omega_1^2 (q_{10} \eta_1 - q_{20})^2}} = \\ &= \frac{1}{\omega_1 (\eta_2 - \eta_1)} \sqrt{\omega_1^2 (q_{10} \eta_2 - q_{20})^2 + (\dot{q}_{10} \eta_2 - \dot{q}_{20})^2}, \\ A_2 &= \frac{1}{\omega_2 (\eta_2 - \eta_1)} \sqrt{\omega_2^2 (q_{20} - q_{10} \eta_1)^2 + (\dot{q}_{20} - \dot{q}_{10} \eta_1)^2}. \end{aligned}$$

U posebnom slučaju kada su početne brzine jednake nuli ($\dot{q}_{10} = 0, \dot{q}_{20} = 0$), integracione konstante su:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2 = 0, \text{ odnosno } \alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

$$A_1 = k_1 = \frac{q_{10}\eta_2 - q_{20}}{\eta_2 - \eta_1}, \quad A_2 = k_2 = \frac{q_{20} - q_{10}\eta_1}{\eta_2 - \eta_1},$$

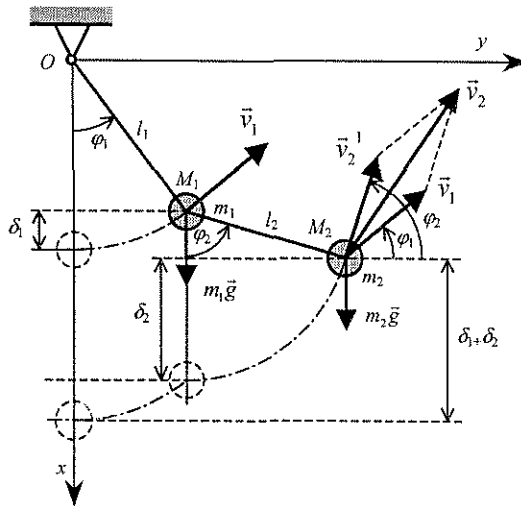
a partikularni integrali su:

$$q_1 = A \cos \omega t, \quad q_2 = B \cos \omega t.$$

5.1.3. Primjeri

5.1.3.1. Dvojno matematičko klatno

Na slici 5.2 prikazano je dvojno matematičko klatno. U tački O zakačen je neistegljiv konac dužine l_1 na čijem je kraju obješena masa m_1 , a o nju preko konca dužine l_2 materijalna tačka m_2 . Sistem se nalazi u vertikalnoj ravni. Ukoliko se izvede iz ravnoteže i prepusti djelovanju sile teže, sistem će oscilovati u vertikalnoj ravni, pri čemu će konci l_1 i l_2 zaklapati sa vertikalom uglove φ_1 i φ_2 . Neka su vrijednosti masa $m_1 = m_2 = m$ i dužina $l_1 = l_2 = l$. Potrebno je odrediti opšta rješenja malih oscilacija ovog dvojnog matematičkog klatna.



Sl. 5.2. Dvojno matematičko klatno

Rješenje:

Vertikalni donji položaj klatna usvojiti će se za nulti položaj potencijalne energije.

Kinetička energija sistema iznosi:

$$E_k = E_{k1} + E_{k2},$$

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \quad (a)$$

Koordinate tačke M_1 mogu se izraziti na sljedeći način:

$$x_1 = l_1 \cos \varphi_1, \\ y_1 = l_1 \sin \varphi_1,$$

odnosno tačke M_2

$$x_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2, \quad y_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2. \quad (b)$$

Ovaj sistem ima, dakle, dva stepena slobode kretanja, odnosno usvojene su dvije generalisane koordinate φ_1 i φ_2 za definisanje kretanja.

Brzine materijalnih tačaka M_1 i M_2 odrediće se diferenciranjem njihovih Dekartovih koordinata (b):

$$\dot{x}_1 = -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1, \quad \dot{y}_1 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1, \\ \dot{x}_2 = -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - l_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2, \quad \dot{y}_2 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2, \quad (c)$$

pa će brzine \vec{v}_1 i \vec{v}_2 iznositi:

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2, \\ v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (d)$$

Ove brzine se mogu odrediti i na drugi način. Brzina mase m_1 ima vrijednost

$$v_1 = l_1 \dot{\varphi}_1,$$

a brzina \vec{v}_2 druge mase se može vektorski izraziti u vidu

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2^1,$$

pri čemu je intenzitet brzine \vec{v}_2^1 jednak

$$v_2^1 = l_2 \dot{\varphi}_2.$$

Posmatrajući trougao brzina, intenzitet \vec{v}_2 je po cosinusnoj teoremi jednak vrijednosti

$$v_2^2 = v_1^2 + (v_2^1)^2 + 2v_1 v_2^1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (e)$$

Zamjenom brzina tačaka u izrazu (a), dobiće se kinetička energija u obliku

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (f)$$

Potencijalna energija, koja predstavlja rad sile teže izvršen od posmatranog položaja klatna do nultog položaja, pri čemu su: $\delta_1 = l_1(1 - \cos\varphi_1)$ i $\delta_2 = l_2(1 - \cos\varphi_2)$, iznosi

$$\begin{aligned} E_p &= m_1 g l_1 (1 - \cos\varphi_1) + m_2 g [l_1 (1 - \cos\varphi_1) + l_2 (1 - \cos\varphi_2)] = \\ &= l_1 g (m_1 + m_2) (1 - \cos\varphi_1) + m_2 g l_2 (1 - \cos\varphi_2). \end{aligned} \quad (g)$$

Među koeficijentima inercije, samo jedan i to $a_{12} = m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ zavisi od generalisanih koordinata. Na osnovu teorijske analize, ovaj koeficijent se može zamijeniti njegovom vrijednošću u položaju ravnoteže $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, odnosno:

$$m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = m_2 l_1 l_2,$$

pa će kinetička energija iznositi:

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2. \quad (h)$$

Potencijalna energija se može razložiti u red po stepenima koordinata φ_1 i φ_2 , pa zadržavajući se na malim članovima do drugog reda, dobija se:

$$\begin{aligned} \cos\varphi_1 &\approx 1 - \frac{\varphi_1^2}{2}, \quad \cos\varphi_2 \approx 1 - \frac{\varphi_2^2}{2}, \\ E_p &\approx \frac{1}{2}(m_1 + m_2) l_1 g \varphi_1^2 + m_2 l_2 g \frac{\varphi_2^2}{2}. \end{aligned} \quad (i)$$

Primjenom Lagranžovih jednačina druge vrste za koordinate φ_1 i φ_2 i nakon sređivanja diferencijalne jednačine kretanja klatna, dobiće se:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2)g \varphi_1 &= 0, \\ l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + g \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (j)$$

Opšta rješenja diferencijalnih jednačina (j) tražiće se u oblicima:

$$\varphi_1 = A \sin(\omega t + \alpha_1), \quad \varphi_2 = B \sin(\omega t + \alpha_2), \quad (k)$$

što kada se diferencira dva puta daje

$$\ddot{\varphi}_1 = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha_1), \quad \ddot{\varphi}_2 = -B\omega^2 \sin(\omega t + \alpha_2). \quad (l)$$

Zamjenom vrijednosti φ_1, φ_2 i $\ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2$ u diferencijalne jednačine (j), dobiće se:

$$\begin{aligned} -A\omega^2 l_1 (m_1 + m_2) - B\omega^2 m_2 l_2 + A(m_1 + m_2)g &= 0, \\ -A l_1 \omega^2 - B l_2 \omega^2 + Bg &= 0. \end{aligned} \quad (m)$$

Sređivanjem ovih jednačina, dobija se:

$$\begin{aligned} A(m_1 + m_2)(g - l_1 \omega^2) - B\omega^2 m_2 l_2 &= 0, \\ -A l_1 \omega^2 + B(g - l_2 \omega^2) &= 0. \end{aligned} \quad (n)$$

Pošto konstante A i B nisu istovremeno jednake nuli, to determinanta sistema ovih jednačina mora biti jednaka nuli, to jest

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)(g - l_1 \omega^2) & -\omega^2 m_2 l_2 \\ -l_1 \omega^2 & g - l_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (o)$$

a njenim razvijanjem se dobija frekventna jednačina

$$m_1 l_1 l_2 \omega^4 - (m_1 + m_2)(l_1 + l_2)g \omega^2 + (m_1 + m_2)g^2 = 0.$$

Kako su $l_1 = l_2 = l$ i $m_1 = m_2 = m$, frekventna jednačina postaje

$$\omega^4 - 4 \frac{g}{l} \omega^2 + 2 \frac{g^2}{l^2} = 0,$$

a njeni su korijeni:

$$\omega_1^2 = (2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = (2 + \sqrt{2}) \frac{g}{l}. \quad (p)$$

Iz druge jednačine (n) dobiće se odnos amplituda:

$$\eta = \frac{B}{A} = \frac{l\omega^2}{g-l\omega^2},$$

dok se zamjenom kružnih frekvencija (p) dobijaju koeficijenti oblika za prvu i drugu frekvenciju:

$$\eta_1 = \frac{B_1}{A_1} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}, \quad \eta_2 = \frac{B_2}{A_2} = \frac{-2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = -\sqrt{2},$$

pa je

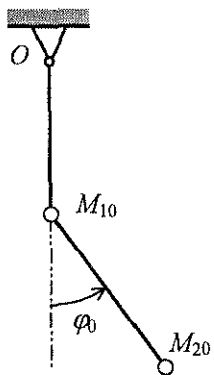
$$B_1 = \sqrt{2} A_1, \quad B_2 = -\sqrt{2} A_2.$$

Na osnovu ovoga opšta rješenja diferencijalnih jednačina glase:

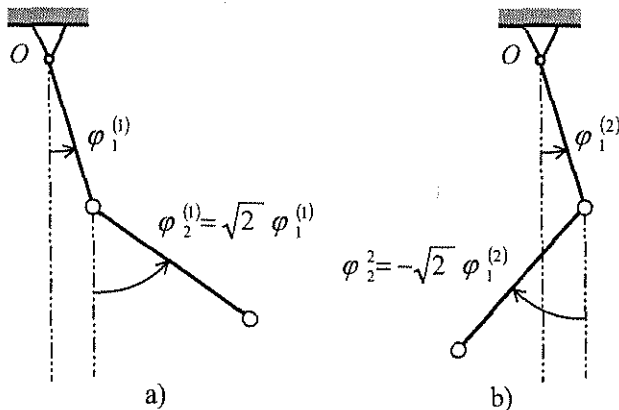
$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \\ \varphi_2 &= \sqrt{2} A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - \sqrt{2} A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (r)$$

Integracione konstante A_1 i A_2 se mogu odrediti na osnovu početnih uslova, Sl. 5.3:

$$\varphi_1(0) = 0, \varphi_2(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0.$$



Sl. 5.3. Početni položaj matematičkog klatna



Sl. 5.4. Glavni oblici oscilovanja

Diferenciranjem jednačine (r) po vremenu, dobija se:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= A_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \\ \dot{\varphi}_2 &= \sqrt{2} A_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) - \sqrt{2} A_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (s)$$

Zamjenom početnih uslova u jednačine (r) i (s), dobiće se sistem jednačina po nepoznatim veličinama A_1, A_2, α_1 i α_2 :

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2, \\ \varphi_0 &= \sqrt{2} A_1 \sin \alpha_1 - \sqrt{2} A_2 \sin \alpha_2, \\ 0 &= A_1 \omega_1 \cos \alpha_1 + A_2 \omega_2 \cos \alpha_2, \\ 0 &= \sqrt{2} A_1 \omega_1 \cos \alpha_1 - \sqrt{2} A_2 \omega_2 \cos \alpha_2. \end{aligned}$$

Iz posljednje dvije jednačine nalaze se rješenja:

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = 0, \text{ odnosno } \alpha_1 = \frac{\pi}{2} = \alpha_2, \quad (t)$$

pa prve dvije jednačine glase

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0, \\ A_1 - A_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \varphi_0, \end{aligned}$$

odakle slijedi odnos

$$A_1 = -A_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \varphi_0. \quad (u)$$

Na osnovu ovoga rješenja diferencijalnih jednačina su:

$$\varphi_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \varphi_0 (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t), \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \varphi_0 (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t). \quad (z)$$

Na osnovu dobijenih rješenja (z) mogu se dobiti prve glavne oscilacije

$$\varphi_1^{(1)} = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \quad \varphi_2^{(1)} = \sqrt{2} A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1),$$

kao i druge glavne oscilacije

$$\varphi_1^{(2)} = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad \varphi_2^{(2)} = -\sqrt{2} A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

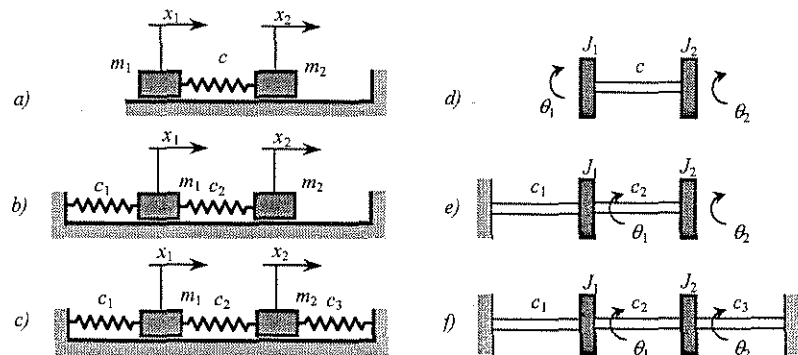
Oblici glavnih oscilacija prikazani su na slici 5.4.

U prvom obliku oscilovanja prvi štap je otklonjen za ugao $\varphi_1^{(1)}$, a drugi štap za ugao $\varphi_2^{(1)} = \sqrt{2} \varphi_1^{(1)}$ u istom smjeru, Sl. 5.4.a. Kod druge glavne oscilacije prvi štap se otkloni za ugao $\varphi_1^{(2)}$, a drugi štap će biti otklonjen u suprotnom smjeru za ugao $\varphi_2^{(2)} = -\sqrt{2} \varphi_1^{(2)}$, Sl.5.4.b.

5.1.3.2. Lančani i torzioni sistemi sa dva stepena slobode

Između lančanih i torzionih sistema postoji potpuna analogija, pa se ovi problemi mogu zajedno proučavati.

Lančani sistem sa dva stepena slobode podrazumijeva sistem koji se sastoji od dva materijalna tijela (tačke) povezana oprugama međusobno i eventualno za jednu ili dvije nepomične tačke, a njihovo klizanje po površini vrši se bez trenja. Pri tome postoje tri različite mogućnosti povezivanja tijela, kao što je prikazano na slici 5.5.



Sl. 5.5. Lančani i torzioni sistemi sa dva stepena slobode

Sistemi prikazani na slikama 5.5.a, 5.5.b i 5.5.c nazivaju se redom: slobodni lanac, jednostrano vezani lanac i obostrano vezani lanac.

Ako mase koje se nalaze u lancu i pripadajuće opruge imaju istu vrijednost, tj. ako su mase $m_1 = m_2 = m$ i krutosti $c_1 = c_2 = c$, lanac se naziva homogenim, dok je u suprotnom nehomogen.

Između lančanih i torzionih sistema postoji analogija, tako da ono što su mase m kod lančanih sistema, to su momenti inercije J diskova kod torzionih sistema, odnosno ono što su krutosti opruge c kod lančanih sistema, to su kod torzionih krutosti uvijanja vratila c .

Generalisanim koordinatama x kod lančanih sistema odgovaraju kod torzionih sistema generalisane koordinate θ koje predstavljaju uvijanje. Pri ovim razmatranjima mase opruga i vratila se zanemaruju.

Kinetičke energije sva tri lančana sistema, Sl.5.5.a,b,c, određene su istim izrazom oblika

$$E_k = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2), \tag{a}$$

dok kod torzionih sistema, Sl.5.5.d,e,f, izraz za kinetičku energiju glasi

$$E_k = \frac{1}{2} (J_1 \dot{\theta}_1^2 + J_2 \dot{\theta}_2^2). \tag{b}$$

Međutim, potencijalne energije su različite u ova tri slučaja.

U slučaju slobodnog lanca, potencijalna energija kod lančanih sistema iznosi

$$E_p = \frac{1}{2} c (x_2 - x_1)^2, \tag{c}$$

a kod torzionih sistema

$$E_p = \frac{1}{2} c (\theta_2 - \theta_1)^2. \tag{d}$$

Diferencijalne jednačine kretanja za lančani slobodni lanac dobiće se primjenom Lagranžovih jednačina II vrste:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 - c(x_2 - x_1) &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + c(x_2 - x_1) &= 0, \end{aligned} \tag{e}$$

Za slobodni torzioni lanac ove jednačine glase:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 - c(\theta_2 - \theta_1) &= 0, \\ J_2 \ddot{\theta}_2 + c(\theta_2 - \theta_1) &= 0. \end{aligned} \quad (f)$$

Ako se zbroje diferencijalne jednačine (e), dobiće se:

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0,$$

a nakon integracije

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = \text{const.} \quad (g)$$

Jednačina (g) govori o tome da je kod lančanih slobodnih lanaca količina kretanja sistema konstantna, što znači da će se, zavisno od početnih uslova, centar inercije sistema kretati jednoliko i pravolinijski ili će sistem mirovati.

Ponavljanjem istog postupka kod torzionih slobodnih lanaca, dakle sabiranjem diferencijalnih jednačina (f), dobiće se sljedeća jednačina:

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + J_2 \ddot{\theta}_2 = 0.$$

Integracijom gornje jednačine dobija se

$$J_1 \dot{\theta}_1 + J_2 \dot{\theta}_2 = \text{const.}, \quad (h)$$

što znači da je kod torzionih slobodnih lanaca kinetički moment za obrtnu osu konstantan.

Ovo svojstvo će u oba slučaja imati za posljedicu to da će jedan od korjenova frekventne jednačine biti jednak nuli, tj. bit će zadovoljen uslov

$$c_1 c_{22} - c_2^2 = 0.$$

Drugi korijen frekventne jednačine kod lančanih slobodnih lanaca biće jednak

$$\omega^2 = \frac{c(m_1 + m_2)}{m_1 m_2},$$

dok će kod torzionih slobodnih lanaca iznositi

$$\omega^2 = \frac{c(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}.$$

Za sistem jednostrano vezanog lanca, SI.5.5.b, kinetička i potencijalna energija iznose:

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2, \quad E_p = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (x_2 - x_1)^2,$$

pa su diferencijalne jednačine kretanja

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \quad (i)$$

Na analogan način se mogu postaviti diferencijalne jednačine kretanja za jednostrano vezani torzioni lanac, SI.5.5.e. Kinetička i potencijalna energija u ovom slučaju glase:

$$E_k = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2, \quad E_p = \frac{1}{2} c_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\theta_2 - \theta_1)^2, \quad (j)$$

pa su diferencijalne jednačine kretanja

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 + c_1 \theta_1 - c_2 (\theta_2 - \theta_1) &= 0, \\ J_2 \ddot{\theta}_2 + c_2 (\theta_2 - \theta_1) &= 0. \end{aligned} \quad (k)$$

Diferencijalne jednačine (k) riješit će se do kraja u cilju dobijanja zakona kretanja. Na analogan način se provodi postupak i kod jednostrano vezanog lanca.

Partikularna rješenja jednačine (k) potražiće se u oblicima:

$$\theta_1 = A \cos(\omega t - \alpha), \quad \theta_2 = B \cos(\omega t - \alpha),$$

pa će se dobiti sistem od dvije homogene jednačine oblika

$$\begin{aligned} A[(c_1 + c_2) - J_1 \omega^2] - B c_2 &= 0, \\ -A c_2 + B(c_2 - J_2 \omega^2) &= 0. \end{aligned} \quad (l)$$

Frekventna jednačina u ovom slučaju glasi

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} [(c_1 + c_2) - J_1 \omega^2] & -c_2 \\ -c_2 & (c_2 - J_2 \omega^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (m)$$

ili u razvijenom obliku

$$\Delta(\omega^2) = \omega^4 - \left[\frac{c_1 + c_2(J_1 + J_2)}{J_1 J_2} \right] \omega^2 + \frac{c_1 c_2}{J_1 J_2} = 0.$$

Iz jednačina (I) mogu se dobiti koeficijenti glavnih oblika oscilacija

$$\frac{B}{A} = \eta = \frac{[(c_1 + c_2) - J_1 \omega^2]}{c_2 - J_2 \omega^2} \quad (n)$$

Na isti način mogu se izvesti jednačine za obostrano vezani lančani torzioni sistem.

Tako naprimjer, izraz za potencijalnu energiju u nešto izmijenjenom obliku glasi

$$E_p = \frac{1}{2} c_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2} c_3 \theta_2^2,$$

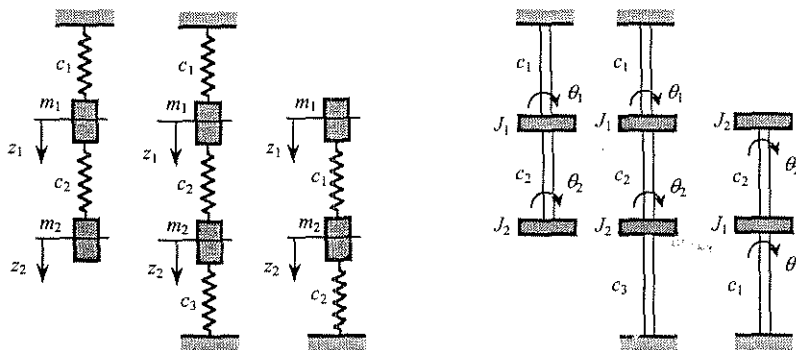
dok je izraz za kinetičku energiju istovjetan prethodnom, pa su diferencijalne jednačine kretanja:

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + c_1 \theta_1 - c_2 (\theta_2 - \theta_1) = 0,$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + c_2 (\theta_2 - \theta_1) + c_3 \theta_2 = 0.$$

Postupak se dalje provodi kao u prethodnom slučaju. U svakoj od dobijenih diferencijalnih jednačina kretanja su spregnuta po koordinatama.

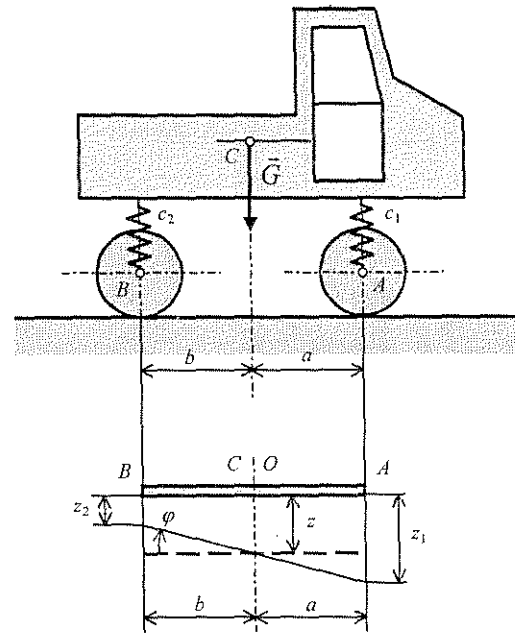
Za vertikalne jednostrane i dvostrane lančane i torzione sisteme važe sve formule koje su izvedene za horizontalno postavljene sisteme, Sl. 5.6.



Sl. 5.6. Vertikalni sistemi

5.1.3.3. Oscilacije vozila

Oscilacije vozila bi trebalo posmatrati kao oscilacije sistema sa više stepeni slobode. Međutim, ovdje će se izučavati oscilacije vozila u najjednostavnijem obliku tako što će se problem posmatrati kao ravninski.



Sl. 5.7. Model vozila

Da bi se posmatrani sistem još više uprostito, vozilo će se posmatrati kao štap koji se kreće u vertikalnoj ravni i oslonjen je svojim krajevima na dvije opruge krutosti \$c_1\$ i \$c_2\$, koje simuliraju krutost pojedinih parova točkova, Sl.5.7.

Moment inercije vozila za poprečnu osu koja je upravna je na ravan crteža i prolazi kroz centar C inercije vozila (štapa) iznosi \$J\$, a masa vozila je \$M\$.

Postavljeni zadatak ima dva stepena slobode kretanja, odnosno za definisanje kretanja potrebne su dvije generalisane koordinate. U tom smislu usvojiti će se sljedeće generalisane koordinate: vertikalno pomjeranje \$z\$ centra inercije C i ugao obrtanja \$\varphi\$ oko poprečne ose kroz tačku C.

Pri rješavanju zadataka pretpostaviće se da je težina vozila \$G\$ uravnotežena sa elastičnim silama u oprugama u položaju statičke ravnoteže, pa kod postavljanja diferencijalnih jednačina ne treba uzimati u obzir njeno djelovanje.

Lagranžove jednačine druge vrste za slučaj malih oscilacija vozila, glase:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{z}} + \frac{\partial E_p}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0. \quad (a)$$

Kinetička i potencijalna energija sistema iznose:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2, \\ E_p &= \frac{1}{2} c_1 z_1^2 + \frac{1}{2} c_2 z_2^2. \end{aligned} \quad (b)$$

Kako su $z_1 = z + a\varphi$ i $z_2 = z - b\varphi$, to će izraz za potencijalnu energiju glasiti:

$$E_p = \frac{1}{2} c_1 (z + a\varphi)^2 + \frac{1}{2} c_2 (z - b\varphi)^2.$$

Primjenom Lagranžovih jednačina II vrste na izraze (b) dobijaju se diferencijalne jednačine kretanja u obliku:

$$\begin{aligned} M \ddot{z} + (c_1 + c_2) z + (c_1 a - c_2 b) \varphi &= 0, \\ J \ddot{\varphi} + (c_1 a - c_2 b) z + (c_1 a^2 + c_2 b^2) \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (c)$$

Partikularna rješenja jednačine (c) potražiće se u oblicima

$$z = A \cos(\omega t - \alpha) \quad \text{i} \quad \varphi = B \cos(\omega t - \alpha),$$

pa će se dobiti dvije homogene jednačine:

$$\begin{aligned} A [(c_1 + c_2) - M \omega^2] + B (c_1 a - c_2 b) &= 0, \\ A (c_1 a - c_2 b) + B [(c_1 a^2 + c_2 b^2) - J \omega^2] &= 0. \end{aligned} \quad (d)$$

Frekventna jednačina za postavljeni zadatak glasi:

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} [(c_1 + c_2) - M \omega^2] & (c_1 a - c_2 b) \\ (c_1 a - c_2 b) & [(c_1 a^2 + c_2 b^2) - J \omega^2] \end{vmatrix} = 0, \quad (e)$$

ili u razvijenom obliku

$$\Delta(\omega^2) = J M \omega^4 - [M(c_1 a^2 + c_2 b^2) + J(c_1 + c_2)] \omega^2 + c_1 c_2 (a + b)^2 = 0.$$

Iz jednačina (d) dobijaju se odnosi amplituda u obliku

$$\eta = \frac{B}{A} = - \frac{[(c_1 + c_2) - M \omega^2]}{(c_1 a - c_2 b)} = - \frac{(c_1 a - c_2 b)}{[(c_1 a^2 + c_2 b^2) - J \omega^2]}.$$

Diferencijalna jednačina kretanja (c) može se prikazati i u matricnom obliku:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & c_1 a - c_2 b \\ c_1 a - c_2 b & c_1 a^2 + c_2 b^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (f)$$

5.2. Glavne koordinate

Kako je već navedeno, diferencijalne jednačine malih oscilacija konzervativnih sistema sa dva stepena slobode su spregnute i po koordinatama i po ubrzanjima, tj.

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 &= 0 \\ a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Spregnutost ovih jednačina po koordinatama i ubrzanjima izaziva određene poteškoće pri njihovom rješavanju. Stoga se postavlja pitanje da li se mogu odabrati takve generalisane koordinate da izrazi za kinetičku i potencijalnu energiju imaju samo kvadratne članove za brzine i koordinate. Ovakve generalisane koordinate nazivaju se glavnim koordinatama i one omogućavaju dobijanje razdvojenih diferencijalnih jednačina.

Ako se glavne koordinate obilježe sa ξ_1 i ξ_2 , diferencijalne jednačine kretanja će imati oblik

$$\ddot{\xi}_1 + \lambda_1 \xi_1 = 0, \quad \ddot{\xi}_2 + \lambda_2 \xi_2 = 0, \quad (5.33)$$

pri čemu su $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2 > 0$.

Rješenja jednačina (5.33) neposredno glase:

$$\xi_1 = A_1 \cos(\sqrt{\lambda_1} t - \alpha_1), \quad \xi_2 = A_2 \cos(\sqrt{\lambda_2} t - \alpha_2),$$

gdje su A_1, A_2, α_1 i α_2 proizvoljne konstante.

Diferencijalne jednačine kretanja oblika (5.33) dobiće se samo u slučaju kada su funkcije E_k i

E_p date u oblicima:

$$E_k = \frac{1}{2}(a_1 \dot{\xi}_1^2 + a_2 \dot{\xi}_2^2),$$

$$E_p = \frac{1}{2}(c_1 \xi_1^2 + c_2 \xi_2^2),$$
(5.34)

gdje su: a_1 i a_2 – novi inercijalni koeficijenti, c_1 i c_2 – novi elastični koeficijenti, koji se razlikuju od ranijih koeficijenata a_{11} , a_{12} , a_{22} , c_{11} , c_{12} i c_{22} .

Da bi se sa koordinata q_1 i q_2 prešlo na glavne koordinate ξ_1 i ξ_2 , potrebno je izraze (5.1) transformisati u oblik (5.34). To je moguće preko linearne algebarske transformacije:

$$q_1 = r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2,$$

$$q_2 = s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2,$$
(5.35)

gdje su r_1 , r_2 , s_1 , s_2 brojevi koje treba odrediti.

Iz više algebre je poznato da se ovaj oblik transformacije ne mijenja ako se uzme $r_1 = r_2 = 1$, pa će linearna transformacija (5.35) dobiti oblik:

$$q_1 = \xi_1 + \xi_2,$$

$$q_2 = s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2$$
(5.36)

Da bi se prešlo na glavne koordinate, moraju se odrediti brojevi s_1 i s_2 .

Na osnovu (5.36), izrazi za E_k i E_p (5.1) mogu se pisati u obliku:

$$E_k = \frac{1}{2}(a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[a_{11} (\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2)^2 + 2a_{12} (\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2)(s_1 \dot{\xi}_1 + s_2 \dot{\xi}_2) + a_{22} (s_1 \dot{\xi}_1 + s_2 \dot{\xi}_2)^2 \right].$$

Ukoliko se izvrši grupisanje članova uz glavne brzine dobiće se:

$$E_k = \frac{1}{2} \left\{ \dot{\xi}_1^2 (a_{11} + 2a_{12}s_1 + a_{22}s_1^2) + \dot{\xi}_2^2 (a_{11} + 2a_{12}s_2 + a_{22}s_2^2) + \right.$$

$$\left. + [2a_{11} + 2a_{12}(s_1 + s_2) + 2a_{22}s_1s_2] \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2 \right\}.$$
(5.37)

Na isti način se može dobiti izraz za potencijalnu energiju:

$$E_p = \frac{1}{2} \left\{ \xi_1^2 (c_{11} + 2c_{12}s_1 + c_{22}s_1^2) + \xi_2^2 (c_{11} + 2c_{12}s_2 + c_{22}s_2^2) + \right.$$

$$\left. + [2c_{11} + 2c_{12}(s_1 + s_2) + 2c_{22}s_1s_2] \xi_1 \xi_2 \right\}.$$
(5.38)

Da kinetička i potencijalna energija ne bi sadržavale mješovite članove mora biti

$$a_{11} + a_{12}(s_1 + s_2) + a_{22}s_1s_2 = 0,$$

$$c_{11} + c_{12}(s_1 + s_2) + c_{22}s_1s_2 = 0.$$

Rješavanjem ovih jednačina po $(s_1 + s_2)$ i s_1s_2 dobiće se:

$$(s_1 + s_2) = - \frac{a_{11}c_{22} - a_{22}c_{11}}{a_{12}c_{22} - a_{22}c_{12}}, \quad s_1s_2 = \frac{-a_{12}c_{11} + a_{11}c_{12}}{a_{12}c_{22} - a_{22}c_{12}}.$$
(5.39)

Iz izraza (5.39) vidi se neposredno da su s_1 i s_2 korijeni kvadratne jednačine

$$s^2 + \frac{a_{11}c_{22} - a_{22}c_{11}}{a_{12}c_{22} - a_{22}c_{12}} s + \frac{-a_{12}c_{11} + a_{11}c_{12}}{a_{12}c_{22} - a_{22}c_{12}} = 0.$$
(5.40)

Sada će se izvršiti uporedba kvadratne jednačine (5.40) sa kvadratnom jednačinom koja se dobije iz jednačina (5.16) u kojima figurišu konstante A i B .

