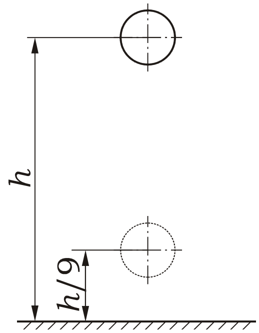
Kuglica mase m pusti se sa visine h da padne na horizontalnu podlogu. Koeficijent sudara između kuglice i podloge je $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Nakon koliko udara će se kuglica popeti na visinu jednaku h/9 uz pretpostavku da su svi udari normalni. Zanemariti otpor zraka.



$$k = \frac{u}{v}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$k = \frac{v_1}{v}\frac{\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{h_1}{h}} \Rightarrow h_1 = k^2 h$$

$$h_2 = k^2 h_1 = k^2 k^2 h$$

$$h_n = k^{2n} h \Rightarrow \frac{h_n}{h} = k^{2n}$$

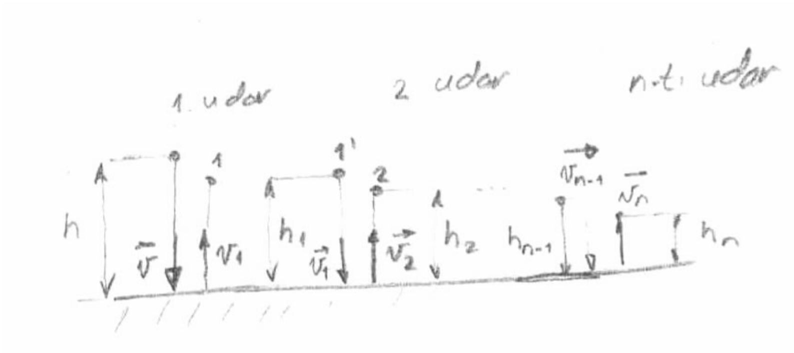
$$\ln\frac{h_n}{h} = \ln k^{2n}$$

$$\ln\frac{h_n}{h} = 2n\ln k$$

$$n = \frac{\ln\frac{h_n}{h}}{2\ln k}$$

$$n = \frac{\ln\frac{\frac{1}{9}h}{h}}{2\ln\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\ln\frac{1}{9}}{2\ln\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\ln 1 - \ln 9}{2(\ln 1 - \ln\sqrt{3})} = \frac{1}{2}\frac{\ln\sqrt{3}^4}{\ln\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\frac{4\ln\sqrt{3}}{\ln\sqrt{3}}$$

$$n = 2$$



ili

$$\frac{h_n}{h} = k^{2n}$$

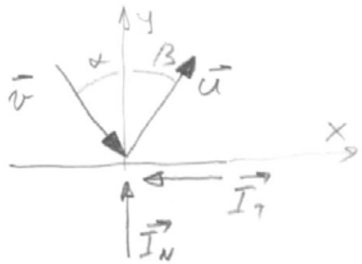
$$\frac{\frac{h}{9}}{h} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$$

$$\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$$

$$9 = \left(\sqrt{3}\right)^{2n}$$

$$n = 2$$

Materijalnoj tački mase m saopštena je brzinu v pod uglom α neposredno prije udara o horizontalnu ravan. Koeficijent restitucije između kuglice i podloge je k, a koeficijent trenja je μ. Pod kojim uglom α treba usmjeriti tačka da bi se ona odbila vertikalno.



