

9. HIDRAULIČKI PRORAČUN CJEVOVODA



9.1 Osnovne jednadžbe

Hidraulički proračun cjevovoda se temelji na jednadžbi kontinuiteta

$$Q = vA = \text{konst.}$$

i modificiranoj Bernoullijevoj jednadžbi, koja za strujanje od presjeka 1 prema presjeku 2 cijevi glasi

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + h_p - h_T = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_F$$

gdje je h_p visina dobave pumpe, h_T pad visine energije u turbini, a h_F ukupna visina gubitaka između promatranih presjeka. Visina h_F gubitaka mehaničke energije (pretvorbe mehaničke energije u unutarnju) se dijeli na linijske gubitke h_f i lokalne gubitke h_{fm} , tj. vrijedi $h_F = h_f + h_{fm}$.

9.2 Modeliranje linijskih gubitaka

Linijski gubici h_f se modeliraju s pomoću izraza Darcy-Weissbacha koji glasi

$$h_f = \frac{\Delta p_f}{\rho g} = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{8LQ^2}{\pi^2 D^5 g}$$

gdje je λ faktor trenja koji je određen eksperimentalno, a u općem je slučaju funkcija Reynoldsova broja

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{4\rho Q}{\pi D \mu} \quad \text{ili} \quad Re = \frac{v D}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D \nu}$$

i relativne visine k/D hrapavosti stijenke cijevi. U gornjim izrazima: L je duljina cjevovoda; D je promjer cjevovoda; v je srednja brzina strujanja fluida; Q je protok; μ je dinamička viskoznost fluida, a $\nu = \mu / \rho$ kinematička viskoznost.

Za strujanje u okruglim cijevima se uzima da je ono laminarno do $Re=2300$, a pri višim Reynoldsovima se uzima da je turbulentno, iako je u području Reynoldsova broja od 2300 do približno 4000 faktor trenja vrlo nepredvidiv, te je pouzdanost proračuna slaba. Za laminarno strujanje postoji analitičko rješenje za faktor trenja

$$\lambda = \frac{64}{Re}, \text{ za } Re < 2300$$

iz kojeg je jasno da faktor trenja u laminarnom strujanju ne zavisi od hrapavosti stijenke cijevi. U području turbulentnog strujanja najtočnijom se smatra formula Colebrooka koja glasi

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0,86859 \cdot \ln \left(0,2698 \frac{k}{D} + \frac{2,5119}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$$

Iz koje bi se faktor trenja odredio iterativnim postupkom, što je nepraktično, te se preporuča koristiti eksplicitnu formulu Swamee-Jain, koja je dovoljno točna, a primjenjiva praktički za čitavo područje Moodyjeva dijagrama uz $Re > 5000$, a koja glasi