Ove jednačine glase:

$$A(c_{11} - a_{11}\omega^2) + B(c_{12} - a_{12}\omega^2) = 0,$$

$$A(c_{21} - a_{21}\omega^2) + B(c_{22} - a_{22}\omega^2) = 0,$$

a iz njih se nalazi odnos amplituda

$$\eta = \frac{B}{A} = - \frac{c_{11} - a_{11}\omega^2}{c_{21} - a_{21}\omega^2} \quad \text{ili} \quad \eta = - \frac{c_{21} - a_{21}\omega^2}{c_{22} - a_{22}\omega^2},$$
(5.41)

kao i frekventna jednačina (5.17). Rješavanjem jednačina (5.41) po ω^2 i izjednačavanjem rješenja, dobija se kvadratna jednačina oblika

$$\eta^2 + \frac{a_{11}c_{22} - a_{22}c_{11}}{a_{12}c_{22} - a_{22}c_{12}} \eta + \frac{a_{11}c_{12} - a_{12}c_{11}}{a_{12}c_{22} - a_{22}c_{12}} = 0, \quad (5.42)$$

čiji su korijeni η_1 i η_2 .

Uporedbom jednačina (5.40) i (5.42), postaje očigledna njihova identičnost. To znači da su traženi parametri s_1 i s_2 ustvari koeficijenti glavnih oblika oscilovanja η_1 i η_2 , pa linearne transformacije (5.36) dobijaju oblik

$$q_1 = \xi_1 + \xi_2, \quad q_2 = \eta_1 \xi_1 + \eta_2 \xi_2. \quad (5.43)$$

Da bi se sa običnih generalisanih koordinata q_1 i q_2 prešlo na glavne generalisane koordinate, određiće se iz jednačine (5.42) množitelji $s_1 = \eta_1$ i $s_2 = \eta_2$ za formiranje jednačine (5.43).

Uporedbom jednačine (5.34) sa (5.37) i (5.38), mogu se uvesti oznake:

$$\begin{aligned} a_{11} + 2a_{12}s_1 + a_{22}s_1^2 &= a_1, \\ a_{11} + 2a_{12}s_2 + a_{22}s_2^2 &= a_2, \\ c_{11} + 2c_{12}s_1 + c_{22}s_1^2 &= c_1, \\ c_{11} + 2c_{12}s_2 + c_{22}s_2^2 &= c_2, \end{aligned} \quad (5.44)$$

pa će jednačine kretanja sistema dobiti oblik

$$a_1 \ddot{\xi}_1 + c_1 \dot{\xi}_1 = 0, \quad a_2 \ddot{\xi}_2 + c_2 \dot{\xi}_2 = 0. \quad (5.45)$$

Rješenja ovih jednačina su:

$$\xi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1), \quad \xi_2 = A_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2), \quad (5.46)$$

gdje su A_1, A_2, α_1 i α_2 integracione konstante.

Kružne frekvencije ω_1 i ω_2 određiće se iz frekventne jednačine (5.17) ili iz diferencijalnih jednačina kretanja (5.45):

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_{11} + 2c_{12}s_1 + c_{22}s_1^2}{a_{11} + 2a_{12}s_1 + a_{22}s_1^2}, \\ \omega_2^2 &= \frac{c_2}{a_2} = \frac{c_{11} + 2c_{12}s_2 + c_{22}s_2^2}{a_{11} + 2a_{12}s_2 + a_{22}s_2^2}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Pošto frekvencije ne zavise od izbora dinamičkih parametara, to izbor koordinata sistema u suštini nije ni bitan, a to pruža mogućnost njihovog određivanja na više načina.

Kao što se vidi iz izraza (5.46), glavne koordinate ξ_1 i ξ_2 se mijenjaju po harmonijskom zakonu sa frekvencijom koja odgovara jednoj od frekvencija glavnih oscilacija sistema. Ovi harmonijski zakoni po kojima se mijenjaju glavne koordinate međusobno su potpuno nezavisni, jer imaju različite A, ω i α .

Za početne uslove kretanja oblika

$$t=0 \mid \xi_1(0)=0, \quad \dot{\xi}_1(0)=0,$$

tokom cijelog kretanja će biti $\xi_2=0$, a sistem će oscilovati po zakonu

$$\xi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1).$$

Slično tome, za početne uslove

$$t=0 \mid \xi_1(0)=0, \quad \dot{\xi}_1(0)=0,$$

sistem će oscilovati po zakonu

$$\xi_2 = A_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2).$$

Uporede li se opšte jednačine kretanja (5.27) oblika

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2), \\ q_2 &= A_1 \eta_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + A_2 \eta_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2), \end{aligned}$$

sa jednačinama (5.43), dobija se neposredan uvid u oblik linearne transformacije, odnosno u prelazak sa proizvoljnih generalisanih koordinata na glavne koordinate.

Iz izraza (5.43) proizilazi da se glavne koordinate mogu izraziti i u obliku:

$$\xi_1 = \frac{\eta_2 q_1 - q_2}{\eta_2 - \eta_1} \quad \text{i} \quad \xi_2 = \frac{q_2 - \eta_1 q_1}{\eta_2 - \eta_1}. \quad (5.48)$$

S praktičnog gledišta, prelazak na glavne koordinate ne donosi nikakvu korist niti olakšicu, pa je potpuno svejedno da li se problem rješava preko generalisanih ili glavnih koordinata. Glavne koordinate, međutim, imaju veliku teorijsku važnost.

Složena kretanja u opštem slučaju nisu periodična. Uvođenjem glavnih koordinata, koje se mijenjaju po harmonijskim, odnosno periodičnim funkcijama, moguće je složeno kretanje razložiti na više prostih kretanja. U prikazanom slučaju to su bila dva prosta kretanja.

Pri daljem razmatranju glavnih koordinata, potrebno je analizirati dva posebna slučaja i to slučaj kada je jedna od glavnih oscilacija sistema jednaka nuli i slučaj kada su frekvencije glavnih oscilacija jednake.

5.2.1. Slučaj kada je jedna od frekvencija glavnih oscilacija sistema jednaka nuli

U slučaju kada je jedna od glavnih oscilacija sistema jednaka nuli dobija se

$$\omega_1^2 = \frac{c_1}{a_1} \neq 0, \quad \omega_2^2 = \frac{c_2}{a_2} = 0,$$

pri čemu je $c_2 = 0$ i $a_2 \neq 0$, a energije iznose

$$E_k = \frac{1}{2}(a_1 \dot{\xi}_1^2 + a_2 \dot{\xi}_2^2), \quad E_p = \frac{1}{2}c_1 \xi_1^2. \quad (5.49)$$

Diferencijalne jednačine kretanja glase:

$$\begin{aligned} a_1 \ddot{\xi}_1 + c_1 \xi_1 &= 0, \\ a_2 \ddot{\xi}_2 &= 0, \end{aligned}$$

dok su njihova rješenja

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1), \\ \xi_2 &= C_1 t + C_2. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Ovim je pokazano da se glavna koordinata ξ_1 mijenja po harmonijskom zakonu, odnosno ovo kretanje predstavlja slobodne oscilacije sa kružnom frekvencijom ω_1 , dok je druga glavna koordinata ξ_2 konstantna tokom vremena (u slučaju $C_1 = 0$) ili neograničeno raste proporcionalno vremenu zavisno od početnih uslova.

5.2.2. Slučaj kada su frekvencije glavnih oscilacija sistema jednake

Korijeni frekventne jednačine (5.18) biće jednaki kada bude zadovoljen uslov

$$\Delta \begin{pmatrix} c_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} c_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.51)$$

ili

$$\omega_1 = \omega_2,$$

jer je

$$\sqrt{\frac{c_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{c_2}{a_2}} = \omega.$$

Obje glavne koordinate mijenjaju se po harmonijskom zakonu sa kružnom frekvencijom $\omega_1 = \omega_2 = \omega$:

$$\xi_1 = A_1 \cos(\omega t - \alpha_1), \quad \xi_2 = A_2 \cos(\omega t - \alpha_2). \quad (5.52)$$

Amplitude i fazne razlike određuju se nezavisno za svaku koordinatu prema početnim uslovima.

5.2.3. Svojstva glavnih oscilacija sistema

Posmatraće se kretanje materijalne tačke M_i u materijalnom sistemu $\sum_{i=1}^n M_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Vektor položaja tačke M_i obilježiće se sa \vec{r}_i , a vektori položaja tačaka A_i u kojima se sistem nalazi u ravnoteži sa $\vec{r}_{i0} = \vec{r}_i(0)$.

Položaj tačke M_i u odnosu na ravnotežni položaj određen je priraštajem vektora položaja

$$\Delta \vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Vektore \vec{r}_i može se izraziti preko generalisanih koordinata q_1 i q_2 pomoću relacija:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2), \quad i = 1, \dots, n.$$

Razvijanjem ovih vektorskih funkcija u red u okolini ravnotežnog položaja A_i određenih vektorima $\vec{r}_{i0} = \vec{r}_i(0,0)$ i zadržavajući se na malim veličinama prvog reda dobija se

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2) = \vec{r}_{i0} + \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \right)_0 q_2 + \dots,$$

pa pomjeranja $\Delta \vec{r}_i$ tačke M_i iznose:

$$\Delta \vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{i0} = \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \right)_0 q_2. \quad (5.53)$$

Ukoliko se zamijene koordinate q_1 i q_2 odgovarajućim funkcijama vremena, dobiće se jednačine kretanja tačke M_i .

Ako sistem vrši prvu glavnu oscilaciju, treba smijeniti generalisane koordinate

$$q_1^{(1)} = A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1),$$

$$q_2^{(1)} = \eta_1 A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1),$$

u jednačine (5.53), pa će se za $i = 1, 2, \dots, n$ dobiti jednačine prve glavne oscilacije sistema u vektorskom obliku, koje glase

$$\Delta \vec{r}_i = \left[\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \right)_0 + \eta_1 \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \right)_0 \right] A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1). \quad (5.54)$$

Isti postupak se provodi i ukoliko sistem vrši drugu glavnu oscilaciju.

Na osnovu jednačine (5.54) mogu se izvesti sljedeći zaključci:

1. Glavne oscilacije sistema su harmonijske;
2. Pošto je vektor (5.54) konstantan i određuje pravac, to jednačina (5.54) predstavlja pravu liniju koja prolazi kroz položaj stabilne ravnoteže;
3. Frekvencije slobodnih oscilacija ne zavise od početnih uslova kretanja; isto važi i za periode oscilovanja T_1 i T_2 ;
4. Konstante A_1 i α_1 prema (5.54) su proizvoljne integracione konstante koje zavise od početnih uslova kretanja. Ako sistem vrši jednu od svojih glavnih oscilacija, onda

amplituda oscilovanja tačaka sistema, kao i uglovi faznih razlika, zavise od početnih uslova kretanja;

5. Faza $(\omega_1 t - \alpha)$ je zajednička za sve tačke sistema, što znači da sve tačke sistema osciluju u fazi kad sistem vrši jednu od svojih glavnih oscilacija. Sve tačke sistema istovremeno prolaze kroz ravnotežni položaj i istovremeno dostižu svoje maksimume, pa se takve oscilacije nazivaju sinhronim.

U posebnom slučaju kada su $\omega_1 = \omega_2$ prethodni zaključci ne važe. Opšti integrali jednačina kretanja su tada:

$$q_1 = A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1), \quad q_2 = A_2 \cos(\omega_1 t - \alpha_2), \quad (5.55)$$

a jednačina (5.53) predstavlja ravan koja je određena vektorima

$$\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \right)_0 \text{ i } \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \right)_0. \quad (5.56)$$

Ove ravni prolaze kroz ravnotežne položaje A_i tačaka M_i , koji su određeni vektorima \vec{r}_{i0} .

Ako se postavi koordinatni sistem $O\xi\eta$ (pokretni) u ravan kretanja i -te tačke i zamijene koordinate q_1 i q_2 iz jednačina (5.55) i (5.53), eliminacijom vremena t dobija se jednačina putanje tačke koja predstavlja elipsu u pomenutoj ravni.

5.2.4. Pojava podrhtavanja (bijenja)

Pojava podrhtavanja nastaje kada se frekvencije glavnih oscilacija ω_1 i ω_2 materijalnog sistema sa dva stepena slobode vrlo malo razlikuju po brojnoj vrijednosti, tj. kada vrijedi

$$(\omega_2 - \omega_1) \approx 0.$$

Argumenti cosinusnih funkcija u opštim integralima diferencijalnih jednačina iznose:

$$\varphi_1 = \omega_1 t - \alpha_1, \quad \varphi_2 = \omega_2 t - \alpha_2,$$

pa je njihova razlika

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t - (\alpha_2 - \alpha_1). \quad (5.57)$$

U početnom trenutku je

$$\varphi(0) = -(\alpha_2 - \alpha_1),$$

ali imajući u vidu da je $(\omega_2 - \omega_1)$ mala veličina, to će promjena funkcije φ tokom vremena biti spora.

Prema izrazu (5.57), može se napisati da je

$$(\omega_2 t - \alpha_2) = (\omega_1 t - \alpha_1) + \varphi,$$

pa opšti integrali diferencijalnih jednačina kretanja (5.29) glase:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2), \\ q_2 &= A_1 \eta_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + A_2 \eta_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2). \end{aligned}$$

Sada će prema navedenim uslovima biti:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + A_2 [\cos(\omega_1 t - \alpha_1) \cos \varphi - \sin(\omega_1 t - \alpha_1) \sin \varphi] = \\ &= (A_1 + A_2 \cos \varphi) \cos(\omega_1 t - \alpha_1) - A_2 \sin \varphi \sin(\omega_1 t - \alpha_1), \\ q_2 &= (\eta_1 A_1 + A_2 \eta_2 \cos \varphi) \cos(\omega_1 t - \alpha_1) - A_2 \eta_2 \sin \varphi \sin(\omega_1 t - \alpha_1). \end{aligned} \quad (5.58)$$

Uvođenjem novih oznaka

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 \cos \varphi &= C_1 \cos \theta_1; \quad A_2 \sin \varphi = C_1 \sin \theta_1; \\ A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 \cos \varphi &= C_2 \cos \theta_2; \quad A_2 \eta_2 \sin \varphi = C_2 \sin \theta_2. \end{aligned}$$

jednačine kretanja (5.58) dobijaju oblik:

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1 + \theta_1), \\ q_2 &= C_2 \cos(\omega_1 t - \alpha_1 + \theta_2). \end{aligned} \quad (5.59)$$

U gornjim jednačinama su:

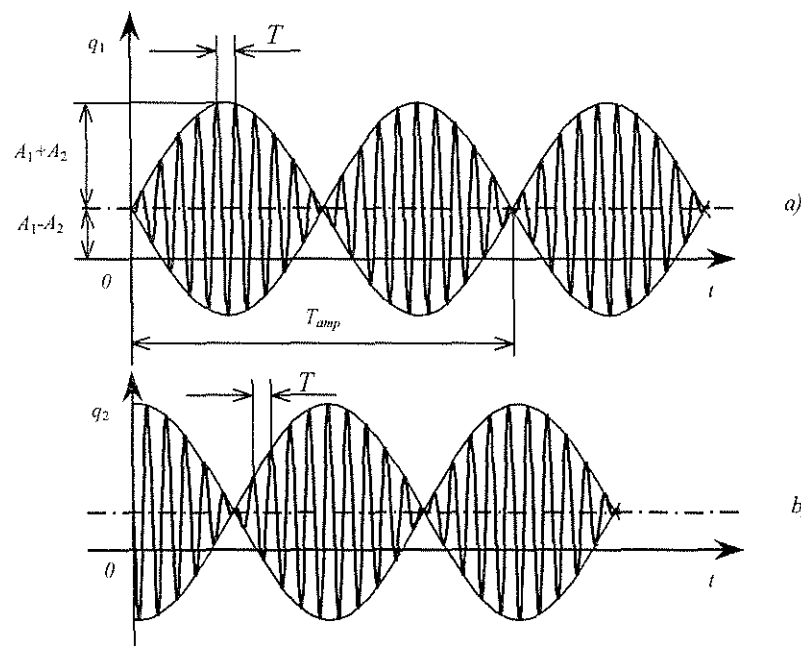
$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \varphi}, \\ C_2 &= \sqrt{(A_1 \eta_1)^2 + (A_2 \eta_2)^2 + 2 \eta_1 \eta_2 A_1 A_2 \cos \varphi}, \\ \operatorname{tg} \theta_1 &= \frac{A_2 \sin \varphi}{A_1 + A_2 \cos \varphi}, \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{A_2 \eta_2 \sin \varphi}{A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Kako u izraze za amplitude C_1 i C_2 (5.60) i za θ_1 i θ_2 (5.61) ulaze sinusna i cosinusna funkcija ugla φ koji se mijenja vrlo sporo tokom vremena, to oscilacije predstavljene izrazima (5.59) neće biti harmonijske.

Period promjene amplitude T_{amp} znatno je veći od perioda samih oscilacija T , Sl. 5.8.

Pošto je $(\omega_2 - \omega_1)$ mala veličina prema jednačini (5.57), funkcije $\sin \varphi$ i $\cos \varphi$ će imati vrlo duge periode. Stoga je promjena amplitude periodična sa periodom

$$T_\varphi = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = T_{amp}.$$



Sl. 5.8. Pojava podrhtavanja

Iz jednačine (5.60) vidi se da se amplitude C_1 i C_2 mijenjaju periodično pri sporom mijenjaju $\cos \varphi$ od vrijednosti -1 do $+1$. Granice promjene ovih amplituda su:

a) amplituda C_1

$$\text{od } (A_1 - A_2) \text{ do } (A_1 + A_2), \quad (5.62)$$

b) amplituda C_2

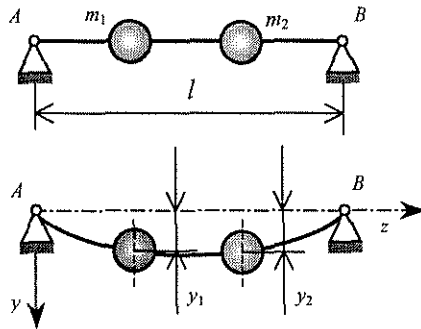
$$\text{od } (\eta_1 A_1 - \eta_2 A_2) \text{ do } (\eta_1 A_1 + \eta_2 A_2).$$

Ako koeficijenti glavnih oblika oscilacija η_1 i η_2 imaju različite predznake, onda će maksimalnoj vrijednosti C_1 odgovarati minimalna vrijednost C_2 , što je prikazano na slikama 5.8.a i 5.8.b.

Ukoliko su frekvencije ω_1 i ω_2 bliske po vrijednosti, amplitude će se mijenjati periodično. Povećanjem prve glavne oscilacije, druga se smanjuje i obrnuto. To znači da se energija sistema mijenja i naizmjenično koncentriše u jednom, pa u drugom članu koji osciluje.

5.3. Poprečne oscilacije sistema sa dva stepena slobode

Posmatraće se prosta greda na kojoj se nalaze dvije koncentrisane mase m_1 i m_2 , Sl. 5.9. Ukoliko se nosač sa koncentrisanim masama savije u vertikalnoj ravni, a zatimпусти, nosač će usljed elastičnih svojstava materijala početi oscilovati u vertikalnoj ravni oko svog ravnotežnog položaja.



Sl. 5.9. Poprečne oscilacije grede

Pri tome će se usvojiti sljedeće pretpostavke:

- a) koncentrisane mase se kreću samo u pravcu ose y ; ostala eventualna pomjeranja u drugim pravcima će se zanemariti;

- b) mase m_1 i m_2 su mnogo veće od mase nosača, pa se masa nosača zanemaruje;
 c) diferencijalne jednačine problema postavljat će se u odnosu na položaj statičke ravnoteže masa m_1 i m_2 , pri čemu se neće uzimati u obzir težine $m_1 g$ i $m_2 g$;
 d) za generalisane koordinate usvojit će se poprečna pomjeranja masa y_1 i y_2 , Sl. 5.9.

Izraz za kinetičku energiju posmatranog sistema ima oblik

$$E_k = \frac{1}{2} (m_1 \dot{y}_1^2 + m_2 \dot{y}_2^2). \quad (5.63)$$

Prema Klapejronovoj teoremi, potencijalna energija deformisanog nosača iznosi

$$E_p = \frac{1}{2} (F_1 y_1 + F_2 y_2), \quad (5.64)$$

gdje su F_1 i F_2 inercijalne sile, koje su u ravnotežnom položaju jednake nuli, a na kraju deformacije imaju najveću vrijednost.

U području elastičnosti postoji linearna zavisnost između deformacija i opterećenja, što se neposredno odnosi i na vezu između opterećenja i ugiba kod poprečno opterećenih nosača.

Linearna zavisnost između opterećenja i ugiba grečnih nosača uspostavlja se preko Maksvelovih uticajnih koeficijenata α_{ij} , što u ovom slučaju prema slici 5.9 daje odnose:

$$\begin{aligned} y_1 &= F_1 \alpha_{11} + F_2 \alpha_{12}, \\ y_2 &= F_1 \alpha_{21} + F_2 \alpha_{22}. \end{aligned} \quad (5.65)$$

gdje su α_{ij} Maksvelovi uticajni koeficijenti, pri čemu indeksi označavaju mjesto deformacije (i) i pripadnost opterećenju (j).

Ukoliko se jednačine (5.65) riješe po F_1 i F_2 dobiće se

$$\begin{aligned} F_1 &= \beta_{11} y_1 + \beta_{12} y_2, \\ F_2 &= \beta_{21} y_1 + \beta_{22} y_2, \end{aligned} \quad (5.66)$$

gdje su β_{ij} Maksvelovi dualni koeficijenti, odnosno:

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_{22}}{\Delta}, \quad \beta_{12} = \beta_{21} = -\frac{\alpha_{12}}{\Delta}, \quad \beta_{22} = \frac{\alpha_{11}}{\Delta}, \quad \Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2. \quad (5.67)$$

Dualni koeficijenti se, dakle, mogu izračunati iz uticajnih koeficijenata korištenjem izraza (5.67).

Ako se izrazi (5.66) smijene u izraz za potencijalnu energiju (5.64), dobiće se potencijalna energija u vidu

$$E_p = \frac{1}{2}(\beta_{11}y_1^2 + 2\beta_{12}y_1y_2 + \beta_{22}y_2^2), \quad (5.68)$$

što predstavlja kvadratnu funkciju generalisanih koordinata y_1 i y_2 .

Lagranžove jednačine druge vrste za generalisane koordinate y_1 i y_2 , uz pretpostavku da sistem vrši male oscilacije, glase:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}_1} + \frac{\partial E_p}{\partial y_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}_2} + \frac{\partial E_p}{\partial y_2} &= 0. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Ako se u ove jednačine stave pripadajući izrazi za E_k i E_p dobiće se

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + \beta_{11}y_1 + \beta_{12}y_2 &= 0, \\ m_2 \ddot{y}_2 + \beta_{21}y_1 + \beta_{22}y_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Rješenja ovih jednačina potražiće se u oblicima:

$$\begin{aligned} y_1 &= A \cos(\omega t - \alpha), \\ y_2 &= B \cos(\omega t - \alpha). \end{aligned} \quad (5.71)$$

Na taj način se dobije sistem algebarskih jednačina po konstantama A i B , koji glasi:

$$\begin{aligned} A(\beta_{11} - m_1\omega^2) + B\beta_{12} &= 0, \\ A\beta_{21} + B(\beta_{22} - m_2\omega^2) &= 0. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Iz sistema jednačina (5.72) može se formirati frekventna jednačina oblika

$$\begin{vmatrix} (\beta_{11} - m_1\omega^2) & \beta_{12} \\ \beta_{21} & (\beta_{22} - m_2\omega^2) \end{vmatrix} = 0, \quad (5.73)$$

ili u razvijenom obliku

$$\Delta(\omega^2) = m_1m_2\omega^4 - (\beta_{11}m_2 + \beta_{22}m_1)\omega^2 + \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 = 0.$$

Iz prve jednačine izraza (5.72) dobijaju se koeficijenti glavnih oblika oscilovanja

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{B}{A} = \eta = -\frac{\beta_{11} - m_1\omega^2}{\beta_{12}}. \quad (5.74)$$

Postavljanje diferencijalnih jednačina posmatranog zadatka preko Lagranžovih jednačina II vrste je prilično složeno, jer je potrebno da se izraz za potencijalnu energiju sistema dovede u oblik kvadratne forme generalisanih koordinata. Takođe, za ovakav postupak rješavanja potrebno je izračunavanje Maksvelovih uticajnih i dualnih koeficijenata.

Jednostavnija metoda od gore predstavljene je metoda korištenja superpozicije deformacija. Na ovaj način se diferencijalna jednačina kretanja postavlja neposredno preko uticajnih koeficijenata.

U ovom primjeru, Sl.5.9, ugib usljed sile \vec{F}_1 na mjestu gdje se nalazi masa m_1 obilježiće se sa f_{11} , a ugib usljed sile \vec{F}_2 na mjestu m_1 sa f_{12} . Slično tome, ugibi na mjestu mase m_2 usljed sila \vec{F}_1 i \vec{F}_2 označit će se sa f_{21} i f_{22} , respektivno. Ukupna deformacija od više pojedinačnih opterećenja na nekom mjestu deformabilnog tijela (nosača) jednaka je zbiru parcijalnih deformacija na tom mjestu od svih pojedinačnih opterećenja.

Opterećenja nosača posmatranog zadatka nastaju usljed inercije masa m_1 i m_2 :

$$F_1 = -m_1 \ddot{y}_1 \quad \text{i} \quad F_2 = -m_2 \ddot{y}_2. \quad (5.75)$$

Na osnovu principa superpozicije deformacija, ugibi na mjestima masa m_1 i m_2 iznosiće

$$\begin{aligned} y_1 &= f_{11} + f_{12}, \\ y_2 &= f_{21} + f_{22} \end{aligned} \quad (5.76)$$

Kako su

$$\begin{aligned} f_{11} &= F_1\alpha_{11}, \quad f_{12} = F_2\alpha_{12}, \\ f_{21} &= F_1\alpha_{21}, \quad f_{22} = F_2\alpha_{22}, \end{aligned} \quad (5.77)$$

to se njihovim uvrštavanjem u jednačine (5.76) dobijaju:

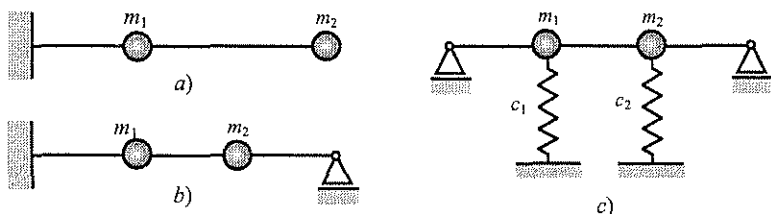
$$\begin{aligned} y_1 &= (-m_1 \ddot{y}_1) \alpha_{11} + (-m_2 \ddot{y}_2) \alpha_{12}, \\ y_2 &= (-m_1 \ddot{y}_1) \alpha_{21} + (-m_2 \ddot{y}_2) \alpha_{22}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Iz (5.78) dobijaju se diferencijalne jednačine kretanja

$$\begin{aligned} m_1 \alpha_{11} \ddot{y}_1 + m_2 \alpha_{12} \ddot{y}_2 + y_1 &= 0, \\ m_1 \alpha_{21} \ddot{y}_1 + m_2 \alpha_{22} \ddot{y}_2 + y_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Dalji postupak rješavanja ovih jednačina isti je kao u prethodnom primjeru.

Na slici 5.10 prikazani su neki mogući slučajevi poprečnog opterećenja nosača sa dvije mase, koji se mogu jednostavnije riješiti metodom superpozicije deformacija.



Sl. 5.10. Nosači sa dvije mase

5.4. Slobodne prigušene oscilacije sistema sa dva stepena slobode kretanja

Do sada razmatrane slobodne oscilacije materijalnog sistema sa dva stepena slobode odnosile su se isključivo na idealne veze, pri čemu su svi otpori kretanju bili zanemareni.

Sada će se posmatrati sistem materijalnih tačaka M_1, \dots, M_n , na koji osim konzervativnih elastičnih sila $\vec{F}_{e1}, \dots, \vec{F}_{en}$, djeluju i sile otpora $\vec{F}_{w1}, \dots, \vec{F}_{wn}$ proporcionalne prvom stepenu brzina tačaka sistema.

Generalisana sila otpora, kako smo je već pokazano, izračunava se preko Relejeve funkcije disipacije

$$Q_i^w = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = -(b_{i1} \dot{q}_1 + b_{i2} \dot{q}_2), \quad i = 1, 2. \quad (5.80)$$

Takođe, ranije je pokazano da izrazi za kinetičku energiju sistema, potencijalnu energiju i funkciju rasipanja imaju oblike:

$$\begin{aligned} E_k &\approx \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2), \\ E_p &\approx \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2), \\ \Phi &\approx \frac{1}{2} (b_{11} \dot{q}_1^2 + 2b_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + b_{22} \dot{q}_2^2). \end{aligned} \quad (5.81)$$

Svi ovi izrazi predstavljaju pozitivne definitne kvadratne forme, pri čemu koeficijenti inercije i elastičnosti zadovoljavaju kriterijume Silvestera, dok koeficijenti prigušenja zadovoljavaju slične uslove:

$$b_{11} > 0, \quad b_{22} > 0, \quad (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) > 0.$$

Lagranžove jednačine druge vrste u ovom slučaju će glasiti:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial E_p}{\partial q_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} + \frac{\partial E_p}{\partial q_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_2} &= 0. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Ako se izrazi (5.81) uvrste u (5.82), dobiće se diferencijalne jednačine slobodnih prigušenih oscilacija materijalnog sistema sa dva stepena slobode u prisustvu otpora:

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + b_{11} \dot{q}_1 + b_{12} \dot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 &= 0, \\ a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + b_{21} \dot{q}_1 + b_{22} \dot{q}_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Partikularna rješenja ovih jednačina potražiće se u obliku

$$q_1 = c_1 e^{\lambda t}, \quad q_2 = c_2 e^{\lambda t}, \quad (5.84)$$

gdje su c_1, c_2 i λ neki konstantni brojevi.

Zamjenom partikularnih rješenja (5.84) u jednačine (5.83), dobija se:

$$\begin{aligned} c_1 (a_{11} \lambda^2 + b_{11} \lambda + c_{11}) + c_2 (a_{12} \lambda^2 + b_{12} \lambda + c_{12}) &= 0, \\ c_1 (a_{21} \lambda^2 + b_{21} \lambda + c_{21}) + c_2 (a_{22} \lambda^2 + b_{22} \lambda + c_{22}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Ove algebarske jednačine po veličinama c_1 i c_2 su linearne i homogene, pa će netrivialno rješenje postojati samo ako je determinanta sistema jednaka nuli, tj. ako je

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{12} & a_{11}\lambda^2 + b_{12}\lambda + c_{12} \\ a_{21}\lambda^2 + b_{21}\lambda + c_{21} & a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (5.86)$$

Ukoliko se determinanta (5.85) razvije dobiće se jednačina četvrtog stepena po λ , što predstavlja karakterističnu jednačinu u razvijenom obliku.

Korijeni ove jednačine mogu se pojaviti u oblicima:

$$\lambda = -\delta \pm pi, \quad \lambda = -\delta, \quad \lambda = \pm pi,$$

gdje su δ i p realni brojevi.

Opšti integral jednačine (5.83) dobiće se sabiranjem partikularnih integrala (5.84) za svaki korijen λ_i karakteristične jednačine, tj.

$$q_1 = \sum_{i=1}^4 c_{1i} e^{\lambda_i t}, \quad q_2 = \sum_{i=1}^4 c_{2i} e^{\lambda_i t}. \quad (5.87)$$

Iz homogenih algebarskih jednačina (5.85), za svaki korijen λ_i karakteristične jednačine mogu se odrediti konstantni odnosi između c_{2i} i c_{1i} u obliku

$$\frac{c_{2i}}{c_{1i}} = -\frac{a_{11}\lambda_i^2 + b_{11}\lambda_i + c_{11}}{a_{12}\lambda_i^2 + b_{12}\lambda_i + c_{12}} = -\frac{a_{21}\lambda_i^2 + b_{11}\lambda_i + c_{21}}{a_{22}\lambda_i^2 + b_{22}\lambda_i + c_{22}} = \eta_i. \quad (5.88)$$

Da bi se pojednostavio postavljeni zadatak, sa običnih generalisanih koordinata q_1 i q_2 preći će se na glavne koordinate ξ_1 i ξ_2 . Pri ovome takođe treba transformisati homogene kvadratne forme E_k, E_p i Φ u izraze koji sadrže glavne koordinate.

