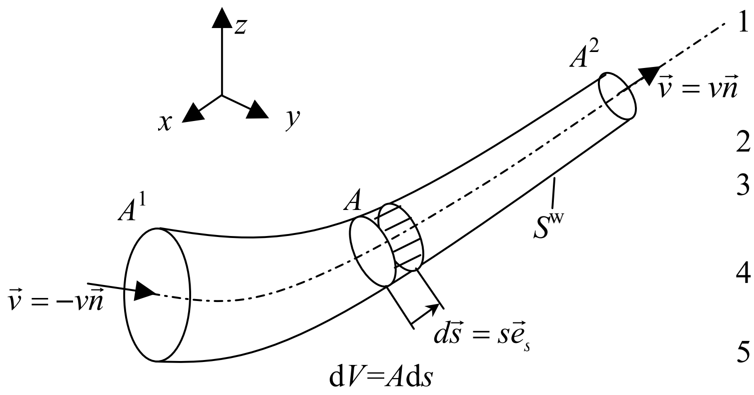
5. INTEGRALNE METODE RJEŠAVANJA JEDNODIMENZIJSKIH PROBLEMA MEHANIKE FLUIDA

Formulacija za jednodimenzijsko strujanje



Pretpostavke:

1. Strujanje je stacionarno $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
2. Fluid je nestlačiv $\rho = const.$
3. Masena sila je sila gravitacije $\vec{f} = -g\vec{k}$
4. Strujanje je izotermičko $T = const.$
5. $\vec{\sigma} = -p\vec{n} + \vec{\sigma}^{f}$

5.1 Koncept kontrolnog volumena

Svi zakoni mehanike i termodinamike bit će primjenjivi na materijalni volumen (u mehanici je to materijalno tijelo ili sustav materijalnih točaka, a u termodinamici je to zatvoreni termodinamički sustav). U mehanici fluida nije interes pratiti što se događa sa samim fluidom (dakle neće se pratiti gibanje materijalnog volumena, kao što se u mehanici prati gibanje tijela), nego je potrebno odrediti posljedice strujanje fluida u blizini neke konstrukcije. U tom smislu će se definirati kontrolni volumen čije se granice poklapaju s površinom konstrukcije za koju se želi istražiti utjecaj strujanja fluida. Budući da će svi zakoni mehanike fluida biti formulirani za materijalni volumen potrebno ih je preformulirati za kontrolni volumen. Kontrolni je volumen u većini slučajeva s mirujućim granicama ($\vec{u} = 0$), a u analizi konstrukcija s pomičnim dijelovima koristi se i formulacija kontrolnog volumena s pomičnim granicama.

5.2 Reynoldsov transportni teorem

Brzina promjene sadržaja fizikalne veličine unutar materijalnog volumena izražena promjenom u kontrolnom volumenu

U trenutku poklapanja materijalnog i kontrolnog volumena brzina lokalne promjene im je ista, kao što su isti i površinski integrali, u gornjim izrazima, iz kojih slijedi:

a) slučaj kontrolnog volumena KV koji je ograđen mirujućom kontrolnom površinom KP

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V_{\mathrm{M}}} \Phi \mathrm{d}V = \int_{V_{\mathrm{M}}} \frac{\partial \Phi}{\partial t}\mathrm{d}V + \int_{S_{\mathrm{M}}} \Phi \vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S = \int_{KV} \frac{\partial \Phi}{\partial t}\mathrm{d}V + \int_{KP} \Phi\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$$

uz napomenu da vrijedi: $\int\limits_{KV} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V} \Phi \mathrm{d}V$

b) slučaj promjenjivog kontrolnog volumena V čija se granica S giba brzinom $\vec{u}$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \int\limits_{V_\mathrm{M}} \Phi \mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V} \Phi \mathrm{d}V + \int\limits_{S} \Phi \left(\vec{v} - \vec{u} \right) \cdot \vec{n} \mathrm{d}S$$

5.3 Jednadžba kontinuiteta

Zakon održanja mase:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \int\limits_{V_\mathrm{M}} \rho \mathrm{d}V = 0$$

Primjenom Reynoldsovog transportnog teorema uz $\Phi = \rho$ zakon se formulira za kontrolni volumen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V} \rho \mathrm{d}V = -\underbrace{\int\limits_{KP} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S}_{\dot{m}}$$