$$m(\vec{u}-\vec{v}) = I$$

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \vec{I_N} + \vec{I_T}$$

$$x \cdot \quad mu \cdot \sin\beta - mv \cdot \sin\alpha = -I_T \quad \ldots (1)$$

$$y \cdot \quad mu \cdot \cos\beta + mv \cdot \cos\alpha = I_N \quad \ldots (2)$$

$$k = \left|\frac{u_y}{v_y}\right| = \frac{u \cdot \cos\beta}{v \cdot \cos\alpha}$$

$$u = k \cdot v \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \quad \ldots (3)$$

$$I_T = I_N \cdot \mu \quad \ldots (4)$$

(3) i (4) u (1) i (2) uz $\beta = 0$

$$-m \cdot v \cdot \sin\alpha = -I_N \cdot \mu \quad \ldots (4)$$

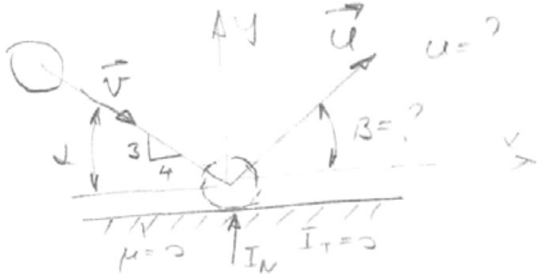
$$m \cdot k \cdot v \cdot \cos\alpha + m v \cdot \cos\alpha = I_N \quad \ldots (5)$$

(5) u (4)

$$\cancel{-} \cancel{m} \cdot \cancel{v} \sin\alpha = \cancel{-} \cancel{m} \cancel{v} \cos\alpha (k+1) \cdot \mu$$

$$\operatorname{tg}\alpha = (k+1) \cdot \mu \qquad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\left[(k+1)\mu\right]$$

Kuglica udari u glatku površinu brzinom od $v = 50\ \frac{m}{s}$ prema slici. Koeficijent restitucije je $k = 0,8$. Odrediti brzinu i pravac kuglice nakon udara



$$m\vec{u} - m\vec{v} = \vec{I} \quad \dots (1)$$

$$k = \left|\frac{u_y}{v_y}\right| \quad \dots (2)$$

(1) na (x) i (y):

$$x: \ m\,u \cdot \cos\beta - m \cdot v \cdot \cos\alpha = 0 \quad \dots (3)$$

$$y: \ m \cdot u \cdot \sin\beta - (-m \cdot v \cdot \sin\alpha) = I \quad \dots (4)$$

iz (2):

$$k = \frac{u \cdot \sin\beta}{v \cdot \sin\alpha} \qquad u \cdot \sin\beta = k\, v \cdot \sin\alpha \quad \dots (5)$$

sa slike:

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{4}{5} \quad \dots (6)$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \quad \dots (7)$$

(6) i (7) u (5) i (3):

$$u\,\sin\beta = 0,8\ 50 \cdot \frac{3}{5} = 24 \quad \dots (8)$$

$$u \cdot \cos\beta = v \cdot \cos\alpha = 50 \cdot \frac{4}{5} = 40 \quad \dots (9)$$

Dijeljenjem (8) i (9):

$$tg\,\beta = \frac{24}{40}$$

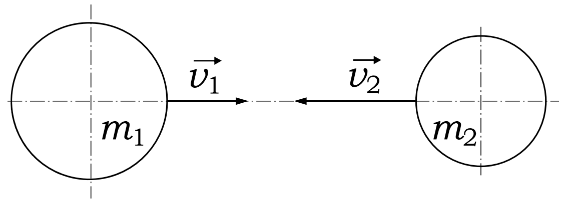
$$\beta = 30,96^\circ$$

Kvadriranjem, pa sabiranjem (8) i (9):

$$u^2 = 24^2 + 40^2$$

$$u = 46,65\ \frac{m}{s}$$

Kuglica mase m_1 = 5 kg kreće se brzinom od 2 m/s i sudara se sa drugom, mase m_2 = 3 kg koja se kreće po istom pravcu ali u suprotnom smjeru brzinom 4 m/s. Odrediti brzine kuglica nakon sudara ako je koeficijent restitucije sudara k = 0,6.



