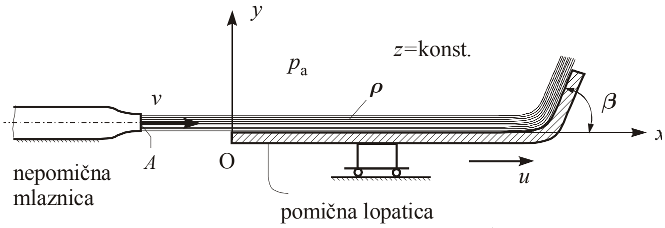
# 8. PRIMJENA OSNOVNIH ZAKONA DINAMIKE FLUIDA NA STRUJANJE U HIDRAULIČKIM STROJEVIMA

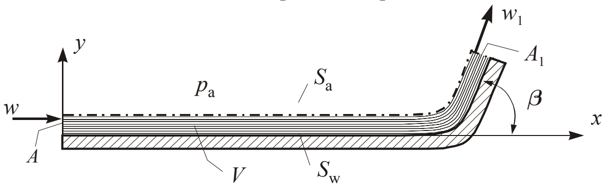
## 8.1 Osnovni zakoni u koordinatnom sustavu koji se giba pravocrtno brzinom *u*

Koordinatni sustav koji se giba konstantnom brzinom $\vec{u}$ (konstantnom po veličini i smjeru) je inercijski koordinatni sustav. Promatrač iz apsolutno mirujućeg koordinatnog sustava mjeri apsolutnu brzinu $\vec{v}$, a promatrač koji se giba zajedno s koordinatnim sustavom mjeri relativnu brzinu $\vec{w}$, pri čemu vrijedi $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$. Svi zakoni mehanike fluida u koordinatnom sustavu koji se giba konstantnom brzinom su istog oblika kao i za apsolutno mirujući koordinatni sustav uz uvjet da se umjesto apsolutne brzine uzme relativna brzina.

Primjer: sila mlaza na pomičnu lopaticu




Lopatica se giba konstantnom brzinom $u$, a fluid u mlazu površine $A$ poprečnog presjeka struji brzinom $v$. Za promatrača iz koordinatnog sustava O$xy$ koji se giba zajedno s lopaticom, fluid nailazi na lopaticu relativnom brzinom $w = v - u$ (sve su brzine horizontalne pa vrijedi algebarski zbroj).

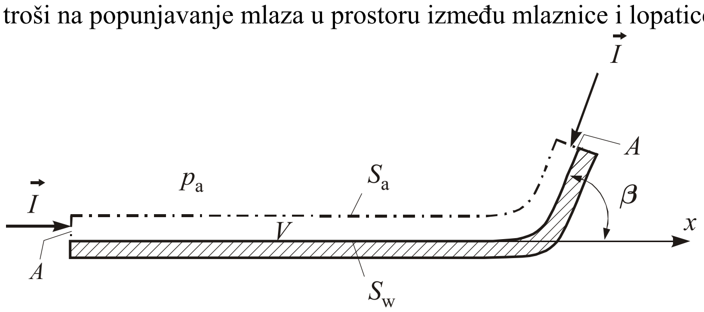



Slika lijevo prikazuje kontrolni volumen koji obuhvaća fluid koji je u dodiru s lopaticom, s ucrtanim relativnim brzinama. Kontrolna površina se sastoji od ulaznog dijela $A$, izlaznog $A_1$, ruba mlaza $S_a$, te površine $S_w$ na kojoj se ostvaruje sila dodira mlaza i lopatice.

Bernoullijeva jednadžba od ulaznog do izlaznog presjeka uz pretpostavku da je lopatica u horizontalnoj ravnini glasi

$\frac{p_a}{\rho g} + \frac{w^2}{2g} + z = \frac{p_a}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} + z$ iz koje je jasno da vrijedi $w_1 = w$

Jednadžba kontinuiteta glasi $Q_{rel} = wA = w_1 A_1$ iz koje je jasno da je $A_1 = A$. Treba naglasiti da je $Q_{rel}$ relativni protok kojim fluid struji preko lopatice i da je taj manji od apsolutnog protoka $Q = vA$ kojim fluid izlazi iz mlaznice, jer se razmak između mlaznice i lopatice stalno povećava, te se dio apsolutnog protoka troši na popunjavanje mlaza u prostoru između mlaznice i lopatice.




Sila fluida na lopaticu definirana je jednadžbom količine gibanja. Veličine impulsnih funkcija na ulaznom i izlaznom presjeku su jednake, tj vrijedi $I = \rho w^2 A = \rho Q_{rel} w$, dok je na površini $S_a$ impulsna funkcija jednaka nuli. Sila fluida na lopaticu je jednaka vektorskom zbroju impulsnih funkcija.

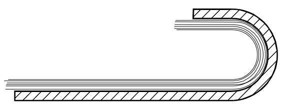
Komponenta sile u smjeru osi x definirana je izrazom:

$$F_x = I - I\cos\beta = \rho w^2 A(1-\cos\beta) = \rho w Q_{rel}(1-\cos\beta)$$

Kad bi to bila jedina sila na lopaticu u smjeru osi $x$, lopatica bi se po II. Newtonovom zakonu ubrzavala, što je protivno pretpostavci da se lopatica giba konstantnom brzinom $u$. Dakle zaključuje se da za održavanje konstantne brzine na lopaticu mora izvana djelovati sila $-F_x$ koja će ju kočiti (uravnotežiti silu fluida na lopaticu). Tim kočenjem se dobiva rad (lopatica djeluje poput turbine), a snaga tog kočenja je definirana izrazom

$$P_T = F_x \cdot u = \rho u w Q_{rel}(1 - \cos\beta)$$

Jasno je da će snaga biti maksimalna za $\beta = 180^\circ$ i jednaka nuli za $\beta = 0^\circ$



$\beta = 180^\circ$



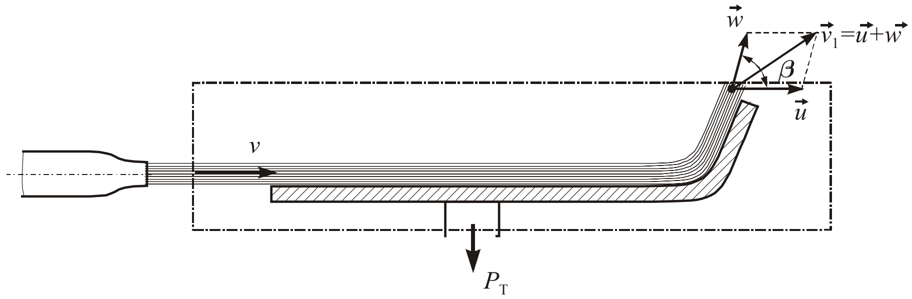
(fluid je neviskozan pa nema sile u $x$ smjeru, tj. snaga je jednaka nuli)