Lijeva strana označuje brzinu promjene mase fluida unutar kontrolnog volumena, a desna ukupni maseni protok kroz kontrolnu površinu. Na dijelu kontrolne površine kroz koju fluid ulazi u kontrolni volumen vektor vanjske normale i vektor brzine čine kut veći od 90°, te je $\vec{v} \cdot \vec{n} < 0$ i maseni protok je negativan, a negativni predznak ispred integrala ukazuje da će taj protok povećavati sadržaj mase unutar kontrolnog volumena. Na izlaznoj granici je $\vec{v} \cdot \vec{n} > 0$, pa negativni predznak ispred integrala ukazuje na istjecanje fluida iz kontrolnog volumena tj. označuje smanjenje sadržaja mase unutar kontrolnog volumena. Kroz nepropusnu stijenku nema protoka, što znači da je brzina ili jednaka nuli ili je tangencijalna na stijenku. Ako se sa $\dot{m}_\mathrm{U}$ označi ukupni maseni protok kojim fluid ulazi u kontrolni volumen, a sa $\dot{m}_\mathrm{I}$ maseni protok kojim fluid iz njega izlazi, tada vrijedi:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V} \rho \mathrm{d}V = \dot{m}_\mathrm{U} - \dot{m}_\mathrm{I}.$$

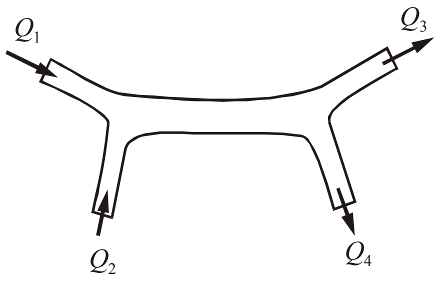
a) Slučaj stacionarnog strujanja. U stacionarnom strujanju fluida se slika strujanja ne mijenja s vremenom, što znači da se neće mijenjati niti sadržaj mase unutar kontrolnog volumena pa vrijedi jednakost ulaznog i izlaznog masenog protoka

$$\dot{m}_\mathrm{U} = \dot{m}_\mathrm{I}$$

b) Slučaj nestlačivog (stacionarnog ili nestacionarnog) strujanja homogenog fluida ($\rho = \text{konst.}$). S obzirom da je gustoća konstantna u kontrolnom volumenu će se u svakom trenutku nalaziti jednaka masa fluida, a maseni protok je $\dot{m} = \rho Q$, te vrijedi

$$Q_\mathrm{U} = Q_\mathrm{I}$$

Primjer: Strujanje kroz račvastu cijev



Na slici je uočen kontrolni volumen koji obuhvaća unutarnjost račvaste cijevi. Kroz dva presjeka nestlačivi fluid ulazi u kontrolni volumen protocima Q_1 i Q_2, a kroz dva izlazi protocima Q_3 i Q_4. Kroz plašt račve nema protoka fluida.
Prema jednadžbi kontinuiteta vrijedi

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4 .$$

5.4 Jednadžba količine gibanja

Primjenom Reynoldsova transportnog teorema na lijevu stranu zakona očuvanja količine gibanja za materijalni volumen, koji glasi

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V_\mathrm{M}} \rho\vec{v}\,\mathrm{d}V = \int_{V_\mathrm{M}} \rho\vec{f}\,\mathrm{d}V + \int_{S_\mathrm{M}} \vec{\sigma}\,\mathrm{d}S$$

slijedi jednadžba količine gibanja za kontrolni volumen s mirujućim granicama

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{KV} \rho\vec{v}\,\mathrm{d}V}_{\substack{\text{brzina promjene}\\ \text{količine gibanja } KV\text{-a}}} + \underbrace{\int_{KP} \rho\vec{v}\left(\vec{v}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S}_{\substack{\text{protok količine gibanja}\\ \text{kroz kontrolnu površinu}}} = \underbrace{\int_{KV} \rho\vec{f}\,\mathrm{d}V}_{\substack{\text{ukupna masena}\\ \text{sila na } KV}} + \underbrace{\int_{KP} \vec{\sigma}\,\mathrm{d}S}_{\substack{\text{ukupna površinska}\\ \text{sila na } KV}}$$

gdje se kontrolna površina može općenito prikazati zbrojem ulaznog dijela S^u kontrolne površine (kroz koji fluid utječe u kontrolni volumen), izlaznog dijela S^i (kroz koji fluid napušta kontrolni volumen) i površine stijenke S^w (koja je dio nekog uređaja, stroja ili konstrukcije, kroz koju nema strujanja fluida $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$)

$$KP = S^u + S^i + S^w$$

Uz pretpostavku nestlačivog strujanja, uzimajući da je masena sila jednaka sili težine $\left(\vec{f} = -g\vec{k}\right)$ jednadžba količine gibanja se može napisati i u obliku

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{KV} \rho\vec{v}\,\mathrm{d}V}_{\substack{\text{brzina promjene}\\ \text{količine gibanja } KV\text{-a}}} = \underbrace{-\rho g\vec{k}\int_{KV} \mathrm{d}V}_{\vec{G}=\text{težina fluida u } KV} - \int_{S^u+S^i} \left(\rho\vec{v}\left(\vec{v}\cdot\vec{n}\right) - \vec{\sigma}\right)\mathrm{d}S + \underbrace{\int_{S^w} \vec{\sigma}\,\mathrm{d}S}_{\substack{-\vec{F}^w=\text{sila stijenke}\\ \text{na fluid}}}$$