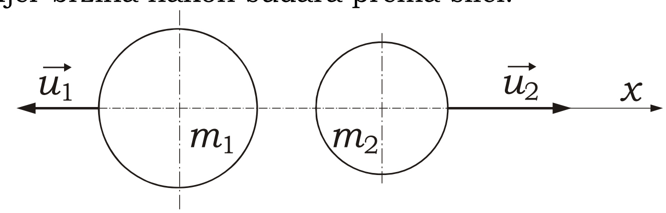
Rješenje:
Osnovne jednačine za rješavanje problema direktnog centralnog sudara su jednačina koja definira jednaku količinu kretanja prije i nakon sudara

$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$, ... (a)

i jednačina koja definira koeficijent restitucije sudara

$k = \dfrac{u_r}{v_r} = \dfrac{|\vec{u}_1 - \vec{u}_2|}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}$. .... (b)

Pretpostavit će se smjer brzina nakon sudara prema slici.



Projektovanjem jednačine (a) na osu sudara (x) dobija se:

$m_1v_1 - m_2v_2 = 5\cdot 2 - 3\cdot 4 = -2$

$-5u_1 + 3u_2 = -2$ .... (c)

Uz pretpostavljeni smjer brzina nakon sudara iz jednačine (b) se dobija:

$$k = \frac{u_1 + u_2}{v_1 + v_2}$$

$u_1 + u_2 = k(v_1 + v_2) = 0,6\cdot[2+4)] = 3,6$ .... (d)

Jednačina (c) i (d) prave sistem jednačina sa dvije nepoznate, nepoznata brzina u_2 će se riješiti metodom eliminacije:

$$\begin{array}{rrcl} + & -5u_1 \quad +3u_2 & = & -2 \\ & u_1 \quad +u_2 & = & 3,6 \quad /\cdot 5 \\ \hline & 8u_2 & = & 16 \end{array}$$ .... (e)

$$u_2 = \frac{16}{8} = 2$$

Iz jednačine (d) se definira u_1

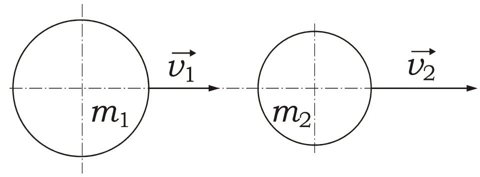
$u_1 = 3,6 - u_2 = 1,6$

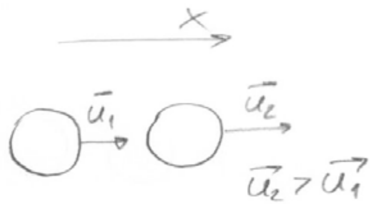
Rješavanjem sistema (e) je utvrđeno da su smjerovi brzina nakon sudara tačno pretpostavljeni, a njihovi intenziteti su:

$$u_1 = 1,6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

$$u_2 = 2,0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Kuglica mase m_1 = 10 kg kreće se brzinom od 5 m/s i sudara se sa drugom, mase m_2 = 5 kg koja se kreće po istom pravcu i u istom smjeru brzinom 3 m/s. Odrediti brzine kuglica nakon sudara ako je koeficijent restitucije sudara k = 0,5.





$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

$$k = \frac{|\vec{u}_1 - \vec{u}_2|}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}$$

$$x: \quad m_1 \cdot v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}$$

$$10 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 10 \cdot u_1 + 5 u_2$$

$$10 u_1 + 5 u_2 = 65$$

$$0{,}5 = \frac{u_2 - u_1}{5 - 3}$$

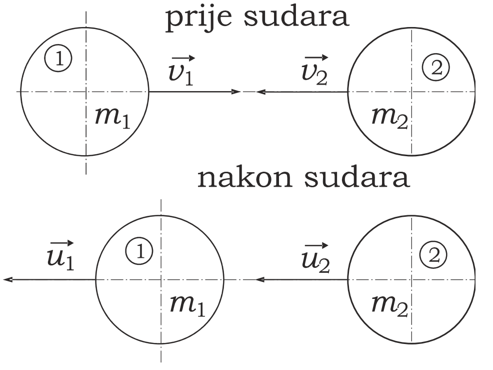
$$-u_1 + u_2 = 1$$

$$\begin{array}{rl} & 10 u_1 + 5 u_2 = 65 \\ + & -10 u_1 + 10 u_2 = 10 \\ \hline & 15 u_2 = 75 \end{array}$$