$\beta = 0^\circ$

Pad visine energije definiran je izrazom

$$h_\mathrm{T} = \frac{P_\mathrm{T}}{\rho g Q_\mathrm{rel}} = \frac{uw}{g}\left(1-\cos\beta\right)$$

Do istog se rezultata moglo doći promatranjem problema iz apsolutnog koordinatnog sustava. Slika prikazuje kontrolni volumen koji miruje, te trokut brzina na izlazu kojim se definira apsolutna brzina $\vec{v}_1$.

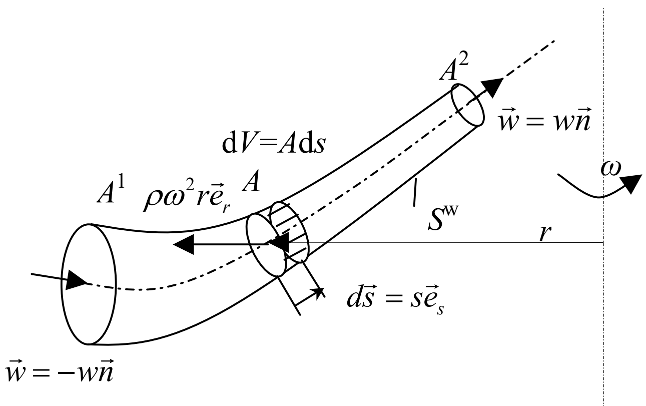



Budući da se kroz kontrolnu površinu izmjenjuje snaga s okolinom (odvodi se snaga $P_\mathrm{T}$), snaga na izlazu će biti manja od snage na ulazu za odvedenu snagu, tj. prema Bernoullijevoj jednadžbi (uzimajući u obzir da su tlak i visina konstantni) vrijedi

$$\frac{v_1^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} - h_\mathrm{T},$$

a budući da vrijedi $v_1^2 = \vec{v}_1\cdot\vec{v}_1 = \vec{w}\cdot\vec{w} + 2\vec{w}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{u} = w^2 + 2wu\cos\beta + u^2$ i $v = u + w$, što uvršteno u Bernoullijevu jednadžbu daje $h_\mathrm{T} = \dfrac{uw}{g}\left(1-\cos\beta\right)$.

## 8.2 Bernoullijeva jednadžba za rotirajuću strujnu cijev




Pretpostavke:

1. Fluid je nestlačiv $\rho = const.$
2. Fluid je neviskozan $\mu = 0$, $\vec{\sigma} = -p\vec{n}$
3. $u = const.$
4. $\vec{q} = 0$
5. Strujanje je stacionarno $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\underbrace{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V_\mathrm{M}} \rho e \mathrm{d}V}_{\text{Brzina promjene energije } V_\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V_\mathrm{M}} \rho\left(u + \frac{w^2}{2}\right)\mathrm{d}V = \underbrace{\int_{V_\mathrm{M}} \rho\vec{f}\cdot\vec{w}\mathrm{d}V}_{\text{snaga masenih sila na } V_\mathrm{M}} + \underbrace{\int_{S_\mathrm{M}} \vec{\sigma}\cdot\vec{w}\mathrm{d}S}_{\text{snaga vanjskih površinskih sila na } V_\mathrm{M}} - \underbrace{\int_{S_\mathrm{M}} \vec{q}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S}_{\text{brzina dovođenja topline na } V_\mathrm{M}}$$

$$\underbrace{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V_\mathrm{M}} \rho u \mathrm{d}V}_{=0} + \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V_\mathrm{M}} \rho\frac{w^2}{2}\mathrm{d}V = \int_{V_\mathrm{M}} \rho\left(\underbrace{-g\vec{k}}_{gravitacija} + \underbrace{\omega^2 r\vec{e}_r}_{centrifugalna} + \underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{w}}_{Koriolis}\right)\cdot\vec{w}\mathrm{d}V + \underbrace{\int_{S_\mathrm{M}} \vec{\sigma}\cdot\vec{w}\mathrm{d}S}_{\text{snaga vanjskih površinskih sila na } V_\mathrm{M}} - \underbrace{\int_{S_\mathrm{M}} \vec{q}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S}_{=0}$$

Integracijom jednadžbe očuvanja energije, po kontrolnom volumenu prema slici, dobije se

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{KV}\frac{1}{2}\rho w^2\,\mathrm{d}V}_{\rho Q\int_1^2\frac{\partial w}{\partial s}\mathrm{d}s=0}+\underbrace{\int_{KP}\frac{1}{2}\rho w^2\left(\vec{w}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S}_{\frac{1}{2}\rho Q\left(w_2^2-w_1^2\right)}=\underbrace{\int_{KV}\rho g\vec{k}\cdot\vec{w}\mathrm{d}V}_{-\rho Qg\left(z_2-z_1\right)}+\underbrace{\int_{KV}\rho\omega^2 r\vec{e}_r\cdot\vec{w}\mathrm{d}V}_{\frac{1}{2}\rho Q\left(\omega_2^2 r_2^2-\omega_1^2 r_1^2\right)}+\underbrace{\int_{KP}\left(-p\vec{n}\right)\cdot\vec{w}\mathrm{d}S}_{-Q\left(p_2-p_1\right)}$$

gdje su $v_1$ i $v_2$ prosječne brzine na presjecima $A^1$ i $A^2$, a $Q$ protok kroz cijev. Primjenom zakona očuvanja energije za jednodimenzijsko strujanje u rotirajućoj cjevčici izbodi se Bernoullijeva jednadžba za rotirajuću strujnu cijev

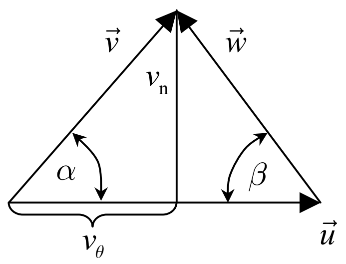
$$\underbrace{\left[\left(\rho\frac{w^2-\omega^2 r^2}{2}+p+\rho gz\right)Q\right]_2}_{\text{snaga na izlazu iz cijevi}}=\underbrace{\left[\left(\rho\frac{w^2-\omega^2 r^2}{2}+p+\rho gz\right)Q\right]_1}_{\text{snaga na ulazu u cijev}}$$