Prema linearnoj algebri, samo dvije od ovih funkcija se mogu svesti na oblike koji ne sadrže mješovite članove. U ovom slučaju to će biti izrazi za kinetičku i potencijalnu energiju:

$$E_k = \frac{1}{2}(a_1 \dot{\xi}_1^2 + a_2 \dot{\xi}_2^2), \quad E_p = \frac{1}{2}(c_1 \xi_1^2 + c_2 \xi_2^2), \quad (5.89)$$

dok će funkcija rasipanja glasiti

$$\Phi = \frac{1}{2}(b_1 \xi_1^2 + 2b_0 \xi_1 \xi_2 + b_2 \xi_2^2).$$

U gornjem izazu su b_1, b_2 i b_0 novi koeficijenti prigušivanja različiti od starih b_{11}, b_{12} i b_{22} .

Veza između običnih i glavnih koordinata data je već poznatim relacijama:

$$\begin{aligned} q_1 &= \xi_1 + \xi_2, \\ q_2 &= s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Iz jednačina (5.90) mogu se izračunati glavne koordinate ξ_1 i ξ_2 .

Sada se mogu primijeniti Lagranžove jednačine II vrste

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\xi}_i} + \frac{\partial E_p}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

čime se dobijaju diferencijalne jednačine malih oscilacija:

$$\begin{aligned} a_1 \ddot{\xi}_1 + b_1 \dot{\xi}_1 + b_0 \xi_2 + c_1 \xi_1 &= 0, \\ a_2 \ddot{\xi}_2 + b_0 \dot{\xi}_1 + b_2 \dot{\xi}_2 + c_2 \xi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Partikularna rješenja ovih jednačina tražiće se u obliku

$$\xi_1 = D_1 e^{\lambda t}, \quad \xi_2 = D_2 e^{\lambda t}, \quad (5.92)$$

pa se njihovom zamjenom u jednačine (5.91) dobija sistem homogenih jednačina:

$$\begin{aligned} D_1 (a_1 \lambda^2 + b_1 \lambda + c_1) + D_2 b_0 \lambda &= 0, \\ D_1 b_0 \lambda + D_2 (a_2 \lambda^2 + b_2 \lambda + c_2) &= 0. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Sistem jednačina (5.92) imaće rješenja za D_1 i D_2 različita od nule ako je zadovoljen uslov

$$\begin{vmatrix} (a_1 \lambda^2 + b_1 \lambda + c_1) & b_0 \lambda \\ b_0 \lambda & (a_2 \lambda^2 + b_2 \lambda + c_2) \end{vmatrix} = 0. \quad (5.93)$$

Razvijanjem prethodne determinante (5.93) dobiće se jednačina četvrtog stepena

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \lambda^4 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) \lambda^3 + (a_1 c_2 + a_2 c_1 + b_1 b_2 - b_0^2) \lambda^2 + \\ + (b_1 c_2 + b_2 c_1) \lambda + c_1 c_2 = 0. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Uvedu li se kraće oznake za pojedine koeficijente na način

$$\begin{aligned} A_0 &= a_1 a_2, & A_1 &= (a_1 b_2 + b_1 a_2), \\ A_2 &= (a_1 c_2 + a_2 c_1 + b_1 b_2 - b_0^2), \\ A_3 &= (b_1 c_2 + b_2 c_1), & A_4 &= c_1 c_2, \end{aligned}$$

jednačina (5.94) se može pisati u obliku

$$A_0 \lambda^4 + A_1 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_3 \lambda + A_4 = 0 \quad (5.95)$$

Ovo je karakteristična jednačina sistema diferencijalnih jednačina (5.91).

Imajući u vidu da su izrazi (5.89) pozitivno definitne kvadratne forme, prema Sylvesterovom kriterijumu koeficijenti a , b i c moraju zadovoljiti sljedeće uslove:

$$\begin{aligned} a_1 > 0, & \quad a_2 > 0, & \quad c_1 > 0, & \quad c_2 > 0, \\ b_1 > 0, & \quad b_2 > 0, & \quad (b_1 b_2 - b_0^2) > 0. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Uz uslove (5.96) svi koeficijenti A_0 , A_1 , A_2 , A_3 i A_4 biće pozitivni. Karakteristična jednačina (5.95) u opštem slučaju ima dva para konjugovano-kompleksnih korijena.

Pošto se materijalni sistem kreće u sredini u kojoj postoje otpori, to će se pri kretanju sistema trošiti energija. Stoga će kretanje biti prigušeno.

U zavisnosti od uticaja pojedinih parametara mogu se razlikovati dva slučaja:

- kada je prigušenje sistema malo,
- kada je prigušenje sistema veliko.

5.4.1. Slučaj malog prigušenja. Raut-Hurvicov kriterijum stabilnosti kretanja

Da bi materijalni sistem vršio prividno periodično kretanje potrebno je da realni dijelovi konjugovano-kompleksnih korijena karakteristične jednačine (5.95) budu negativni, odnosno da korijeni pomenute jednačine imaju oblik:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\delta_1 \pm p_1 i, \\ \lambda_{3,4} &= -\delta_2 \pm p_2 i, \end{aligned} \quad (5.97)$$

gdje su δ_1 , δ_2 , p_1 i p_2 pozitivni brojevi.

Pitanje stabilnosti materijalnog sistema rješava se postupkom koji se zasniva na određivanju korijena karakteristične jednačine, koji su prema (5.97) konjugovano-kompleksni. Pri tome mogu nastupiti sljedeća tri slučaja:

- kada je realni dio bar jednog korijena pozitivan; tada je prema prvom približenju kretanje nestabilno, što je potvrđeno i metodom Ljapunova;
- kada svi korijeni karakteristične jednačine imaju negativne realne dijelove, tada je kretanje stabilno;
- kada među realnim dijelovima korijena nema pozitivnih, ali ih ima jednakih nuli, tada će kretanje biti stabilno, ali se mora dodatno potvrditi dopunskim ispitivanjem.

Kriterijum pomoću kojeg se utvrđuje da li su svi realni dijelovi karakteristične jednačine negativni dao je Hurvic na bazi linearne algebre.

Kod algebarskih jednačina bilo kojeg stepena n oblika

$$A_0 \lambda^n + A_1 \lambda^{n-1} + A_2 \lambda^{n-2} + \dots + A_n = 0 \quad (5.98)$$

sa realnim koeficijentima A_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, potreban i dovoljan uslov da bi realni dijelovi svih korijena ove jednačine bili negativni, uz uslov da je $A_0 > 0$, jeste taj da sljedeće determinante budu pozitivne:

$$\Delta_1 = A_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ A_0 & A_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 \\ A_0 & A_2 & A_4 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_4, \dots \quad (5.99)$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 & \dots & A_{2n-1} \\ A_0 & A_2 & A_4 & \dots & A_{2n-2} \\ 0 & A_1 & A_3 & \dots & A_{2n-3} \\ 0 & A_0 & A_2 & \dots & A_{2n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_n \end{vmatrix},$$

pri čemu je $A_r = 0$ ako je $r > n$.

Raut-Hurvicov kriterijum se u mehanici naziva kriterijum stabilnosti.

Pri formiranju algebarske jednačine (5.98) prema ovom kriterijumu, odnosno određivanje koeficijenata A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, pomoću parametara a_i , b_i i c_i mehaničkog sistema, potrebno je formirati determinante Δ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, i odrediti njihove predznake.

Određivanje koeficijenata A_i preko mehaničkih parametara posmatranog sistema predstavlja određeno ograničenje na mehanički sistem, koje mora biti zadovoljeno da bi kretanje sistema bilo stabilno.

Pošto parametri na osnovu kojih se određuju koeficijenti A_i utiču neposredno na konstrukciju mašina, a samim tim i na režim rada i dinamički sistem, to se oni moraju birati tako da zadovolje Raut-Hurvicov kriterijum.

U slučaju sistema sa dva stepena slobode kretanja, Raut-Hurvicovi uslovi imaju oblik:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= A_1 > 0, \\ \Delta_2 &= A_1 A_2 - A_0 A_3 > 0, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & 0 \\ A_0 & A_2 & A_4 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{vmatrix} = A_3 \Delta_2 - A_1^2 A_4 > 0, \\ \Delta_4 &= \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & 0 & 0 \\ A_0 & A_2 & A_4 & 0 \\ 0 & A_1 & A_3 & 0 \\ 0 & A_0 & A_2 & A_4 \end{vmatrix} = A_4 \Delta_3 > 0. \end{aligned} \quad (5.100)$$

Prema gore postavljenim nejednakostima mogu se izvesti određeni zaključci.

Prva nejednakost zahtijeva da je $A_1 > 0$. Iz četvrte nejednakosti slijedi da je $A_4 > 0$, a iz treće onda slijedi da je $A_3 > 0$.

Kako je $A_0 > 0$, to iz druge nejednakosti proizilazi da je i $A_2 > 0$. Na ovaj način primjenom Raut-Hurvicovih kriterijuma proizilazi da su sva četiri koeficijenta A_i pozitivni. Kako su prema (5.100) ispunjeni svi uslovi da sva četiri korijena karakteristične jednačine budu negativna, to je, kako je već navedeno, uslov da su koeficijenti $A_i > 0$ samo posljedica uslova (5.100).

Polazeći od pretpostavke da su ispunjeni Raut-Hurvicovi uslovi, odnosno da su korijeni karakteristične jednačine (5.95) konjugovano-kompleksni sa negativnim predznakom, opšti integral jednačina (5.91), odnosno (5.92), može se prikazati u vidu zbira partikularnih integrala:

$$\xi_1 = \sum_{i=1}^4 D_{1i} e^{\lambda_i t}, \quad \xi_2 = \sum_{i=1}^4 D_{2i} e^{\lambda_i t}. \quad (5.101)$$

Pri tome se odnosi između konstanti D_{2i} i D_{1i} , za korijen λ_i , $i = 1, \dots, n$, određuju iz jednačine (5.92), tako da se dobija

$$\frac{D_{2i}}{D_{1i}} = -\frac{a_1 \lambda_i^2 + b_1 \lambda_i + c_1}{b_0 \lambda_i} = -\frac{b_0 \lambda_i}{a_2 \lambda_i^2 + b_2 \lambda_i + c_2} = \eta_i \quad (5.102)$$

Zamjenom korijena karakteristične jednačine (5.97) i primjenom Moavrovog obrasca, opšta rješenja (5.101) postaju:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= D_{11} e^{\lambda_1 t} + D_{12} e^{\lambda_2 t} + D_{13} e^{\lambda_3 t} + D_{14} e^{\lambda_4 t} = \\ &= e^{-\delta_1 t} (D_{11} e^{p_1 t} + D_{12} e^{-p_1 t}) + e^{-\delta_2 t} (D_{13} e^{p_2 t} + D_{14} e^{-p_2 t}) = \\ &= e^{-\delta_1 t} (A_1^{(1)} \cos p_1 t + B_1^{(1)} \sin p_1 t) + e^{-\delta_2 t} (A_1^{(2)} \cos p_2 t + B_1^{(2)} \sin p_2 t), \\ \xi_2 &= e^{-\delta_1 t} (A_2^{(1)} \cos p_1 t + B_2^{(1)} \sin p_1 t) + e^{-\delta_2 t} (A_2^{(2)} \cos p_2 t + B_2^{(2)} \sin p_2 t), \end{aligned} \quad (5.103)$$

pri čemu su konstante:

$$\begin{aligned} A_1^{(1)} &= D_{11} + D_{12}, & A_1^{(2)} &= D_{13} + D_{14}, \\ B_1^{(1)} &= i(D_{11} - D_{12}), & B_1^{(2)} &= i(D_{13} - D_{14}), \\ A_2^{(1)} &= D_{21} + D_{22}, & A_2^{(2)} &= D_{23} + D_{24}, \\ B_2^{(1)} &= i(D_{21} - D_{22}), & B_2^{(2)} &= i(D_{23} - D_{24}). \end{aligned} \quad (5.104)$$

Ovih osam konstanti se mogu prema jednačini (5.102) izraziti preko četiri konstante:

$$\eta_1 = \frac{D_{21}}{D_{11}}, \quad \eta_2 = \frac{D_{22}}{D_{12}}, \quad \eta_3 = \frac{D_{23}}{D_{13}}, \quad \eta_4 = \frac{D_{24}}{D_{14}}.$$

Iz gore navedenih odnosa mogu se dobiti određene veze. Tako naprimjer:

$$A_2^{(1)} = \eta_1 A_1^{(1)} - \eta_2 B_1^{(1)}, \quad B_2^{(1)} = \eta_2 A_1^{(1)} + \eta_1 B_1^{(1)},$$

$$A_2^{(2)} = \eta_3 A_1^{(2)} - \eta_4 B_1^{(2)}, \quad B_2^{(2)} = \eta_4 A_1^{(2)} - \eta_3 B_1^{(2)}.$$

Jednačine (5.103) pokazuju da se glavne koordinate ξ_1 i ξ_2 mijenjaju po zakonu koji odgovara zbiru dviju prigušenih oscilacija, pa kretanje sistema ima prividno periodičan karakter.

Ove oscilacije imaju iste prinudne kružne frekvencije p_1 i p_2 i koeficijente prigušenja δ_1 i δ_2 , ali se međusobno razlikuju po amplitudama i uglovima faznih razlika.

Cilj prelaska na glavne koordinate bio je da se problem pojednostavi. Međutim, u tome se malo uspjelo, jer su i ove koordinate, kako se vidi iz izraza (5.103), izražene u dosta složenom obliku.

Dalje se može vidjeti da se u izrazima za glavne koordinate pojavljuje osam konstanti. One zavise od konstanti D_{1i} i D_{2i} , $i = 1, 2, 3, 4$, koje moraju zadovoljiti uslove (5.102), pa se u rješenjima (5.103) pojavljuju samo četiri konstante.

Konačno rješenje opštih integrala diferencijalnih jednačina je

$$\begin{aligned} \xi_1 &= e^{-\delta_1 t} [A_1^{(1)} \cos p_1 t + B_1^{(1)} \sin p_1 t] + e^{-\delta_2 t} [A_1^{(2)} \cos p_2 t + B_1^{(2)} \sin p_2 t], \\ \xi_2 &= e^{-\delta_1 t} [(\eta_1 A_1^{(1)} - \eta_2 B_1^{(1)}) \cos p_1 t + (\eta_2 A_1^{(1)} + \eta_1 B_1^{(1)}) \sin p_1 t] + \\ &+ e^{-\delta_2 t} [(\eta_3 A_1^{(2)} - \eta_4 B_1^{(2)}) \cos p_2 t + (\eta_4 A_1^{(2)} - \eta_3 B_1^{(2)}) \sin p_2 t]. \end{aligned} \quad (5.105)$$

Ovdje se pojavljuju samo četiri integracione konstante: $A_1^{(1)}$, $B_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$ i $B_1^{(2)}$, koje se mogu odrediti iz početnih uslova kretanja

$$t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \xi_1 = (\xi_1)_0, \quad \dot{\xi}_1 = (\dot{\xi}_1)_0 \\ \xi_2 = (\xi_2)_0, \quad \dot{\xi}_2 = (\dot{\xi}_2)_0 \end{array} \right|. \quad (5.106)$$

5.4.2. Slučaj velikog prigušenja

Ovo je slučaj kada su korišteni karakteristične jednačine (5.95) realni i različiti, odnosno:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\delta_1 \pm x_1, \\ \lambda_{3,4} &= -\delta_2 \pm x_2. \end{aligned} \quad (5.107)$$

U ovom slučaju će, kako je pokazano prethodnim postupkom, opšti integral za sistem diferencijalnih jednačina (5.91) biti

$$\begin{aligned} \xi_1 &= e^{-\delta_1 t} [A_1^{(1)} \operatorname{ch} x_1 t + B_1^{(1)} \operatorname{sh} x_1 t] + e^{-\delta_2 t} [A_1^{(2)} \operatorname{ch} x_2 t + B_1^{(2)} \operatorname{sh} x_2 t], \\ \xi_2 &= e^{-\delta_1 t} [A_2^{(1)} \operatorname{ch} x_1 t + B_2^{(1)} \operatorname{sh} x_1 t] + e^{-\delta_2 t} [A_2^{(2)} \operatorname{ch} x_2 t + B_2^{(2)} \operatorname{sh} x_2 t]. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Dakle, opšti integrali u ovom slučaju neće biti prikazani preko trigonometrijskih funkcija, već preko hiperbolnih funkcija.

To znači da će kretanje sistema biti aperiodično, što je uvijek u slučaju kada postoji veliko prigušenje u sistemu.

Ukoliko bi dva korijena karakteristične jednačine bila konjugovano-kompleksna, a druga dva realna i različita, tj. u slučaju kada su

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\delta_1 \pm pi, \\ \lambda_{3,4} &= -\delta_2 \pm x, \end{aligned} \quad (5.109)$$

onda će opšti integrali sistema diferencijalnih jednačina imati oblik:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= e^{-\delta_1 t} [A_1^{(1)} \cos pt + B_1^{(1)} \sin pt] + e^{-\delta_2 t} [A_1^{(2)} \operatorname{ch} xt + B_1^{(2)} \operatorname{sh} xt], \\ \xi_2 &= e^{-\delta_1 t} [A_2^{(1)} \cos pt + B_2^{(1)} \sin pt] + e^{-\delta_2 t} [A_2^{(2)} \operatorname{ch} xt + B_2^{(2)} \operatorname{sh} xt]. \end{aligned} \quad (5.110)$$

Iz jednačina (5.110) se vidi da je kretanje sistema sastavljeno od prigušenih oscilacija i aperiodičnog kretanja.

Ukoliko je t dovoljno veliko preovlađaće aperiodično kretanje. I ovdje se pojavljuju samo četiri integracione konstante o kojima je bilo riječ u prethodnom izlaganju.

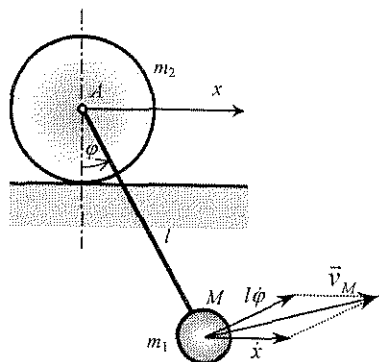
5.4.3. Primjeri

Primjer br. 1.

Odrediti period malih oscilacija klatna koje na kraju nosi koncentrisanu masu m_1 . Štap AM je dužine l i zanemarljive mase. Tačka A štapa nalazi se u centru homogenog diska, mase m_2 i poluprečnika r . Disk se može kotrljati bez klizanja po horizontalnoj površini. Štap i disk međusobno su zglobovno vezani u tački A , Sl. 5.11.

Rješenje:

Sistem ima dva stepena slobode kretanja i to kretanje može biti predstavljeno sa dvije Lagranžove jednačine. Za generalisane koordinate odabrat će se nezavisne veličine φ i x . Kinetička energija sistema iznosi



Sl.5.11. Male oscilacije klatna

$$\begin{aligned}
 E_k &= E_{k1} + E_{k2} = \\
 &= \frac{1}{2} m_1 v_M^2 + \left[\frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_2 R^2 \right) \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2 \right] = \\
 &= \frac{1}{2} m_1 \left[\dot{x}^2 + (l\dot{\varphi})^2 + 2\dot{x}l\dot{\varphi} \cos \varphi \right] + \frac{3}{4} m_2 \dot{x}^2 = \\
 &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x} + l\dot{\varphi})^2 + \frac{3}{4} m_2 \dot{x}^2
 \end{aligned}$$

gdje je R - poluprečnik diska, a zbog malih oscilacija $\varphi \rightarrow 0$ usvojena je približna vrijednost $\cos \varphi \approx 1$.

Potencijalna energija sistema je u slučaju malih oscilacija

$$E_p = m_1 g l (1 - \cos \varphi) \approx m_1 g l \frac{\varphi^2}{2}$$

Korištenjem Lagranžovih jednačina dobijaju se diferencijalne jednačine kretanja datog sistema u obliku:

$$\left(m_1 + \frac{3}{2} m_2 \right) \ddot{x} + m_1 l \ddot{\varphi} = 0, \tag{a}$$

$$\ddot{x} + l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0. \tag{b}$$

Rješenja dobijenih diferencijalnih jednačina tražit će se u obliku harmonijskih funkcija, pri čemu determinanta sistema mora biti jednaka nuli da bi postojala rješenja osim trivijalnih. Rješenjem determinante formira se frekventna jednačina iz koje se nalazi vlastita frekvencija sistema.

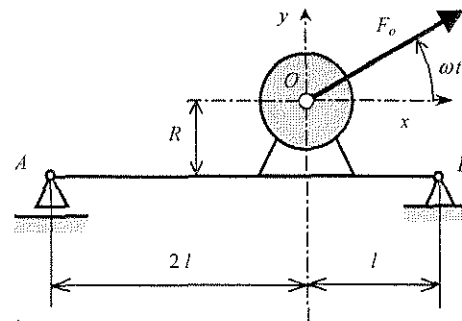
U konkretnom primjeru, period malih oscilacija će se jednostavnije naći ako se iz jednačine (a) izrazi \ddot{x} i uvrsti u jednačinu (b), koja tada dobija sljedeći oblik:

$$\begin{aligned}
 -\frac{m_1 l \ddot{\varphi}}{m_1 + \frac{3}{2} m_2} + l\ddot{\varphi} + g\varphi &= 0, \\
 \frac{\frac{3}{2} m_2}{m_1 + \frac{3}{2} m_2} \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi &= 0, \\
 \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\omega^2 = \frac{m_1 + \frac{3}{2} m_2}{\frac{3}{2} m_2} \frac{g}{l} = \frac{2m_1 + 3m_2}{3m_2} \frac{g}{l}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{3m_2}{2m_1 + 3m_2} \frac{l}{g}}$$

Primjer br. 2.

Teški elektromotor mase m pričvršćen je na gredu dužine $3l$. Pri obrtanju rotora motora koji ima masu m_1 nastaje centrifugalna sila inercije $F_o = m_1 \omega^2 e$, pri čemu je e -ekscentricitet mase rotora, a ω -ugaona brzina rotora, Sl. 5.12.



Sl. 5.12. Oscilacije grede sa električnim motorom

Određiti vlastite frekvencije oscilacija i amplitude prinudnih oscilacija sistema, ako je rastojanje od ose grede do centra mase motora $R = l/4$, moment inercije mase motora u odnosu na centralnu osu $J_O = ml^2/4$, a ugaona brzina obrtanja $\omega = 2\sqrt{EJ_x/ml^3}$. Masu grede u odnosu na masu motora zanemariti.

Rješenje:

Sistem ima dva stepena slobode kretanja jer je položaj centra mase motora u bilo kojem trenutku vremena određen dvjema nezavisnim koordinatama: vertikalnim pomjeranjem y i uglom zakretanja φ .

Ukupnu silu inercije F_o neophodno je razložiti na dvije komponente:

$$F_y = F_o \sin \omega t \quad ; \quad F_x = F_o \cos \omega t ,$$

koje djeluju u pravcu poprečnom na gredu i uzduž nje.

Koristeći metod pomjeranja, dobivaju se diferencijalne jednačine oscilovanja sistema:

$$\begin{aligned} y &= (F_y - m \ddot{y}) \alpha_{11} + (F_x R - J \ddot{\varphi}) \delta_{12}, \\ \varphi &= (F_y - m \ddot{y}) \delta_{21} + (F_x R - J \ddot{\varphi}) \delta_{22}, \end{aligned} \quad (a)$$

gdje je veličina $J = J_o + mR^2$ - moment inercije mase motora u odnosu na njegovo postolje.

Utajni koeficijenti, koji se javljaju u gornjim jednačinama, mogu se naći u tablicama iz otpornosti materijala i iznose (J_x - aksijalni moment inercije grede):

$$\alpha_{11} = \frac{4l^3}{9EJ_x}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2l^2}{9EJ_x}, \quad \delta_{22} = \frac{l}{3EJ_x}. \quad (b)$$

Frekvencija slobodnih oscilacija sistema određuje se iz gore napisanih diferencijalnih jednačina kada se u njih uvrste $F_x = F_y = 0$, pri čemu se opšta rješenja traže u obliku:

$$y = C_1 \sin \omega_o t, \quad \varphi = C_2 \sin \omega_o t. \quad (c)$$

Determinanta sistema će biti

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - \alpha_{11} m \omega_o^2 & -J \omega_o^2 \delta_{12} \\ -\delta_{21} m \omega_o^2 & 1 - J \omega_o^2 \delta_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (d)$$

Rješenja ove determinante predstavljaju frekvencije slobodnih oscilacija sistema i one iznose

$$\omega_{o1} = 1,43 \sqrt{\frac{EJ_x}{ml^3}}, \quad \omega_{o2} = 13,96 \sqrt{\frac{EJ_x}{ml^3}}. \quad (e)$$

Rješenja sistema diferencijalnih jednačina, koja predstavljaju prinudne oscilacije sistema, mogu se potražiti i u obliku:

$$\begin{aligned} y &= A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t, \\ \varphi &= B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem ovih izraza i njihovih drugih izvoda

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -\omega^2 A_1 \sin \omega t - \omega^2 A_2 \cos \omega t, \\ \ddot{\varphi} &= -\omega^2 B_1 \sin \omega t - \omega^2 B_2 \cos \omega t, \end{aligned}$$

u diferencijalne jednačine dobija se sljedeći sistem jednačina za određivanje konstanti A_1, A_2, B_1 i B_2 :

$$\begin{aligned} (1 - m \omega^2 \alpha_{11}) A_1 - J \omega^2 \delta_{12} B_1 &= F_o \alpha_{11} \\ (1 - m \omega^2 \alpha_{11}) A_2 - J \omega^2 \delta_{12} B_2 &= F_o R \delta_{12} \\ (1 - J \omega^2 \delta_{22}) B_1 - m \omega^2 \delta_{21} A_1 &= F_o \delta_{21} \\ (1 - J \omega^2 \delta_{22}) B_2 - m \omega^2 \delta_{21} A_2 &= F_o R \delta_{22}. \end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sistema jednačina dobijaju se konstante:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{F_o}{\Delta} [(1 - J \omega^2 \delta_{22}) \alpha_{11} + J \omega^2 \delta_{12}^2] = -\frac{104 F_o l^3}{227 E J_x} \\ B_1 &= \frac{F_o}{\Delta} [(1 - m \omega^2 \alpha_{11}) \delta_{12} + m \omega^2 \delta_{12} \alpha_{11}] = -\frac{72 F_o l^3}{227 E J_x} \\ A_2 &= \frac{F_o R}{\Delta} [(1 - J \omega^2 \delta_{22}) \delta_{12} + J \omega^2 \delta_{12} \delta_{22}] = -\frac{18 F_o l^2}{227 E J_x} \\ B_2 &= \frac{F_o R}{\Delta} [(1 - m \omega^2 \alpha_{11}) \delta_{22} + m \omega^2 \delta_{12}^2] = -\frac{5 F_o l^2}{227 E J_x} \end{aligned}$$

gdje je Δ - determinanta sistema.

Iz pretpostavljenih rješenja slijedi da su amplitude prinudnih oscilacija

$$y_o = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 0,467 \frac{F_o l^3}{E J_x}, \quad \varphi_o = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = 0,319 \frac{F_o l^2}{E J_x}.$$

Primjer br. 3.

Ispitati stacionarno kretanje centrifugalnog regulatora dato ugaonom brzinom ω_o i uglom relativne ravnoteže α . Regulacioni moment je proporcionalan poremećaju ugla. Zanemariti mase štapova. Na slici 5.13 dati su osnovni podaci o regulatoru.

Rješenje:

Prema datim uslovima sistem ima dva stepena slobode. Za generalisane koordinate odabracé se uglovi ϕ i θ , pa vrijedi

$$E_k = ml^2(\dot{\theta}^2 \sin^2 \phi + \dot{\phi}^2), \quad (a)$$

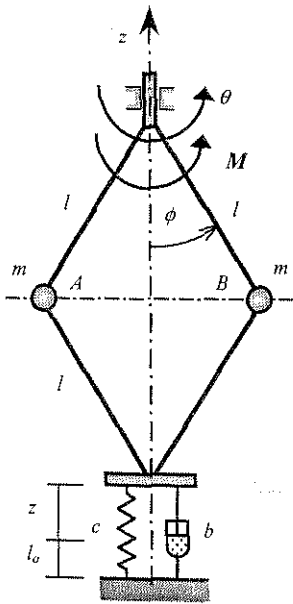
$$E_p = 2cl^2(1 - \cos \phi)^2 + 2mgl(1 - \cos \phi), \quad (b)$$

$$\Phi = 2bl^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \phi, \quad (c)$$

odakle se primjenom Lagranžovih jednačina druge vrste dobijaju diferencijalne jednačine kretanja sistema:

$$2ml^2(\ddot{\phi} - \dot{\theta}^2 \sin \phi \cos \phi) + 4bl^2\dot{\phi} \sin^2 \phi + [4cl^2(1 - \cos \phi) + 2mgl] \sin \phi = 0, \quad (d)$$

$$2ml^2 \sin \phi (\ddot{\theta} \sin \phi + 2\dot{\phi} \dot{\theta} \cos \phi) = M \quad (e)$$



Za stacionarno kretanje je $\theta = \omega_0 t$ i $\phi = \alpha = const.$, pa iz (d) i (e) se dobija

$$M = 0, \quad (f)$$

$$\alpha_1 = \arccos \frac{mg + 2cl}{ml\omega_0^2 + 2cl}, \quad \alpha_2 = 0. \quad (g)$$

Sada će se ispitati samo kretanje određeno uglom α_1 .

Poremećeno kretanje će se označiti sa $\bar{\theta}$ i $\bar{\phi}$, poremećaji sa ε_i , a brzina poremećaja sa $\dot{\varepsilon}_i$.

Ovdje je sa ε_i označena razlika između dva rješenja, pri čemu je $i = 1, \dots, n$.

Prema teoremi Ljapunova, osnovno kretanje

$$q_i = q_i(q_{i0}, \dots, q_{no}; \dot{q}_{i0}, \dots, \dot{q}_{no}, t), \quad i = 1, \dots, n$$

je stabilno ukoliko se mogu naći početni poremećaji $\delta_1, \dots, \delta_n$ takvi da poremećaji $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ ostanu tokom čitavog intervala kretanja u zadatim granicama, bez obzira na to koliko uske one bile. To znači da se poremećeno kretanje može definisati na sljedeći način:

$$\bar{q}_i = q_i + \varepsilon_i, \text{ itd.}$$

$$\bar{\theta} = \omega_0 t + \varepsilon_1(t), \quad \bar{\phi} = \alpha + \varepsilon_2(t).$$

Zamjenom u (d) i (e) i poslije linearizacije dobija se (uz $M = -k\varepsilon_2$, $k = const.$)

$$A\ddot{\varepsilon}_2 + B\dot{\varepsilon}_2 - C\dot{\varepsilon}_1 + D\varepsilon_2 = 0, \quad (h)$$

$$E\ddot{\varepsilon}_1 + C\dot{\varepsilon}_2 + k\varepsilon_2 = 0, \quad (i)$$

gdje su konstante:

$$A = 2ml^2 > 0,$$

$$B = 4bl^2 \sin^2 \alpha > 0,$$

$$C = 2ml^2 \omega_0 \sin^2 \alpha > 0, \quad (j)$$

$$D = 2(2c + m\omega_0^2)l^2 \sin^2 \alpha > 0,$$

$$E = 2ml^2 \sin^2 \alpha > 0.$$

Rješenja sistema (h) i (i) traže se u obliku

$$\varepsilon_1 = A_1 e^{\lambda t} \quad \text{i} \quad \varepsilon_2 = A_2 e^{\lambda t},$$

što zamjenom u (h) i (i) daje

$$\begin{aligned} -\lambda C A_1 + (D + \lambda B + \lambda^2 A) A_2 &= 0, \\ \lambda^2 E A_1 + (k + \lambda C) A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (k)$$

Gornji sistem algebarskih jednačina ima netrivialna rješenja po A_1 i A_2 ako je determinanta sistema jednaka nuli, tj. ako je

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda C & D + \lambda B + \lambda^2 A \\ \lambda^2 E & k + \lambda C \end{vmatrix} = -\lambda [AE\lambda^3 + BE\lambda^2 + (DE + C^2)\lambda + kC] = \\ &= -\lambda (a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) = 0. \end{aligned} \quad (l)$$

Kretanje će biti stabilno ako gornja jednačina ima korijene sa negativnim realnim dijelovima, što je definisano Hurvicovim uslovima:

Sl. 5.13. Centrifugalni regulator

$$\Delta_1 = a_1 = DE + C^2 > 0, \quad (m)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = E[B(DE + C^2) - kAC] > 0, \quad (n)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \Delta_2 = AE \Delta_2 > 0. \quad (o)$$

Ovi uslovi će biti zadovoljeni (vidjeti (j)) za odnos

$$k < \frac{B}{AC} (DE + C^2). \quad (p)$$

Gornji podataka je veoma značajan za konstrukciju opisanog regulatora.