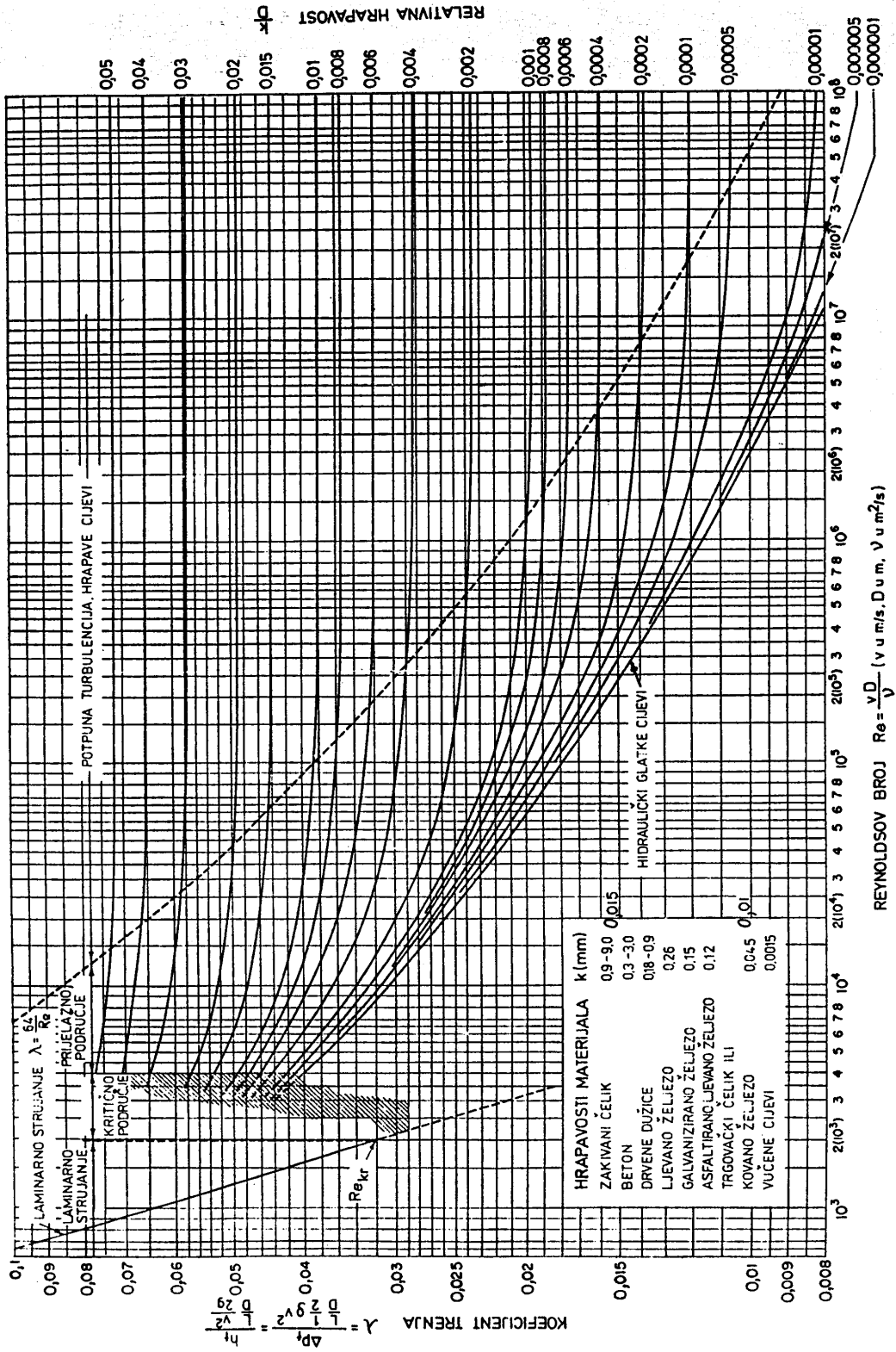
$$\lambda = \frac{1,325}{\left[\ln \left(\frac{k}{3,7D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2}$$

Ovaj izraz vrijedi i za hidraulički glatke cijevi ($k/D=0$) i za područje potpuno izražene turbulencije ($Re \rightarrow \infty$).

Zavisnost faktora trenja λ od Reynoldsova broja Re i relativne visine k/D hrapavosti stijenke cijevi je prikazana grafički Moodyevim dijagramom, prema sljedećoj slici. Uz dijagram su dane neke tipične visine hrapavosti stijenke.

MOODYJEV DIJAGRAM

KOEFICIJENT TRENJA $\lambda = f(Re, \frac{k}{D})$ ZA STRUJANJE U CJEVIMA



Moodyjev dijagram

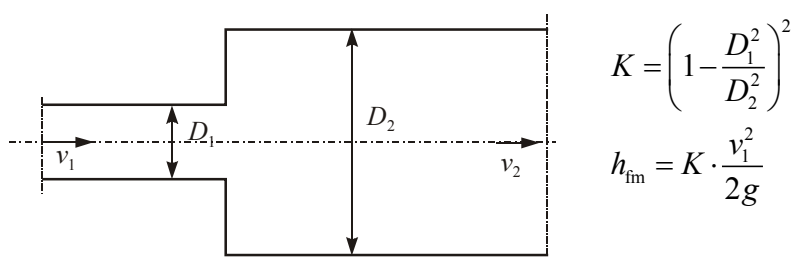
Treba imati na umu da prikazani model linijskih gubitaka vrijedi za strujanje ustaljenim (izobraženim) profilom brzine, gdje je pad tlaka uslijed trenja linearno razmjernan duljini cjevovoda. U određenim dionicama cjevovoda, npr. ulazni dio cjevovoda priključen na veliki spremnik, strujanje iza koljena, ventila, naglog proširenja i slično, strujanje neće biti ustaljenim profilom. U realnim cjevovodima je duljina dionica u kojima je strujanje ustaljenim profilom brzine obično puno veća od duljine dionica s neustaljenim profilom te se prikazani model s dovoljnom točnošću može primijeniti na čitavu duljinu cjevovoda.