Posljednji integral u gornjoj jednadžbi daje ukupnu površinsku silu između stjenke i fluida i to silu kojom okolina (stjenka) djeluje na fluid. Ta je sila po trećem Newtonovom zakonu jednaka negativnoj vrijednosti sile $\vec{F}^w$ kojom fluid djeluje na stjenku. Vektor površinske sile se može prikazati zbrojem sile tlaka i viskoznih sila

$$\vec{\sigma} = -p\vec{n} + \vec{\sigma}^f$$

pri čemu se viskozne sile na ulaznoj i izlaznoj površini obično zanemaruju (tangencijalne viskozne sile se obično međusobno poništavaju, a normalne komponente viskoznih sila su male u odnosu na tlačne sile), tako da zakon količine gibanja za kontrolni volumen prelazi u oblik

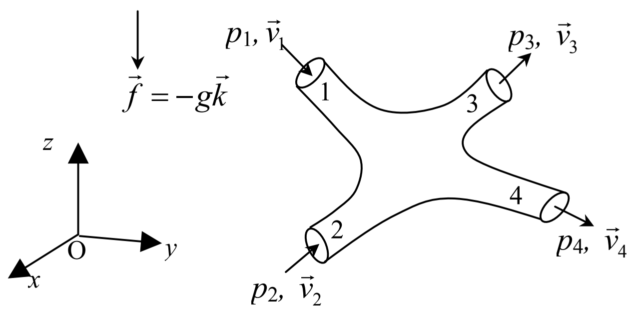
$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{KV} \rho\vec{v}\,\mathrm{d}V}_{\substack{\text{brzina promjene}\\ \text{količine gibanja } KV\text{-a}}} = \vec{G} - \int_{S^u+S^i} \left(\rho\vec{v}\left(\vec{v}\cdot\vec{n}\right) + p\vec{n}\right)\mathrm{d}S - \vec{F}^w$$

U uvjetima stacionarnog strujanja (kada se slika strujanja ne mijenja s vremenom) brzina promjene količine gibanja kontrolnog volumena (lijeva strana jednadžbe) je jednaka nuli, te će zakon količine gibanja izražen za kontrolni volumen služiti za određivanje sile kojom fluid djeluje na stjenku

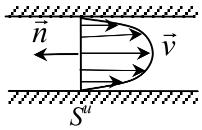
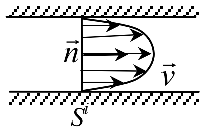
$$\vec{F}^{w} = \vec{G} - \int\limits_{S^u+S^i} \left(\rho\vec{v}\left(\underbrace{\vec{v}\cdot\vec{n}}_{v_\mathrm{n}} \right) + p\vec{n} \right) \mathrm{d}S$$

Očito je da će za određivanje sile kojom fluid djeluje na stjenku biti potrebno poznavanje profila brzine i tlaka na ulaznom i izlaznom dijelu kontrolne površine.

Primjena jednadžbe količine gibanja za određivanje sile fluida na plašt cijevi



Slika prikazuje jedan kontrolni volumen koji obuhvaća unutrašnjost račvaste cijevi, a na kontrolnoj površini se mogu uočiti dva ulazna presjeka (presjeci 1 i 2) i dva izlazna presjeka (3 i 4). U tim su presjecima strujnice međusobno paralelne, a vektori brzine su okomiti na presjek, pri čemu vrijedi

Za ulazni presjek	Za izlazni presjek
	
$\vec{v} = -v\vec{n}$ $\vec{v}\cdot\vec{n} = -v$ $-\int\limits_{S^\mathrm{u}} \left(\rho\vec{v}\left(\underbrace{\vec{v}\cdot\vec{n}}_{v_\mathrm{n}} \right) + p\vec{n} \right)\mathrm{d}S = -\vec{n}\int\limits_{S^\mathrm{u}} \left(\rho v^2 + p \right)\mathrm{d}S$	$\vec{v} = v\vec{n}$ $\vec{v}\cdot\vec{n} = v$ $-\int\limits_{S^\mathrm{i}} \left(\rho\vec{v}\left(\underbrace{\vec{v}\cdot\vec{n}}_{v_\mathrm{n}} \right) + p\vec{n} \right)\mathrm{d}S = -\vec{n}\int\limits_{S^\mathrm{i}} \left(\rho v^2 + p \right)\mathrm{d}S$