Prema tome, ako je ispunjen uslov (p) stacionarno kretanje centrifugalnog regulatora će biti stabilno. To znači da se trenutni poremećaj u radu mašine koja se reguliše mora smanjivati tokom vremena da bi se dobio miran rad mašine.

5.5. Prinudne neprigušene oscilacije sistema sa dva stepena slobode

Posmatraće se slučaj kretanja materijalnog sistema M_i , $i = 1, 2, \dots, n$, na koji pored elastičnih sila \vec{F}_{el} , djeluju i prinudne sile \vec{F}_{Ω} koje se mijenjaju po zakonu

$$\vec{F}_{\Omega} = F_{oi} \cos \Omega t, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.111)$$

Generalisane poremećajne sile za sistem sa dva stepena slobode će se mijenjati po periodičnim zakonima:

$$Q_1^{\Omega} = Q_1 \cos \Omega t,$$

$$Q_2^{\Omega} = Q_2 \cos \Omega t.$$

Generalisanim poremećajnim silama odgovaraju generalisane koordinate q_1 i q_2 .

Lagranžove jednačine druge vrste u slučaju malih oscilacija glase:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial E_p}{\partial q_1} = Q_1^{\Omega}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} + \frac{\partial E_p}{\partial q_2} = Q_2^{\Omega}.$$

Na osnovu gornjih jednačina i izraza (5.1) za E_k i E_p mogu se izvesti diferencijalne jednačine malih neprigušenih oscilacija sistema sa dva stepena slobode pod dejstvom poremećajnih sila:

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 &= Q_1^{\Omega}, \\ a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 &= Q_2^{\Omega}. \end{aligned} \quad (5.112)$$

Ovo su dvije nehomogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Opšti integral ovih diferencijalnih jednačina biće jednak zbiru opštih integrala homogenih jednačina i partikularnih integrala nehomogenih jednačina:

$$q_1 = (q_1)_h + (q_1)_p; \quad q_2 = (q_2)_h + (q_2)_p.$$

Rješenja homogenih dijelova ovih jednačina imaju oblik:

$$\begin{aligned} (q_1)_h &= A_1 \cos(\omega_1 - \alpha_1) + B_1 \cos(\omega_2 - \alpha_2), \\ (q_2)_h &= \eta_1 A_1 \cos(\omega_1 - \alpha_1) + \eta_2 B_1 \cos(\omega_2 - \alpha_2). \end{aligned} \quad (5.113)$$

Partikularna rješenja sistema jednačina (5.112) tražiće se u obliku:

$$(q_1)_p = C_1 \cos \Omega t, \quad (q_2)_p = C_2 \cos \Omega t. \quad (5.114)$$

Zamjenom ovih rješenja i njihovih izvoda u jednačine (5.112) dobija se sistem algebarskih jednačina:

$$\begin{aligned} C_1 (c_{11} - a_{11} \Omega^2) + C_2 (c_{12} - a_{12} \Omega^2) &= Q_1, \\ C_1 (c_{21} - a_{21} \Omega^2) + C_2 (c_{22} - a_{22} \Omega^2) &= Q_2. \end{aligned}$$

Iz ovih jednačina određuju se amplitude C_1 i C_2 prinudnih oscilacija sistema:

$$C_1 = \frac{Q_1 (c_{22} - a_{22} \Omega^2) - Q_2 (c_{12} - a_{12} \Omega^2)}{(c_{11} - a_{11} \Omega^2)(c_{22} - a_{22} \Omega^2) - (c_{12} - a_{12} \Omega^2)^2},$$

$$C_2 = \frac{Q_2(c_{11} - a_{11}\Omega^2) - Q_1(c_{12} - a_{12}\Omega^2)}{(c_{11} - a_{11}\Omega^2)(c_{22} - a_{22}\Omega^2) - (c_{12} - a_{12}\Omega^2)^2}. \quad (5.115)$$

Opšti integrali homogenih jednačina (5.113) predstavljaju slobodne oscilacije materijalnog sistema, dok partikularni integrali (5.114) u kojima su konstante C_1 i C_2 određene izrazima (5.115) predstavljaju prinudne oscilacije.

Za prinudne oscilacije sistema sa dva stepena slobode može se konstatovati sljedeće:

- Prinudne oscilacije su periodične (harmonijske) i imaju istu kružnu frekvenciju i fazu kao i poremećajne sile;
- Amplitude prinudnih oscilacija ne zavise od početnih uslova kretanja već od dinamičkih parametara sistema.

Opšti integrali nehomogenih jednačina (5.112) mogu se napisati u obliku:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + B_1 \cos(\omega_2 t - \alpha_2) + C_1 \cos \Omega t, \\ q_2 &= \eta_1 A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + \eta_2 B_1 \cos(\omega_2 t - \alpha_2) + C_2 \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (5.116)$$

Frekvencije slobodnih oscilacija sistema ω_1 i ω_2 mogu se odrediti iz frekventne jednačine slobodnih oscilacija (5.18), dok se koeficijenti glavnih oblika oscilacija mogu dobiti pomoću formule (5.25).

Proizvoljne integracione konstante A_1, B_1, α_1 i α_2 mogu se odrediti iz početnih uslova kretanja:

$$t = 0 \left| \begin{array}{l} q_1 = (q_1)_0, \quad \dot{q}_1 = (\dot{q}_1)_0 \\ q_2 = (q_2)_0, \quad \dot{q}_2 = (\dot{q}_2)_0 \end{array} \right.$$

Pošto su nazivnici u formulama (5.115) predstavljeni kao kvadratna forma po Ω^2 i pošto su korijeni ove kvadratne jednačine istovremeno i kvadrati kružnih frekvencija slobodnih oscilacija ω_1^2 i ω_2^2 , to se izrazi (5.115) mogu napisati u obliku

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{Q_1(c_{22} - a_{22}\Omega^2) - Q_2(c_{12} - a_{12}\Omega^2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)}, \\ C_2 &= \frac{Q_2(c_{11} - a_{11}\Omega^2) - Q_1(c_{12} - a_{12}\Omega^2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)}. \end{aligned} \quad (5.117)$$

5.5.1. Pojava rezonancije

Ukoliko u slučaju kretanja materijalnog sistema na koji djeluju poremećajne sile vrijede jednakosti $\Omega = \omega_1$ ili $\Omega = \omega_2$, amplitude prinudnih oscilacija C_1 i C_2 prema izrazima (5.117) neograničeno rastu tokom vremena. Tada nastaje pojava koja se naziva rezonancija.

Partikularna rješenja sistema nehomogenih jednačina (5.112) u ovom slučaju neće biti data izrazima (5.114), već se moraju posebno odrediti. Određivanje partikularnih rješenja obaviti će se prelaskom na glavne koordinate ξ_1 i ξ_2 , pri čemu se još moraju izračunati nove poremećajne sile koje odgovaraju ovim glavnim koordinatama. Prelazak sa običnih koordinata q_1 i q_2 na glavne koordinate uspostaviti će se na osnovu jednakosti virtualnih radova generalisanih sila koje odgovaraju koordinatama q_1 i q_2 i glavnim koordinatama ξ_1 i ξ_2 .

Već ranije je uspostavljena veza između običnih i glavnih koordinata u obliku:

$$q_1 = \xi_1 + \xi_2, \quad q_2 = s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2. \quad (5.118)$$

Variranjem izraza (5.118) dobiće se

$$\delta q_1 = \delta \xi_1 + \delta \xi_2, \quad \delta q_2 = s_1 \delta \xi_1 + s_2 \delta \xi_2. \quad (5.119)$$

Preko virtualnog rada sila koje djeluju na materijalni sistem uspostaviće se veza između generalisanih sila koje odgovaraju ovim koordinatama:

$$\delta A = Q_1^\Omega \delta q_1 + Q_2^\Omega \delta q_2 = (Q_1^\Omega) \delta \xi_1 + (Q_2^\Omega) \delta \xi_2. \quad (5.120)$$

Ako se izrazi (5.119) zamijene u (5.120) dobiće se

$$Q_1^\Omega (\delta \xi_1 + \delta \xi_2) + Q_2^\Omega (s_1 \delta \xi_1 + s_2 \delta \xi_2) = (Q_1^\Omega) \delta \xi_1 + (Q_2^\Omega) \delta \xi_2,$$

odnosno

$$(Q_1^\Omega + s_1 Q_2^\Omega) \delta \xi_1 + (Q_1^\Omega + s_2 Q_2^\Omega) \delta \xi_2 = (Q_1^\Omega) \delta \xi_1 + (Q_2^\Omega) \delta \xi_2.$$

Upoređivanjem izraza uz iste varijacije dobija se

$$\begin{aligned} (Q_1^\Omega) &= Q_1^\Omega + s_1 Q_2^\Omega = (Q_1 + s_1 Q_2) \cos \Omega t, \\ (Q_2^\Omega) &= Q_1^\Omega + s_2 Q_2^\Omega = (Q_1 + s_2 Q_2) \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (5.121)$$

Treba ponoviti da brojevi s_1 i s_2 imaju iste vrijednosti kao i koeficijenti glavnih oblika oscilacija η_1 i η_2 , prema (5.43), pa vrijedi

$$s_1 = \eta_1 \text{ i } s_2 = \eta_2.$$

Diferencijalne jednačine prinudnih neprigušenih oscilacija materijalnog sistema sa dva stepena slobode izražene preko glavnih koordinata glase:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \omega_1^2 \xi_1 &= \frac{Q_1 + \eta_1 Q_2}{a_1} \cos \Omega t, \\ \ddot{\xi}_2 + \omega_2^2 \xi_2 &= \frac{Q_1 + \eta_2 Q_2}{a_2} \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (5.122)$$

Vidi se da su diferencijalne jednačine razdvojene, pa je određivanje partikularnih integrala svedeno na slučaj oscilacija sistema sa jednim stepenom slobode.

Ako je $\Omega = \omega_1$, u rezonanciji je samo prva glavna koordinata, pa se partikularno rješenje traži u obliku

$$(\xi_1)_p = K_1 t \cos \Omega t + K_2 t \sin \Omega t.$$

Iz početnih uslova odrediće se konstante:

$$K_1 = 0, \quad K_2 = \frac{Q_1 + \eta_1 Q_2}{2\Omega a_1}.$$

Na osnovu ovoga, partikularni integral prve jednačine (5.122) će biti

$$(\xi_1)_p = \frac{Q_1 + \eta_1 Q_2}{2\Omega a_1} t \sin \Omega t = \frac{Q_1 + \eta_1 Q_2}{2\Omega a_1} t \cos \left(\Omega t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (5.123)$$

Sličnim postupkom se može doći do partikularnog integrala druge jednačine u (5.122):

$$(\xi_2)_p = \hat{K}_1 \cos \Omega t + \hat{K}_2 \sin \Omega t = \frac{Q_1 + \eta_2 Q_2}{a_2 (\omega_2^2 - \Omega^2)} \cos \Omega t.$$

Zamjenom koordinata $(\xi_1)_p$ i $(\xi_2)_p$ u jednačine veze (5.118) i uvažavajući jednakosti $s_1 = \eta_1$ i $s_2 = \eta_2$ dobija se

$$(q_1)_p = (\xi_1)_p + (\xi_2)_p; \quad (q_2)_p = \eta_1 (\xi_1)_p + \eta_2 (\xi_2)_p. \quad (5.124)$$

Ovo bi, dakle, bila partikularna rješenja diferencijalne jednačine (5.112) za slučaj rezonancije prve glavne frekvencije $\Omega = \omega_1$. Na sličan način se postupa u slučaju rezonancije druge glavne frekvencije.

U slučaju kada sistem osciluje bez trenja, množitelj t u jednačini (5.123) izaziva neograničeno povećanje amplitude generalisanih koordinata.

Na osnovu jednačine (5.117) može se naći odnos amplituda prinudnih oscilacija:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{Q_2 (c_{11} - a_{11} \Omega^2) - Q_1 (c_{12} - a_{12} \Omega^2)}{Q_1 (c_{22} - a_{22} \Omega^2) - Q_2 (c_{12} - a_{12} \Omega^2)} = \frac{Q_2 \frac{c_{11} - a_{11} \Omega^2}{c_{12} - a_{12} \Omega^2} - Q_1}{Q_1 \frac{c_{22} - a_{22} \Omega^2}{c_{12} - a_{12} \Omega^2} - Q_2}. \quad (5.125)$$

U slučaju $\Omega = \omega_1$, iz jednačina (5.125), uključujući koeficijente η_1 i η_2 , dobija se:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{Q_2 \eta_1 + Q_1}{\frac{Q_1 + Q_2}{\eta_1}} = \eta_1. \quad (5.126)$$

U slučaju $\Omega = \omega_2$ vrijedi

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{Q_2 \eta_2 + Q_1}{\frac{Q_1 + Q_2}{\eta_2}} = \eta_2. \quad (5.127)$$

Iz odnosa (5.126) i (5.127) se vidi da su oblici prinudnih oscilacija sistema jednaki odgovarajućim odnosima glavnih oblika oscilacija sistema.

5.5.2. Slučaj kada je jedna od generalisanih sila jednaka nuli. Dinamički apsorber bez prigušenja

Posmatraće se slučaj kada je jedna od generalisanih poremećajnih sila jednaka nuli, naprimjer:

$$Q_1^\Omega = Q_1 \cos \Omega t \text{ i } Q_2^\Omega = 0.$$

Prema izrazima (5.115) amplitude prinudnih oscilacija postaju:

$$C_1 = \frac{Q_1(c_{22} - a_{22}\Omega^2)}{(c_{11} - a_{11}\Omega^2)(c_{22} - a_{22}\Omega^2) - (c_{12} - a_{12}\Omega^2)^2}, \quad (5.128)$$

$$C_2 = \frac{-Q_1(c_{12} - a_{12}\Omega^2)}{(c_{11} - a_{11}\Omega^2)(c_{22} - a_{22}\Omega^2) - (c_{12} - a_{12}\Omega^2)^2}.$$

U slučaju da je ispunjen uslov

$$c_{22} - a_{22}\Omega^2 = 0,$$

odnosno

$$\Omega^2 = \frac{c_{22}}{a_{22}}, \quad (5.129)$$

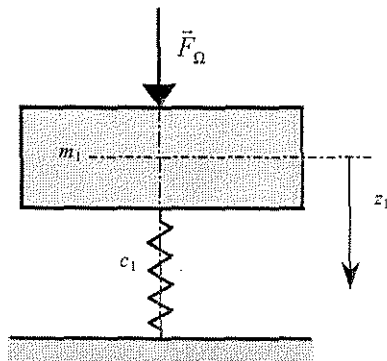
amplitude prinudnih oscilacija (5.128) će biti

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{Q_1}{c_{12} - a_{12}\Omega^2}. \quad (5.130)$$

Iz ovih odnosa se može uočiti da, kada je zadovoljen uslov (5.129), prinudne oscilacije koje odgovaraju prvoj generalisanoj koordinati neće postojati. Upravo na ovoj konstataciji je zasnovana teorija dinamičkog apsorbera bez prigušenja.

Dinamički apsorber bez prigušenja sa jednim stepenom slobode prikazan je na slici 5.14.

Na teret mase m_1 , koji je oslonjen na oprugu c_1 , djeluje periodična poremećajna sila



Sl. 5.14. Dinamički apsorber sa jednim stepenom slobode

$$F_\Omega = F_o \cos \Omega t.$$

Kinetička i potencijalna energija ovog sistema su:

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2, \quad E_p = \frac{1}{2} c_1 z_1^2. \quad (5.131)$$

Diferencijalna jednačina kretanja za postavljene problem glasi

$$\ddot{z}_1 + \frac{c_1}{m_1} z_1 = \frac{F_o}{m_1} \cos \Omega t, \quad (5.132)$$

pa je frekvencija slobodnih oscilacija sistema:

$$\omega = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}. \quad (5.133)$$

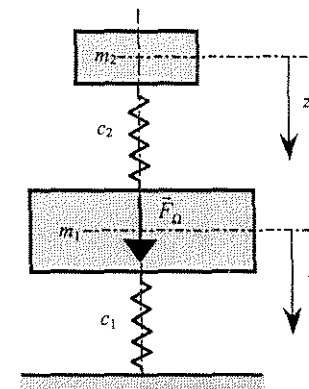
Zakon kretanja mase m_1 , odnosno njeno oscilovanje prinudnim putem glasi:

$$z_1 = \frac{F_o}{m_1(\omega^2 - \Omega^2)} \cos \Omega t. \quad (5.134)$$

Dinamički apsorber oscilacija bez prigušenja sa dva stepena slobode kretanja prikazan je na slici 5.15.

Na tijelo mase m_1 djeluje periodična promjenljiva sila $F_\Omega = F_o \cos \Omega t$. Prinudna kružna frekvencija Ω podesiće se tako da se ponište prinudne oscilacije tijela mase m_1 .

Diferencijalne jednačine prinudnih oscilacija sistema postaviće se u odnosu na statički položaj ravnoteže koordinata z_1 i z_2 . Kinetička i potencijalna energija sistema određene su izrazima:



Sl. 5.15. Dinamički apsorber sa dva stepena slobode

$$E_k = \frac{1}{2} (m_1 \dot{z}_1^2 + m_2 \dot{z}_2^2), \quad (5.135)$$

$$E_p = \frac{1}{2} [c_1 z_1^2 + c_2 (z_1 - z_2)^2].$$

Diferencijalne jednačine kretanja ovog sistema imaju oblik:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + (c_1 + c_2) z_1 - c_2 z_2 &= F_o \cos \Omega t \\ m_2 \ddot{z}_2 - c_2 z_1 + c_2 z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.136)$$

Ukoliko bude zadovoljen zahtjev da je

$$\Omega^2 = \frac{c_2}{m_2},$$

prinudne oscilacije ovog sistema će glasiti:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -\frac{F_o}{c_2} \cos \Omega t. \quad (5.137)$$

Na ovaj način, prema datim uslovima, prinudne oscilacije prve mase sistema neće postojati.

Unošenjem jednačine kretanja z_2 iz (5.137) u prvu diferencijalnu jednačinu dobija se

$$m_1 \ddot{z}_1 + (c_1 + c_2) \dot{z}_1 + \frac{F_0}{c_2} c_2 \cos \Omega t = F_0 \cos \Omega t,$$

odnosno

$$m_1 \ddot{z}_1 + (c_1 + c_2) \dot{z}_1 = 0. \quad (5.138)$$

Kako je pokazano, ova jednačina se svodi na homogenu diferencijalnu jednačinu.

Funkcionisanje dinamičkog apsorbera bez prigušenja sastoji se u djelovanju druge mase na prvu tako da dolazi do uravnoteženja prinudne sile, a što omogućava slobodne oscilacije prve mase sa kružnom frekvencijom

$$\omega_1^2 = \frac{c_1 + c_2}{m_1}. \quad (5.139)$$

Prema izrazu (5.130), parametre a_{12} i c_{12} treba birati tako da nazivnik bude dovoljno veliki, kako amplituda C_2

$$C_2 = \frac{Q_1}{c_{12} - a_{12} \Omega^2}.$$

ne bi bila velika.

5.5.3. Rezonantni dijagrami

Posmatraće se prinudne oscilacije materijalnog sistema sa dva stepena slobode u slučaju sljedećih vrijednosti generalisanih prinudnih sila:

$$Q_1^\Omega = Q_1 \cos \Omega t, \quad Q_2^\Omega = 0. \quad (5.140)$$

Polazeći od ovoga, a na osnovu jednačina (5.128), amplitude prinudnih oscilacija C_1 i C_2 za slučaj $Q_2^\Omega = 0$ iznose:

$$C_1 = C_1^d = \frac{Q_1 (c_{22} - a_{22} \Omega^2)}{D}; \quad C_2 = C_2^d = -\frac{Q_1 (c_{12} - a_{12} \Omega^2)}{D}, \quad (5.141)$$

gdje se gornji indeks "d" odnosi na dinamičke amplitude.

Nazivnik D u jednačinama (5.128) iznosi

$$D = (c_{11} - a_{11} \Omega^2)(c_{22} - a_{22} \Omega^2) - (c_{12} - a_{12} \Omega^2)^2, \quad (5.142)$$

gdje je Ω promjenljiva sa koeficijentima c_{ij} i a_{ij} istog oblika kao u frekventnoj jednačini $\Delta(\omega^2)$ slobodnih oscilacija sistema sa dva stepena slobode. Nule polinoma D biće ostvarene kada je $\Omega_1^2 = \omega_1^2$ i $\Omega_2^2 = \omega_2^2$.

Ukoliko je prinudna sila statička, $\Omega = 0$, dinamičke amplitude

$$C_1(\Omega^2) = C_1^d \quad \text{i} \quad C_2(\Omega^2) = C_2^d$$

postaju statičke i iznose

$$C_1(0) = C_1^{st} = \frac{Q_1 c_{22}}{c_{11} c_{22} - c_{12}^2}; \quad C_2(0) = C_2^{st} = -\frac{Q_1 c_{12}}{c_{11} c_{22} - c_{12}^2}. \quad (5.143)$$

Dinamički faktori pojačanja, tj. odnos između dinamičkih i statičkih amplituda prinudnih oscilacija za obje koordinate, napisat će se u funkciji od promjenljive Ω^2 :

$$\eta_1^d = \frac{C_1^d}{C_1^{st}} = \frac{(c_{22} - a_{22} \Omega^2)(c_{11} c_{22} - c_{12}^2)}{c_{22} D},$$

$$\eta_2^d = \frac{C_2^d}{C_2^{st}} = \frac{(c_{12} - a_{12} \Omega^2)(c_{11} c_{22} - c_{12}^2)}{c_{12} D}. \quad (5.144)$$

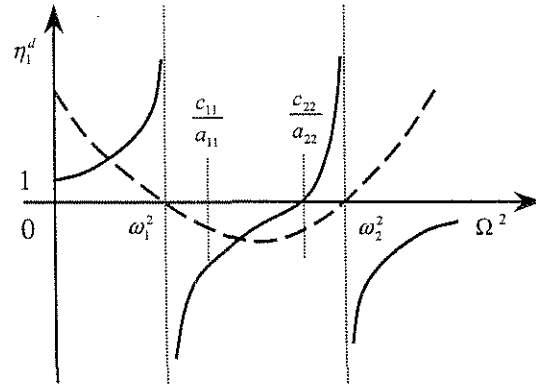
Dijagrami funkcija $\eta_1^d(\Omega^2)$ i $\eta_2^d(\Omega^2)$ nazivaju se rezonantni dijagrami i prikazani su na slikama 5.16 i 5.17. Na ovim dijagramima je frekventna bikvadratna forma D predstavljena isprekidanom linijom.

Za $\Omega = 0$, prema (5.142), slijedi da je $D = c_{11} c_{22} - c_{12}^2$, a $\eta_1^d = 1$

U intervalu $0 \leq \Omega \leq \omega_1^2$ je $\eta_1^d > 0$, a za $\Omega^2 \rightarrow \omega_1^2$ je $\eta_1^d \rightarrow \infty$.

U intervalu $\omega_1^2 \leq \Omega^2 \leq \omega_2^2$ vrijednost $D < 0$, izuzev za $\Omega^2 = \omega_1^2$ i $\Omega^2 = \omega_2^2$ kada je $D = 0$.

Za $\Omega^2 = \frac{c_{22}}{a_{22}}$, vrijednost faktora $\eta_1^d = 0$.



Sl. 5.16. Rezonantni dijagram za η_1^d

Za $\omega_1^2 < \Omega^2 < \frac{c_{22}}{a_{22}}$ biće $D < 0$ i $\eta_1^d < 0$, jer je po Silvesteru $c_{11} c_{22} - c_{12}^2 > 0$.

Kada $\omega_1^2 \leftarrow \Omega^2$ onda je $D = 0$, a $\eta_1^d \rightarrow -\infty$.

U intervalu $\frac{c_{22}}{a_{22}} < \Omega^2 < \omega_2^2$ će biti $D < 0$, ali uz negativan brojnik dobija se $\eta_1^d > 0$.

Kada $\Omega^2 \rightarrow \omega_2^2$ onda vrijednost $\eta_1^d \rightarrow +\infty$.

U intervalu $\omega_2^2 < \Omega^2 < \infty$ će biti $D > 0$, pa je brojnik negativan tj. $\eta_1^d < 0$.

Kada $\omega_2^2 \leftarrow \Omega^2$ dobija se $\eta_1^d \rightarrow -\infty$, a za $\Omega^2 \rightarrow \infty$, $\eta_1^d \rightarrow 0$.

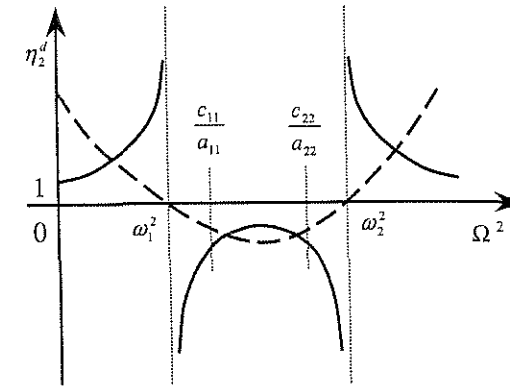
Na isti način kao u prethodnom slučaju može se konstruisati dijagram $\eta_2^d(\Omega)$, Sl. 5.17.

U slučaju linearnog oscilatora kao na slici 5.5 biće $a_{12} = 0$ i $c_{12} < 0$, pa funkcija η_2^d (5.144) dobija nešto jednostavniji oblik:

$$\eta_2^d = \frac{c_{11} c_{22} - c_{12}^2}{D}$$

U slučaju kada je $\Omega = 0$, vrijednost faktora $\eta_2^d = 1$. Kada $\Omega^2 \rightarrow \omega_1^2$, onda $\eta_2^d \rightarrow \infty$, dok u intervalu $\omega_1^2 < \Omega^2 < \omega_2^2$ vrijedi $\eta_2^d < 0$. Kada $\Omega^2 \rightarrow \omega_2^2$, funkcija $\eta_2^d \rightarrow -\infty$, a kada $\omega_1^2 \leftarrow \Omega^2$ vidi se da $\eta_2^d \rightarrow -\infty$.

U području $\omega_2^2 < \Omega^2 < +\infty$ će biti $\eta_2^d > 0$. Kada $\omega_2^2 \leftarrow \Omega^2$, onda funkcija $\eta_2^d \rightarrow +\infty$, a kada $\Omega^2 \rightarrow \infty$, vrijednosti faktora $\eta_2^d \rightarrow 0$.



Sl. 5.17. Rezonantni dijagram za η_2^d

Ukoliko je sistem inercijalan, odnosno ako je $a_{12} \neq 0$, dijagram funkcije η_2^d imaće drugi oblik.

Upoređujući međusobno prethodna dva dijagrama za η_1^d i η_2^d , može se uočiti sljedeće:

- Ukoliko oba dinamička faktora pojačanja imaju isti znak, tada i amplitude C_1^d i C_2^d imaju isti znak, pa će obje prinudne oscilacije biti sinfazne. Kada su različitog znaka, onda su prinudne oscilacije antifazne.
- Prinudne oscilacije koordinata q_1 i q_2 će biti u fazi sa prinudnom silom sa kružnom frekvencijom Ω^2 u intervalima u kojima su oba dinamička faktora η_1^d i η_2^d pozitivna, dok će u intervalima u kojima su oba dinamička faktora negativna prinudne oscilacije zaostajati za prinudnom silom za ugao π .

5.6. Prinudne prigušene oscilacije sa dva stepena slobode

Posmatraće se sistem materijalnih tačaka M_i , mase m_i , na koji pored elastičnih sila \vec{F}_{ei} djeluje sila otpora proporcionalna prvom stepenu brzine \vec{F}_{wi} i poremećajna sila $\vec{F}_{\Omega i}$, koja se tokom vremena mijenja po periodičnom zakonu:

$$F_{\Omega i} = F_o \cos \Omega t, \quad i = 1, \dots, n.$$

Na sistem djeluju holonomne, stacionarne zadržavajuće veze koje sistemu omogućuju dva stepena slobode. Položaj sistema je određen generalisanim koordinatama q_1 i q_2 .

Langranžove jednačine druge vrste u slučaju malih oscilacija i za date uslove imaju oblik:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial E_p}{\partial q_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_1} &= Q_1^\Omega, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} + \frac{\partial E_p}{\partial q_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_2} &= Q_2^\Omega. \end{aligned} \quad (5.145)$$

Ako se u gornje izraze uvrste kinetička i potencijalna energija sistema, kao i funkcija rasipanja, dobiće se diferencijalne jednačine kretanja oblika:

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + b_{11} \dot{q}_1 + b_{12} \dot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 &= Q_1 \cos \Omega t = Q_1^\Omega \\ a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + b_{21} \dot{q}_1 + b_{22} \dot{q}_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 &= Q_2 \cos \Omega t = Q_2^\Omega \end{aligned} \quad (5.146)$$

Problem se, dakle, svodi na rješavanje sistema nehomogenih linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Opšti integrali diferencijalnih jednačina (5.146) biće jednaki zbiru opštih integrala homogenih i partikularnih integrala nehomogenih jednačina:

$$\begin{aligned} q_1 &= (q_1)_h + (q_1)_p, \\ q_2 &= (q_2)_h + (q_2)_p. \end{aligned} \quad (5.147)$$

U prethodnom poglavlju izučavane su slobodne prigušene oscilacije koje se tokom vremena u datim uslovima brzo amortizuju i nestaju, pa nastaje režim samo prinudnog kretanja. Stoga će se proučavati samo prinudne prigušene oscilacije materijalnog sistema sa dva stepena slobode, odnosno samo partikularni integrali nehomogenih jednačina.

Partikularni integrali nehomogenih jednačina (5.146) potražiće se u obliku

$$\begin{aligned} (q_1)_p &= C_1 \cos(\Omega t - \varphi_1), \\ (q_2)_p &= C_2 \cos(\Omega t - \varphi_2) \end{aligned}$$

ili u obliku

$$\begin{aligned} (q_1)_p &= A_1 \cos \Omega t + B_1 \sin \Omega t, \\ (q_2)_p &= A_2 \cos \Omega t + B_2 \sin \Omega t, \end{aligned} \quad (5.148)$$

pri čemu su:

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1 \cos \varphi_1, \quad B_1 = C_1 \sin \varphi_1, \\ A_2 &= C_2 \cos \varphi_2, \quad B_2 = C_2 \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (5.149)$$

Iz (5.149) proizilazi da su konstante

$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{A_1^2 + B_1^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{B_1}{A_1}, \\ C_2 &= \sqrt{A_2^2 + B_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{B_2}{A_2}. \end{aligned} \quad (5.150)$$

Zamjenom partikularnih integrala i njihovih izvoda u diferencijalne jednačine kretanja dobiće se sistem od četiri algebarske jednačine u kojima su nepoznate A_1 , A_2 , B_1 i B_2 , koji glasi:

$$\begin{aligned} A_1(c_{11} - a_{11}\Omega^2) + B_1 b_{11}\Omega + A_2(c_{12} - a_{12}\Omega^2) + B_2 b_{12}\Omega &= Q_1, \\ -A_1 b_{11}\Omega + B_1(c_{11} - a_{11}\Omega^2) - A_2 b_{12}\Omega + B_2(c_{12} - a_{12}\Omega^2) &= 0, \\ A_1(c_{12} - a_{12}\Omega^2) + B_1 b_{12}\Omega + A_2(c_{22} - a_{22}\Omega^2) + B_2 b_{22}\Omega &= Q_2, \\ -A_1 b_{12}\Omega + B_1(c_{12} - a_{12}\Omega^2) - A_2 b_{22}\Omega + B_2(c_{22} - a_{22}\Omega^2) &= 0. \end{aligned} \quad (5.151)$$

Iz ovih jednačina određuju se veličine A_1 , A_2 , B_1 i B_2 , a na osnovu njih amplitude prinudnih oscilacija C_1 i C_2 , kao i uglovi faznih razlika φ_1 i φ_2 prema izrazima (5.150).

Na ovaj način partikularni integrali (5.148) će biti potpuno određeni, a samim tim i prinudne oscilacije posmatranog sistema.