9.3 Modeliranje lokalnih gubitaka

Lokalni gubici strujanja nastaju pri strujanju kroz koljena, ventile, zasune, filtre, nagla proširenja i slično. Gledajući lokalno u svim nabrojanim situacijama, strujanje je trodimenzijsko, ali se pretpostavlja da su dimenzije prostora u kojem se to strujanje događa zanemarivo male u odnosu na ukupnu duljinu cjevovoda pa se takav prostor može smatrati točkom cjevovodnog sustava, a nastali gubitak lokalnim ili mjesnim. Jasno je da je gubitak mehaničke energije vezan uz strujanje pa će i visina lokalnih gubitaka biti razmjerna visini kinetičke energije u obliku

$$h_{\text{lm}} = K \frac{v^2}{2g} = K \frac{8Q^2}{\pi^2 D^4 g}$$

gdje je K koeficijent lokalnog gubitka. Usporedbom Darcy-Weissbachove formule s gornjim izrazom može se reći da se i linijski gubici mogu izraziti koeficijentom gubitka $K = \lambda L/D$. U općem je slučaju koeficijent K funkcija Reynoldsova broja i relativne visine hrapavosti stijenke. Kao što i faktor trenja λ pri visokim vrijednostima Reynoldsova broja postaje konstantnim tako se i koeficijent lokalnog gubitka može smatrati konstantnim pri visokim vrijednostima Reynoldsova broja. Za slučaj da ulazna i izlazna brzina nisu jednake uz koeficijent lokalnog gubitka mora točno stajati na koju visinu kinetičke energije se on odnosi, iako se najčešće koristi najveća visina kinetičke energije. Tako je na sljedećoj slici definiran koeficijent lokalnog gubitka naglog proširenja (koji se može dobiti teorijskim razmatranjima), a s obzirom da ulazna i izlazna brzina nisu jednake definiran je i izraz za visinu lokalnih gubitaka da se zna uz koju visinu kinetičke energije se gubici računaju.



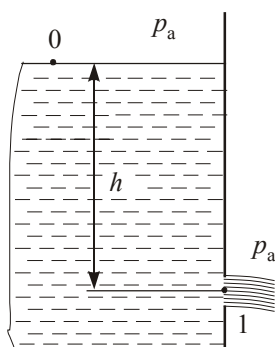
Posebni slučaj naglog proširenja je utjecanje u veliki spremnik gdje se može uzeti da je $D_2 \gg D_1$ te vrijedi da je $K=1$, kao što je i prije prikazano. Sljedeća tablica daje pregled nekih tipičnih lokalnih gubitaka.

Lokalni gubitak	Koeficijent lokalnog gubitka K
Ulaz iz spremnika u cijev: oštri rubovi	0,50
lijepo zaobljeni rubovi	0,04
Koljeno 90° - veliki radijus luka	0,20
- mali radijus luka	0,70
Kuglasti ventil: potpuno otvoren	0,05

1/3 zatvoren	5,50
Ventil s pladnjem – potpuno otvoren	10,00

Veza među faktorom brzine i koeficijentom lokalnog gubitka

Pri analizi istjecanja kroz otvore uveden je pojam faktora brzine C_v kojim se uzima u obzir gubitak mehaničke energije uslijed trenja. Isti se ti gubici mogu obuhvatiti koeficijentom lokalnog gubitka K .