Obodna brzina $u$ definirana je izrazom $u=\omega r$.

$$\frac{w_2^2-u_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+z_2=\frac{w_1^2-u_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1$$

## 8.3 Eulerova jednadžba za turbostrojeve

Promatrač iz koordinatnog sustava koji rotira zajedno s rotorom mjeri relativnu brzinu $\vec{w}$ koja je tangencijalna na lopatice. Obodna brzina $\vec{u}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ je na ulazu u rotor po veličini jednaka $u_1=\omega R_1$, a na izlazu $u_2=\omega R_2$ i okomita je na radijus. Apsolutna brzina $\vec{v}$ je zbroj obodne i relativne brzine $\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}$, što se prikazuje trokutom brzina. Kut $\beta$ je kut lopatice, a označuje kut između vektora relativne brzine $\vec{w}$ (tangenta na lopaticu) i negativne obodne brzine $-\vec{u}$. Sljedeće slika prikazuje primjer trokuta brzina, na kojem je označen i kut $\alpha$ definiran kao kut između obodne i apsolutne brzine.




Jasno je da vrijede relacije:

$$v^2=u^2+w^2-2uw\cos\beta$$

$$v_\theta=u-w\cos\beta$$

$$v_\mathrm{n}=w\sin\beta$$

Apsolutna brzina se može rastaviti u radijalni i obodni smjer, gdje je radijalna komponenta okomita na ulazni i izlazni presjek, pa se označuje s $v_\mathrm{n}$, a obodna s $v_\theta$. Ako se jedinični vektori u radijalnom i obodnom smjeru označe s $\vec{e}_r$ i $\vec{e}_\theta$ (neka uvijek gleda u smjeru obodne brzine) tada vrijedi $\vec{v}=v_\mathrm{n}\vec{e}_r+v_\theta\vec{e}_\theta$.

Bernoullijeva jednadžba duž strujnice od ulaza do izlaza iz pumpe kaže da će se energija na izlazu povećati za visinu dobave pumpe, tj. vrijedi

$$\frac{v_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+z_2=\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1+h_\mathrm{P}$$

Ako se u Bernoullijevoj jednadžbi apsolutne brzine prikažu preko obodne i relativne brzine ($v^2=u^2+w^2-2uw\cos\beta$), te od nje oduzme Bernoullijeva jednadžba za rotirajuću strujnu cijev

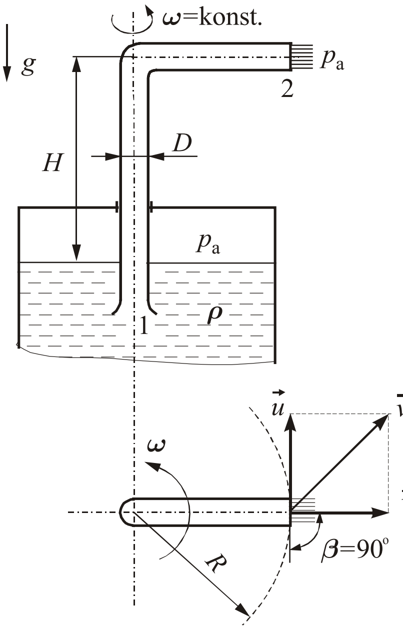
$$\frac{w_2^2-u_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+z_2=\frac{w_1^2-u_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1$$

Izvodi se Eulerova jednadžba za turbostrojeve

$$h_{\mathrm{P}}=\frac{1}{g}\left[u_2\left(u_2-w_2\cos\beta_2\right)-u_1\left(u_1-w_1\cos\beta_1\right)\right]=\frac{1}{g}\left(u_2v_{\theta 2}-u_1v_{\theta 1}\right)$$

## 8.4 Primjena na rotirajuću cjevčicu

Osnovna Eulerova jednadžba za turbostrojeve i Bernoullijeva jednadžba za rotirajuću strujnicu se mogu primijeniti i na strujanje u rotirajućoj cjevčici. Naravno i dalje vrijede pretpostavke o neviskoznom nestlačivom strujanju, uz dodatnu pretpostavku da je promjer cjevčice mali u odnosu na njenu duljinu. Svinuta cjevčica može raditi poput primitivne pumpe, koja podiže fluid na visinu $H$ (slika lijevo) ili poput turbine, koja pretvara raspoloživu visinu $H$ u mehanički rad (slika desno). Ako se cjevčici snaga niti dovodi niti odvodi govori se o slobodnorotirajućoj cijevi (ako se zanemare učinci trenja to bi bio slučaj poljevača trave). Jasno je da za slučaj pumpe cjevčica prije početka rotacije mora biti ispunjena fluidom, inače se strujanje ne bi uspostavilo.



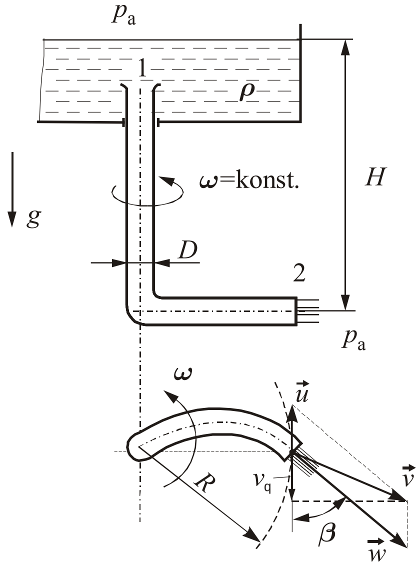

*Primitivna pumpa*

Bernoullijeva jednadžba za rotirajuću strujnicu:

$$0 = H + \frac{w^2 - \overbrace{(\omega R)^2}^{u^2}}{2g}$$

Iz trokuta brzina je: $v_\theta = u = \omega R$

(brzina $v_\theta$ je uvijek pozitivna tj. gleda u smjeru brzine $\vec{u}$ pa će moment i snaga biti pozitivni, odnosno radi se o pumpi).