Nepoznate veličine A_1 , A_2 , B_1 i B_2 najlakše se mogu dobiti preko eliminante sistema jednačina (5.151):

$$\Delta(\Omega^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}\Omega^2 & b_{11}\Omega & c_{12} - a_{12}\Omega^2 & b_{12}\Omega \\ -b_{11}\Omega & c_{11} - a_{11}\Omega^2 & -b_{12}\Omega & c_{12} - a_{12}\Omega^2 \\ c_{12} - a_{12}\Omega^2 & b_{12}\Omega & c_{22} - a_{22}\Omega^2 & b_{22}\Omega \\ -b_{12}\Omega & c_{12} - a_{12}\Omega^2 & -b_{22}\Omega & c_{22} - a_{22}\Omega^2 \end{vmatrix}. \quad (5.152)$$

Članovi koji se nalaze u ovoj determinanti su konstantni.

Ako se odgovarajući minori determinante (5.152) označe sa A_{jk} , gdje se indeks j odnosi na vrste, a indeks k na kolone determinante, mogu se dobiti odgovarajuće formule za određivanje veličina A_1 , A_2 , B_1 i B_2 :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\Delta(\Omega^2)} |Q_1 A_{11} + Q_2 A_{31}|, \\ B_1 &= \frac{1}{\Delta(\Omega^2)} |Q_1 A_{12} + Q_2 A_{32}|, \\ A_2 &= \frac{1}{\Delta(\Omega^2)} |Q_1 A_{13} + Q_2 A_{33}|, \\ B_2 &= \frac{1}{\Delta(\Omega^2)} |Q_1 A_{14} + Q_2 A_{34}|. \end{aligned} \quad (5.153)$$

Može se pokazati da determinanta $\Delta(\Omega^2)$ ne može biti jednaka nuli ni pri kakvim vrijednostima frekvencije Ω . Štaviše, ova determinanta je uvijek pozitivna.

5.6.1. Dinamički apsorber sa prigušenjem

U tehničkoj praksi se vrlo često javljaju pobudne sile koje vrlo štetno djeluju na ponašanje konstrukcije mašine. Da bi se prevazišli ovakvi nedostaci, pribjegava se raznim tehničkim rješenjima, kao naprimjer uravnoteženju masa, elastičnom oslanjanju konstrukcije, upotrebi prigušivača, itd.

Posmatrat će se primjer smanjenja oscilacija izazvanih pobudnim silama mašine kojoj je dodata odgovarajuća masa u funkciji prigušivača (apsorbera) oscilacija. Na taj način se dobija sistem sa dva stepena slobode, Sl. 5.18.

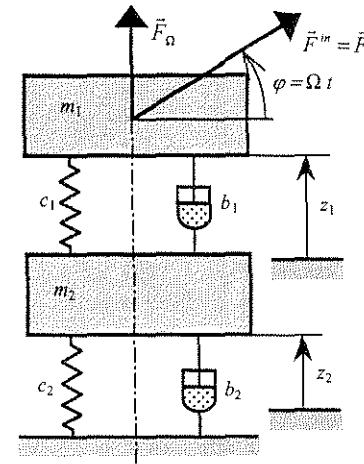
Kako je prikazano na slici 5.18, na mašini mase m_1 , koja može oscilovati u vertikalnom pravcu, nalazi se neuravnotežena obrtna masa, tako da se pri obrtanju ugaonom brzinom Ω javlja vertikalna sila F_Ω koja iznosi

$$F_\Omega = F_o \sin \Omega t, \quad (5.154)$$

pri čemu je F_o – inercijalna sila jednaka

$$F_o = m' e \Omega^2,$$

gdje su m' – neuravnotežena masa, a e – ekscentricitet.



Sl. 5.18. Dinamički apsorber sa prigušenjem

Mašina mase m_1 oslonjena je na temelj mase m_2 koji leži na podlozi krutosti c_2 i koeficijenta viskoznog prigušenja b_2 . Veza između mašine i temelja je elastična krutosti c_1 , a koeficijent viskoznog prigušenja je b_1 .

Za postavljeni primjer potrebno je odrediti prinudne oscilacije mase m_1 .

Za generalisane koordinate postavljenog zadatka usvojice se koordinate z_1 i z_2 , koje su ujedno i koordinate u odnosu na položaj statičke ravnoteže gdje je $E_p = 0$.

Izrazi za kinetičku i potencijalnu energiju, kao i funkciju rasipanja glase:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2, \\ E_p &= \frac{1}{2} c_1 (z_1 - z_2)^2 + \frac{1}{2} c_2 z_2^2, \\ \Phi &= \frac{1}{2} b_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2)^2 + \frac{1}{2} b_2 \dot{z}_2^2. \end{aligned} \quad (5.155)$$

Diferencijalne jednačine malih oscilacija postaviće se preko Lagranžovih jednačina II vrste:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + b_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + c_1 (z_1 - z_2) &= F_o \sin \Omega t, \\ m_2 \ddot{z}_2 - b_1 \dot{z}_1 + (b_1 + b_2) \dot{z}_2 - c_1 z_1 + (c_1 + c_2) z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.156)$$

Za proučavanje kretanja ovog sistema, iz već navedenih stavova, mjerodavne će biti prinudne prigušene oscilacije, pa će se partikularni integrali tražiti u pretpostavljenom obliku:

$$\begin{aligned} (z_1)_p &= A_1 \cos \Omega t + B_1 \sin \Omega t, \\ (z_2)_p &= A_2 \cos \Omega t + B_2 \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (5.157)$$

Diferenciranjem ovih funkcija po vremenu i zamjenom u (5.156), a zatim izjednačavanjem koeficijenata na lijevoj i desnoj strani uz funkcije $\sin \Omega t$ i $\cos \Omega t$, dolazi se do sistema jednačina, koji napisan u matricnom obliku glasi:

$$\begin{bmatrix} -m_1\Omega^2 + c_1 & -b_1\Omega & -c_1 & b_1\Omega \\ b_1\Omega & -m_1\Omega^2 + c_1 & -b_1\Omega & -c_1 \\ -c_1 & b_1\Omega & -m_2\Omega^2 + c_1 + c_2 & -(b_1 + b_2)\Omega \\ -b_1\Omega & -c_1 & (b_1 + b_2)\Omega & -m_2\Omega^2 + c_1 + c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ A_1 \\ B_2 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_o \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.158)$$

Konstante B_1 i A_1 iznose:

$$B_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad A_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (5.159)$$

gdje je Δ je determinanta sistema, a Δ_1 i Δ_2 su determinante dobijene iz matrice koeficijenata sistema jednačina (5.158) kada se prva, odnosno druga kolona, zamijene vektorom koji je na desnoj strani.

Amplituda prinudnih oscilacija mase m_1 iznosi

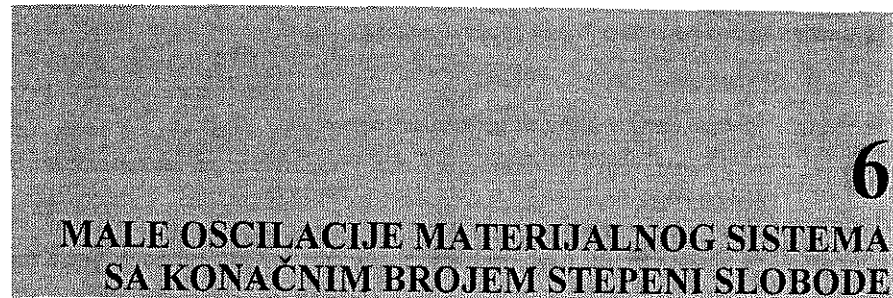
$$C_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}. \quad (5.160)$$

Potpuno odstranjivanje uticaja pobudne sile F_o na osnovnu masu bi se ostvarilo ukoliko bi amplituda C_1 bila jednaka nuli, a to znači da bi i konstante A_1 i B_1 trebale biti jednake nuli. Analizom jednačina (5.158) može se utvrditi da one nisu zadovoljene za $A_1 = B_1 = 0$. To je moguće jedino ako je i $b_1 = b_2 = 0$.

Postizanje optimalnih uslova prigušivanja prinudnih oscilacija svodi se na analizu i utvrđivanje ekstreme funkcije

$$C_1 = C_1(m_1, m_2, b_1, b_2, c_1, c_2, \Omega),$$

što je s obzirom na složenost funkcija Δ_1 , Δ_2 i Δ zahtjevan zadatak.



6.1. Slobodne neprigušene oscilacije

Posmatraće se vezani sistem materijalnih tačaka M_1, \dots, M_n , koji ima s stepeni slobode, a na koji djeluju elastične konzervativne sile $\vec{F}_{e1}, \dots, \vec{F}_{en}$.

Pretpostaviće se da su veze kojima je ograničeno kretanje sistema holonomne, stacionarne, zadržavajuće i idealne.

Položaj sistema određiće se putem s generalisanih koordinata $q_1, q_2, \dots, q_r, \dots, q_s$, koje se mjere u odnosu na ravnotežni položaj.

Sve generalisane koordinate q_r , $r = 1, 2, \dots, s$, i sve generalisane brzine \dot{q}_r , smatraće se malim veličinama prvog reda.

Kinetička i potencijalna energija određene su približnim izrazima:

$$\begin{aligned} E_k &\approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \\ E_p &\approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s c_{jk} q_j q_k, \end{aligned} \quad (6.1)$$

ili u matricnom obliku

$$\begin{aligned} E_k &\approx \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [a] \{\dot{q}\} \\ E_p &\approx \frac{1}{2} \{q\}^T [c] \{q\}, \end{aligned} \quad (6.1.a)$$

gdje su:

$\{q\}$ - vektor-kolona generalisanih koordinata (pomjeranja),

$\{q\}^T$ - vektor-vrsta generalisanih koordinata,

$\{\dot{q}\}$ i $\{\dot{q}\}^T$ - vektor kolona i vektor vrsta generalisanih brzina,

$[a]$ i $[c]$ - matrica inercijalnih i kvazielastičnih koeficijenata, odnosno matrica masa i matrica krutosti sistema.

Aproksimativne funkcije za E_k i E_p predstavljaju pozitivne definitne kvadratne forme, pa koeficijenti inercije a_{jk} i koeficijenti elastičnosti c_{jk} moraju zadovoljiti Silvesterove kriterijume stabilnosti.

Diferencijalne jednačine malih oscilacija ovog sistema postaviće se korištenjem Lagranžovih jednačina druge vrste za r -tu generalisanu koordinatu q_r , $r = 1, 2, \dots, s$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial E_p}{\partial q_r} = 0, \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad (6.2)$$

gdje su

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_r} = \sum_{k=1}^s a_{rk} \dot{q}_k \quad \text{i} \quad \frac{\partial E_p}{\partial q_r} = \sum_{k=1}^s c_{rk} q_k$$

Na osnovu ovoga dobija se sljedeći sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + \dots + a_{1s} \ddot{q}_s + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 + \dots + c_{1s} q_s &= 0 \\ a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + \dots + a_{2s} \ddot{q}_s + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 + \dots + c_{2s} q_s &= 0 \\ \dots & \dots \\ a_{s1} \ddot{q}_1 + a_{s2} \ddot{q}_2 + \dots + a_{ss} \ddot{q}_s + c_{s1} q_1 + c_{s2} q_2 + \dots + c_{ss} q_s &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Ove diferencijalne jednačine slobodnih neprigušenih oscilacija materijalnog sistema sa s stepeni slobode mogu se prikazati u kraćem obliku:

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk} \ddot{q}_k + c_{jk} q_k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (6.3.a)$$

ili u matricnom obliku

$$[a] \{\ddot{q}\} + [c] \{q\} = 0. \quad (6.3.b)$$

Opšti integrali ovih diferencijalnih jednačina (6.3) odrediće se na osnovu svojstva ovih jednačina da su opšti integrali jednaki zbiru partikularnih integrala:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1^{(1)} + q_1^{(2)} + \dots + q_1^{(r)} + \dots + q_1^{(s)} = \sum_{r=1}^s q_1^{(r)} \\ q_2 &= q_2^{(1)} + q_2^{(2)} + \dots + q_2^{(r)} + \dots + q_2^{(s)} = \sum_{r=1}^s q_2^{(r)} \\ \dots & \dots \\ q_s &= q_s^{(1)} + q_s^{(2)} + \dots + q_s^{(r)} + \dots + q_s^{(s)} = \sum_{r=1}^s q_s^{(r)} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Vidi se da se ovi partikularni integrali trebaju tražiti s puta. Tako naprimjer, r -ti partikularni integrali će se pretpostaviti u obliku:

$$\begin{aligned} q_1^{(r)} &= A_1^{(r)} \cos(\omega_r t - \alpha_r), \\ q_2^{(r)} &= A_2^{(r)} \cos(\omega_r t - \alpha_r), \\ \dots & \dots \\ q_s^{(r)} &= A_s^{(r)} \cos(\omega_r t - \alpha_r). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Već ranije kod slobodnih neprigušenih oscilacija sa dva stepena slobode obrazložena je svrha pojednostavljenja ovog postupka. Da se i u ovom slučaju partikularni integrali ne bi tražili s puta, uz nepotrebno ponavljanje cjelokupnog postupka, ali uz različite indekse, ovi partikularni integrali će se tražiti samo jedanput pretpostavljajući ih u obliku:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \cos(\omega t - \alpha), \\ q_2 &= A_2 \cos(\omega t - \alpha), \\ \dots & \dots \\ q_s &= A_s \cos(\omega t - \alpha). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Nakon određivanja partikularnih integrala (6.6), pri povratku na izraze (6.4) će se staviti indeksi koji odgovaraju određenim partikularnim integralima.

Ako se izrazi (6.6) diferenciraju dva puta dobiće se:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= -A_1 \omega^2 \cos(\omega t - \alpha), \\ \ddot{q}_2 &= -A_2 \omega^2 \cos(\omega t - \alpha), \\ \dots & \dots \\ \ddot{q}_s &= -A_s \omega^2 \cos(\omega t - \alpha). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Uvrštavanjem (6.7) u (6.3), dobiće se sistem homogenih algebarskih jednačina:

$$\begin{aligned} (c_{11} - a_{11} \omega^2) A_1 + (c_{12} - a_{12} \omega^2) A_2 + \dots + (c_{1s} - a_{1s} \omega^2) A_s &= 0 \\ (c_{21} - a_{21} \omega^2) A_1 + (c_{22} - a_{22} \omega^2) A_2 + \dots + (c_{2s} - a_{2s} \omega^2) A_s &= 0 \\ \dots & \dots \\ (c_{s1} - a_{s1} \omega^2) A_1 + (c_{s2} - a_{s2} \omega^2) A_2 + \dots + (c_{ss} - a_{ss} \omega^2) A_s &= 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

koje napisane u matricnom obliku glase

$$[H] \{A\} = 0 \quad (6.8.a)$$

Ovdje je sa $[H]$ označena matrica koeficijenata sistema, a sa $\{A\}$ matrica amplituda. Matrica $[H]$ iznosi

$$[H] = \begin{bmatrix} c_{11} - a_{11} \omega^2 & c_{12} - a_{12} \omega^2 & \dots & c_{1s} - a_{1s} \omega^2 \\ c_{21} - a_{21} \omega^2 & c_{22} - a_{22} \omega^2 & \dots & c_{2s} - a_{2s} \omega^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} - a_{s1} \omega^2 & c_{s2} - a_{s2} \omega^2 & \dots & c_{ss} - a_{ss} \omega^2 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

odnosno

$$[H] = [C] - \omega^2 [a],$$

a matrica amplituda

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_s \end{Bmatrix} \quad (6.9.a)$$

Iz jednačina (6.8) treba odrediti nepoznate $A_1, \dots, A_r, \dots, A_s$.

Jednačine (6.8) očito imaju trivijalno rješenje $A_1 = A_2 = \dots = A_r = \dots = A_s = 0$. Ovo rješenje nema nikakve važnosti s gledišta teorije oscilacija, jer sistem u tom slučaju uopšte ne bi vršio oscilatorno kretanje.

Homogene algebarske jednačine (6.8) mogu imati i rješenja $A_1, \dots, A_r, \dots, A_s$ različita od nule, ukoliko je determinanta sistema (6.8) jednaka nuli, tj. ako je

$$\det [H] = \Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11} \omega^2 & c_{12} - a_{12} \omega^2 & \dots & c_{1s} - a_{1s} \omega^2 \\ c_{21} - a_{21} \omega^2 & c_{22} - a_{22} \omega^2 & \dots & c_{2s} - a_{2s} \omega^2 \\ c_{31} - a_{31} \omega^2 & c_{32} - a_{32} \omega^2 & \dots & c_{3s} - a_{3s} \omega^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} - a_{s1} \omega^2 & c_{s2} - a_{s2} \omega^2 & \dots & c_{ss} - a_{ss} \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.10)$$

Jednačina (6.10) se zove frekventna ili karakteristična jednačina $2s$ -tog reda po ω , odnosno s -tog reda po λ , gdje je $\lambda = \omega^2$.

U opštem slučaju frekventna jednačina ima s korjenova:

$$\lambda_1 = \omega_1^2, \lambda_2 = \omega_2^2, \dots, \lambda_r = \omega_r^2, \dots, \lambda_s = \omega_s^2.$$

Može se dokazati da su svi korijeni frekventne jednačine (6.10) realni i pozitivni. Zbog složenosti postupka, ova tvrdnja će se bez dokazivanja prihvatiti kao tačna.

Ukoliko su korijeni jednačine (6.10) realni i pozitivni, time je u isto vrijeme dokazano da partikularni integrali imaju pretpostavljeni oblik (6.6).

Korijeni frekventne jednačine (6.10) mogu biti:

- a) svi različiti,
- b) neki od njih višestruki,
- c) neki od njih jednaki nuli.

Prvo će se analizirati najopštiji slučaj naveden pod (a) i neka vrijedi:

$$\omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots < \omega_s^2, \quad \omega_1 \neq 0 \quad (6.11)$$

Veličine $\omega_1, \dots, \omega_r, \dots, \omega_s$ predstavljaju kružne frekvencije slobodnih neprigušenih oscilacija materijalnog sistema.

Najniža frekvencija ω_1 se često naziva osnovnom kružnom frekvencijom, a prva glavna oscilacija sistema koja ima tu kružnu frekvenciju naziva se osnovnom oscilacijom. Razlog za ovo leži u tome što oscilacije sa najnižom frekvencijom imaju primarni značaj u rezultujućem kretanju materijalnog sistema.

Kružne frekvencije $\omega_1, \dots, \omega_s$, koje se još nazivaju i sopstvenim frekvencijama, zavise od materijalnih karakteristika sistema koji osciluje, odnosno od inercijalnih a_{ij} i elastičnih koeficijenata c_{ij} .

Jedan od najvećih problema pri rješavanju zadataka malih oscilacija sistema sa konačnim brojem stepeni slobode jeste rješavanje frekventne jednačine. Za proizvoljan stepen karakteristične jednačine ne postoje analitička rješenja u zatvorenom obliku. Stoga su razvijene određene numeričke metode pomoću kojih se korijeni određuju aproksimativno sa dovoljnom tačnošću.

Uz pretpostavku da je frekventna jednačina riješena, tj. da su dobijene vrijednosti ω_r^2 , $r = 1, \dots, s$, uvrštavanjem jednog od tih rješenja u sistem (6.8) može se utvrditi da je dobijeno $(s - 1)$ linearno nezavisnih jednačina. Zbog toga će se iz ukupnog sistema jednačina (6.8) izostaviti jedna jednačina, naprimjer prva, smatrajući je prekobrojnou. Ostale jednačine se tada mogu podijeliti sa A_1 i transformisati tako da se na desnu stranu prebace slobodni članovi, a na lijevoj ostave članovi koji sadrže količnike $A_2/A_1, \dots, A_s/A_1$. Na ovaj način se dobija sistem nezavisnih jednačina

$$\begin{aligned} (c_{22} - a_{22}\omega^2) \frac{A_2}{A_1} + (c_{23} - a_{23}\omega^2) \frac{A_3}{A_1} + \dots + (c_{2s} - a_{2s}\omega^2) \frac{A_s}{A_1} &= -(c_{21} - a_{21}\omega^2) \\ (c_{32} - a_{32}\omega^2) \frac{A_2}{A_1} + (c_{33} - a_{33}\omega^2) \frac{A_3}{A_1} + \dots + (c_{3s} - a_{3s}\omega^2) \frac{A_s}{A_1} &= -(c_{31} - a_{31}\omega^2) \\ \dots &\dots \dots \\ (c_{s2} - a_{s2}\omega^2) \frac{A_2}{A_1} + (c_{s3} - a_{s3}\omega^2) \frac{A_3}{A_1} + \dots + (c_{ss} - a_{ss}\omega^2) \frac{A_s}{A_1} &= -(c_{s1} - a_{s1}\omega^2), \end{aligned} \quad (6.12)$$

odakle se može odrediti ukupno $(s - 1)$ nepoznatih odnosa amplituda

$$\frac{A_2}{A_1}, \frac{A_3}{A_1}, \dots, \frac{A_s}{A_1}. \quad (6.13)$$

Ako se minori frekventne jednačine (6.10), koji odgovaraju članovima u prvoj vrsti, obilježe sa

$$\Delta_{11}(\omega^2), \Delta_{12}(\omega^2), \dots, \Delta_{1r}(\omega^2), \dots, \Delta_{1s}(\omega^2), \quad (6.14)$$

onda će nepoznati odnosi biti određeni izrazima:

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{A_1} &= \frac{q_2}{q_1} = \frac{\Delta_{12}(\omega^2)}{\Delta_{11}(\omega^2)} = \eta_{21}, \quad \frac{A_3}{A_1} = \frac{q_3}{q_1} = \frac{\Delta_{13}(\omega^2)}{\Delta_{11}(\omega^2)} = \eta_{31}, \dots \\ \dots, \frac{A_r}{A_1} &= \frac{q_r}{q_1} = \frac{\Delta_{1r}(\omega^2)}{\Delta_{11}(\omega^2)} = \eta_{r1}, \dots, \frac{A_s}{A_1} = \frac{q_s}{q_1} = \frac{\Delta_{1s}(\omega^2)}{\Delta_{11}(\omega^2)} = \eta_{s1}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Izbor prekobrojne jednačine je proizvoljan, pošto dobijeni rezultat ne zavisi od toga.

I sva ostala rješenja u daljem izlaganju izvest će se pod pretpostavkom da je kao prekobrojna odbačena prva jednačina sistema (6.8), tj. da su nepoznati odnosi (6.13) određeni izrazima (6.15).

Iz sistema jednačina (6.12) mogu se odrediti međusobni odnosi $A_2/A_1, A_3/A_1, \dots, A_s/A_1$, koji zavise od odabranog korijena $\omega = \omega_r$, itd.

Pri izračunavanju odnosa A_r/A_1 , $r = 1, \dots, s$, pomoću izraza (6.15), treba imati u vidu da pojedini minori frekventne jednačine (6.10) koji se nalaze u brojničku i nazivniku jednačina (6.15) mogu biti pozitivni ili negativni zavisno od mjesta posmatranog člana u determinanti.

Tako naprimjer, minor koji odgovara članu frekventne jednačine (6.10) koji se nalazi u j -toj vrsti i k -toj koloni imaće znak $(-1)^{j+k}$.

Koeficijenti $\Delta_{11}(\omega^2) = K_{11}$, $\Delta_{12}(\omega^2) = K_{12}$, ..., $\Delta_{1s}(\omega^2) = K_{1s}$ su kofaktori (minori) koji odgovaraju prvoj vrsti matrice sistema $[H]$.

Pojedini kofaktori $\Delta_{11}(\omega^2) = K_{11}$, ..., $\Delta_{1s}(\omega^2) = K_{1s}$ određeni su izrazima:

$$\begin{aligned} K_{11} &= (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} (c_{22} - a_{22}\omega^2) & (c_{23} - a_{23}\omega^2) & \dots & (c_{2s} - a_{2s}\omega^2) \\ (c_{32} - a_{32}\omega^2) & (c_{33} - a_{33}\omega^2) & \dots & (c_{3s} - a_{3s}\omega^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (c_{s2} - a_{s2}\omega^2) & (c_{s3} - a_{s3}\omega^2) & \dots & (c_{ss} - a_{ss}\omega^2) \end{vmatrix}, \\ K_{12} &= (-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} (c_{21} - a_{21}\omega^2) & (c_{23} - a_{23}\omega^2) & \dots & (c_{2s} - a_{2s}\omega^2) \\ (c_{31} - a_{31}\omega^2) & (c_{33} - a_{33}\omega^2) & \dots & (c_{3s} - a_{3s}\omega^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (c_{s1} - a_{s1}\omega^2) & (c_{s3} - a_{s3}\omega^2) & \dots & (c_{ss} - a_{ss}\omega^2) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$K_{1s} = (-1)^{(1+s)} \begin{vmatrix} (c_{21} - a_{21}\omega^2) & (c_{22} - a_{22}\omega^2) & \dots & (c_{2,s-1} - a_{2,s-1}\omega^2) \\ (c_{31} - a_{31}\omega^2) & (c_{33} - a_{33}\omega^2) & \dots & (c_{3,s-1} - a_{3,s-1}\omega^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (c_{s1} - a_{s1}\omega^2) & (c_{s2} - a_{s2}\omega^2) & \dots & (c_{s,s-1} - a_{s,s-1}\omega^2) \end{vmatrix} \quad (6.16)$$

Svaki od ovih kofaktora (minora) zavisi od koeficijenata inercije sistema a_{jk} , koeficijenata elastičnosti c_{jk} i frekvencije glavnih oscilacija sistema ω_r^2 , $r = 1, 2, \dots, s$.

Pošto sistem ima s glavnih oscilacija, to znači da se svaki od ovih minora, kao i svaki od odnosa (6.15), može izračunati za svaku od frekvencija glavnih oscilacija sistema.

U tom slučaju bi odnosi (6.15) za bilo koju frekvenciju glavnih oscilacija sistema, naprimjer r -tu ω_r^2 , bili određeni izrazima:

$$\begin{aligned} \frac{A_2^{(r)}}{A_1^{(r)}} &= \frac{q_2^{(r)}}{q_1^{(r)}} = \frac{\Delta_{12}(\omega_r^2)}{\Delta_{11}(\omega_r^2)} = \eta_{21}^{(r)} = \frac{K_{12}^{(r)}}{K_{11}^{(r)}}, \dots \\ \dots, \frac{A_r^{(r)}}{A_1^{(r)}} &= \frac{q_r^{(r)}}{q_1^{(r)}} = \frac{\Delta_{1r}(\omega_r^2)}{\Delta_{11}(\omega_r^2)} = \eta_{r1}^{(r)} = \frac{K_{1r}^{(r)}}{K_{11}^{(r)}}, \quad r = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Izrazi (6.17) određuju koeficijente r -tog glavnog oblika oscilacija sistema. Ovi koeficijenti predstavljaju fizičke konstante koje zavise od dinamičkih parametara, a ne zavise od početnih uslova kretanja. Ima ih ukupno $(s-1)s$.

Iz jednačina (6.17) dobija se da je:

$$A_2^{(r)} = \eta_{21}^{(r)} A_1^{(r)}, \quad A_3^{(r)} = \eta_{31}^{(r)} A_1^{(r)}, \dots, \quad A_r^{(r)} = \eta_{r1}^{(r)} A_1^{(r)}, \dots, \quad A_s^{(r)} = \eta_{s1}^{(r)} A_1^{(r)}. \quad (6.18)$$

Tako naprimjer, r -ti partikularni integrali (6.5), $r = 1, 2, \dots, s$, koji ujedno određuju i r -tu glavnu oscilaciju sistema, bit će određeni izrazima:

$$\begin{aligned} q_1^{(r)} &= A_1^{(r)} \cos(\omega_r t - \alpha_r), \\ q_2^{(r)} &= \eta_{21}^{(r)} A_1^{(r)} \cos(\omega_r t - \alpha_r), \\ \dots & \dots \dots \dots \\ q_s^{(r)} &= \eta_{s1}^{(r)} A_1^{(r)} \cos(\omega_r t - \alpha_r). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Iz izraza (6.19) mogu se uočiti svojstva glavnih oscilacija:

- Ako sistem vrši jednu od svojih glavnih oscilacija, na primjer r -tu, $r = 1, 2, \dots, s$, onda se sve generalisane koordinate sistema $q_1^{(r)}, q_2^{(r)}, \dots, q_s^{(r)}$, prema izrazu (6.19), mijenjaju po harmonijskim zakonima. Sve generalisane koordinate mijenjaju se sinhrono, tj. istovremeno imaju nulte i ekstremne vrijednosti.
- Pri svakoj od glavnih oscilacija sistema, amplitude oscilacija stoje u konstantnim odnosima $\eta_{21}^{(r)}, \dots, \eta_{s1}^{(r)}$, koji ne zavise od početnih uslova, već samo od dinamičkih parametara sistema.

Pri glavnim oscilacijama sistema, dvije koordinate su u fazi ako su koeficijenti glavnih oscilacija $\eta > 0$, a nisu u fazi ako su $\eta < 0$.

Sada će se ponovo razmotriti diferencijalne jednačine (6.3), odnosno njihovi opšti integrali (6.4), koji su određeni izrazima:

$$\begin{aligned} q_1 &= \sum_{r=1}^s q_1^{(r)} = \sum_{r=1}^s A_1^{(r)} \cos(\omega_r t - \alpha_r), \\ q_2 &= \sum_{r=1}^s q_2^{(r)} = \sum_{r=1}^s \eta_{21}^{(r)} A_1^{(r)} \cos(\omega_r t - \alpha_r), \\ \dots & \dots \dots \dots \\ q_s &= \sum_{r=1}^s q_s^{(r)} = \sum_{r=1}^s \eta_{s1}^{(r)} A_1^{(r)} \cos(\omega_r t - \alpha_r). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Jednačine (6.20) se mogu prikazati u razvijenom obliku:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1^{(1)} \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + A_1^{(2)} \cos(\omega_2 t - \alpha_2) + \dots + A_1^{(s)} \cos(\omega_s t - \alpha_s), \\ q_2 &= \eta_{21}^{(1)} A_1^{(1)} \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + \eta_{21}^{(2)} A_1^{(2)} \cos(\omega_2 t - \alpha_2) + \dots + \eta_{21}^{(s)} A_1^{(s)} \cos(\omega_s t - \alpha_s), \\ \dots & \dots \dots \dots \\ q_s &= \eta_{s1}^{(1)} A_1^{(1)} \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + \eta_{s1}^{(2)} A_1^{(2)} \cos(\omega_2 t - \alpha_2) + \dots + \eta_{s1}^{(s)} A_1^{(s)} \cos(\omega_s t - \alpha_s). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Iz gornjih jednačina se može uočiti da se zakon kretanja za bilo koju od generalisanih koordinata dobija superponiranjem prostih harmonijskih kretanja. Međutim, rezultujuće složeno kretanje za bilo koju od glavnih koordinata q_r , $r = 1, \dots, s$, u opštem slučaju neće biti periodično, ali će, kako je ranije rečeno, imati oscilatorni karakter.

Periodično kretanje može se ostvariti pod uslovom da su frekvencije glavnih oscilacija sistema $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$ djeljive bez ostatka.

U opštem integralu (6.21) pojavljuje se $2s$ integracionih konstanti:

$$A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, \dots, A_1^{(r)}, \dots, A_1^{(s)}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_s, \quad (6.22)$$

koje se određuju iz početnih uslova kretanja

$$t=0 \begin{cases} q_1 = (q_1)_0, q_2 = (q_2)_0, \dots, q_r = (q_r)_0, \dots, q_s = (q_s)_0 \\ \dot{q}_1 = (\dot{q}_1)_0, \dot{q}_2 = (\dot{q}_2)_0, \dots, \dot{q}_r = (\dot{q}_r)_0, \dots, \dot{q}_s = (\dot{q}_s)_0 \end{cases}, \quad (6.23)$$

tj. iz sistema jednačina

$$(q_r)_0 = \sum_{s=1}^s \eta_{r1}^{(r)} A_1^{(r)} \cos \alpha_r, \quad r = 1, \dots, s, \quad (6.24)$$

$$(\dot{q}_r)_0 = -\sum_{s=1}^s \omega_r \eta_{r1}^{(r)} A_1^{(r)} \sin \alpha_r, \quad r = 1, \dots, s.$$

Kako je već rečeno, za proučavanje slobodnih neprigušenih oscilacija materijalnog sistema treba prvo odrediti frekvencije glavnih oscilacija $\omega_1^2, \dots, \omega_s^2$ iz frekventne jednačine, zatim koeficijente glavnih oscilacija $\eta_{21}^{(r)}, \dots, \eta_{s1}^{(r)}$ i na kraju definisati integracione konstante amplituda $A_1^{(1)}, \dots, A_1^{(s)}$ i uglove faznih razlika $\alpha_1, \dots, \alpha_s$.