Gledajući sliku može se pisati izraz za brzinu istjecanja $v = C_v \sqrt{2gh}$, a modificirana Bernoullijeva jednačba od točke 0 to točke 1 uz postojanje lokalnih gubitaka glasi

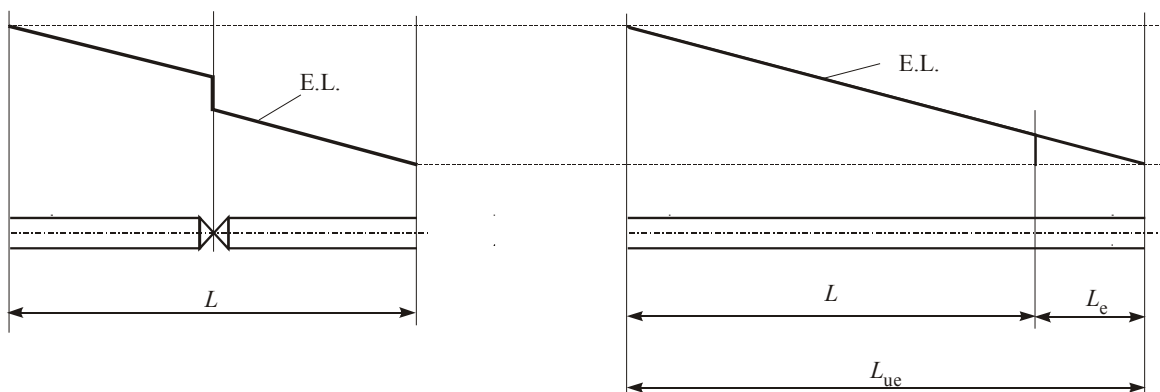
$$h = \frac{v^2}{2g} + K \cdot \frac{v^2}{2g}$$

Usporedbom tih izraza slijedi veza između koeficijenta brzine C_v i koeficijenta lokalnog gubitka K , oblika $K = \frac{1}{C_v^2} - 1$

Očito je da za $C_v=1$ (strujanje bez gubitaka), slijedi $K=0$.

9.4 Ekvivalentna duljina cjevovoda

Kod strujanja kroz cijev konstantnog promjera lokalni gubici se mogu zamijeniti ekvivalentnom duljinom cjevovoda. Sljedeća slika prikazuje energetska linija za strujanje kroz cijev konstantnog promjera s ugrađenim ventilom, koja ima skokoviti pad visine energije na mjestu lokalnog gubitka.



Na desnoj slici je lokalni gubitak ventila zamijenjen ekvivalentnom duljinom L_e cjevovoda, tj. cijev je fiktivno produžena da bi pad tlaka u oba slučaja bio isti. Jasno je da vrijedi

$$K \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{L_e}{D} \frac{v^2}{2g} \quad \text{iz čega je} \quad L_e = D \frac{K}{\lambda}$$

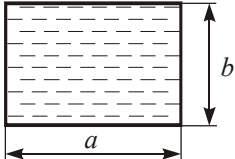
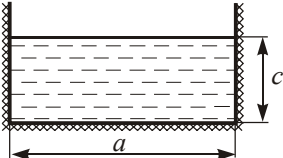
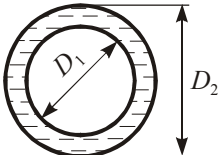
9.5 Hidraulički proračun cjevovoda nekružnog poprečnog presjeka

Opisani postupak za hidraulički proračun cjevovoda kružnog poprečnog presjeka se može primijeniti i za proračun cjevovoda nekružnog poprečnog presjeka. Proračun se temelji na

ekvivalentnom promjeru D_e , a vrijedi za slučaj turbulentnog strujanja fluida. Ekvivalentni promjer je definiran kao

$$D_e = 4R_H = 4 \frac{S_T}{O}$$

gdje je S_T ploština poprečnog presjeka toka, a O oplakani opseg (duljina linije dodira fluida i stijenke cijevi). Odnos $S_T/O = R_H$ se naziva hidrauličkim radijusom. Na sljedećoj slici su definirani ekvivalentni promjeri za neke tipične situacije strujanja fluida.