*Primitivna turbina*

Bernoullijeva jednadžba za rotirajuću strujnicu:

$$H = \frac{w^2 - \overbrace{(\omega R)^2}^{u^2}}{2g}$$

Iz trokuta brzina je: $v_\theta = u - w\cos\beta$

(ako je brzina $v_\theta$ pozitivna radi se o pumpi, ako je negativna radi se o turbini, a ako je jednaka nuli o slobodnorotirajućoj cijevi)

Jednadžba kontinuiteta: $Q = w\dfrac{D^2\pi}{4} = \text{konst.}$

Visina dobave pumpe: $h_\text{P} = \dfrac{uv_\theta}{g}$ (kod turbine će se dobiti negativna visina dobave)

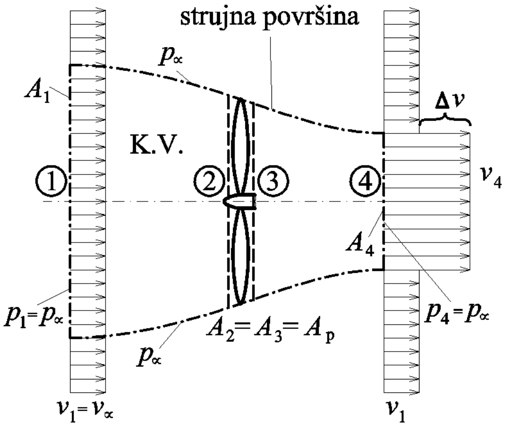
Snaga koja se predaje fluidu: $P_\text{P} = \rho g Q h_\text{P}$ (za turbinu negativno)

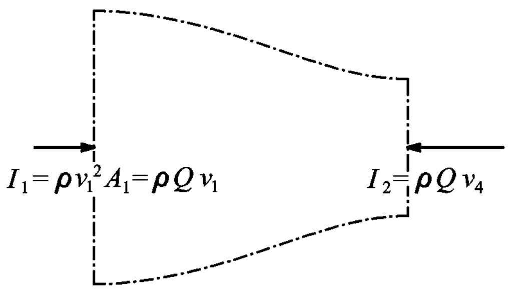
Moment sile kojom cjevčica djeluje na fluid: $M_\text{P} = \dfrac{P}{\omega}$

## 8.5 Primjena na hidrauličke strojeve

*Primitivna teorija propelera*

Ova se teorija temelji na idealiziranoj slici strujanja uz pretpostavku neviskoznog strujanja fluida i definira samo okvirne odnose među integralnim veličinama karakterističnim za propeler, pa se ovom teorijom propeleri ne mogu projektirati. Analizirat će se slučaj avionskog propelera koji se giba konstantnom brzinom $v_\infty$ u mirujućem zraku. Iz koordinatnog sustava vezanog na propeler izgledat će kao da fluid nailazi na propeler brzinom $v_\infty$. Sljedeća slika shematski prikazuje propeler i odabrani kontrolni volumen.



Površina $A_1$ kroz koju fluid ulazi u kontrolni volumen je dovoljno daleko ispred propelera, tako da je profil brzine jednolik, a u tom presjeku vlada neporemećeni tlak $p_\infty$. Neposredno ispred i neposredno iza propelera (presjeci $A_2$ i $A_3$) površine su jednake $A_2 = A_3 = A_\mathrm{P}$, a prema jednadžbi kontinuiteta i brzine su jednake $v_2 = v_3 = v_\mathrm{P}$, a zbog snage koju propeler predaje fluidu tlak $p_3$ iza propelera će biti veći od tlaka $p_2$ ispred propelera. Dovoljno daleko iza propelera tlak će se smanjiti na vrijednost neporemećenog tlaka $p_\infty$, a brzina će narasti na vrijednost $v_4 = v_\infty + \Delta v$. U izlaznom presjeku $A_4$ pretpostavlja se jednoliki profil brzine. Preostali dio kontrolne površine čini strujna površina kroz koju nema protoka i na kojoj se pretpostavlja neporemećeni tlak $p_\infty$.

Prema jednadžbi kontinuiteta protok $Q$ kroz propeler je

$$Q = v_\infty A_1 = v_\mathrm{P} A_\mathrm{P} = v_4 A_4 = \left(v_\infty + \Delta v\right) A_4$$

Komponenta sile fluida na propeler u pravcu gibanja propelera je $F = \left(p_3 - p_2\right) A_\mathrm{P}$ i djeluje suprotno od vektora brzine $\vec{v}_\infty$. Prema jednadžbi količine gibanja, ta je sila jednaka zbroju impulsnih funkcija na ulaznoj i izlaznoj površini, gdje se impulsne funkcije računaju s pretlakom u odnosu na tlak $p_\infty$, te vrijedi: $I_4 = \rho v_4^2 A_4 = \rho Q v_4$ i $I_1 = \rho v_\infty^2 A_1 = \rho Q v_\infty$, dok je impulsna funkcija po plaštu kontrolnog volumena jednaka nuli (vidjeti sliku gore desno). Sila $F$ je dakle po veličini jednaka

$$F = \left(p_3 - p_2\right) A_\mathrm{P} = \rho Q \left(v_4 - v_\infty\right)$$

Bernoullijeve jednadžbe između presjeka 1 i 2, odnosno presjeka 3 i 4 glase

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_\mathrm{P}^2 \quad \text{i} \quad p_3 + \frac{1}{2}\rho v_\mathrm{P}^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho v_4^2$$

čijom kombinacijom se dobije

$p_3 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_4^2 - v_\infty^2\right)$, što uvršteno u izraz za silu $F$ daje relaciju

$$v_P = \frac{v_\infty + v_4}{2} = v_\infty + \frac{\Delta v}{2}$$

Snaga $P$ koju propeler predaje fluidu je definirana Bernoullijevom jednadžbom između presjeka 1 i 4 između kojih je propeler, te vrijedi

$$\frac{v_4^2}{2g} = \frac{v_\infty^2}{2g} + \frac{P}{\rho g Q}$$

odakle je $P = \frac{1}{2}\rho Q\left(v_4^2 - v_\infty^2\right) = \rho Q v_\mathrm{P} \Delta v$.