Gore primijenjeni postupak je dosta složen i obiman za rješavanje zadataka sa većim brojem stepeni slobode (tri i više), pa se u ovom slučaju pribjegava korištenju matičnog računara.

Kako u praktičnoj primjeni i analizi najveći značaj imaju prva (osnovna) frekvencija sistema i prva (osnovna) glavna oscilacija sistema, rješavanje zadataka se često ograničava na nalaženje samo ovih veličina.

6.1.1. Glavne koordinate

Glavne koordinate ξ_1, \dots, ξ_s , kako je ranije navedeno, uvode se s ciljem pojednostavljenja postupka računanja oscilatornog kretanja.

Da bi se postupak prelaska sa običnih koordinata q_1, \dots, q_s na glavne koordinate ξ_1, \dots, ξ_s uspješno proveo, potrebno je da svi inercijalni članovi a_{jk} ($j \neq k$) u izrazima za kinetičku energiju i svi elastični koeficijenti c_{jk} ($j \neq k$) kod potencijalne energije budu jednaki nuli. Drugim riječima, potrebno je izvršiti transformaciju kvadratnih formi.

Izrazi za kinetičku i potencijalnu energiju (6.1) transformišu se u oblike:

$$E_k^* = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^s a_r \dot{\xi}_r^2 = \frac{1}{2} (a_1 \dot{\xi}_1^2 + \dots + a_r \dot{\xi}_r^2 + \dots + a_s \dot{\xi}_s^2) \quad (6.25)$$

$$E_p^* = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^s c_r \xi_r^2 = \frac{1}{2} (c_1 \xi_1^2 + \dots + c_r \xi_r^2 + \dots + c_s \xi_s^2).$$

Ovdje su a_r i c_r novi koeficijenti inercije, odnosno elastičnosti, koji se razlikuju od starih a_{jk} i c_{jk} .

Koordinate ξ_1, \dots, ξ_s koje zadovoljavaju uslove (6.25) nazivaju se glavnim koordinatama.

Prelaskom sa običnih koordinata na glavne koordinate, sistem diferencijalnih jednačina (6.3) koji je spregnut preko koordinata i ubrzanja transformisaće se u sistem međusobno nezavisnih koordinata, tj. razdvojenih diferencijalnih jednačina izraženih preko glavnih koordinata u obliku:

$$\begin{aligned} a_1 \ddot{\xi}_1 + c_1 \xi_1 &= 0, \\ a_2 \ddot{\xi}_2 + c_2 \xi_2 &= 0, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_r \ddot{\xi}_r + c_r \xi_r &= 0, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_s \ddot{\xi}_s + c_s \xi_s &= 0. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Ako se riješe diferencijalne jednačine (6.26), dobiće se zakoni promjene glavnih koordinata u obliku:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1), \\ \xi_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2), \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_r &= A_r \cos(\omega_r t - \alpha_r), \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_s &= A_s \cos(\omega_s t - \alpha_s). \end{aligned} \tag{6.27}$$

Iz izraza (6.27) se vidi da se svaka od glavnih koordinata mijenja po harmonijskom (periodičnom) zakonu.

Integracione konstante A_r i α_r , $r = 1, \dots, s$, u izrazima (6.27) mogu se odrediti iz početnih uslova kretanja:

$$t = 0 \left\{ \begin{aligned} \xi_r &= (\xi_r)_0, \\ \dot{\xi}_r &= (\dot{\xi}_r)_0, \end{aligned} \right. \quad r = 1, \dots, s. \tag{6.28}$$

Kružne frekvencije ω_r^2 ovih periodičnih kretanja mogu se dobiti iz odnosa:

$$\omega_r^2 = \frac{c_r}{a_r}, \quad r = 1, \dots, s, \tag{6.29}$$

gdje su c_r i a_r novi koeficijenti elastičnosti, odnosno inercije. Ovi koeficijenti se mogu izraziti preko odgovarajućih starih koeficijenata c_{jk} i a_{jk} ako se poznaju frekvencije glavnih oscilacija sistema ω_r^2 , $r = 1, \dots, s$.

Izvođenje izraza preko kojih se može izvršiti prelazak sa starih na nove koeficijente neće se ovdje prikazivati zbog složenosti postupka. Ovdje treba samo napomenuti da se ovaj postupak može sprovesti samo ukoliko je zadovoljen takozvani uslov ortogonalnosti glavnih oscilacija sistema.

Frekvencije oscilacija sistema su, kako je ranije rečeno, fizičke konstante koje ne zavise od izbora parametara preko kojih se problem rješava. Skup ili spektar kružnih frekvencija sistema slobodnih oscilacija $\omega_1^2, \dots, \omega_s^2$ može se odrediti na više načina: rješavanjem frekventne jednačine (6.10), diferencijalnih jednačina (6.26) ili preko formule (6.29).

Polazeći od izraza (6.27), opšti integrali (6.21) mogu se napisati u obliku:

$$\begin{aligned} q_1 &= \sum_{r=1}^s \xi_r = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_r + \dots + \xi_s, \\ q_2 &= \sum_{r=1}^s \eta_{21}^{(r)} \xi_r = \eta_{21}^{(1)} \xi_1 + \eta_{21}^{(2)} \xi_2 + \dots + \eta_{21}^{(r)} \xi_r + \dots + \eta_{21}^{(s)} \xi_s, \\ &\dots\dots\dots \\ q_s &= \sum_{r=1}^s \eta_{s21}^{(r)} \xi_r = \eta_{s1}^{(1)} \xi_1 + \eta_{s1}^{(2)} \xi_2 + \dots + \eta_{s1}^{(r)} \xi_r + \dots + \eta_{s1}^{(s)} \xi_s. \end{aligned} \tag{6.30}$$

Na ovaj način se složena kretanja (6.21), koja su opisana koordinatama q_1, \dots, q_s i koja u opštem smislu nisu periodična, mogu razložiti u niz prostih periodičnih kretanja (6.27) opisanih glavnim koordinatama ξ_1, \dots, ξ_s . Kod proučavanja prigušenih oscilacija materijalnog sistema i kod analize rezonancije prinudnih oscilacija sistema obično se koriste glavne koordinate.

6.1.2. Torzione oscilacije reduktora

Vrlo čest slučaj slobodnih neprigušenih oscilacija sistema sa više stepeni slobode kretanja su torzione oscilacije vratila reduktora.

Kako je poznato, reduktori mogu imati veći broj zupčanika (diskova), čiji broj zavisi od prenosnog odnosa.

Sistem reduktora sa n diskova može se uvijek redukovati na sistem koji predstavlja takozvani slobodni torzioni lanac sa $(n + 1)$ - im diskom.

U tom smislu ovdje će se pokazati principi na kojima se zasniva navedena redukcija.

Prema slici 6.1.a reduktor se sastoji od vratila I i II na koja su navučena po dva diska.

Moment inercije prvog diska za vratilo I iznosi J_1 , dok moment inercije drugog diska za vratilo II iznosi J_3 .

Par zupčanika u zahvatu imaju momente inercije J_{21} za vratilo I i J_{22} za vratilo II.

Krutosti na uvijanje vratila I i II su c_1 i c_2 , dok su uglovi uvijanja vratila I na mjestu diska θ_1 , a na mjestu zupčanika θ_{21} .

Na isti način prema slici 6.1.a ugaona uvijanja na vratilu II su θ_{22} i θ_3 .

Brojevi zubaca zupčanika na vratilu I i II obilježiće se sa z_1 i z_2 , njihovi prečnici sa D_1 i D_2 , a poluprečnici sa R_1 i R_2 . Ugaone brzine vratila I i II obilježiće se sa ω_1 i ω_2 .

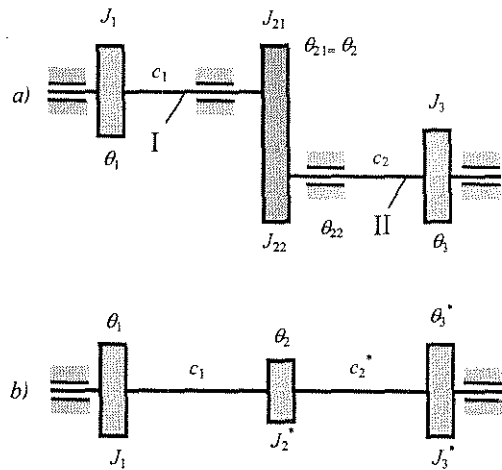
Prenosni odnos parova zupčanika u zahvatu će iznositi

$$i = \frac{D_2}{D_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{1}{k}, \quad (6.31)$$

gdje je k – koeficijent redukcije.

Na osnovu izraza (6.31) može se napisati da je ugaona brzina drugog vratila

$$\omega_2 = -k\omega_1. \quad (6.32)$$



Sl. 6.1. Reduktor. Torzioni lanac sa tri diska

Kinetička i potencijalna energija sistema, prikazanog na slici 6.1.a, iznose:

$$E_k = \frac{1}{2} [J_1 \dot{\theta}_1^2 + J_{21} \dot{\theta}_{21}^2 + J_{22} \dot{\theta}_{22}^2 + J_3 \dot{\theta}_3^2]$$

$$E_p = \frac{1}{2} [c_1 (\theta_{21} - \theta_1)^2 + c_2 (\theta_3 - \theta_{22})^2]. \quad (6.33)$$

Kako je $\theta_{22} = -k\theta_{21} = -k\theta_2$ jer je $\theta_{21} = \theta_2$, to će izrazi za E_k i E_p dobiti oblik:

$$E_k = \frac{1}{2} [J_1 \dot{\theta}_1^2 + (J_{21} + k^2 J_{22}) \dot{\theta}_2^2 + J_3 \dot{\theta}_3^2]$$

$$E_p = \frac{1}{2} [c_1 (\theta_2 - \theta_1)^2 + c_2 (\theta_3 + k\theta_2)^2]. \quad (6.34)$$

Stoga se sistem prikazan na Sl. 6.1.a može svesti na slobodni torzioni lanac sa tri diska prikazan na Sl. 6.1.b. U tom smislu potrebno je da se na vratilo I redukuje moment inercije drugog diska J_3 , a zatim ugaon uvijanja θ_3 i krutost c_2 vratila II.

Da bi se izvršile ove redukcije, mora biti zadovoljen uslov da kinetička i potencijalna energija pri ovoj redukciji ostanu nepromijenjene.

Redukovane veličine obilježiće se sa: J_3^* , θ_3^* , c_2^* .

Navedeni uslov će dati odnose:

$$E_k^* = \frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_3^2 = \frac{1}{2} J_3^* (\dot{\theta}_3^*)^2,$$

$$E_p^* = \frac{1}{2} c_2 \theta_3^2 = \frac{1}{2} c_2^* (\theta_3^*)^2. \quad (6.35)$$

Uvede li se redukovani ugaon $\theta_3^* = -\frac{1}{k}\theta_3$, uslovi (6.35) će biti zadovoljeni ako su

$$J_3^* = k^2 J_3, \quad c_2^* = k^2 c_2,$$

pa je tada:

$$E_k^* = \frac{1}{2} J_3^* (\dot{\theta}_3^*)^2 = \frac{1}{2} k^2 J_3 \frac{\dot{\theta}_3^2}{k^2} = \frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_3^2,$$

$$E_p^* = \frac{1}{2} c_2^* (\theta_3^*)^2 = \frac{1}{2} k^2 c_2 \frac{\theta_3^2}{k^2} = \frac{1}{2} c_2 \theta_3^2. \quad (6.36)$$

Redukovani moment inercije oba para zupčanika na osu vratila I iznosi

$$J_2^* = J_{21} + k^2 J_{22}. \quad (6.37)$$

Za sistem prikazan na Sl.6.1.b se sada mogu napisati izrazi za E_k i E_p kako slijedi:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \left[J_1 \dot{\theta}_1^2 + J_2^* \dot{\theta}_2^2 + J_3^* (\dot{\theta}_3^*)^2 \right], \\ E_p &= \frac{1}{2} \left[c_1 (\theta_2 - \theta_1)^2 + c_2^* (\theta_3^* - \theta_2)^2 \right], \end{aligned} \quad (6.38)$$

jer je

$$c_2 (\theta_3 + k \theta_2)^2 = c_2 (-k \theta_3^* + k \theta_2)^2 = c_2^* (\theta_3^* - \theta_2)^2.$$

Diferencijalne jednačine kretanja za slobodni torzioni lanac sa tri stepena slobode, koji je prikazan na Sl. 6.1.b, glasiće:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 - c_1 (\theta_2 - \theta_1) &= 0, \\ J_2^* \ddot{\theta}_2 + c_1 (\theta_2 - \theta_1) - c_2^* (\theta_3^* - \theta_2) &= 0, \\ J_3^* \ddot{\theta}_3^* + c_2^* (\theta_3^* - \theta_2) &= 0, \end{aligned} \quad (6.39)$$

gdje su θ_1 , θ_2 i θ_3^* generalisane koordinate, pri čemu važi odnos

$$\theta_3^* = -\frac{1}{k} \theta_3.$$

Partikularna rješenja jednačina (6.39) potražiće se u obliku:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= A_1 \cos(\omega t - \alpha), \\ \theta_2 &= A_2 \cos(\omega t - \alpha), \\ \theta_3 &= A_3 \cos(\omega t - \alpha). \end{aligned} \quad (6.40)$$

Uvrsti li se (6.40) u (6.39), dobiće se sistem jednačina

$$\begin{aligned} A_1 (c_1 - \omega^2 J_1) - A_2 c_1 &= 0, \\ -A_1 c_1 + A_2 (c_1 + c_2^* - J_2^* \omega^2) - A_3 c_2^* &= 0, \\ -A_2 c_2^* + A_3 (c_2^* - J_3^* \omega^2) &= 0. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Iz uslova da eliminanta sistema (6.41) mora biti jednaka nuli, dobiće se frekventna jednačina:

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} (c_1 - J_1 \omega^2) & -c_1 & 0 \\ -c_1 & (c_1 + c_2^* - J_2^* \omega^2) & -c_2^* \\ 0 & -c_2^* & (c_2^* - J_3^* \omega^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (6.42)$$

ili u razvijenom obliku

$$\Delta(\omega^2) = \omega^4 - \left(\frac{J_1 + J_2^*}{J_1 J_2^*} c_1 + \frac{J_2^* + J_3^*}{J_2^* J_3^*} c_2^* \right) \omega^2 + \frac{J_1 + J_2^* + J_3^*}{J_1 J_2^* J_3^*} c_1 c_2^* = 0.$$

Sabiranjem diferencijalnih jednačina (6.39) dobija se

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + J_2^* \ddot{\theta}_2 + J_3^* \ddot{\theta}_3 = 0, \quad (6.43)$$

a nakon integracije

$$J_1 \dot{\theta}_1 + J_2^* \dot{\theta}_2 + J_3^* \dot{\theta}_3 = \text{const}. \quad (6.44)$$

Iz uslova (6.44) se vidi da je kinetički moment sistema konstantan, pa je prvi korijen frekventne jednačine jednak nuli, $\omega_1^2 = 0$, a ostala dva korijena ω_2^2 i ω_3^2 se mogu odrediti iz jednačine (6.42).

6.1.3. Primjeri

Primjer br. 1.

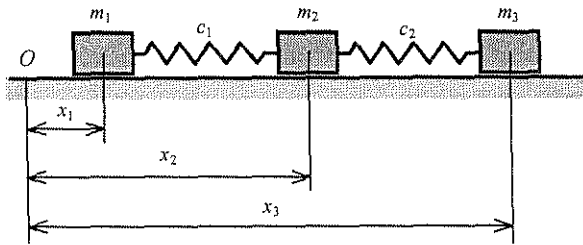
Materijalne tačke masa m_1 , m_2 i m_3 , koje su vezane su oprugama krutosti c_1 i c_2 , mogu da se kreću pravolinijski po horizontalnoj idealno glatkoj ravni, Sl.6.2. Napisati frekventnu jednačinu i odrediti kružne frekvencije slobodnih oscilacija sistema, ako je $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $c_1 = c_2 = c$.

Rješenje:

Za generalisane koordinate odabrat će se apsolutne koordinate x_1 , x_2 i x_3 . Kinetička i potencijalna energija sistema pri malim oscilacijama glase:

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2, \quad (a)$$

$$E_p = \frac{1}{2} c_1 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} c_2 (x_3 - x_2)^2,$$



Sl. 6.2. Oscilatorni sistem sa tri mase

pa matrice koeficijentata inercije i krutosti iznose

$$[a] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \quad [c] = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}. \quad (b)$$

Frekventna jednačina u ovom slučaju je

$$\Delta(\omega^2) = \det [H] = \begin{vmatrix} c_1 - m_1 \omega^2 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 - m_2 \omega^2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 - m_3 \omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (c)$$

ili u razvijenom obliku

$$(c_1 - m_1 \omega^2) [(c_1 + c_2 - m_2 \omega^2)(c_2 - m_3 \omega^2) - c_2^2] - c_1^2 (c_2 - m_3 \omega^2) = 0.$$

Poslije kraćeg sređivanja, ova jednačina postaje:

$$\omega^2 \{-m_1 m_2 m_3 \omega^4 + [m_2 (c_1 m_3 + c_2 m_1) + m_1 m_3 (c_1 + c_2)] \omega^2 - (m_1 + m_2 + m_3) c_1 c_2\} = 0.$$

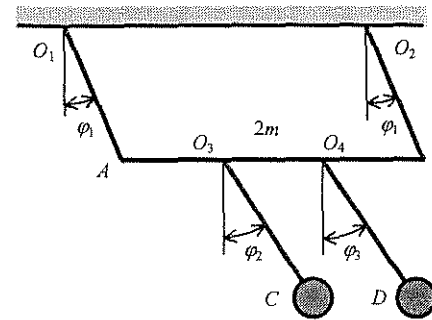
Očigledno je da je jedno rješenje $\omega_1 = 0$, a druga dva su rješenja kvadratne jednačine po ω^2 , koja se dobija izjednačavanjem izraza u velikoj zagradi prethodne jednačine sa nulom.

U slučaju zadatih vrijednosti $m_1 = m_2 = m_3 = m$ i $c_1 = c_2 = c$, rješenja iznose:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{3 \frac{c}{m}}. \quad (d)$$

Primjer br. 2.

Određiti frekvencije slobodnih oscilacija sistema u vertikalnoj ravni, prikazanog na slici 6.3. Masa homogenog štapa AB je $2m$, mase tereta C i D su m . Dužina konaca je $AO_1 = BO_2 = CO_3 = DO_4 = l$. Masu konaca zanemariti.



Sl. 6.3. Oscilacije homogenog štapa

Rješenje:

Sistem ima tri stepena slobode kretanja ($s = 3$), a generalisane koordinate koje karakterišu sistem su:

$$q_1 = \phi_1, \quad q_2 = \phi_2, \quad q_3 = \phi_3. \quad (a)$$

Kinetička energija malih oscilacija sistema je:

$$E_k = \frac{1}{2} [2ml^2 \dot{\phi}_1^2 + ml^2 (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)^2 + ml^2 (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_3)^2],$$

ili

$$E_k = \frac{ml^2}{2} (4\dot{\phi}_1^2 + 2\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_2^2 + 2\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_3 + \dot{\phi}_3^2). \quad (b)$$

Matrica koeficijenta inercije je:

$$[a] = \begin{bmatrix} 4ml^2 & ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 & 0 \\ ml^2 & 0 & ml^2 \end{bmatrix} = ml^2 \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (c)$$

Potencijalna energija sistema je

$$E_p = 2mgl(1 - \cos \varphi_1) + mgl(2 - \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) + mgl(2 - \cos \varphi_1 - \cos \varphi_3),$$

odnosno za slučaj malih oscilacija kada je $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ dobija se

$$E_p = \frac{1}{2} mgl (4\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2), \quad (d)$$

pa matrica koeficijenta krutosti ima oblik

$$[c] = mgl \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (e)$$

Diferencijalne jednačine slobodnih oscilacija posmatranog sistema u matricnom obliku glase

$$l \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{\ddot{\varphi}\} + g \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{\varphi\} = 0 \quad (f)$$

ili u razvijenom obliku

$$\begin{aligned} 4l\ddot{\varphi}_1 + l\ddot{\varphi}_2 + l\ddot{\varphi}_3 + 4g\varphi_1 &= 0, \\ l\ddot{\varphi}_1 + l\ddot{\varphi}_2 + g\varphi_2 &= 0, \\ l\ddot{\varphi}_1 + l\ddot{\varphi}_3 + g\varphi_3 &= 0. \end{aligned} \quad (g)$$

Uvrštavanjem u ove jednačine rješenja $\varphi_j = A_j \sin(\omega t + \beta)$, $j = 1, 2, 3$, dobija se sljedeći sistem algebarskih jednačina:

$$\begin{aligned} 4(l\omega^2 - g)A_1 + l\omega^2 A_2 + l\omega^2 A_3 &= 0, \\ l\omega^2 A_1 + (l\omega^2 - g)A_2 &= 0, \\ l\omega^2 A_1 + (l\omega^2 - g)A_3 &= 0. \end{aligned} \quad (h)$$

Frekventna jednačina dobijena iz gornjeg sistema ima oblik

$$(l\omega^2 - g)[4(l\omega^2 - g)^2 - 2l^2\omega^4] = 0. \quad (i)$$

Njenim rješavanjem dobijaju se vrijednosti frekvencija:

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}(2 - \sqrt{2}), \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_3^2 = \frac{g}{l}(2 + \sqrt{2}). \quad (j)$$

Ako se žele naći forme glavnih oscilacija koje odgovaraju nadenim frekvencijama, potražiti će se prvo odnosi amplituda

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{l\omega^2}{l\omega^2 - g}, \quad \frac{A_3}{A_1} = -\frac{l\omega^2}{l\omega^2 - g}.$$

Za prvu glavnu oscilaciju se dobije

$$\eta_1^{(1)} = 1, \quad \eta_2^{(1)} = \eta_3^{(1)} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = 1,41,$$

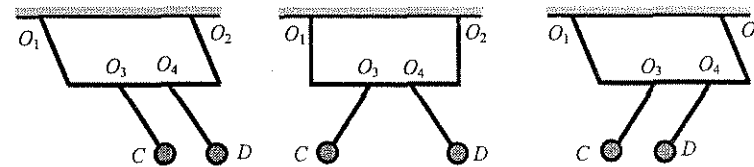
za drugu glavnu oscilaciju

$$A_1 = 0, \quad \frac{A_2}{A_3} = -1,$$

a za treću glavnu oscilaciju

$$\eta_1^{(3)} = 1, \quad \eta_2^{(3)} = \eta_3^{(3)} = -\frac{(2 + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + 1} = -1,41.$$

Glavne oscilacije imaju forme prikazane na Sl. 6.4.



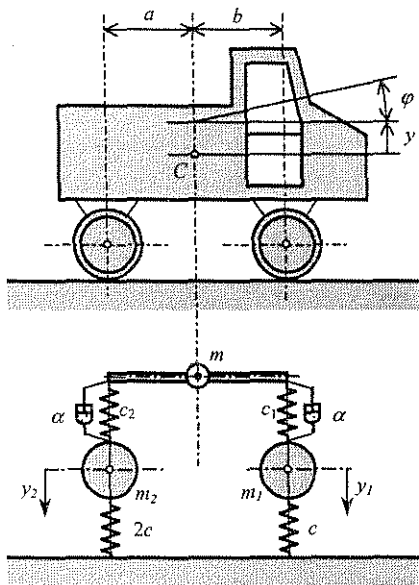
Sl. 6.4. Oblici glavnih oscilacija sistema

Primjer br. 3.

Formirati diferencijalne jednačine malih slobodnih oscilacija karoserije automobila, koja ima masu m i moment inercije u odnosu na centralnu poprečnu osu J_o , Sl. 6.5. Mase prednjeg i

zadnjeg mosta sa točkovima su m_1 i m_2 , krutost gibnjeva prednjeg i zadnjeg vješanja c_1 i c_2 , krutost guma prednjih i zadnjih točkova c i $2c$.

Napomena: Smatrati da u gibnjevima postoji trenje s koeficijentom trenja α .



Sl. 6.5. Model vozila sa četiri stepena slobode

Za tako definisane generalisane koordinate, energije oscilatornog sistema i funkcija disipacije sistema iznose:

$$E_k = \frac{1}{2} J_o \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2,$$

$$E_p = \frac{1}{2} c_1 (y + b\varphi - y_1)^2 + \frac{1}{2} c_2 (y - a\varphi - y_2)^2 + \frac{1}{2} c y_1^2 + \frac{1}{2} 2c y_2^2,$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \alpha (\dot{y} + b\dot{\varphi} - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} \alpha (\dot{y} - a\dot{\varphi} - \dot{y}_2)^2.$$

(a)

Lagranžova jednačina II vrste glasi u ovom slučaju

Rješenje:

Uočljivo je da dati sistem ima četiri stepena slobode.

Kao generalisane koordinate usvojiti će se:

y - vertikalno pomjeranje centra masa karoserije,

φ - ugao zakretanja karoserije,

y_1 - vertikalno pomjeranje prednjeg mosta,

y_2 - vertikalno pomjeranje zadnjeg mosta.

pa kada se primijeni na generalisane koordinate φ i y daje sljedeće diferencijalne jednačine:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0, \quad (b)$$

$$J_o \ddot{\varphi} + \alpha b (\dot{y} + b\dot{\varphi} - \dot{y}_1) - \alpha a (\dot{y} - a\dot{\varphi} - \dot{y}_2) + c_1 b (y + b\varphi - y_1) - c_2 a (y - a\varphi - y_2) = 0,$$

$$J_o \ddot{\varphi} + \alpha (a^2 + b^2) \dot{\varphi} + (c_2 a^2 + c_1 b^2) \varphi + \alpha (b - a) \dot{y} + (c_1 b - c_2 a) y - \alpha b \dot{y}_1 - c_1 b y_1 + \alpha a \dot{y}_2 + c_2 y_2 a = 0,$$

(c)

$$m \ddot{y} + \alpha (\dot{y} + b\dot{\varphi} - \dot{y}_1) + \alpha (\dot{y} - a\dot{\varphi} - \dot{y}_2) + c_1 (y + b\varphi - y_1) + c_2 (y - a\varphi - y_2) = 0,$$

$$m \ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + (c_1 + c_2) y + \alpha (b - a) \dot{\varphi} + (c_1 b - c_2 a) \varphi - \alpha \dot{y}_1 - c_1 y_1 - \alpha \dot{y}_2 - c_2 y_2 = 0,$$

a za generalisane koordinate y_1 i y_2 daje:

$$m_1 \ddot{y}_1 - \alpha (\dot{y} + b\dot{\varphi} - \dot{y}_1) - c_1 (y + b\varphi - y_1) + c y_1 = 0,$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + \alpha \dot{y}_1 + (c + c) y_1 - \alpha b \dot{\varphi} - c_1 b \varphi - \alpha \dot{y} - c_1 y = 0,$$

(d)

$$m_2 \ddot{y}_2 - \alpha (\dot{y} - a\dot{\varphi} - \dot{y}_2) - c_2 (y - a\varphi - y_2) + 2c y_2 = 0,$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + \alpha \dot{y}_2 + (2c + c_2) y_2 + \alpha a \dot{\varphi} + c_2 a \varphi - \alpha \dot{y} - c_2 y = 0.$$

Primjer br. 4.

Torzioni sistem prikazan na Sl. 6.6 sastoji se od diskova 1, 2 i 3, čiji su momenti inercije za osu obrtanja J , $2J$ i $3J$. Vratilo za koje su diskovi kruto vezani ima prečnik d i zanemarljivu masu. Odrediti:

- a) kružne frekvencije slobodnih oscilacija diskova,
 - b) koeficijente glavnih oblika oscilovanja diskova i nacrtati glavne oblike.
- Dužine stoje u odnosu $L_1 = L_2 = L$. Trenje zanemariti.

Rješenje:

a) Sistem ima tri stepena slobode kretanja i za generalisane koordinate će se usvojiti uglovi obrtanja diskova φ_1 , φ_2 i φ_3 .

Lagranžove jednačine druge vrste za ovaj sistem glase ($i = 1, 2, 3$):

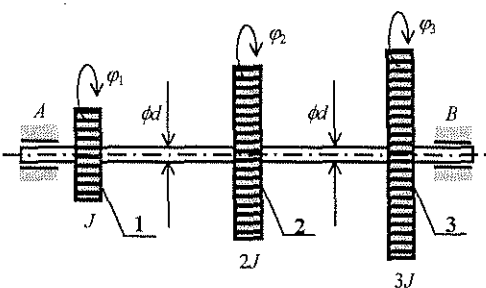
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_i} + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi_i} = 0, \quad (\text{a})$$

Kinetička energija sistema je:

$$E_k = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}_1^2 + J \dot{\varphi}_2^2 + \frac{3}{2} J \dot{\varphi}_3^2. \quad (\text{b})$$

Potencijalna energija sistema sastoji se od potencijalne energije elastičnih vratila dužine L_1 i L_2 . Pod pretpostavkom da je $\varphi_3 > \varphi_2 > \varphi_1$, potencijalna energija je

$$E_p = \frac{1}{2} c_1 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} c_2 (\varphi_3 - \varphi_2)^2. \quad (\text{c})$$



Sl. 6.6. Torzioni sistem sa tri stepena slobode

S obzirom na to da su diskovi naglavljeni na vratilo koje po cijeloj dužini ima isti poprečni presjek, a i dužine L_1 , L_2 i L su jednake, to su i krutosti jednake i iznose

$$c = c_1 = c_2 = \frac{GI_o}{L},$$

gdje je I_o polarni moment inercije poprečnog presjeka, a G modul klizanja materijala vratila.

Ako se odgovarajući izvodi izraza (b) i (c) uvrste u (a), dobiće se diferencijalne jednačine oscilovanja sistema:

$$\begin{aligned} J \ddot{\varphi}_1 - c(\varphi_2 - \varphi_1) &= 0, \\ 2J \ddot{\varphi}_2 + c(\varphi_2 - \varphi_1) - c(\varphi_3 - \varphi_2) &= 0, \\ 3J \ddot{\varphi}_3 + c(\varphi_3 - \varphi_2) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{d})$$

Pretpostavi li se rješenje sistema (d) u obliku

$$\varphi_i = A_i \cos \omega t,$$

te potraže drugi izvodi $\dot{\varphi}_i$ i zajedno sa φ_i uvrste u jednačine (d), dobiće se sistem algebarskih jednačina po nepoznatim konstantama A_1 , A_2 i A_3 :

$$\begin{aligned} (c - J\omega^2) A_1 - c A_2 &= 0, \\ -c A_1 + (2c - 2J\omega^2) A_2 - c A_3 &= 0, \\ -c A_2 + (c - 3J\omega^2) A_3 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{e})$$

Da bi sistem (e) imao i drugih rješenja osim trivijalnih ($A_1 = A_2 = A_3 = 0$), determinanta sistema mora biti jednaka nuli:

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} c - J\omega^2 & -c & 0 \\ -c & 2c - 2J\omega^2 & -c \\ 0 & -c & c - 3J\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{f})$$

Razvije li se determinanta (f), dobiće se frekventna jednačina sistema u obliku

$$\omega^2 \left[\omega^4 - \frac{7c}{3J} \omega^2 + \left(\frac{c}{J} \right)^2 \right] = 0. \quad (\text{g})$$

Iz jednačine (g) se dobijaju frekvencije oscilovanja sistema:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0,755 \sqrt{\frac{c}{J}}, \quad \omega_3 = 1,33 \sqrt{\frac{c}{J}}. \quad (\text{h})$$

b) Koeficijenti oscilovanja su definisani kao odnosi amplituda

$$\eta_{21} = \frac{A_2}{A_1}, \quad \eta_{31} = \frac{A_3}{A_1}.$$

Iz prve i treće jednačine sistema (e) dobije se

$$\eta_{21} = \frac{c - J\omega^2}{c}, \quad \eta_{32} = \frac{c}{c - 3J\omega^2}, \quad (\text{i})$$

odnosno

$$\eta_{32} = \frac{A_3}{A_2} = \frac{A_3/A_1}{A_2/A_1} = \frac{\eta_{31}}{\eta_{21}},$$

odakle je $\eta_{31} = \eta_{32} \eta_{21}$, te je

$$\eta_{31} = \frac{c - J\omega^2}{c - 3J\omega^2} \quad (j)$$

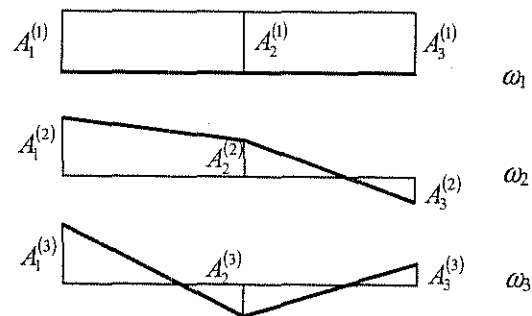
Za ranije izračunate frekvencije (ω) koeficijenti glavnog oblika oscilovanja su:

$$\text{za } \omega_1, \quad \eta_{21}^{(1)} = \eta_{31}^{(1)} = 1,$$

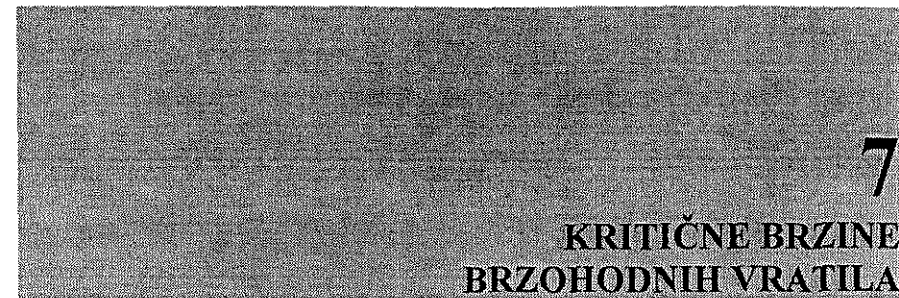
$$\text{za } \omega_2, \quad \eta_{21}^{(2)} = 0,435, \quad \eta_{31}^{(2)} = -0,615,$$

$$\text{za } \omega_3, \quad \eta_{21}^{(3)} = -0,77, \quad \eta_{31}^{(3)} = 0,179.$$

Na slici 6.7 prikazani su glavni oblici oscilovanja ovog torzionog sistema.