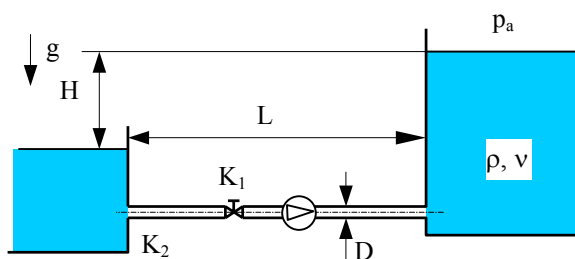
Slučaj strujanja	Ekvivalentni promjer
Strujanje punim pravokutnim presjekom 	$D_e = \frac{2ab}{a+b}$
Strujanje u otvorenom pravokutnom kanalu 	$D_e = \frac{4ac}{a+2c}$
Strujanje između dvije koaksijalne cijevi 	$D_e = D_2 - D_1$

Faktor trenja λ za ustaljeno strujanje kroz cijevi nekružnog presjeka se također očitava iz Moodyjeva dijagrama ili računa iz formule Swamee-Jaina s tim što su Reynoldsov broj

$Re = \frac{v \cdot D_e}{\nu}$ i relativna visina hrapavosti k/D_e definirani na temelju ekvivalentnog promjera.

Srednja brzina v u svim izrazima se definira omjerom protoka i stvarne ploštine poprečnog presjeka toka $v = \frac{Q}{S_T}$. Izraz za visinu linijskih gubitaka glasi $h_f = \lambda \frac{L}{D_e} \frac{v^2}{2g}$ u kojem v ponovo označuje stvarnu srednju brzinu strujanja fluida.

9.6 Ilustracija modificirane Bernoullijeve jednadžbe



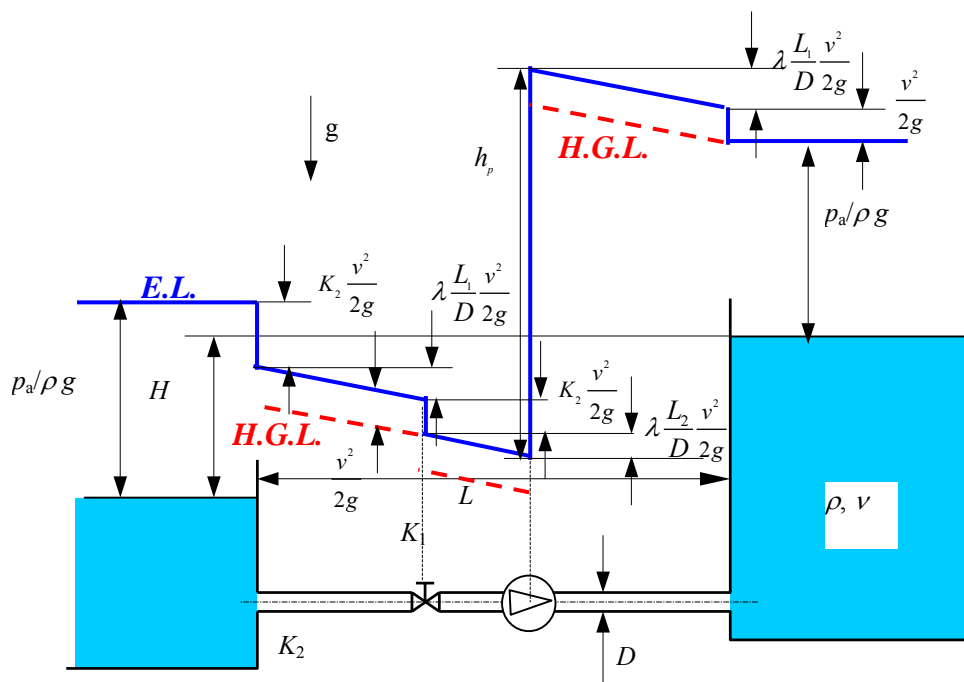
Modificirana Bernoullijeva jednadžba

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{8Q^2}{D_1^4 \pi^2 g} + z_1 + h_p - h_T = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{8Q^2}{D_2^4 \pi^2 g} + z_2 + \underbrace{\sum \lambda \frac{L}{D} \frac{8Q^2}{D^4 \pi^2 g}}_{h_f} + \underbrace{\sum K \frac{8Q^2}{D^4 \pi^2 g}}_{h_{fm}}$$

koja se za slučaj postojanja pumpe u cjevovodu prema slici može svesti na oblik

$$\frac{p_a}{\rho g} + h_p = \frac{p_a}{\rho g} + H + \lambda \frac{L}{D} \frac{8Q^2}{D^4 \pi^2 g} + K_1 \frac{8Q^2}{D^4 \pi^2 g} + K_2 \frac{8Q^2}{D^4 \pi^2 g} + \frac{8Q^2}{D^4 \pi^2 g}$$

može se grafički ilustrirati crtanjem energetske linije, hidrauličke gradijentne linije i geodetske linije