Pri strujanju viskoznog fluida brzina po poprečnom presjeku cijevi nije konstantna, ali se integral kvadrata brzine po presjeku može prikazati pomoću kvadrata srednje brzine i faktora ispravka količine gibanja u obliku $\int\limits_S v^2\mathrm{d}S = \beta v_\mathrm{sr}^2 S$ gdje je faktor ispravka količine gibanja definiran izrazom $\beta = \frac{1}{v_\mathrm{sr}^2 S}\int\limits_S v^2\mathrm{d}S$. Vrijednosti faktora β su:

Strujanje idealnog fluida – jednoliki profil brzine po presjeku:	$\beta = 1$
Laminarno strujanje u okruglim cijevima polumjera R – postoji analitičko rješenje za profil brzine $v = v_\mathrm{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$:	$\beta = 1{,}33$
Turbulentno strujanje u okruglim cijevima – profil brzine zavisi od Reynoldsova broja $Re = \frac{\rho v D}{\mu}$, a koeficijent β se kreće u rasponu $\beta = 1{,}01$ (pri višim vrijednostima Re>10^6) do $\beta = 1{,}03$ (pri nižim	$\beta = 1{,}01 - 1{,}03$

vrijednostima *Re*)	

U praksi je strujanje najčešće turbulentno pa se uzima da je $\beta = 1$ (bez da se bitno naruši točnost rezultata)

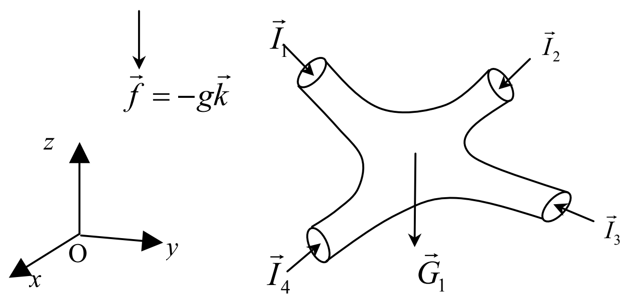
U strujanju fluida kroz cijevi strujnice su paralelne, pa će promjena tlaka po presjeku biti ista kao u fluidu u mirovanju, tj. bit će linearna. Ako se promatra strujnica koja prolazi težištem poprečnog presjeka cijevi, tada je integral tlaka po površini poprečnog presjeka jednak umnošku tlaka na strujnici i površini poprečnog presjeka $\int_S p\mathrm{d}S = pS$.

Konačan izraz za izračunavanje sile kojom fluid djeluje na plašt cijevi jest

$$\vec{F}^w = \vec{G} + \sum_k \underbrace{\left[-\vec{n}\left(\beta\rho v^2 + p\right)S\right]^{(k)}}_{I_i^{(k)} = \text{imulsna funkcija}} = \vec{G} + \sum_k \vec{I}^{(k)} \;\text{ ili }\; \vec{F}^w = \vec{G} + \sum_k \vec{I}^{(k)}$$

gdje je *k* broj ulaznih i izlaznih dijelova kontrolne površine.

Impulsna funkcija je vektor, koji je po veličini jednak $I = \left(\beta\rho v^2 + p\right)S$, okomit je na površinu *S* i gleda suprotno od vanjske normale (uvijek gleda u kontrolni volumen bez obzira radi li se o ulaznom ili izlaznom dijelu kontrolne površine), kao na sljedećoj slici.



Ako se impulsne funkcije shvate kao sile, tada se problem određivanja sile kojom fluid djeluje na plašt cijevi svodi na problem statike tj. određivanje suma sila. Zakonom količine gibanja definirana je veličina i smjer sile fluida na plašt, a hvatište je definirano zakonom momenta količine gibanja.

Postupak izračuna sile:

- Primjenom jednadžbe kontinuiteta i Bernoullijeve jednadžbe odrede se brzine i tlakovi na ulaznim i izlaznim dijelovima kontrolne površine.
- Iz izračunatih brzina i tlakova računaju se vrijednosti impulsnih funkcija na ulaznim i izlaznim dijelovima kontrolne površine.
- Vektorskim zbrajanjem (u analitičkom postupku sumiranjem komponenti sila u smjerovima osi) impulsnih funkcija i sile težine se dobije sila kojom fluid djeluje na plašt cijevi.

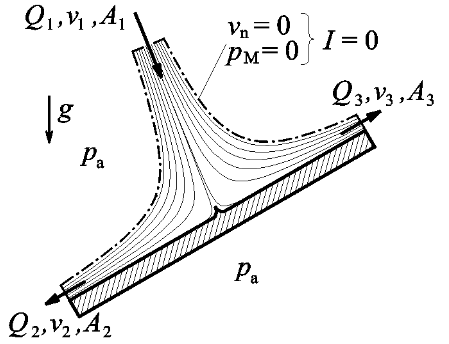
Treba naglasiti da gornja formula vrijedi za bilo kakav oblik kontrolnog volumena, jedino je važno da na ulaznim i izlaznim presjecima strujnice budu međusobno paralelne i da su vektori brzine okomiti na pripadajuće presjeke.