Korisna snaga propelera je ona snaga koja se troši na potisak aviona, a definirana je izrazom

$$P_\mathrm{k} = F v_\infty = \rho Q \left(v_4 - v_\infty\right) v_\infty = \rho Q v_\infty \Delta v,$$

a faktor korisnosti propelera

$$\eta = \frac{P_\mathrm{k}}{P} = \frac{\rho Q \left(v_4 - v_\infty\right) v_\infty}{\frac{1}{2}\rho Q\left(v_4^2 - v_\infty^2\right)} = \frac{v_\infty}{v_\mathrm{P}} = \frac{2 v_\infty}{2 v_\infty + \Delta v} = \frac{1}{1 + \dfrac{\Delta v}{2 v_\infty}}$$

Primjer: Avion leti brzinom $v_\infty = 320$ km/h kroz mirujući zrak gustoće $\rho = 1,22$ kg/m³, pri čemu kroz njegova dva propelera promjera $D = 800$ mm protječe $Q = 100$ m³/s zraka. Odredite teorijski faktor korisnosti propelera, potisnu silu, skok tlaka kroz propeler i snagu potrebnu za pogon propelera.

Rješenje: Brzina aviona je $v_\infty = 88.9$ m/s, a brzina zraka kroz propeler kroz koji je protok $Q/2$

$$v_P = \frac{4\frac{Q}{2}}{D^2\pi} = 99,5 \text{ m/s}$$

Teorijski faktor korisnosti propelera je $\eta = \frac{v_\infty}{v_P} = 0.894$,

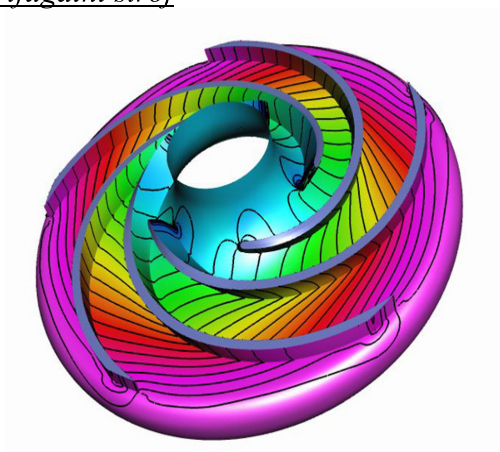
a brzina $v_4$ iza propelera je $v_4 = 2v_P - v_\infty = 110.1$ m/s.

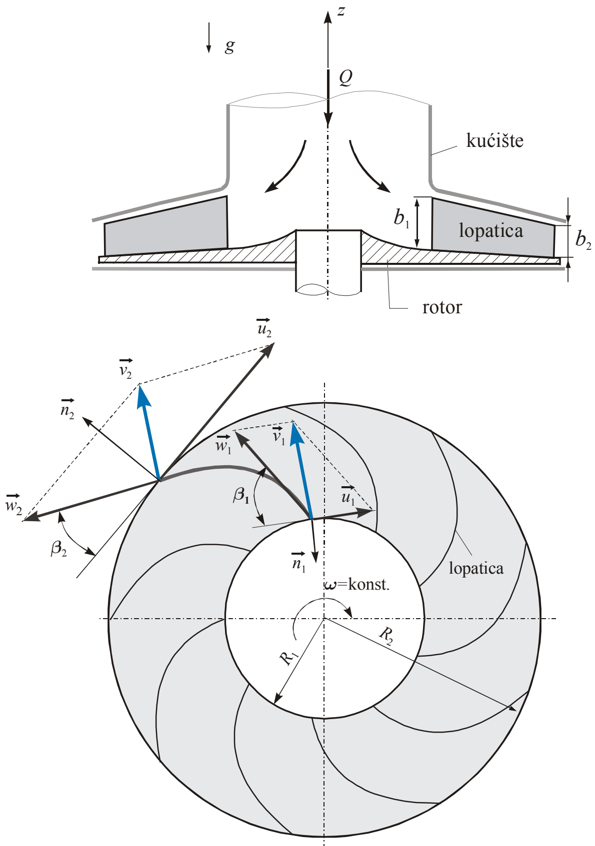
Potisna sila od oba propelera je $F = \rho Q(v_4 - v_\infty) = 2,58$ kN,

A skok tlaka kroz propeler $p_3 - p_2 = \frac{F/2}{\frac{D^2\pi}{4}} = 2.57$ kPa.

Snaga koju propeler predaje fluidu je $P = \frac{1}{2}\rho Q\left(v_4^2 - v_\infty^2\right) = 256.8$ kW.

## <u>*Primjena na centrifugalni stroj*</u>

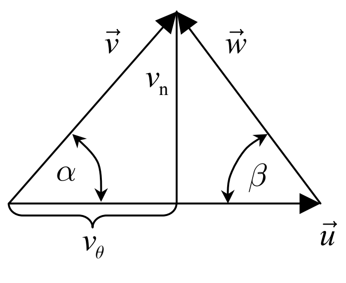





Pretpostavke:

1. Rotor se okreće konstantnom kutnom brzinom $\omega$ .
2. Strujanje između lopatica je u radijalnom smjeru (visina lopatice na ulazu je $b_1$, a na izlazu iz rotora $b_2$).
3. Kontrolni volumen obuhvaća prostor između lopatica. Kontrolna površina se sastoji od ulaznog dijela veličine $S_1 = 2R_1\pi b_1$, izlaznog dijela veličine $S_2 = 2R_2\pi b_2$ te plašta, kroz kojeg nema protoka.
4. Na rotoru se pretpostavlja beskonačno puno beskonačno tankih lopatica, što znači da će se oblik strujnica gledano iz koordinatnog sustava koji rotira zajedno s rotorom poklapati s oblikom lopatica, a da će strujanje fluida biti punim presjekom.
5. Strujanje je neviskozno i nestlačivo
6. Utjecaj sile težine se zanemaruje

Promatrač iz koordinatnog sustava koji rotira zajedno s rotorom mjeri relativnu brzinu $\vec{w}$ koja je tangencijalna na lopatice. Obodna brzina $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ je na ulazu u rotor po veličini jednaka $u_1 = \omega R_1$, a na izlazu $u_2 = \omega R_2$ i okomita je na radijus. Apsolutna brzina $\vec{v}$ je zbroj obodne i relativne brzine $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, što se prikazuje trokutom brzina. Kut $\beta$ je kut lopatice, a označuje kut između vektora relativne brzine $\vec{w}$ (tangenta na lopaticu) i negativne obodne brzine $-\vec{u}$ . Sljedeće slika prikazuje primjer trokuta brzina, na kojem je označen i kut $\alpha$ definiran kao kut između obodne i apsolutne brzine.