$$u_2 = \frac{75}{15} \qquad u_2 = 5 \frac{m}{s}$$

$$u_1 = u_2 - 1 = 5 - 1 \qquad u_1 = 4 \frac{m}{s}$$

Kuglica 1 mase $m_1 = 1[\text{kg}]$ kreće se brzinom od $\upsilon_1 = 1\left[\frac{m}{s}\right]$ i sudara se sa kuglicom 2, mase m_2 koja se kreće direktno prema njoj brzinom $\upsilon_2 = 2\left[\frac{m}{s}\right]$. Nakon sudara kuglice se nastavljaju kretati u smjeru kretanja kuglice 2 prije sudara uz odnos brzina $u_1 = 2u_2$. Odrediti masu kuglice 2, m_2, i brzine kuglica nakon sudara (u_1 i u_2) ako je koeficijent restitucije sudara $k = \frac{1}{3}$.



Rješenje:

Osnovne jednačine za rješavanje problema direktnog centralnog sudara su jednačina koja definira jednaku količinu kretanja prije i nakon sudara

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2, \quad \text{(a)}$$

i jednačina koja definira koeficijent restitucije sudara

$$k = \frac{u_r}{\upsilon_r} = \frac{|\vec{u}_1 - \vec{u}_2|}{|\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2|}. \quad \text{(b)}$$

Uvrštavanjem vrijednosti za koeficijent restitucije u (b) i definiranjem relativnih brzina kuglica dobija se:

$$\frac{1}{3} = \frac{u_1 - u_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2}, \quad \text{(c)}$$

a uvrštavanjem uvjeta zadatka $u_1 = 2u_2$ i zadatih vrijednosti intenziteta brzina u (c) slijedi

$$\frac{1}{3} = \frac{2u_2 - u_2}{1+3},$$

$$u_2 = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$u_1 = 2\cdot 1 = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Projektovanjem jednačine (a) na osu sudara dobija se

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = -m_1u_1 - m_2u_2 \quad \text{(d)}$$

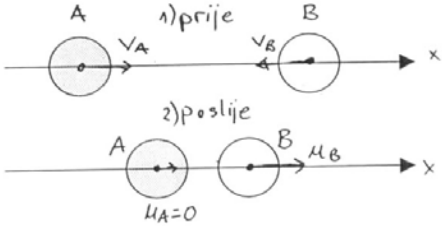
Uvrštavanjem zadatih podataka (m_1, υ_1 i υ_2) i izračunatih intenziteta brzina nakon sudara (u_1, u_2) u jednačinu (d) dobija se tražena masa m_2.

$$1\cdot 1 - 2m_2 = -1\cdot 2 - 1\cdot m_2$$

$$-3m_2 = -3$$

$$m_2 = 3\,\text{kg}$$

Zadatak 2. Dvije jednake kuglice A i B kreću se jedna prema dugoj. Odrediti odnos brzina kuglica prije sudara da bi se kuglica A poslije sudara zaustavila. Koef. sudara je k.



Sistem (dvije kuglice) je prije sudara imao količinu kretanja $\vec{K_1} = m\vec{v_A} + m\vec{v_B}$, a poslije sudara $\vec{K_2} = m\vec{u_A} + m\vec{u_B}$.
U trenutku sudara nema spoljašnjih impulsa (kuglice razmjenjuju impuls međusobno, ali je to unutrašnji impuls). Dakle:

$$\vec{K_2} - \vec{K_1} = \vec{I}^s = 0$$
$$\vec{K_2} = \vec{K_1}$$
$$m\vec{u}_A + m\vec{u}_B = m\vec{v}_A + m\vec{v}_B \quad (1)$$