Sl. 6.7. Glavni oblici oscilovanja torzionog sistema



U tehničkoj praksi je od posebnog značaja utvrđivanje brzine obrtanja vratila pri kojoj nastaje pojava rezonancije.

Kao što je poznato, pri izvjesnim povećanim brzinama obrtanja, vratila mogu postati dinamički nestabilna usljed pojave velikih amplituda oscilovanja prouzrokovanih rezonancijom.

Broj obrtaja vratila pri kojem su amplitude oscilovanja nedopušteno velike, tj. kada nastaje pojava rezonancije, naziva se kritičnim brojem obrtaja vratila.

U ovom području istraživanja postoji veliki broj postupaka na osnovu kojih se može odrediti kritični broj obrtaja brzohodnih vratila sa zadovoljavajućom tačnošću.

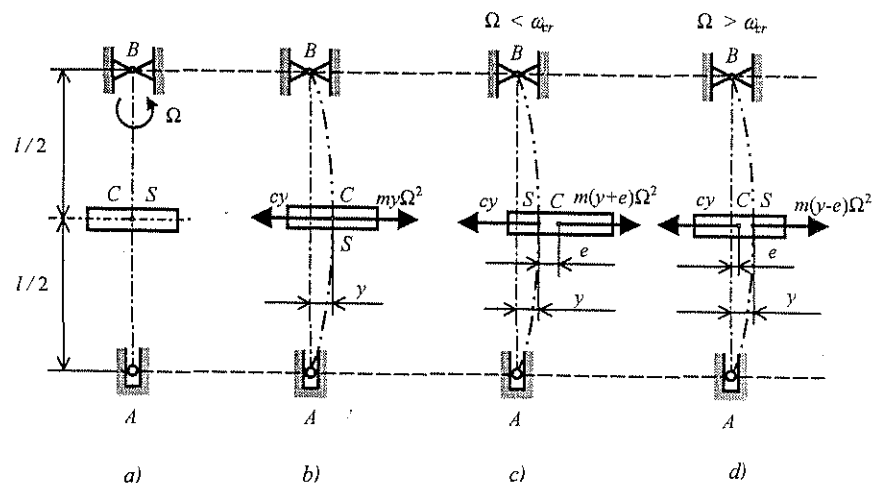
7.1. Vertikalno vratilo sa jednim diskom

Na slici 7.1 prikazana su vertikalna vratila sa jednim diskom. Masa diska je m , tačka C je središte homogenog diska, a tačka S središte srednjeg presjeka vratila. Zanimariti će se uticaj sopstvene težine vratila i diska, čime će se postavljene zadatke znatno pojednostaviti.

Na slici 7.1.a prikazano je vertikalno vratilo sa idealno centriranim diskom.

Ukoliko se vratilo obrće oko vertikalne ose AB ugaonom brzinom Ω zauzeće položaj kao na Sl. 7.1.b. Ugib vratila usljed djelovanja centrifugalne sile $m\gamma\Omega^2$ označiće se sa y , pa elastična sila na vratilu iznosi $c\gamma$. Ovdje je c krutost pri savijanju vratila i predstavlja veličinu sile pri kojoj bi se vratilo pomjerilo za jedinicu dužine. U posmatranom slučaju krutost c se može izračunati na osnovu izraza

$$c = \frac{EI \cdot 48}{l^3} \quad (7.1)$$



Sl. 7.1. Vertikalna vratila izložena kritičnim obrtajima

Centrifugalna sila diska prouzrokovana ugibom vratila nalazi se u ravnoteži sa elastičnom silom, pa vrijedi odnos

$$my\Omega^2 = cy. \quad (7.2)$$

Posljedica ovakvog stanja pri rotaciji vratila ugaonom brzinom Ω su bočne oscilacije vratila, pri čemu diferencijalna jednačina kretanja središta diska C ima oblik

$$m\ddot{y} = -cy, \quad (7.3)$$

odnosno

$$m\ddot{y} + cy = 0.$$

Kružna frekvencija diska u ovom slučaju iznosi

$$\omega^2 = \frac{c}{m}, \quad (7.4)$$

dok je prema jednačini (7.2) ugaona brzina vratila

$$\Omega^2 = \frac{c}{m}. \quad (7.5)$$

Dakle, Ω je ugaona brzina vratila pri kojoj nastaju bočne oscilacije vratila. Jednakost $\omega = \Omega$ daje broj obrtaja vratila pri kojem nastaje rezonancija, tj. kritična ugaona brzina obrtanja vratila iznosi

$$\omega_{cr}^2 = \frac{c}{m}. \quad (7.6)$$

Na osnovu prethodnog može se reći da je kritična brzina obrtanja vratila ona ugaona brzina pri kojoj se broj obrtaja vratila u sekundi poklapa sa kružnom frekvencijom slobodnih bočnih oscilacija, $\Omega = \omega = \omega_{cr}$.

U slučaju kada je središte C ekscentričnog diska na udaljenosti e od centra vratila S , prema Sl. 7.1.c, iz uslova ravnoteže slijedi:

$$m(y+e)\Omega^2 = cy$$

$$y = \frac{me\Omega^2}{c - m\Omega^2} = \frac{e}{\frac{c}{m\Omega^2} - 1}$$

$$y = \frac{e}{\left(\frac{\omega_{cr}}{\Omega}\right)^2 - 1}. \quad (7.7)$$

Ovaj izraz pokazuje moguća odstupanja u bočnom pravcu vratila. Ukoliko se Ω približava vrijednosti ω_{cr} , tada će y težiti beskonačnosti, odnosno nastupit će rezonancija pri kojoj će vratilo imati nedopušteno veliku amplitudu oscilovanja.

Eksperimentalno je utvrđeno da će se amplituda oscilovanja smanjiti ako se broj obrtaja vratila povećava iznad ω_{cr} , odnosno ako je

$$\Omega > \omega_{cr}. \quad (7.8)$$

U ovom slučaju dolazi do stabilizacije obrtanja vratila koje je u početku bilo nestabilno. Ova pojava se naziva De Lavalov paradoks. Eksperimenti su pokazali da se u ovom slučaju središte diska C nalazi između deformisanog vratila i pravca AB , Sl. 7.1.d.

Na osnovu uslova ravnoteže za ovo dinamičko stanje se može dobiti da je

$$m(y-e)\Omega^2 = cy,$$

$$y = \frac{e}{1 - \left(\frac{\omega_{cr}}{\Omega}\right)^2} \quad (7.9)$$

Iz gornjeg izraza (7.9) se vidi da kada $\omega_{cr}/\Omega \rightarrow 0$, odnosno kada se ugaona brzina vratila povećava dolazi do smanjenja amplitude, tj. $y \rightarrow e$.

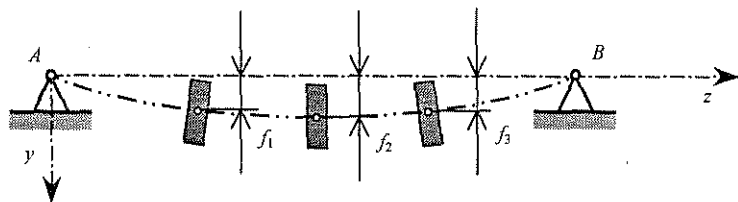
7.2. Horizontalno vratilo sa više diskova. Obrazac Morleja

Sada će se predstaviti metoda koja spada u klasu energetske metode, a prema kojoj je, ukoliko sistem vrši oscilatorno kretanje, maksimalna kinetička energija jednaka maksimalnoj potencijalnoj energiji

$$E_{k\max} = E_{p\max} \quad (7.10)$$

Pri izvođenju Morlejevog obrasca pretpostavlja se sljedeće:

- masa vratila je u poređenju sa masama diskova zanemarljivo mala, ali se i ona može uzeti u obzir ako je potrebno;
- vratilo pri svom najnižem obliku oscilovanja, tj. u slučaju oscilovanja sa najnižom frekvencijom, osciluje u obliku statičke elastične linije koja bi se formirala pod djelovanjem tereta navučenih diskova, Sl. 7.2.



Sl. 7.2. Deformacija brzoobodnog vratila sa n diskova

Ukoliko je broj obrtaja vratila Ω jednak frekvenciji ω osnovnog oblika oscilovanja slobodnih oscilacija sistema, tj. ako vrijedi

$$\Omega = \omega = \omega_{cr}, \quad (7.11)$$

broj obrtaja vratila će biti kritičan.

Statički ugibi centriranih diskova, čije su težine $G_1, G_2, \dots, G_i, \dots, G_n$, označice se sa $f_1, f_2, \dots, f_i, \dots, f_n$, uz pretpostavku da centri inercije diskova osciluju u vertikalnoj ravni po zakonu

$$y_i = f_i \cos \omega t \quad (7.12)$$

Potencijalna energija sistema će iznositi

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n G_i y_i = \frac{1}{2} g \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad (7.13)$$

dok će kinetička energija biti

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{y}_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i f_i^2 \sin^2 \omega t \quad (7.14)$$

Maksimalne vrijednosti $E_{p\max}$ i $E_{k\max}$ iznose

$$\begin{aligned} E_{p\max} &= \frac{1}{2} g \sum_{i=1}^n m_i f_i, \\ E_{k\max} &= \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i f_i^2. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Izjednače li se ove dvije energije prema (7.10), dobiće se

$$\omega^2 = \frac{g \sum_{i=1}^n m_i f_i}{\sum_{i=1}^n m_i f_i^2} = \frac{g \sum_{i=1}^n G_i f_i}{\sum_{i=1}^n G_i f_i^2} \quad (7.16)$$

Izraz (7.16) predstavlja Morlejev obrazac pomoću kojeg se može odrediti približna vrijednost kritične ugaone brzine vratila.

Obrazac je tačniji ukoliko je veći broj diskova.

Ako je masa vratila M velika u odnosu na masu diskova, onda se masama diskova trebaju dodati još i vrijednosti M/n , tako da će masa i -tog diska biti $m_i^* = m_i + M/n$.

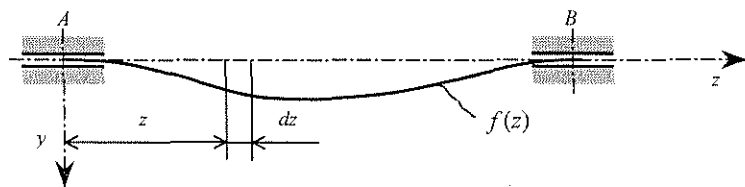
7.3. Relejev obrazac

U odnosu na prethodnu metodu, ovdje se uzima u obzir i masa vratila, a može se uzeti u obzir i masa diskova za određene kritične brzine.

Kod ove metode se kao kriva prvog oblika oscilovanja ne mora usvojiti statička elastična linija nosača, već se može pretpostaviti bilo koja druga kriva jednostavnija od elastične linije.

I ovdje se koristi princip jednakosti maksimalne potencijalne i kinetičke energije.

Pretpostaviće se da je $f(z)$ neka kriva koja u dovoljnoj mjeri aproksimira krivu prvog glavnog oblika oscilovanja, Sl. 7.3.



Sl. 7.3. Kriva prvog glavnog oblika oscilovanja

Ako se sa ρ' označi masa jedinice dužine vratila, tada je elementarna masa $dm = \rho' dz$, a njena kinetička energija

$$dE_k = \frac{1}{2} dm v_z^2 = \frac{1}{2} \rho' v_z^2 dz, \quad (7.17)$$

gdje je v_z brzina uočenog elementarnog dijela dz koji se nalazi na rastojanju z od kraja vratila A .

Na osnovu navedenog može se pretpostaviti da će pojedini elementi vratila oscilovati po zakonu

$$y(z, t) = f(z) \cos \omega t = y(z) \cos \omega t, \quad (7.18)$$

gdje je $f(z)$ kriva prvog glavnog oblika oscilovanja.

Brzina elementarnog dijela na rastojanju z ima vrijednost

$$v_z = \dot{y}(z, t) = -f(z) \omega \sin \omega t. \quad (7.19)$$

Maksimalna kinetička energija elementa vratila iznosi

$$dE_{k \max} = \frac{1}{2} \rho' (v_{z \max})^2 dz = \frac{1}{2} \rho' f^2(z) \omega^2 dz,$$

jer je

$$|v_{z \max}| = |f(z) \omega|. \quad (7.20)$$

Maksimalna kinetička energija vratila raspona l iznosiće

$$E_{k \max} = \int_0^l dE_{k \max} = \frac{1}{2} \rho' \omega^2 \int_0^l f^2(z) dz. \quad (7.21)$$

Potencijalna energija deformisanog vratila određena je izrazom

$$E_p = \frac{1}{2} E I_x \int_0^l [y''(z)]^2 dz. \quad (7.22)$$

Na osnovu izraza (7.18) vrijedi

$$y''(z) = f''(z) \cos \omega t,$$

odakle je

$$y''(z)_{\max} = f''(z).$$

Na osnovu toga se može napisati

$$E_{p \max} = \frac{1}{2} E I_x \int_0^l [f''(z)]^2 dz. \quad (7.24)$$

Ako se izjednače $E_{k \max}$ i $E_{p \max}$ dobiće se

$$\omega^2 = \frac{E I_x \int_0^l [f''(z)]^2 dz}{\rho' \int_0^l f^2(z) dz}. \quad (7.25)$$

Izraz (7.25) predstavlja Relejev obrazac, koji omogućava određivanje približne vrijednosti kružne frekvencije prvog osnovnog oblika oscilovanja vratila.

Ukoliko se na vratilu nalazi n diskova, onda se uzimanjem u obzir kinetičke i potencijalne energije tih diskova kao u Morlejevoj metodi i dodavanjem izraza za kinetičku i potencijalnu energiju (7.21) i (7.24) dobija kružna frekvencija u vidu izraza

$$\omega^2 = \frac{EI_x \int_0^l [f''(z)]^2 dz + \sum_{i=1}^n G_i f_i}{\rho' \int_0^l f^2(z) dz + \frac{1}{g} \sum_{i=1}^n G_i f_i^2}$$

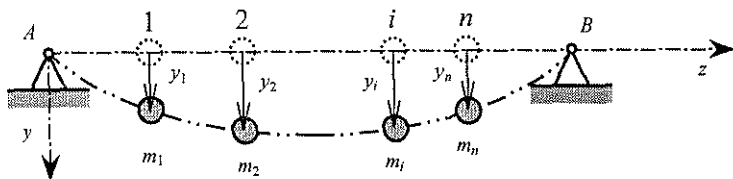
Ovaj izraz je kombinacija obrazaca Morleja i Releja, a koristi se za masivna vratila sa diskovima.

7.4. Denkerlejev obrazac

Denkerlejev obrazac se koristi za određivanje kritične ugaone brzine obrtanja brzohodnih vratila sa većim brojem diskova. Prema ovoj metodi obično se zanemaruje masa vratila, ali se može i uzeti u obzir analogno Relejevom obrascu.

Kao i u prethodnim slučajevima, izvođenje Denkerlejevog obrasca polazi od toga da se odredi frekvencija prvog glavnog oblika oscilovanja slobodnih oscilacija vratila ω , pa se kritičan broj obrtaja vratila Ω dobija iz uslova $\Omega = \omega = \omega_{cr}$.

Metoda Denkerleja koristi diferencijalne jednačine malih neprigušenih poprečnih oscilacija vratila sa koncentrisanim masama, Sl. 7.4.



Sl. 7.4. Deformacija brzohodnog vratila sa n masa

U slučaju prikazanom na slici 7.4, kada se na vratilu nalazi n diskova masa m_i , $i = 1, \dots, n$, ugibi imaju vrijednosti:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_{11} + f_{12} + \dots + f_{1,n-1} + f_{1n} = F_1 \alpha_{11} + F_2 \alpha_{12} + \dots + F_n \alpha_{1n}, \\ &\dots \dots \dots \\ y_n &= f_{n1} + f_{n2} + \dots + f_{n,n-1} + f_{nn} = F_1 \alpha_{n1} + F_2 \alpha_{n2} + \dots + F_n \alpha_{nn}, \end{aligned} \quad (7.26)$$

Na vratilo djeluju odgovarajuće sile inercije

$$F_i = -m_i \ddot{y}_i,$$

pa diferencijalne jednačine kretanja sistema dobijaju oblik:

$$\begin{aligned} y_1 &= -m_1 \ddot{y}_1 \alpha_{11} - m_2 \ddot{y}_2 \alpha_{12} - \dots - m_n \ddot{y}_n \alpha_{1n}, \\ y_2 &= -m_1 \ddot{y}_1 \alpha_{21} - m_2 \ddot{y}_2 \alpha_{22} - \dots - m_n \ddot{y}_n \alpha_{2n}, \\ &\dots \dots \dots \\ y_n &= -m_1 \ddot{y}_1 \alpha_{n1} - m_2 \ddot{y}_2 \alpha_{n2} - \dots - m_n \ddot{y}_n \alpha_{nn}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Ukoliko se pretpostavi rješenje jednačina (7.27) u obliku

$$y_k = A_k \cos(\omega t - \alpha), \quad (7.28)$$

doći će se frekventna jednačina u obliku

$$\Delta_n(\omega^2) = \begin{vmatrix} (1 - m_1 \alpha_{11} \omega^2) & -m_2 \alpha_{12} \omega^2 & \dots & -m_n \alpha_{1n} \omega^2 \\ -m_1 \alpha_{21} \omega^2 & (1 - m_2 \alpha_{22} \omega^2) & \dots & -m_n \alpha_{2n} \omega^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_1 \alpha_{n1} \omega^2 & -m_2 \alpha_{n2} \omega^2 & \dots & (1 - m_n \alpha_{nn} \omega^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (7.29)$$

Uvedu li se oznake:

$$z = \frac{1}{\omega^2} \quad \text{i} \quad \bar{z}_i = m_i \alpha_{ii},$$

frekventna jednačina dobiće oblik

$$\Delta_n(z) = \begin{vmatrix} (z - \bar{z}_1) & -m_2 \alpha_{12} & \dots & -m_n \alpha_{1n} \\ -m_1 \alpha_{21} & (z - \bar{z}_2) & \dots & -m_n \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_1 \alpha_{n1} & -m_2 \alpha_{n2} & \dots & (z - \bar{z}_n) \end{vmatrix} = 0. \quad (7.30)$$

Razvijanjem frekventne jednačine dobiće se polinom n -tog reda oblika

$$z^n - (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n) z^{n-1} + \dots = 0,$$

koji ima n korjenova

$$z_1, z_2, \dots, z_n.$$

Iz više algebre je poznato da je

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n,$$

pa se na osnovu ove veze može se doći do zaključka da je korijen z_1 znatno veći od ostalih korjenova i njihovog zbira. Stoga se prethodna jednakost može napisati u obliku

$$z_{max} = z_1 \leq (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n) = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i. \quad (7.31)$$

Oдавde je

$$\frac{1}{\omega^2} = z_1 \leq \sum_{i=1}^n m_i \alpha_{ii} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_{ii}^2} \quad (7.32)$$

$$\frac{1}{\omega^2} = z_1 \leq \sum_{i=1}^n m_i \alpha_{ii} = \frac{1}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\omega_{22}^2} + \dots + \frac{1}{\omega_{nn}^2}.$$

Izraz (7.32) predstavlja Denkerlejev obrazac. Iz njega se vidi da je recipročna vrijednost kvadrata najniže kružne frekvencije sistema koncentrisanih masa manja ili jednaka zbiru recipročnih vrijednosti kvadrata sopstvenih kružnih frekvencija svih masa sistema izračunatih pod pretpostavkom da svaka masa posebno sama osciluje na vratilu.

Ukoliko se broj diskova povećava i neograničeno raste, tj. kada $n \rightarrow \infty$, obrazac (7.32) može se napisati u obliku integrala

$$\frac{1}{\omega^2} \leq \int_V \alpha_{zz} dm,$$

koji određuje najnižu frekvenciju sistema kada je uzeta u obzir samo masa vratila. Obrazac (7.32) daje dobre rezultate kada je na vratilu veliki broj diskova.

8

PRIMJENA RAČUNARA PRI RJEŠAVANJU DINAMIČKIH I OSCILATORNIH PROBLEMA

8.1. Uvod

S obzirom na sve veće zahtjeve za boljim kvalitetom proizvoda, s jedne, i stalni razvoj računarske tehnike, s druge strane, računari danas zauzimaju važno mjesto i imaju neprocjenjivu vrijednost u procesu konstruisanja i projektovanja, kao i u daljem razvoju inženjerskih konstrukcija. Poznato je da se u svim većim svjetskim firmama modeliranje, optimizacija, proračun, kao i osvajanje novih proizvoda vrši uz gotovo apsolutnu upotrebu računara. Ako se ovome pridoda stalni trend povećanja brzine rada, npr. brzine automobila, broja obrtaja brzohodnih vratila i slično, onda je jasno da proračun dinamičkih karakteristika struktura sa mogućnošću optimiranja daje jedan novi kvalitetniji nivo procesu konstruisanja.

Za proračun dinamičkih karakteristika mašinskih elemenata i sistema danas je u svijetu razvijen niz programa. Neki od njih koriste analitičke metode, kao naprimjer EDV-program, koji po metodi transfer matrica omogućuje ocjenjivanje konstrukcije vratila s aspekta dinamičkog ponašanja još u projektnoj fazi. Najširu primjenu danas su ipak naše numeričke metode i to u prvom redu metoda konačnih elemenata (MKE).

U ovom poglavlju predstaviti će se software I-DEAS, jedan od programa koji pri proračunu koriste metodu konačnih elemenata. Software I-DEAS se sastoji od više programskih paketa, a nekoliko njih je namijenjeno statičkoj i dinamičkoj analizi struktura. Ovaj program omogućuje proračun slobodnih i prinudnih oscilacija strukture, pri čemu daje grafičku predstavu glavnih oblika oscilovanja i animaciju slobodnih oscilacija. Na nekoliko jednostavnih primjera, čije se rješenje u zatvorenom analitičkom obliku može naći u literaturi, pokazat će se način korištenja ovog programa i rezultati.

8.2. Teorijske osnove programa I-DEAS

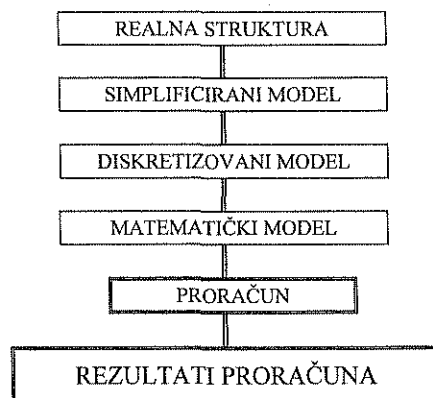
Proračun i analiza dinamičkog modela uspostavljena ovim programom predstavlja proces koji se sastoji od niza aktivnosti, polazeći od modeliranja konkretne konstrukcije do dobijanja rješenja u numeričkom i/ili grafičkom obliku. Svaka grupa aktivnosti je podržana jednim modelom, tako da postoji konačno definisan sistem modela koji je predstavljen na slici 8.1.

Na osnovu realne konstrukcije strukture usvaja se simplificiran (pojednostavljen) model. Ovaj model se dalje diskretizuje raspoloživim konačnim elementima. U programu I-DEAS mogu se, između ostalog, koristiti sljedeći tipovi konačnih elemenata:

- jednodimenzionalni – 1D – štap (ROD), greda (BEAM), cijev (PIPE),
- dvodimenzionalni – 2D – tanka ljuska (THIN SHELL), element sa ravnim stanjem napona ili deformacije (PLANE STRESS, PLANE STRAIN),
- trodimenzionalni – 3D – razni poliedri,
- ostali - koncentrisana masa (LUMPED MASS), translaciona i rotaciona opruga (TRANSLATIONAL SPRING, ROTATIONAL SPRING), itd.

Za proračun je dalje potrebno definisati granične uslove, odnosno način oslanjanja i vrstu, položaj i intenzitet djelovanja spoljašnjih opterećenja na strukturu.

Na osnovu diskretizovanog modela uspostavlja se matematički model, koji se sastoji od niza jednačina koje se izborom odgovarajućeg algoritma rješavaju. Dobijeni numerički rezultati se mogu na više načina grafički predstaviti i animirati.



Sl. 8.1. Sistem modela pri analizi pomoću programa I-DEAS

8.2.1. Slobodne neprigušene oscilacije sistema

Proračun slobodnih neprigušenih oscilacija, tj. glavnih oblika oscilovanja i pripadajućih sopstvenih frekvencija, zasniva se na osnovnoj dinamičkoj jednačini matričnog oblika

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (8.1)$$

gdje su:

$[M]$ - matrica masa strukture,

$[K]$ - matrica krutosti strukture,

$\{q\}$ - vektor čvornih pomjeranja,

$\{\ddot{q}\}$ - vektor ubrzanja čvorova.

Tokom proračuna se određuju:

- sopstvene frekvencije f_i , $i = 1, \dots, n$,
- sopstveni vektori, odnosno oblici oscilovanja, gdje je n broj stepeni slobode strukture.

Sopstveni vektori opisuju glavne oblike (modove) slobodnih oscilacija struktura i daju se u normiranom obliku.

Iako broj sopstvenih frekvencija oscilovanja f_i koje se mogu izračunati odgovara broju stepeni slobode modela, obično se računa samo nekoliko prvih frekvencija, jer u većini slučajeva samo one imaju praktičan značaj.

8.2.2. Prinudne oscilacije sa prigušenjem

Osnovna dinamička jednačina prinudnih prigušenih oscilacija strukture diskretizovane konačnim elementima glasi u matričnom obliku

$$[M]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F(t)\}, \quad (8.2)$$

gdje su:

$[M]$, $[B]$, $[K]$ - matrice mase, prigušenja i krutosti

$\{q\}$, $\{\dot{q}\}$, $\{\ddot{q}\}$ - vektori pomjeranja, brzina i ubrzanja čvorova,

$\{F(t)\}$ - vektor pobudnih sila.

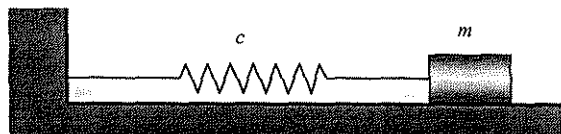
Na osnovu karaktera pobudne sile izračunavaju se odgovarajuća pomjeranja, brzine i ubrzanja pojedinih čvorova u specificiranim pravcima.

8.3. Primjeri dinamičkog proračuna upotrebom programa I-DEAS

Primjer br. 1.

Masa $m = 1$ kg nalazi se na horizontalnoj glatkoj podlozi i vezana je oprugom krutosti $c = 1000$ N/m za zid. Odrediti:

- a) sopstvenu frekvenciju oscilovanja,
 b) pomjeranje mase u slučaju prinudnih oscilacija kada na masu djeluje poremećajna sila intenziteta $F_0 = 100$ N koja se mijenja po sinusnom zakonu frekvencije $f_\Omega = 25$ Hz.



Sl. 8.2. Oscilovanje mase na horizontalnoj podlozi

Rješenje:

a) Sopstvene oscilacije

a.1) Teoretsko rješenje

Jednačina kretanja mase u horizontalnom pravcu prema (3.2) glasi:

$$m\ddot{x} + cx = 0 \quad (8.3)$$

Sopstvena frekvencija oscilovanja je

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1000}{1}} = 5,0329 \text{ Hz.} \quad (8.4.)$$

a.2) Rješenje primjenom programa I-DEAS

Da bi se zadatak riješio upotrebom programa koji se zasniva na metodi konačnih elemenata potrebno je :

- definisati čvorove
- definisati elemente.

U slučaju složenijih struktura, generisanje mreže konačnih elemenata obavlja sam program prema opcijama koje mu zadaje korisnik. No, u ovom jednostavnom primjeru čvorove i elemente će definisati sam korisnik.

U dijelu programa pod nazivom MESHING definisat će se sljedeći čvorovi:

- ❖ N1 (0,0,0) – na mjestu zida i
- ❖ N2 (0,5,0,0) – na mjestu mase, pri čemu je udaljenost (0,5 m) odabrana proizvoljno.

Usvojiti će se sljedeći elementi:

- ❑ LUMPED MASS mase 1 kg u čvoru N2,
- ❑ TRANSLATIONAL SPRING krutosti 1000 N/m koja povezuje čvorove N1 i N2.

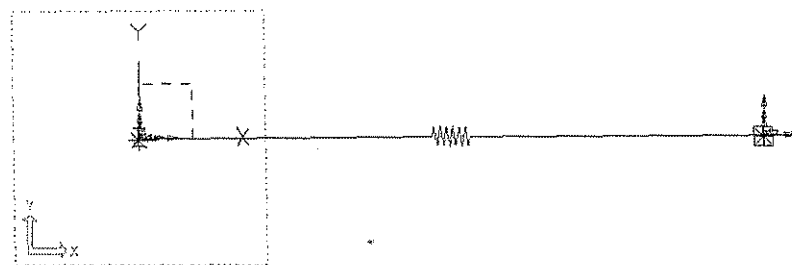
Prelaskom na zadatak BOUNDARY CONDITIONS usvojiti će se sljedeći granični uslovi:

- u čvoru N1 – sva pomjeranja i zakretanja jednaka nuli (SPECIFIED RESTRAINT – sva pomjeranja i rotacije FIXED na 0)
- u čvoru N2 – sva pomjeranja i zakretanja jednaka nuli osim pomjeranja u x pravcu (SPECIFIED RESTRAINT – X TRANSLATION FREE, sve ostalo FIXED na 0)

Nakon obavljenog proračuna koji je pokrenut u zadatku MODEL SOLUTION, dobijaju se rezultati koji se mogu prikazati u POST PROCESSING zadatku.