Jasno je da vrijede relacije:

$$v^2 = u^2 + w^2 - 2uw\cos\beta$$

$$v_\theta = u - w\cos\beta$$

$$v_n = w\sin\beta$$

Apsolutna brzina se može rastaviti u radijalni i obodni smjer, gdje je radijalna komponenta okomita na ulazni i izlazni presjek, pa se označuje s $v_n$, a obodna s $v_\theta$. Ako se jedinični vektori u radijalnom i obodnom smjeru označe s $\vec{e}_r$ i $\vec{e}_\theta$ (neka uvijek gleda u smjeru obodne brzine) tada vrijedi $\vec{v} = v_n\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$.

Jednadžba kontinuiteta za kontrolni volumen kaže da je protok kroz ulaznu i izlaznu površinu jednak

$$Q = 2R_1\pi b_1 v_{n1} = 2R_2\pi b_2 v_{n2}$$

Primjenom zakona momenta količine gibanja za komponentu momenta sile fluida u odnosu na os rotacije (kojoj ne doprinose sile tlaka, a viskozne sile su zanemarene) slijedi izraz za moment kojim fluid djeluje na rotor, što je po definiciji moment turbine $M_\mathrm{T}$

$$M_\mathrm{T} = -\rho Q\left(R_2 v_{\theta 2} - R_1 v_{\theta 1}\right)$$

Moment pumpe je dakako suprotnog predznaka, pa vrijedi

$$M_\mathrm{P} = \rho Q\left(R_2 v_{\theta 2} - R_1 v_{\theta 1}\right)$$

Uobičajeno je uvijek raditi s izrazima za pumpu, a ako se dobije negativan rezultat, to ukazuje da se radi o turbini. Snaga pumpe je definirana izrazom

$$P_\mathrm{P} = M_\mathrm{P}\omega = \rho Q\left(u_2 v_{\theta 2} - u_1 v_{\theta 1}\right)$$

Visina dobave pumpe je

$$h_\mathrm{P} = \frac{P_\mathrm{P}}{\rho g Q} = \frac{1}{g}\left(u_2 v_{\theta 2} - u_1 v_{\theta 1}\right) = \frac{1}{g}\left[u_2\left(u_2 - w_2\cos\beta_2\right) - u_1\left(u_1 - w_1\cos\beta_1\right)\right]$$

što se naziva osnovnom Eulerovom jednadžbom za turbostrojeve. Iz te je jednadžbe jasno da će visina dobave pumpe biti maksimalna pri $v_{\theta 1} = 0$ (što znači da je apsolutna brzina na ulazu u lopatice okomita na obodnu brzinu), a pad visine energije u turbini pri $v_{\theta 2} = 0$.

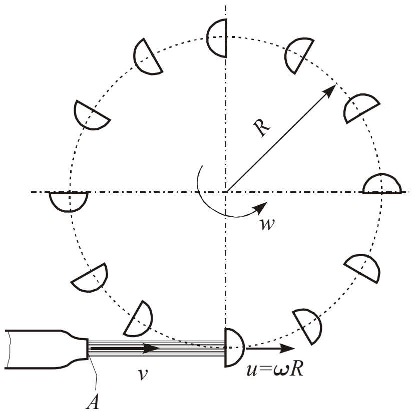
Bernoullijeva jednadžba duž strujnice od ulaza do izlaza iz pumpe kaže da će se energija na izlazu povećati za visinu dobave pumpe, tj. vrijedi

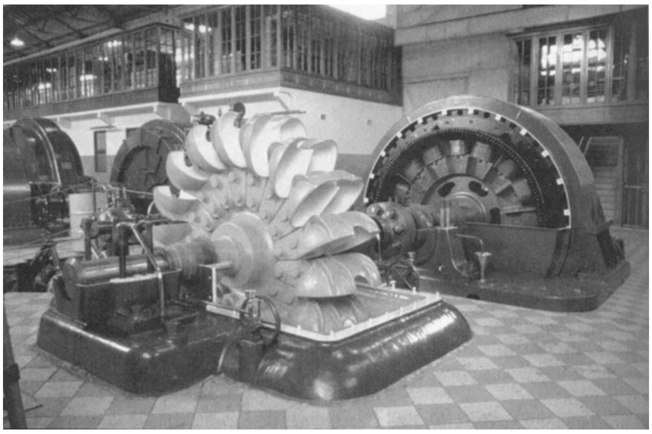
$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 + h_\mathrm{P}$$

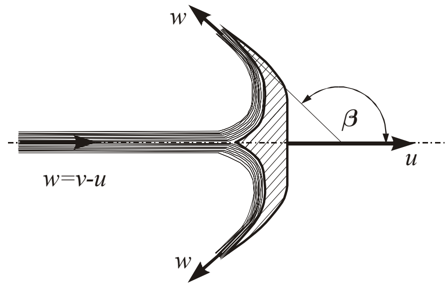
Ako se u Bernoullijevoj jednadžbi apsolutne brzine prikažu preko obodne i relativne brzine ($v^2 = u^2 + w^2 - 2uw\cos\beta$), te uvrsti izraz za visinu dobave pumpe, slijedi Bernoullijeva jednadžba za rotirajuću strujnicu

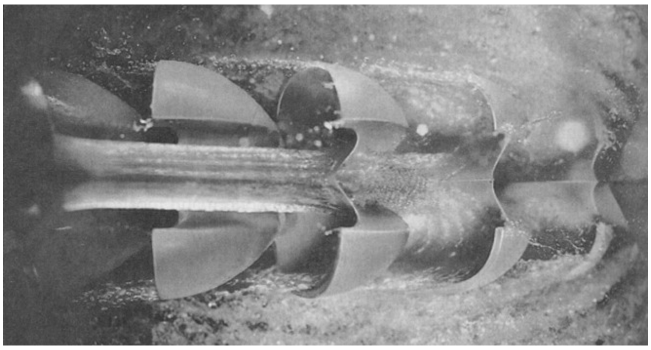
$$\frac{w_2^2 - u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 = \frac{w_1^2 - u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1$$