9.7 Postupci proračuna jednostavnih cjevovoda

Kategoriji hidraulički jednostavnih cjevovoda pripadaju svi cjevovodi jednostavne topološke strukture (cjevovod može biti po volji razgranat, ali cjevovod ne smije biti zatvoren u prsten) kod kojih se problem proračuna svodi na postavljanje jedne modificirane Bernoullijeve jednadžbe, a koja se za slučaj postojanja pumpe u cjevovodu može svesti na oblik

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{8Q^2}{D_1^4 \pi^2 g} + z_1 + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{8Q^2}{D_2^4 \pi^2 g} + z_2 + \underbrace{\sum \lambda \frac{L}{D} \frac{8Q^2}{D^4 \pi^2 g}}_{h_f} + \underbrace{\sum K \frac{8Q^2}{D^4 \pi^2 g}}_{h_{fm}} \quad (a)$$

Ovom se izrazu pridodaje izraz za faktor trenja

$$\lambda = \frac{1,325}{\left[\ln \left(\frac{k}{3,7D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2} \quad (b)$$

i izraz za Reynoldsov broj

$$Re = \frac{4\rho Q}{\pi D \mu} \quad (c)$$

što čini osnovni sustav jednadžbi za hidraulički proračun jednostavnih cjevovoda. Iz ovog sustava triju jednadžbi mogu se izračunati tri nepoznanice. S obzirom da se radi o sustavu nelinearnih jednadžbi one će se u većini slučajeva rješavati iterativnim postupkom.

Ako je npr. poznata geometrija cjevovoda (kao na slici uz ilustraciju Bernoullijeve jednadžbe) i raspoloživa visina energije za svladavanje gubitaka h_p , a potrebno je odrediti protok Q , sustav jednadžbi (a) do (c) se rješava iterativnim postupkom.

$$\frac{p_a}{\rho g} + h_p = \frac{p_a}{\rho g} + H + \lambda \frac{L}{D} \frac{8Q^2}{D^4 \pi^2 g} + K_1 \frac{8Q^2}{D^4 \pi^2 g} + K_2 \frac{8Q^2}{D^4 \pi^2 g} + \frac{8Q^2}{D^4 \pi^2 g} \quad (\text{a})$$

$$\lambda = \frac{1,325}{\left[\ln \left(\frac{k}{3,7D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2} \quad (\text{b})$$

$$Re = \frac{4\rho Q}{\pi D \mu} \quad (\text{c})$$

Iterativni postupak započinje pretpostavkom o faktoru trenja. Obično se pretpostavlja turbulentno strujanje u režimu potpuno izražene hrapavosti (vrijednost faktora trenja se očitava iz Moodyjeva dijagrama ili izračuna iz formule Swamee-Jaina uz pretpostavku $Re = \infty$). S tom vrijednošću λ se ulazi u izraz (a) te se izračunava protok.

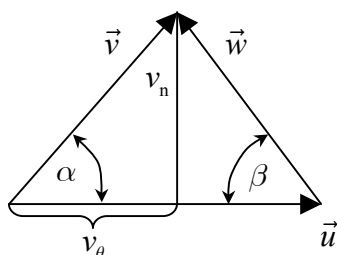
$$Q = \sqrt{\frac{g\pi^2 D^5 (h_p - H)}{8(K_1 D + \lambda L + K_2 D + D)}} \quad (\text{a})$$

S tako izračunatim protokom Q se računa Reynoldsov broj iz izraza (c), te se ponovo računa nova vrijednost faktora trenja λ iz izraza (b). Nakon toga se postupak ponavlja. Iterativni postupak se smatra završenim kada se vrijednost protoka Q prestane mijenjati u prve tri signifikantne znamenke, a najčešće su potrebne svega dvije ili tri iteracije. Iterativni postupak se prikazuje kroz sljedeću tablicu, koja se popunjava redak po redak

Broj iteracije	λ	Q	Re
0			
1			
...			