Dobijeni rezultat (frekvencija $f = 5.032921$ Hz), kao i generisana mreža konačnih elemenata, prikazani su na slici 8.3.

```
RESULTS: 1- B. C. 1, NORMAL_MODE 1, DI SPLACEMENT_1
MODE: 1 FREQ: 5.032921
DI SPLACEMENT - MAG M N: 0.00E+00 MAX: 1.00E+00
DEFORMATION: 1- B. C. 1, NORMAL_MODE 1, DI SPLACEMENT_1
MODE: 1 FREQ: 5.032921
DI SPLACEMENT - MAG M N: 0.00E+00 MAX: 1.00E+00
FRAME OF REF: PART
```



Sl.8.3. Diskretizovani model i sopstvena frekvencija

b) Prinudne oscilacije

b.1) Teoretsko rješenje

Jednačina prinudnih neprigušenih oscilacija za ovaj slučaj glasi (3.85):

$$m\ddot{x} + cx = F_o \sin(\Omega t + \beta) = 100 \sin(2\pi \cdot 25 t + 0). \quad (8.5)$$

Zakon kretanja mase prema (3.95) glasi:

$$x = x_o \cos \omega t + \frac{\dot{x}_o}{\omega} \sin \omega t - \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \left(\sin \beta \cos \omega t + \frac{\Omega}{\omega} \cos \beta \sin \omega t \right) + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t + \beta). \quad (8.6)$$

Uz usvojene početne uslove ($t=0, x_o=0, \dot{x}_o=0$), početni fazni ugao $\beta=0$, vrijednost $h = F_o/m = 100$, sopstvenu kružnu frekvenciju $\omega = 2\pi \cdot 5.035$ i kružnu frekvenciju sile $\Omega = 2\pi \cdot 25$, ovaj zakon se svodi na oblik:

$$x = 0 + 0 - \frac{100}{(2\pi \cdot 5.035)^2 - (2\pi \cdot 25)^2} \left(\sin 0^\circ \cos(2\pi \cdot 5.035 \cdot t) + \frac{2\pi \cdot 25}{2\pi \cdot 5.035} \cos 0^\circ \sin(2\pi \cdot 5.035 \cdot t) \right) + \frac{100}{(2\pi \cdot 5.035)^2 - (2\pi \cdot 25)^2} \sin(2\pi \cdot 25 \cdot t) \quad (8.7)$$

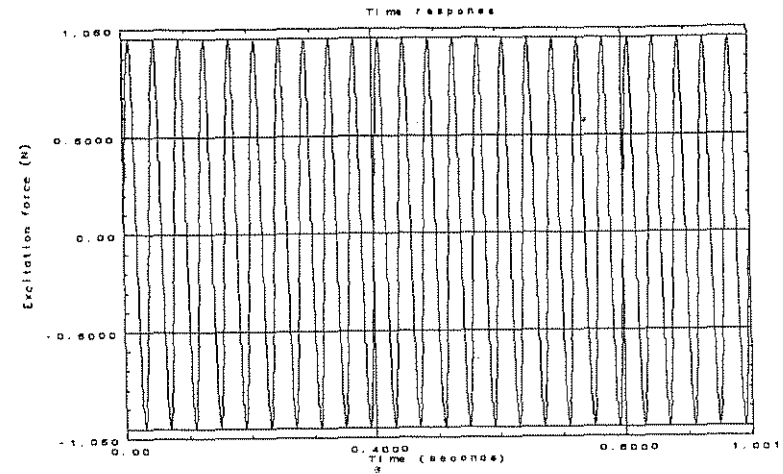
Na osnovu datog izraza mogu se izračunati pomjeranja mase u pojedinim vremenskim trenucima i dio ovih podataka prikazan je u tabeli 8.1.

Tabela 8.1. Pomjeranja mase tokom vremena

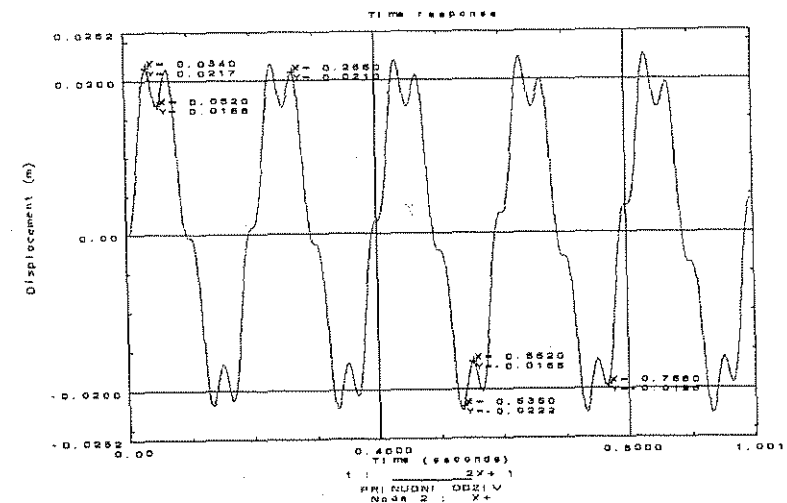
$t(s)$	0.034	0.052	0.266	0.536	0.552	0.768
$x(m)$	0.021872	0.016899	0.021175	-0.02238	-0.0166	-0.01959

b.2) Rješenje primjenom programa I-DEAS

U zadatku RESPONSE ANALYSIS je potrebno prvo definisati silu. Ovdje će se definisati sila koja se mijenja po sinusnom zakonu sa frekvencijom $f_\Omega = 25$ Hz. Vremenska promjena ove sile u periodu od jedne sekunde data je na slici 8.4. Intenzitet sile od $F_o = 100$ N se dobija usvajanjem vrijednosti 100 za SCALING FACTOR.



Sl.8.4. Vremenska promjena prinudne sile



Sl.8.5. Rezultujuće pomjeranje mase (sopstvene i prinudne oscilacije)

Pomjeranje mase u funkciji od vremena koje je nastalo superponiranjem sopstvenih oscilacija frekvencije $f = 5.032921$ Hz i prinudnih oscilacija frekvencije $f_\Omega = 25$ Hz prikazano je

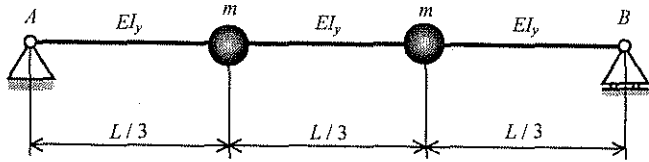
na slici 8.5. Vidi se da se parovi vrijednosti vrijeme-pomjeranje naznačeni na slici dobro slažu sa vrijednostima datim u tabeli 8.1., a koje su izračunate po formuli (8.7).

Unošenjem vrijednosti prigušenja može se dobiti i rješenje za prinudne prigušene oscilacije. Pored odziva na vremenski promjenljivu silu, program omogućava i nalaženje odziva u frekventnom domenu, kao i u slučaju kada na strukturu djeluje stohastički promjenljiva sila.

Primjer br. 2.

Za gredu dužine L i zanemarljive mase opterećenu koncentrisanim masama prema slici 8.6., odrediti sopstvene frekvencije i glavne modove oscilovanja.

Podaci: $L = 0,3 \text{ m}$, $m = 0,02 \text{ kg}$, $E = 2,068 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, prečnik grede $d_{gr} = 10 \text{ mm}$.



8.6. Simplificirani model grede

a) Analitičko rješenje

Posmatrat će se savojne ili transverzalne slobodne oscilacije grede opterećene sa dvije koncentrisane mase m .

Primjenom metode superpozicija deformacija i korištenjem Maksvelovih uticajnih koeficijenata, zadatak se može riješiti analitički u zatvorenom obliku, [12]. Dobljene vrijednosti sopstvenih frekvencija oscilovanja su sljedeće:

$$f_{o1} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2 \cdot 3^4}{5mp}}, \quad f_{o2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2 \cdot 3^5}{mp}}, \quad (8.8)$$

gdje je sa p označena konstantna vrijednost u iznosu

$$p = \frac{L^3}{EI_z}. \quad (8.9)$$

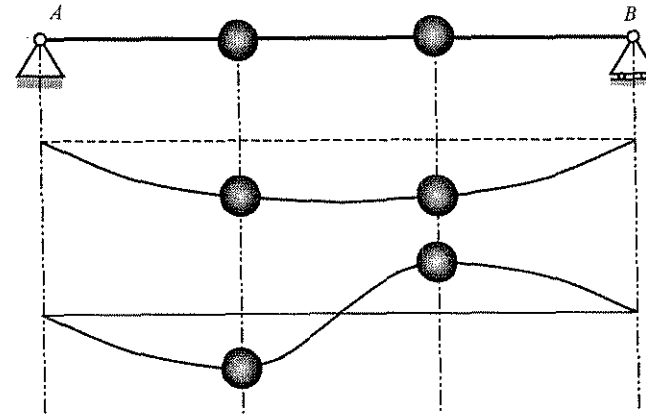
Vrijednosti frekvencija za zadate podatke su

$$f_{o1} = 392,768 \text{ Hz}, \quad f_{o2} = 1532,754 \text{ Hz}. \quad (8.10)$$

Glavni oblici oscilovanja definisani su koeficijentima glavnih oblika oscilovanja koji iznose

$$\eta_{21}^{(1)} = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = 1, \quad \eta_{21}^{(2)} = \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = -1. \quad (8.11)$$

Na sl. 8.7 prikazani su grafički glavni oblici oscilovanja ovog sistema.



Sl. 8.7. Glavni oblici oscilovanja sistema

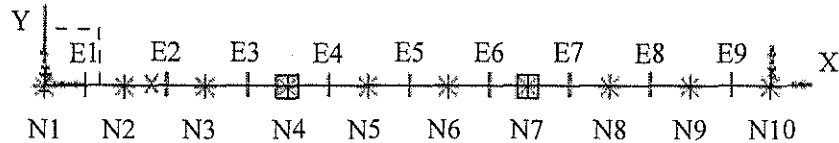
b) Numeričko rješenje primjenom programa I-DEAS

Za dobijanje rješenja korištenjem programa I-DEAS potrebno je definisati sljedeće:

- geometriju grede (u zadatku MESHING)
 - položaj čvornih tačaka; usvojeno 10 čvorova N1-N10,
 - konačni elementi između čvornih tačaka; usvojeni su gredni konačni elementi (elementi E1-E9) punog presjeka sa prečnikom $d = 10 \text{ mm}$ (u zadatku BEAM SECTIONS),
 - koncentrisane mase u dvije čvorne tačke, elementi E10 i E11, mase $m = 0.02 \text{ kg}$,
 - modul elastičnosti materijala grede, $E = 2,068 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$,
 - specifična masa materijala grede; usvojiti će se mala gustina $\rho = 0.001 \text{ kg/m}^3$ kako bi masa vratila bila vrlo mala u odnosu na koncentrisane mase,

- granične uslove (u zadatku BOUNDARY CONDITIONS)
 - nepokretni oslonac na lijevom kraju (PIN, Z - axis of rotation), a pokretni oslonac na desnom kraju grede (ROLLER, Z - axis of rotation, X-translation)

Diskretizovani model grede sa dvije koncentrisane mase prikazan je na slici 8.8.



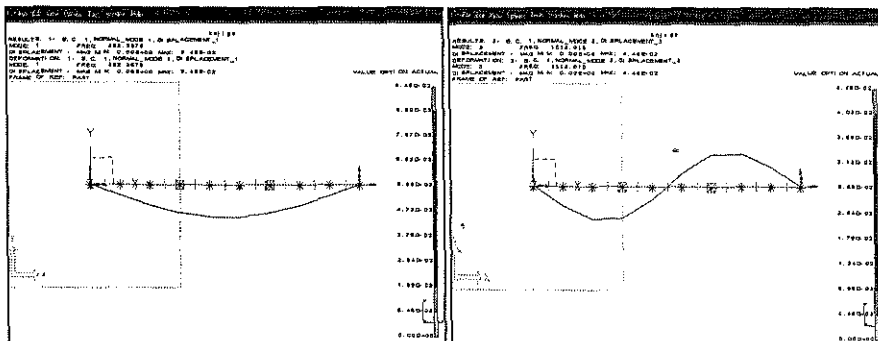
Sl. 8.8 Diskretizovani model grede sa dvije koncentrisane mase

Nakon unošenja broja traženih modova i definisanjem minimalne tražene frekvencije u iznosu od 1 Hz (kako bi se izbjeglo traženje frekvencija bliskih nuli) u zadatku MODEL SOLUTION, dobijaju se vrijednosti sopstvenih frekvencija oscilovanja:

$$f_{01} = 392,3578 \text{ Hz}, \quad f_{02} = 1513,018 \text{ Hz}. \quad (8.12)$$

Razlika između dobijenih vrijednosti frekvencija (8.12) i vrijednosti datih izrazom (8.10) je mala, a nastala je prvenstveno usljed toga što je vratilo u numeričkom primjeru ipak data određena masa.

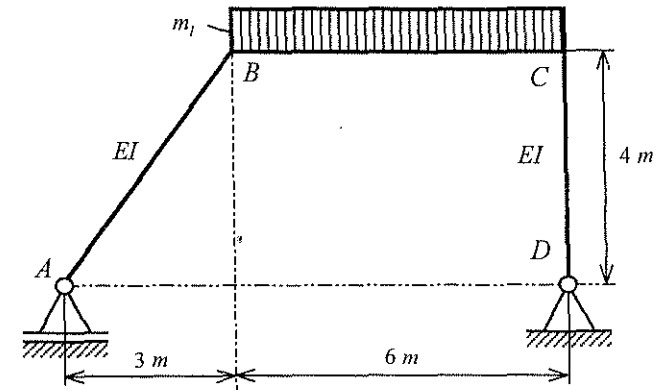
Na osnovu podataka o modalnim oblicima, program u zadatku POST PROCESSING daje grafičku predstavu i omogućava animaciju traženog prvog i drugog glavnog oblika oscilovanja, Sl. 8.9.



Sl.8.9. Prva dva oblika oscilovanja grede sa koncentrisanim masama

Primjer br. 3.

Zadat je okvirni nosač prikazan na slici 8.10. Stubovi AB i CD imaju krutost EI , a prečka BC je idealno kruta. Odrediti frekvenciju oscilovanja ovog nosača ako su zadati sljedeći podaci: dimenzije poprečnog presjeka sva tri štapa $b \times h = 0.5 \text{ m} \times 1 \text{ m}$, modul elastičnosti materijala stubova $E = 31.5 \text{ GPa}$, masa prečke po jedinici dužine $m_l = 10000 \text{ kg/m}$.



Sl. 8.10. Okvirni nosač

a) Analitičko rješenje:

Lagranžova diferencijalna jednačina za ovaj slučaj glasi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{u}_1} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial u_1} = 0, \quad (8.13)$$

a odatle se može dobiti diferencijalna jednačina kretanja u obliku

$$m^* \ddot{u}_1 + k^* u_1 = 0, \quad (8.14)$$

gdje su m^* i k^* reducirana masa i krutost nosača, a u_1 usvojena generalisana koordinata (translacija prečke u horizontalnom pravcu), Sl. 8.11.

Na osnovu (8.14) se može dobiti sopstvena kružna frekvencija sistema:

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}}. \quad (8.15)$$

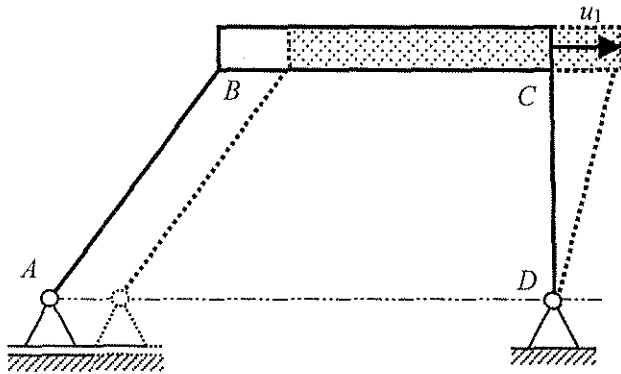
Za nalaženje redukovane mase m^* potrebno je odrediti kinetičku energiju sistema, Sl. 8.11:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{u}_1^2 = \frac{1}{2} \cdot (m' \cdot 6) \cdot \dot{u}_1^2, \quad (8.16)$$

a odavde su:

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{u}_1} = m' \cdot 6 \cdot \dot{u}_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{u}_1} \right) = m' \cdot 6 \cdot \ddot{u}_1 = m^* \ddot{u}_1. \quad (8.17)$$

Dakle, $m^* = m' \cdot 6$.



Sl. 8.11. Kinematska shema nosača

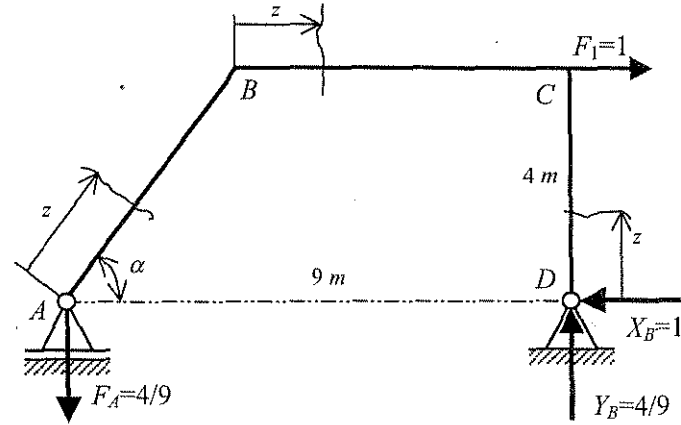
Krutost k^* će se odrediti proračunavanjem fleksibilnosti strukture primjenom Maksvel-Morovih integrala, [26]. U tom cilju će se u smjeru generalisane koordinate u_1 nanijeti jedinična sila F_1 , Sl. 8.12, a zatim će se izračunati momenti po karakterističnim poljima, Sl. 8.13.

I - prvo polje (lijevi stub): $M_z^I = -F_A \cos \alpha \cdot z = -\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{5} \cdot z = -\frac{4}{15} \cdot z;$

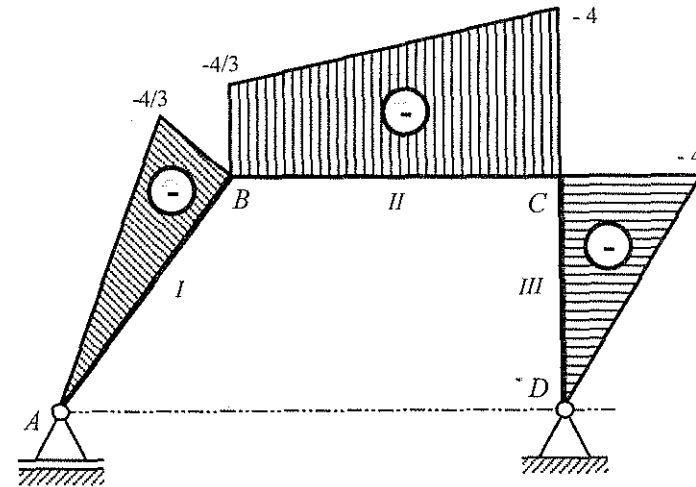
Tačka B: $M_B^I = -\frac{4}{15} \cdot 5 = -\frac{4}{3};$

II - drugo polje (prečka): $M_z^II = -F_A(3+z) = -\frac{4}{9} \cdot (3+z) = -\frac{4}{3} - \frac{4}{9} \cdot z;$

III - treće polje (desni stub): $M_z^III = -X_B \cdot z = -z;$ Tačka C: $M_C^III = -1 \cdot 4 = -4.$



Sl. 8.12. Reakcije na jedinično opterećenje



Sl. 8.13. Dijagram momenata savijanja usljed jediničnog opterećenja

Fleksibilnost se računa korištenjem Maksvel-Morovih integrala:

$$f^* = \frac{1}{(EI)_I} \int_0^5 \left(-\frac{4}{15}z\right)^2 dz + \frac{1}{(EI)_{II}} \int_0^6 \left(-\frac{4}{3} - \frac{4}{9}z\right)^2 dz + \frac{1}{(EI)_{III}} \int_0^4 (-z)^2 dz =$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^5 \left(\frac{4}{15}\right)^2 z^2 dz + 0 + \frac{1}{EI} \int_0^4 z^2 dz = \frac{1}{EI} \frac{16}{225} \frac{5^3}{3} + \frac{1}{EI} \frac{4^3}{3} \quad (8.18)$$

Odavde se dobije

$$f^* = \frac{656}{27EI},$$

gdje je

$$EI = E(bh^3/12) = 3.15 \cdot 10^{10} \cdot 0.5 \cdot 1^3 / 12 = 1.3125 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2.$$

Krutost je inverzna fleksibilnosti:

$$k^* = \frac{1}{f^*} = \frac{27EI}{656}, \quad (8.19)$$

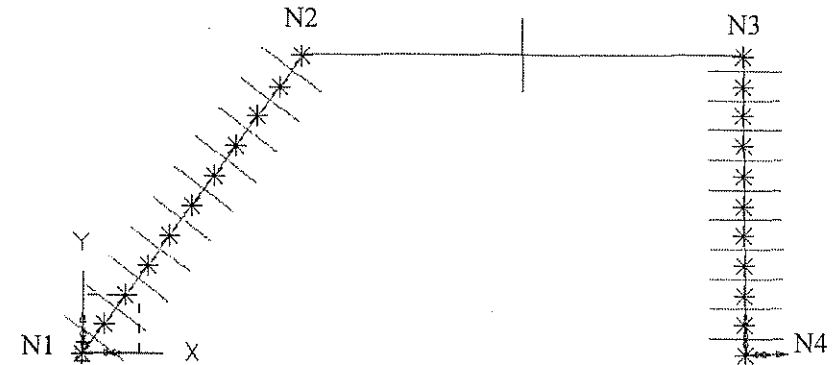
pa je sopstvena frekvencija

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{27 \cdot 1,3125 \cdot 10^9}{656 \cdot 10000 \cdot 6}} = \frac{1}{2\pi} 30,005 = 4,77 \text{ Hz}. \quad (8.20)$$

b) Numeričko rješenje primjenom programa I-DEAS:

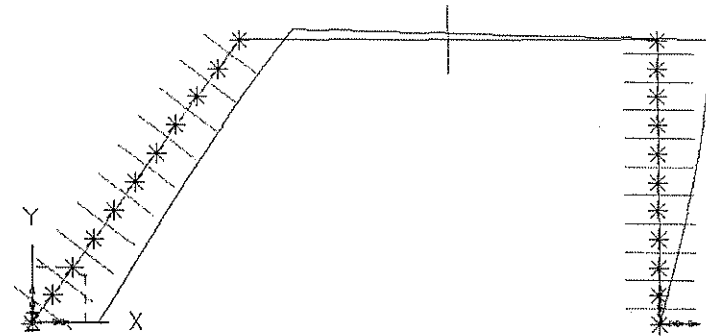
U programu je prvo potrebno kreirati četiri karakteristična čvora za tačke A , B , C i D . Između čvorova $N1$ i $N2$ (stub AB), odnosno $N3$ i $N4$ (stub CD), kreirat će se još po devet čvorova kako bi se mogao dobiti savijeni oblik stubova tokom oscilacija. Između navedenih elemenata postaviti će se gredni elementi poprečnog presjeka $b \times h$, krutosti EI ($E = 31.5 \text{ GPa}$) i zanemarljive mase (usvojeno $\rho = 0.001 \text{ kg/m}^3$). Između čvorova $N2$ i $N3$ (prečka BC) dovoljno je postaviti jedan gredni element velike krutosti (usvojeno $E = 2 \cdot 10^{14} \text{ N/m}^2$) i specifične mase $\rho = 20000 \text{ kg/m}^3$, čime prečka poprečnog presjeka $b \times h$ dobija masu po jedinici dužine u iznosu $m' = 10000 \text{ kg/m}$, Sl. 8.14.

Zadavanjem graničnih uslova u čvorovima $N1$ (ROLLER, X-Axis of Translation, Z-Axis of Rotation) i u čvoru $N4$ (PIN, Z-Axis of Rotation) i pokretanjem proračuna, dobija se tražena frekvencija i karakteristični oblik oscilovanja ovog okvira, što je prikazano na slici 8.15.



Sl. 8.14. Diskretizovani model okvirnog nosača

```
RESULTS: 2- B. C. 1, NORMAL_MODE 2, DI SPLACEMENT_2
MODE: 2 FREQ: 4.630545
DI SPLACEMENT - MAG M N: 0.00E+00 MAX: 1.00E+00
DEFORMATION: 2- B. C. 1, NORMAL_MODE 2, DI SPLACEMENT_2
MODE: 2 FREQ: 4.630545
DI SPLACEMENT - MAG M N: 0.00E+00 MAX: 1.00E+00
FRAME OF REF: PART
```



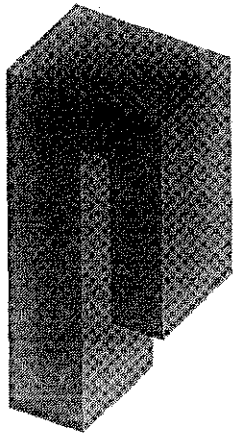
Sl. 8.15. Glavni oblik oscilovanja okvirnog nosača pri frekvenciji $f=4.63 \text{ Hz}$

Primjer br. 4.

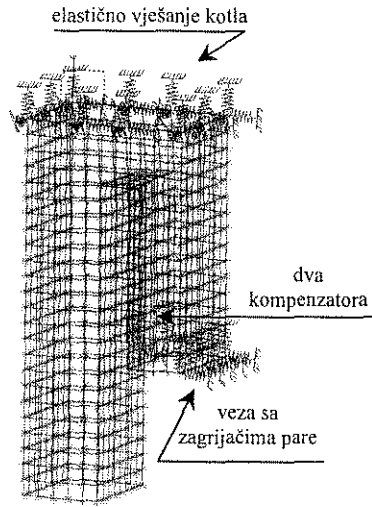
Za kotao oblika prikazanog na slici 8.16. odrediti frekvencije i oblike prvih globalnih modova oscilovanja. Kotao je gornjom stranom elastično vezan za podlogu. Kraći dio modela je također elastično vezan i oslanja se na dva kompenzatora. Masa kotla je 650 000 kg.

Rješenje:

Zbog složenosti nalaženja analitičkog rješenja, pokazat će se samo rješenje dobijeno numerički korištenjem programa I-DEAS.



Sl. 8.16. Simplificirani model kotla



Sl. 8.17. Diskretizovani model kotla sa graničnim uslovima

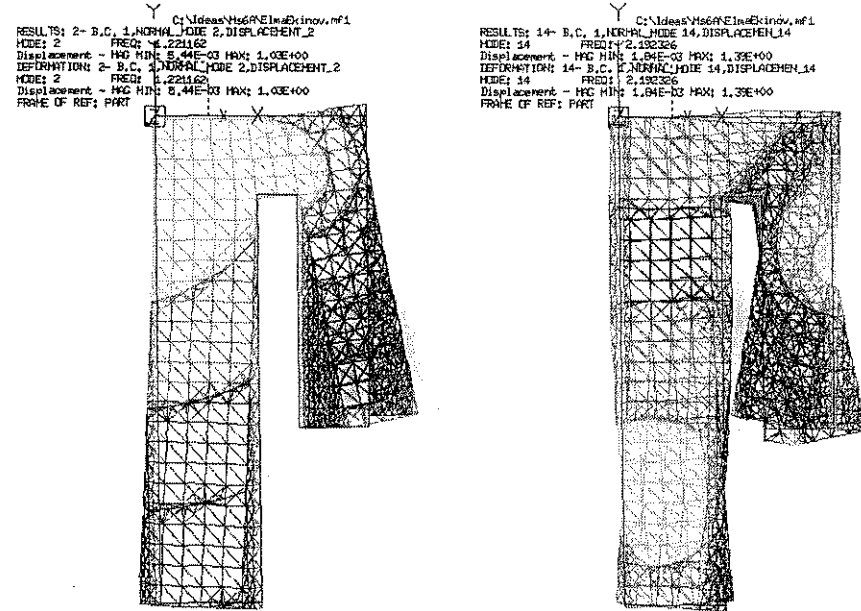
Diskretizacija modela je izvedena pomoću SHELL ELEMENTS (952 elementa), pri čemu su debljina elemenata i njihova specifična masa odabrani tako da se dobije ukupna masa kotla $m = 650\ 000\ \text{kg}$, Sl. 8.17.

Usvojeni su sljedeći granični uslovi:

- elastično oslanjanje gornje podloge pomoću $10 \times$ TRANSLATIONAL SPRING sa krutostima $c_x = c_y = c_z = 50000\ \text{N/m}$,
- elastično oslanjanje kraćeg dijela prema zagrijačima ostvareno je pomoću $5 \times$ TRANSLATIONAL SPRING sa $c_x = c_y = 50000\ \text{N/m}$, $c_z = 0$,

- uticaj dva kompenzatora sa strane simuliran je korištenjem $2 \times$ TRANSLATIONAL SPRING sa $c_x = c_y = 50000\ \text{N/m}$, $c_z = 0$.

Program izračunava traženi broj modova oscilovanja. Mnogi od dobijenih modova su lokalni, tj. osciluje samo dio modela. Ovakvi modovi su često rezultat diskretizacije modela i malo su vjerovatni u stvarnosti. Dva najniža globalna moda oscilovanja frekvencija 1,221162 Hz i 2,192326 Hz prikazana su na slici 8.18. Uočava se ne samo njihanje dijelova kotla nego i njihovo savijanje i zakretanje, tako da su ovo vrlo složeni modovi.



Sl. 8.18. Dva karakteristična oblika oscilovanja modela kotla

1. Andelić, T., Stojanović, R.: Racionalna mehanika, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd, 1965.,
2. Andronov, A.A., Haikin, S.E.: Teorija kolebanija, Moskva, 1959.,
3. Babakov, I.M.: Teorija kolebanija, Nauka, Moskva, 1968.,
4. Bellman, R.: Introduction to Matrix Analysis, Mc Graw-Hill, New York, 1960.,
5. Biderman, V.L.: Prikladna teorija mehaničkih kolebanij, Moskva, 1972.,
6. Blagojević, D.: Zbirka zadataka iz oscilacija, Beograd, 1957.,
7. Brčić, V.: Dinamika konstrukcija, Građevinska knjiga, Beograd, 1978.,
8. Clough, R., Penzien, J.: Dynamics of Structures, Mc Graw-Hill, New York, 1975.,
9. Čorić, B., Ranković, S., Salatić, R.: Dinamika konstrukcija, Univerzitet u Beogradu, Beograd, 1998.,
10. Demidovič, B.P.: Lekcii po matematičkoj teorii ustoičivosti, Nauka, Moskva, 1967.,
11. Den Hartog, J.P.: Vibracije u mašinstvu (prevod sa engleskog), Građevinska knjiga, Beograd, 1972.,
12. Doleček, V., Lovren, N., Šipčić, S., Šipovac, B.: Zbirka zadataka iz dinamike i oscilacija, Svjetlost, Sarajevo, 1981.,
13. Doleček, V.: Teorija oscilacija, Mašinski fakultet, Sarajevo, 1977.,
14. Đurić, S.: Mehanika III i IV – Dinamika i teorija oscilacija, Mašinski fakultet, Beograd, 1987.,
15. Gligorić, B.: Dinamičko uravnotežavanje rotora obrtnih mašina, teorijske osnove i mjerni principi, Mašinski fakultet u Kragujevcu, Kragujevac, 1978.,
16. Jablonski, A.A.: Kurs teorije kolebanija, Moskva, 1975.,
17. Kilječvskij, N.A.: Kurs teoretičkoj mehaniki, Tom II, Nauka, Moskva, 1977.,
18. Kojić, M., Mićunović, M.: Teorija oscilacija, Naučna knjiga, Beograd, 1979.,
19. Krpan, M., Franulović, A., Butković, M., Žigulić, R., Braut, S.: Dinamika – teorija i primjena, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2001.,
20. Levy, S., Wilkinson: The Component Element Method in Dynamics, Mc Graw-Hill, New York, 1976.,
21. Mc Lean, W., Nelson, E.: Engineering Mechanics, Theory and Problems, Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill, New York, 1962.,
22. Nikolai, E.L.: Teoretičeskaja mehanika, Moskva, 1957.,

23. Obradović, A., Marković, S.: Zbirka zadataka iz teorije oscilacija, Narodna knjiga, Beograd, 1996.,
24. Przemieniecki, J.S.: Theory of Matrix Structural Analysis, Mc Graw-Hill, New York, 1968.,
25. Radosavljević, Lj.: Teorija oscilacija, Mašinski fakultet, Beograd, 1972.,
26. Rašković, D.: Otpornost materijala, Naučna knjiga, Beograd, 1961.,
27. Rašković, D.: Teorija oscilacija, Naučna knjiga, Beograd, 1965.,
28. Rusov, L., Blagojević, D., Gligorić, M.: Zbirka riješenih zadataka iz oscilacija mehaničkog sistema, Beograd, 1970.,
29. Rusov, L.: Dinamika, Naučna knjiga, Beograd, 1989.,
30. Skrinar, M.: Uvod v osnove računa dinamike in stabilnosti gradbenih konstrukcij, Fakulteta za gradbeništvo, Maribor, 2002
31. Spiegel, M.R.: Theoretical Mechanics, Theory and Problems, Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill, New York, 1967.,
32. Timošenko, S., Young, D.H., Weaver, W.: Vibration Problems in Engineering, John Eiley, New York, 1974.,
33. Timošenko, S.P.: Teorija oscilacija, Građevinska knjiga, Beograd, 1966.,
34. Vujičić, V.: Teorija oscilacija, Savremena administracija, Beograd, 1974.,
35. Vukojević, D.: Dinamika, Mašinski fakultet, Zenica, 1990.
36. Waldron, K.J., Kinzel, G.L.: Kinematics, Dynamics, and Design of Machinery, John Willey & Sons, 1999.,
37. Wells, D.A.: Lagrangian Dynamics, Theory and Problems, Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill, New York, 1967.,
38. Zaimović-Uzunović, N., Lemeš, S.: Metod konačnih elemenata, Dom štampe, Zenica, 2002.,