Impulsne funkcije računate s apsolutnim tlakom definiraju silu fluida na stijenku (dakle silu na plašt samo s unutrašnje strane). Ako s vanjske strane plašta djeluje atmosferski tlak, onda bi rezultantna sila na plašt bila jednaka zbroju unutarnje sile i vanjske sile atmosferskog tlaka. Do rezultantne sile se dolazi tako da se u impulsnu funkciju umjesto apsolutnog tlaka uvrštava manometarski tlak, dakle vrijedi

$$\vec{F} = \vec{G} + \sum -\vec{n}\left(\beta\rho v^2 + p_{\mathrm{M}}\right)S$$

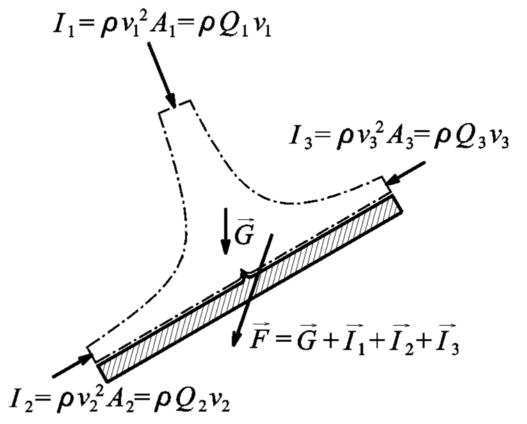
gdje je $\vec{F}$ rezultantna sila na plašt cijevi.

Primjena jednadžbe količine gibanja za određivanje sile mlaza fluida na lopatice



Slika prikazuje mlaz fluida površine poprečnog presjeka A_1, koji brzinom v_1 i protokom $Q_1 = v_1 A_1$, nailazi na ravnu lopaticu (ploču jedinične širine) koja na sebi ima razdjelnik strujanja (nosić) kojim se mlaz dijeli na dvije grane označene indeksima 2 i 3. Ako je površina mlaza mala u odnosu na površinu lopatice mlaz će tangencijalno napuštati lopaticu. Mlaz struji u atmosferi, a s druge strane lopatice vlada atmosferski tlak. Na slici je ucrtan odabrani kontrolni volumen (crta-točka linija) na čijoj se kontrolnoj površini može uočiti ulazni presjek mlaza, dva izlazna presjeka, rub mlaza i površina lopatice. Ako se pretpostave jednoliki profili brzine po presjecima i linearnu promjenu tlaka, tada će se impulsne funkcije računati po istim formulama kao i pri određivanju sile fluida na plašt cijevi. Ako se traži rezultantna sila na lopaticu (uzimajući u obzir i silu atmosferskog tlaka s vanjske strane, impulsne funkcije se računaju s manometarskim tlakom, koji je u svim presjecima jednak nuli, te za veličinu impulsne funkcije vrijedi

$$I = \rho v^2 A = \rho Q v$$



Na ulaznim i na izlaznim dijelovima kontrolne površine impulsne funkcije gledaju u kontrolni volumen, a okomite su na površine. Po rubu mlaza također treba izračunati impulsnu funkciju, jer ta površina nije dio površine lopatice na kojoj se želi odrediti silu. Međutim budući da kroz tu površinu nema strujanja, a na njoj je pretlak jednak nuli, zaključuje se da je i impulsna funkcija jednaka nuli, te preostaju samo impulsne funkcije kao prema slici. Tražena sila jednaka je vektorskom zbroju impulsnih funkcija i sile težine.

Ako bi strujanje bilo neviskozno (nema smičnih naprezanja), a ploča bila ravna (nema razdjelnika strujanja) sila fluida bi bila okomita na ploču (jer postoje samo sile tlaka), a protoci Q_2 i Q_3 bi bili upravo takvi da nema tangencijalne komponente sile na ploču.

5.5 Jednadžba momenta količine gibanja

Primjenom Reynoldsova transportnog teorema na lijevu stranu jednadžbe momenta količine gibanja za materijalni volumen, slijedi jednadžba momenta količine gibanja za kontrolni volumen s mirujućim granicama

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{KV}\vec{r}\times\rho\vec{v}\,\mathrm{d}V}_{\substack{\text{Brzina promjene momenta}\\ \text{količine gibanja } KV}} + \underbrace{\int_{KP}\vec{r}\times\rho\vec{v}\left(\vec{v}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S}_{\substack{\text{Protok momenta količine}\\ \text{gibanja kroz } KP}} = \underbrace{\int_{KV}\vec{r}\times\rho\vec{f}\,\mathrm{d}V}_{\substack{\text{ukupni moment masenih}\\ \text{sila na } KV}} + \underbrace{\int_{KP}\vec{r}\times\vec{\sigma}\,\mathrm{d}S}_{\substack{\text{ukupni moment površinskih}\\ \text{sila na } KP}}$$