9.8 Energetske karakteristike pumpe

Realna karakteristika hidrauličkog stroja



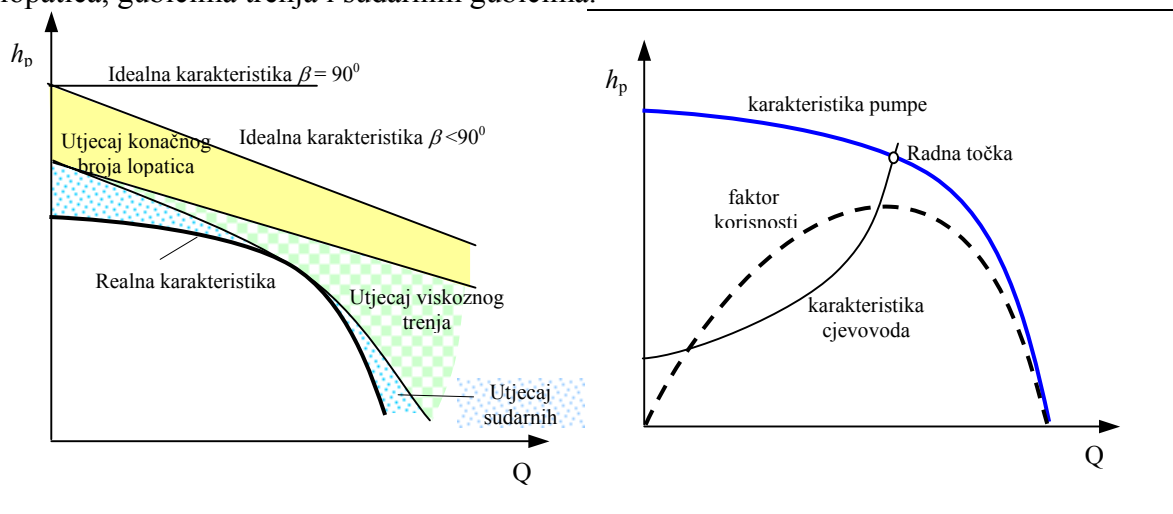
Eulerova jednadžba i trokut brzina za hidrauličke strojeve

$$h_p = \frac{1}{g} [u_2(u_2 - w_2 \cos \beta_2) - u_1(u_1 - w_1 \cos \beta_1)] = \frac{1}{g} (u_2 v_{\theta 2} - u_1 v_{\theta 1})$$

Iz jednadžbe jasno da će visina dobave pumpe biti maksimalna pri $v_{\theta 1} = 0$ (što znači da je apsolutna brzina na ulazu u lopatice okomita na obodnu brzinu)

$$h_p = \frac{u_2 v_{\theta 2}}{g} = \frac{u_2 (u_2 - w_2 \cos \beta_2)}{g} = \frac{\omega_2 r_2}{g} \left(\omega_2 r_2 - \frac{Q}{A} \cos \beta_2 \right)$$

Iz Eulerove jednadžbe za hidrauličke strojeve slijedi da je visina dobave pumpe linearno zavisna od protoka. Ovaj izraz je izveden pri pretpostavci strujanja neviskoznog fluida i beskonačnog broja beskonačno tankih lopatica. Idealna karakteristika pumpe prikazana je na dijagramu ispod. Realna karakteristika pumpe (prikazana na dijagramu ispod lijevo) ima visinu dobave pumpe umanjenu za gubitke nastalih konačnim brojem konačno tankih lopatica, gubicima trenja i sudarnim gubicima.



Radna točka pumpe

U otvorenim cjevovodnim sustavima visinom dobave pumpe se svladava razliku energija Δh_{21} i gubitke trenja, dok u zatvorenim (cirkulacijskim) sustavima pumpa svladava samo gubitke trenja. Uz pretpostavku da su gubici razmjerni kvadratu protoka, potreba za visinom dobave pumpe može se općenito prikazati funkcijom $h = \Delta h_{21} + rQ^2$ što označuje parabolu koja se naziva karakteristikom cjevovoda. Dijagram (slika gore desno) prikazuje primjer na kojem je prikazana karakteristika pumpe (plava krivulja) s ucrtanom karakteristikom cjevovoda (crna krivulja). Crtkana plava krivulja označuje faktor korisnosti pumpe. Visina dobave pumpe je maksimalna kod nultog protoka, a maksimalni je protok pri nultoj visini dobave pumpe. Radna točka pumpe definirana je presjekom karakteristike pumpe i karakteristike cjevovoda. Pumpu treba izabrati tako da radna točka padne u područje maksimalnog faktora iskoristivosti pumpe.