<u>Primjena na Pelton turbinu</u>





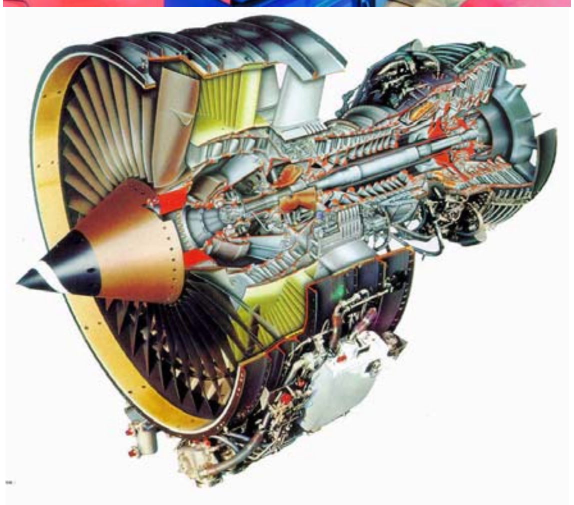



Kada se usporedi slučaj lopatice Pelton turbine, koja se giba obodnom brzinom $u=\omega R$ s pomičnom lopaticom u prethodnom primjeru, jasno je da će trokut brzina na izlazu mlaza s lopatice biti isti, pa će i izraz za pad visine energije biti isti. Međutim bitna je razlika u tome što je razmak između mirujuće mlaznice i pokretnih lopatica stalno jedan te isti, pa se apsolutni protok ne gubi na popunjavanje prostora između mlaza i lopatica, nego sav protok fluida prijeđe preko lopatica (pri čemu mlaz može biti u zahvatu s više lopatica), tako da je snaga turbine jednaka $P_\mathrm{T}=\rho g Q h_\mathrm{T}=\rho Q u w(1-\cos\beta)$. Uzimajući u obzir da na Pelton turbinu može djelovati više mlazova (npr. $n$ mlazova), te da je $w=v-u=v-\omega R$, teorijski izraz za snagu Pelton turbine je

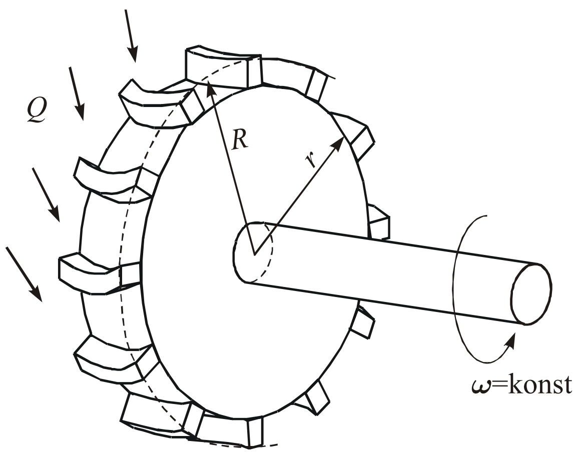
$$P_\mathrm{T}=n\rho u \underbrace{vA}_{Q}\left(\underbrace{v-u}_{w}\right)(1-\cos\beta)$$

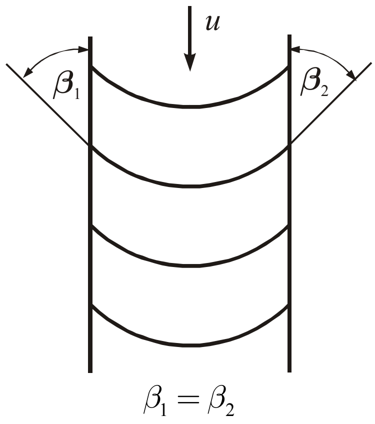
Maksimalna snaga $P_{\mathrm{T}\max}$ turbine je pri $\beta=180^\circ$ i pri obodnoj brzini $u=\dfrac{v}{2}$, pri čemu je $P_{\mathrm{T}\max}=\dfrac{1}{2}\rho v^3 A$, što odgovara raspoloživoj snazi mlaza, tako da je teorijski faktor korisnosti jednak jedinici. U tom bi slučaju apsolutna brzina mlaza na izlasku s lopatice bila jednaka nuli, dakle sva snaga mlaza bi bila pretvorena u snagu turbine.

*Primjena na aksijalni tubostroj*



Nestlačivi fluid struji pri stalnom tlaku protokom $Q$ kroz lopatice radnog kola turbine prema slici, koja rotira stalnom kutnom brzinom $\omega$. Uz pretpostavku neviskoznog strujanja i beskonačno mnogo beskonačno tankih lopatica, treba odrediti snagu $P$ turbine. Također pretpostaviti da je visina lopatice puno manja od polumjera radnog kola, tako da se vijenac lopatica smije razmotati u ravninu i strujanje kroz lopatice smatrati ravninskim.



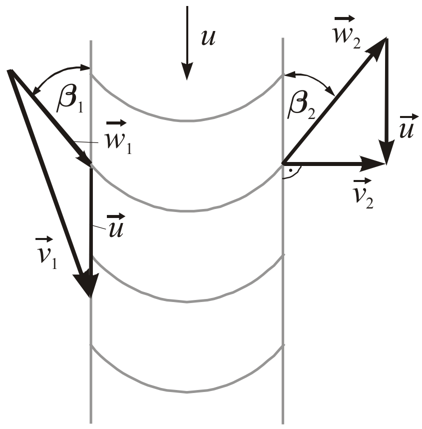

razmotani vijenac lopatica

Rješenje:

Kao što je u zadatku pretpostavljeno visina lopatice *R-r* je puno manja od srednjeg polumjera $(R+r)/2$, te se s dovoljnom točnošću strujanje može smatrati ravninskim. Razmotani vijenac lopatica se tada giba prosječnom translatornom brzinom $u$ koja je definirana izrazom

$$u=\omega\frac{R+r}{2} \qquad \text{(a)}$$

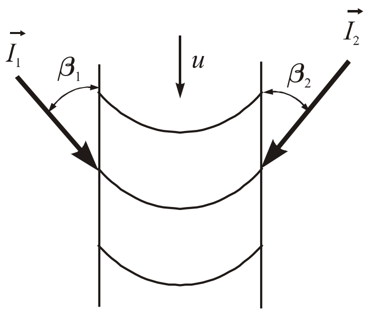
Zbog stalne brzine vrtnje i brzina $u$ je stalna brzina, a koordinatni sustav vezan čvrsto za vijenac lopatica je inercijski. Pretpostavka beskonačnog broja beskonačno tankih lopatica osigurava da sve strujnice u strujanju kroz prostor između lopatica imaju oblik lopatice, tj. relativna brzina strujanja fluida kroz lopaticu je tangencijalna na lopaticu. Apsolutna brzina $\vec{v}$ je zbroj obodne brzine $\vec{u}$ i relativne brzine $\vec{w}$, $\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}$. Zbroj $\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}$ geometrijski se predočuje trokutom brzina.