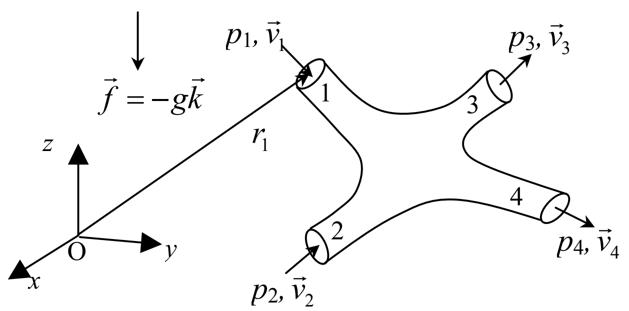
Uz sljedeće pretpostavke:

1. strujanje je nestlačivo i stacionarno
2. masena sila je sila težine
3. kontrolna površina se sastoji od ulaznog, izlaznog dijela i površine plašta, $KP = S^u + S^i + S^w$
4. vektor naprezanja $\vec{\sigma} = -p\vec{n} + \vec{\sigma}^f$

jednadžba momenta količine gibanja primjenjena na kontrolni volumen, služi za određivanje momenta sile kojom fluid djeluje na plašt

$$\underbrace{\vec{M}\left(\vec{F}^w\right)}_{\substack{\text{moment sile}\\ \text{fluida na plašt}}} = \underbrace{\vec{M}\left(\vec{G}\right)}_{\substack{\text{moment sile}\\ \text{težine}}} - \int_{S^u+S^i}\vec{r}\times\left(\rho\vec{v}\left(\underbrace{\vec{v}\cdot\vec{n}}_{v_n}\right)+p\vec{n}-\vec{\sigma}^f\right)\mathrm{d}S$$

Primjena jednadžbe momenta količine gibanja za određivanje momenta sile fluida na plašt cijevi



Slika prikazuje jedan kontrolni volumen koji obuhvaća unutrašnjost račvaste cijevi, a na kontrolnoj površini se mogu uočiti dva ulazna presjeka (presjeci 1 i 2) i dva izlazna presjeka (3 i 4). U tim su presjecima strujnice međusobno paralelne, a vektori brzine su okomiti na presjek.

Na gornjoj slici je također ucrtan radijus vektor do težišta prvog presjeka. Ako se zanemare momenti viskoznih sila na ulaznim i izlaznim presjecima, tada bi jednadžba momenta količine gibanja za prikazani kontrolni volumen (uzimajući u obzir da je na ulaznom presjeku vektor brzine orijentiran suprotno od vanjske normale, a na izlaznom u smjeru normale) glasila

$$\underbrace{\vec{M}\left(\vec{F}^w\right)}_{\substack{\text{moment sile}\\ \text{fluida na plašt}}} = \underbrace{\vec{M}\left(\vec{G}\right)}_{\substack{\text{moment sile}\\ \text{težine}}} - \sum_k \int_{A^{(k)}}\vec{r}\times\vec{n}\left(\rho v^2 + p\right)\mathrm{d}S$$

Ako su površine poprečnih presjeka male u odnosu na veličinu radijus vektora, tada se mogu zanemariti promjene radijus vektora po površini poprečnog presjeka i zamijeniti ga u gornjem integralu s konstantnim radijus vektorom do težišta presjeka. U tom se slučaju umnožak $\vec{r}\times\vec{n}$ može izlučiti ispred integrala, pa integral označuje impulsnu funkciju definiranu u zakonu količine gibanja, te vrijedi

$$\vec{M}\left(\vec{F}^{w}\right)=\vec{M}\left(\vec{G}\right)+\sum_{\mathrm{k}}\vec{r}^{(\mathrm{k})}\times\vec{I}^{(\mathrm{k})}$$

Dakle za slučaj strujanja kroz cijevi, na svakom ulazno/izlaznom presjeku se postavlja impulsna funkcija, koja se za potrebe proračuna sile fluida na plašt cijevi i momenta te sile u odnosu na odabranu točku (obično je to ishodište koordinatnog sustava), tretira kao vanjska sila. Prema jednadžbi količine gibanja sila fluida na plašt jednaka je sumi vanjskih sila koje djeluju na kontrolni volumen (impulsne funkcije i sila težine), a moment sile kojom fluid djeluje na plašt cijevi je jednak sumi momenata vanjskih sila na kontrolni volumen (sumi momenata impulsnih funkcija i momentu sile težine). Problem se dakle svodi na primjenu uvjeta ravnoteže sila i momenata, kao u klasičnoj mehanici, odnosno statici fluida.