Zakoni sličnosti

Karakteristika pumpe dana je izrazom

$$e_p = g \cdot h_p = \omega_2 r_2 \left(\omega_2 r_2 - \frac{Q}{A} \cos \beta_2 \right) \text{ ili } \Phi(e_p, \omega, D, Q) = 0$$

primjenom dimenzione analize izvodi se bezdimenziona zavisnost

$$\psi = \frac{e_p}{\omega^2 D^2} = \frac{g \cdot h_p}{\omega^2 D^2} = f\left(\frac{Q}{\omega D^3}\right) = f(\varphi)$$

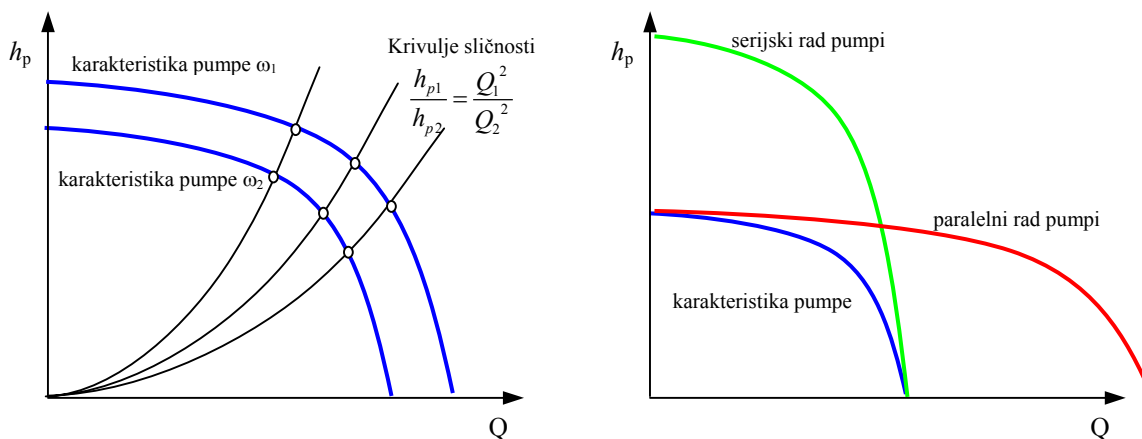
Dakle svi hidrodinamički slični strojevi opisani su jednom bezdimenzionskom krivuljom $\psi = f(\varphi)$

Primjer: Ista pumpa radi na dva različita broja okretaja

Ukoliko obje pumpe rade u istim režimima rada oba bezdimenzijska parametra moraju biti jednaka (promjer rotora D identičan je za oba režima rada)

$$\psi_1 = \psi_2 \quad \varphi_1 = \varphi_2 \quad \text{odnosno} \quad \psi = \left(\frac{g \cdot h_p}{\omega^2 D^2}\right)_1 = \left(\frac{g \cdot h_p}{\omega^2 D^2}\right)_2 \quad \varphi = \left(\frac{Q}{\omega D^3}\right)_1 = \left(\frac{Q}{\omega D^3}\right)_2 \quad \text{uz } D = \text{const.}$$

Izrazi prelaze u oblik $\frac{h_{p1}}{h_{p2}} = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}$ $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ $\frac{h_{p1}}{h_{p2}} = \frac{Q_1^2}{Q_2^2}$ ili grafički na dijagramu ispod lijevo



Spajanje pumpi

Često se u praksi radi s paralelno ili serijski spojenim pumpama. U paralelnom radu jednakih pumpi visina dobave je zajednička za sve pumpe, a ukupni protok je jednak zbroju protoka kroz sve pumpe. U serijskom radu pumpi protok je kroz svaku pumpu jednak, a ukupna visina dobave jednaka je zbroju visina dobava svih pumpi. Slika gore desno prikazuje karakteristiku jedne pumpe (plava krivulja), te karakteristike serijskog rada (zeleno krivulja) i paralelnog rada (crvena krivulja) dviju takvih pumpi.