Slika (a)

Slika (a) prikazuje trokut brzina na ulazu u vijenac lopatica (gdje relativna brzina $\vec{w}_1$ gleda u kontrolni volumen) i na izlazu iz vijenca (gdje relativna brzina $\vec{w}_2$ gleda od kontrolnog volumena koji obuhvaća unutarnjost vijenca lopatica). Relativna brzina $\vec{w}_1$ čini s obodnim smjerom kut $\beta_1$, a na izlazu brzina $\vec{w}_2$ čini kut $\beta_2$. Obodna brzina $\vec{u}$ je jednaka na ulaznom i izlaznom presjeku kontrolnog volumena. Osnovni zakoni u pomičnom koordinatnom sustavu čvrsto vezanom za vijenac lopatica koji se giba stalnom brzinom $u$ imaju isti oblik kao i u nepomičnom koordinatnom sustavu s jedinom razlikom da se umjesto apsolutne brzine koristi relativna brzina.

Zanemarujući promjenu geodetske visine od ulaza do izlaza iz vijenca lopatica, te uz pretpostavku strujanja pri stalnom tlaku, iz Bernoullijeve jednadžbe $\frac{p_1}{\rho g}+z_1+\frac{w_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+z_2+\frac{w_2^2}{2g}$ slijedi jednakost veličina relativnih brzina $w_1=w_2=w$.
Prema jednadžbi kontinuiteta je protok $Q$ kroz izlaznu površinu jednak protoku $Q$ kroz ulaznu površinu, tj. $Q=A_1 w_1\sin\beta_1=A_2 w_2\sin\beta_2$. Očito da za $w_1=w_2$ i uz zadane $\beta_1=\beta_2$ slijedi $A_1=A_2$, odnosno jednakost ulazne i izlazne površine.




Slika (b) prikazuje kontrolni volumen s ucrtanim impulsnim funkcijama $\vec{I}_1=\rho Q\vec{w}_1$ i $\vec{I}_2=\rho Q\vec{w}_2$. U impulsnim funkcijama se ne pojavljuje tlak $p$ jer je pretpostavljeno strujanje pri konstantnom tlaku, te se sile tlaka međusobno poništavaju. Množenjem $\rho\vec{w}$ u impulsnoj funkciji s ukupnim protokom $Q$ impulsna funkcija je obračunata po čitavoj površini. Aksijalna sila koja djeluje od ulazne prema izlaznoj površini je

Slika (b)

$$F_a = I_1 \sin\beta_1 - I_2 \sin\beta_2 = \rho Q w(\sin\beta_1 - \sin\beta_2) \quad \text{(b)}$$

Očito će zbog $\beta_1=\beta_2$ aksijalna sila biti jednaka nuli. Sila $F$ u obodnom smjeru u kojem se giba vijenac lopatica je

$$F = I_1 \cos\beta_1 + I_2 \cos\beta_2 = \rho Q w(\cos\beta_1 + \cos\beta_2) \quad \text{(c)}$$

Snaga $P$ turbine je jednaka

$$P = F \cdot u = \rho Q w u(\cos\beta_1 + \cos\beta_2) \quad \text{(d)}$$

Visina pada energije u turbini je

$$h_T = \frac{P}{\rho g Q} = \frac{w \cdot u}{g}(\cos\beta_1 + \cos\beta_2) \quad \text{(e)}$$

Do istog se rezultata za snagu $P$ turbine može doći i primjenom Bernoullijeve jednadžbe iz nepomičnog koordinatnog sustava. Ako se zanemari promjena geodetske visine i uzme u obzir da je strujanje pri konstantnom tlaku iz Bernoullijeve jednadžbe slijedi da je pad visine energije $h_T$ kroz vijenac lopatica jednak razlici kinetičkih energija na ulazu i izlazu iz vijenca, tj.

$$h_T = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} \quad \text{(f)}$$

Gledajući sliku (a) kvadrati apsolutnih brzina se mogu izraziti s pomoću obodne brzine $u$ i relativne brzine $w$ u obliku

$$\begin{aligned} v_1^2 &= (w \sin\beta_1)^2 + (w \cos\beta_1 + u)^2 \\ v_2^2 &= (w \sin\beta_2)^2 + (w \cos\beta_2 - u)^2 \end{aligned} \quad \text{(g)}$$

Uvrštavanjem jednadžbe (g) u (f) slijedi

$$h_T = \frac{w \cdot u}{g}(\cos\beta_1 + \cos\beta_2) \quad \text{(h)}$$

što odgovara izrazu (e). Iz jednadžbe (f) je očito da će pad visine energije u turbini biti maksimalan ako je apsolutna brzina $v_2$ na izlazu minimalna. Iz slike (a) je vidljivo da će za zadani kut $\beta_2$ i relativnu brzinu $w_2$, brzina $v_2$ biti minimalna, ako je okomita na brzinu $u$.

Konačno, zadatak se mogao riješiti i primjenom jednadžbe momenta količine gibanja, po kojoj je moment $M$ fluida na vijenac lopatica jednak zbroju momenata količine gibanja na ulaznoj i izlaznoj površini. Uz pretpostavku da je polumjer $r$ kola velik u odnosu na visinu lopatica $R$-$r$, moment količine gibanja na ulaznoj i izlaznoj površini se može izračunati kao moment impulsne funkcije. Komponenta impulsne funkcije u obodnom smjeru je $I\cos\beta$, prema slici (b), a srednji krak do osi vrtnje je $\left(R+r\right)/2$. Moment sile težine se zanemaruje, a s obzirom da je tlak na ulaznoj i izlaznoj površini jednak, jednadžba za moment *M* sile fluida na lopaticu glasi

$$M = \frac{R+r}{2} I_1 \cos\beta_1 + \frac{R+r}{2} I_2 \cos\beta_2 = \frac{R+r}{2} \rho Q w \left(\cos\beta_1 + \cos\beta_2\right)$$

(i)

Snaga *P* je

$$P = M \cdot \omega = \omega \frac{R+r}{2} \rho Q w \left(\cos\beta_1 + \cos\beta_2\right) = \rho Q w u \left(\cos\beta_1 + \cos\beta_2\right)$$

(j)

što je jednako izrazu (d).