5.6 Bernoullijeva jednadžba

Matematički zapis zakona očuvanju energije:

$$\underbrace{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V_\mathrm{M}}\rho e\mathrm{d}V}_{\text{Brzina promjene energije } V_\mathrm{M}}=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V_\mathrm{M}}\rho\left(u+\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}V=\underbrace{\int_{V_\mathrm{M}}\rho\vec{f}\cdot\vec{v}\mathrm{d}V}_{\text{snaga masenih sila na } V_\mathrm{M}}+\underbrace{\int_{S_\mathrm{M}}\vec{\sigma}\cdot\vec{v}\mathrm{d}S}_{\text{snaga vanjskih površinskih sila na } V_\mathrm{M}}-\underbrace{\int_{S_\mathrm{M}}\vec{q}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S}_{\text{brzina dovođenja topline na } V_\mathrm{M}}$$

U nestlačivom strujanju je snaga sila tlaka jednaka nuli (jer nema promjene obujma čestica fluida), te snagu unutarnjih sila definiraju samo viskozne sile. Viskozne sile uvijek pretvaraju mehaničku energiju u unutrašnju, te će uvijek voditi smanjivanju mehaničke energije. Ako se snaga unutarnjih sila označi s P_F i definira kao pozitivna veličina, tada će se u jednadžbi kinetičke energije ona pojavljivati s negativnim predznakom, jer smanjuje kinetičku energiju materijalnog volumena. U snagu unutarnjih sila P_F obračunati će se i snaga vanjskih površinskih sila trenja. Zakon prelazi u oblik:

$$\underbrace{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V_\mathrm{M}}\rho\frac{v^2}{2}\mathrm{d}V}_{\text{Brzina promjene kinetičke energije } V_\mathrm{M}}=\underbrace{\int_{V_\mathrm{M}}\rho\vec{f}\cdot\vec{v}\mathrm{d}V}_{\text{snaga masenih sila na } V_\mathrm{M}}+\underbrace{\int_{S_\mathrm{M}}-p\vec{n}\cdot\vec{v}\mathrm{d}S}_{\text{snaga vanjskih normalnih sila na } V_\mathrm{M}}-\underbrace{P_\mathrm{F}}_{\text{snaga unutrašnjih sila unutar } V_\mathrm{M}}$$

Formulacija zakona za kontrolni volumen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{KV}\frac{1}{2}\rho v^2\mathrm{d}V+\int_{KP}\frac{1}{2}\rho v^2\left(\vec{v}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S=\int_{KV}\rho\vec{f}\cdot\vec{v}\mathrm{d}V+\int_{KP}-p\vec{n}\cdot\vec{v}\mathrm{d}S-P_\mathrm{F}$$

Integracijom jednadžbe kinetičke energije, po kontrolnom volumenu prema slici, dobije se

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{KV}\frac{1}{2}\rho v^2\mathrm{d}V}_{\rho Q\int_1^2\frac{\partial v}{\partial s}\mathrm{d}s}+\underbrace{\int_{KP}\frac{1}{2}\rho v^2\left(\vec{v}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S}_{\frac{1}{2}\rho Q\left(v_2^2-v_1^2\right)}=\underbrace{\int_{KV}\rho\vec{f}\cdot\vec{v}\mathrm{d}V}_{-\rho Qg\left(z_2-z_1\right)}+\underbrace{\int_{KP}-p\vec{n}\cdot\vec{v}\mathrm{d}S}_{-Q\left(p_2-p_1\right)}-P_\mathrm{F}$$

gdje su v_1 i v_2 prosječne brzine na presjecima A^1 i A^2, a Q protok kroz cijev. Zakon kinetičke energije za jednodimenzijsko strujanje označuje modificiranu Bernoullijevu jednadžbu, koja glasi

$$\underbrace{\left[\left(\alpha\rho\frac{v^2}{2}+p+\rho gz\right)Q\right]_2}_{\text{snaga na izlazu iz cijevi}}=\underbrace{\left[\left(\alpha\rho\frac{v^2}{2}+p+\rho gz\right)Q\right]_1}_{\text{snaga na ulazu u cijev}}-P_\mathrm{F}-\underbrace{\rho Q\int_1^2\frac{\partial v}{\partial s}\mathrm{d}s}_{\substack{\text{brzina promjene}\\ \text{kinetičke energije }KV}}$$

Ako u cjevovodu između presjeka postoji stroj (pumpa koja predaje snagu P_P fluidu ili turbina koja oduzima snagu P_T od fluida), onda se modificirana jednadžba može poopćiti u sljedeći oblik

$$\underbrace{\left[\left(\alpha\rho\frac{v^2}{2}+p+\rho gz\right)Q\right]_2}_{\text{snaga na izlazu iz cijevi}}=\underbrace{\left[\left(\alpha\rho\frac{v^2}{2}+p+\rho gz\right)Q\right]_1}_{\text{snaga na ulazu u cijev}}-P_\mathrm{F}-\underbrace{\rho Q\int_1^2\frac{\partial v}{\partial s}\mathrm{d}s}_{\substack{\text{brzina promjene}\\ \text{kinetičke energije }KV}}+P_\mathrm{P}-P_\mathrm{T}$$