(A se zaustavi)

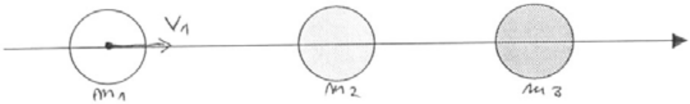
Proj. (1) na x-osu: $m\overset{0}{\cancel{u_A}} + m u_B = m v_A - m v_B \quad (1')$

Koef. rest. $k = \dfrac{u_B}{v_A + v_B} \quad (2) \Rightarrow u_B = k(v_A + v_B) \quad (2')$

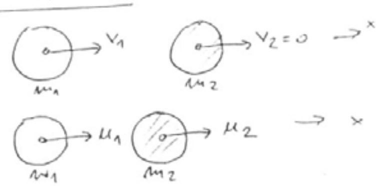
(2') u (1'): $m k (v_A + v_B) = m v_A - m v_B \quad / : m v_B$

$$k\frac{v_A}{v_B} + k = \frac{v_A}{v_B} - 1$$
$$\frac{v_A}{v_B}(k-1) = -1-k \Rightarrow \boxed{\frac{v_A}{v_B} = \frac{1+k}{1-k}}$$

Zadatak 3. Tri kuglice masa m_1, m_2 i m_3 leže u glatkom horizontalnom žljebu međusobno odmaknute i miruju. Prvoj kuglici saopšti se početna brzina v_1 pa ona udari u drugu, a zatim druga udari u treću. Odrediti masu m_2 kuglice da bi treća kuglica dobila najveću moguću brzinu. Koef. sudara je k.



a) Sudar m_1 i m_2



$$\vec{K_2} = \vec{K_1}$$
$$m_1\vec{v_1} + m_2\overset{0}{\cancel{\vec{v_2}}} = m_1\vec{u_1} + m_2\vec{u_2}$$

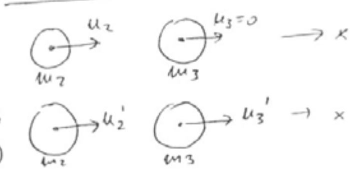
pr. x: $m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$

Koef. rest: $k = \dfrac{u_2 - u_1}{v_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow u_2 = u_1 + k v_1 = \dfrac{m_1 v_1 - m_2 u_2}{m_1} + k v_1$

$\Rightarrow u_2 = (1+k)\dfrac{m_1}{m_1+m_2} v_1$ Ⓐ

b) Sudar m_2 i m_3



$$\vec{K_2}' = \vec{K_2}$$
$$m_2\vec{u_2}' + m_3\vec{u_3}' = m_2\vec{u_2} + \cancel{m_3\vec{u_3}}^{0}$$

pr. x: $m_2 u_2' + m_3 u_3' = m_2 u_2$

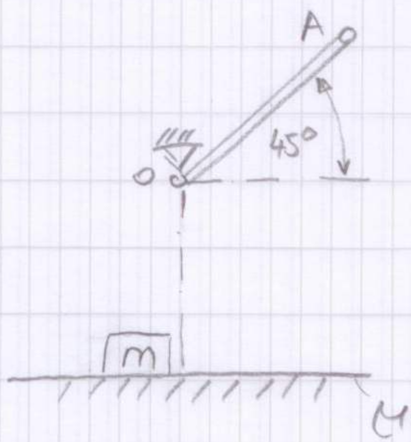
Koef. r. $k = \dfrac{u_3' - u_2'}{u_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow u_3' = (1+k)\dfrac{m_2}{m_2+m_3} u_2$ Ⓑ

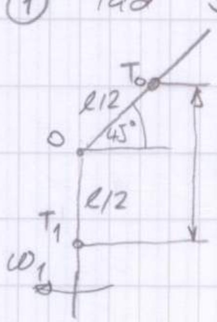
Dakle, iz Ⓐ i Ⓑ: $u_3' = (1+k)^2 \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\dfrac{m_2}{m_2+m_3} v_1$. Treba naći vrijednost m_2 za koju će u_3' biti maksimalno tj. imati ekstrem. Dakle, prvi izvod $\dfrac{du_3'}{dm_2}$ =

$$\frac{du_3'}{dm_2} = m_1(1+k)^2 v_1 \frac{(m_1+m_2)(m_2+m_3) - m_2\left[(m_2+m_3)+(m_1+m_2)\right]}{(m_1+m_2)^2(m_2+m_3)^2} = 0 \quad \text{za} \quad m_2 = \sqrt{m_1 \cdot m_3}$$

Homogeni štap mase m_1 i dužine l učvršćen je gornjim krajem za zglob O i pušten da pada bez početne brzine iz položaja OA. U vertikalnom položaju štap udari od teret mase m koji se uslijed toga počne kretati po horizontalnoj ravni koeficijenta trenja μ. Odrediti ugaonu brzinu štapa prije i poslije udara, zatim brzinu tereta neposredno nakon udara, koeficijent restitucije $k = \frac{1}{3}$.



① Pad štapa



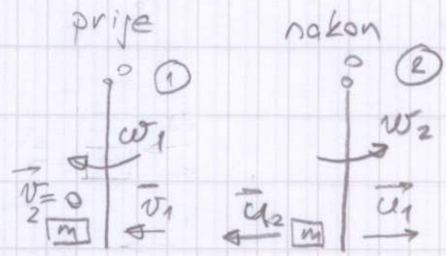
$$E_{K1} - \cancel{E_{K0}}^{\,0} = A_{0,1} = m_1 g h$$

$$\frac{1}{2} I_O \omega_1^2 = m_1 g \cdot \frac{l}{2}(1 + \sin 45°)$$

$$I_O = \frac{m_1 l^2}{3}$$

$$\omega_1^2 = \frac{3g}{2l}(\sqrt{2} + 2) \quad \ldots(1)$$

② sudar



Moment količine kretanja sistema isti prije i nakon sudara (nema dejstva impulsa spoljašnjih sila)

$$\vec{L}_{O1} = \vec{L}_{O2}$$

$$I_O \omega_1 = -I_O \cdot \omega_2 + m \cdot u_2 l$$

$$\frac{m_1 l^2}{3} \cdot \omega_1 = -\frac{m_1 \cdot l^2}{3} \cdot \omega_2 + m \cdot u \cdot l \quad \ldots(2)$$

Koeficijent restitucije:

$$k = \frac{|\vec{u}_1 - \vec{u}_2|}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} = \frac{u_r}{v_r} = \frac{u_2 + u_1}{v_1} = \frac{u_2 + \omega_2 \cdot l}{\omega_1 \cdot l} \quad \dots (3)$$

iz (3):

$$u_2 = l \cdot (k\omega_1 - \omega_2) \quad \dots (4)$$

(4) u (2)

$$\frac{m_1 l^2}{3} \omega_1 = -\frac{m_1 l^2}{3} \omega_2 + m l^2 (k\omega_1 - \omega_2) \quad \dots (5)$$

iz (5); Ugaona brzina nakon sudara:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{m - m_1}{m_1 + 3m} = \sqrt{\frac{3g}{2l}(\sqrt{2}+2)} \frac{m - m_1}{m_1 + 3m} \quad \dots (6)$$

iz (4), brzina tereta nakon sudara:

$$u_2 = l \cdot \omega_1 \left(\frac{1}{3} - \frac{m - m_1}{m_1 + 3m} \right)$$

$$u_2 = l \omega_1 \frac{2(m + m_1)}{3(m_1 + 3m)} = \sqrt{\frac{3}{2} g l (\sqrt{2}+2)} \frac{2(m + m_1)}{3(m_1 + 3m)}$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{2}{3} g \cdot l (\sqrt{2}+2)} \frac{m + m_1}{m_1 + 3m}$$