Pumpa je pogonjena motorom, pri čemu motor predaje pumpi snagu P_M, pa je faktor korisnosti pumpe $\eta_\mathrm{P}=\dfrac{P_\mathrm{P}}{P_\mathrm{M}}$. Turbina obično pogoni generator, pri čemu generatoru predaje snagu P_G, pa je faktor korisnosti turbine definiran odnosom $\eta_\mathrm{G}=\dfrac{P_\mathrm{G}}{P_\mathrm{T}}$.

U gore prikazanom obliku modificirane Bernoullijeve jednadžbe, svaki član ima dimenziju snage, a koriste se i sljedeći oblici te jednadžbe

Oblik	Dimenzija
$\left(\alpha\rho\frac{v^2}{2}+p+\rho gz\right)_2=\left(\alpha\rho\frac{v^2}{2}+p+\rho gz\right)_1-\frac{P_\mathrm{F}}{Q}-\rho\int_1^2\frac{\partial v}{\partial s}\mathrm{d}s+\frac{P_\mathrm{P}}{Q}-\frac{P_\mathrm{T}}{Q}$	$\frac{\text{snaga}}{\text{volumenki protok}}$
$\left(\alpha\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz\right)_2=\left(\alpha\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz\right)_1-\frac{P_\mathrm{F}}{\rho Q}-\int_1^2\frac{\partial v}{\partial s}\mathrm{d}s+\frac{P_\mathrm{P}}{\rho Q}-\frac{P_\mathrm{T}}{\rho Q}$	$\frac{\text{snaga}}{\text{maseni protok}}$
$\left(\alpha\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\rho g}+z\right)_2=\left(\alpha\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\rho g}+z\right)_1-\frac{P_\mathrm{F}}{\rho gQ}-\frac{1}{g}\int_1^2\frac{\partial v}{\partial s}\mathrm{d}s+\frac{P_\mathrm{P}}{\rho gQ}-\frac{P_\mathrm{T}}{\rho gQ}$	$\frac{\text{snaga}}{\text{težinski protok}}$

U zadnjem obliku modificirane Bernoullijeve jednadžbe obično se uvode oznake

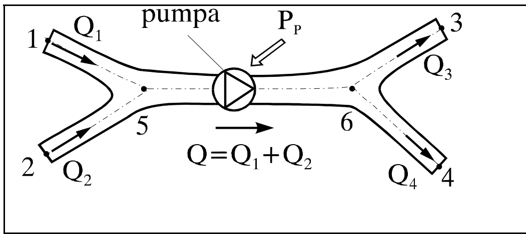
$h_\mathrm{P}=\dfrac{P_\mathrm{P}}{\rho gQ}$ =visina dobave pumpe,

$h_\mathrm{T}=\dfrac{P_\mathrm{T}}{\rho gQ}$ =pad visine energije u turbini

$h_\mathrm{F}=\dfrac{P_\mathrm{F}}{\rho gQ}$ =visina gubitaka mehaničke energije (energije pretvorene u unutarnju energiju)

Za slučaj računanja cjevovoda oblici modificirane Bernoullijeve jednadžbe iz gornje tablice postavljaju se duž strujnice.

Primjer:



Slika prikazuje račvastu cijev s dva ulazna presjeka (1 i 2) te dva izlazna presjeka (3 i 4). Između točaka 5 i 6 se nalazi pumpa koja predaje fluidu snagu P_P. Prema jednadžbi kontinuiteta ukupni protok kroz pumpu je $Q=Q_1+Q_2=Q_3+Q_4$. U točkama 5 i 6 visina energije je jednoznačno definirana, bez obzira s koje strane se u te točke dolazi.

Integralni oblik zakona kinetičke energije za stacionarno strujanje fluida kaže da je snaga na izlazu iz *KV* (presjeci 3 i 4) jednaka snazi na ulazu (presjeci 1 i 2) uvećanoj za snagu pumpe i umanjenoj za snagu viskoznih sila, tj.

$$\left(\alpha_3\rho\frac{v_3^2}{2}+p_3+\rho g z_3\right)Q_3+\left(\alpha_4\rho\frac{v_4^2}{2}+p_4+\rho g z_4\right)Q_4=\left(\alpha_1\rho\frac{v_1^2}{2}+p_1+\rho g z_1\right)Q_1+\left(\alpha_2\rho\frac{v_2^2}{2}+p_2+\rho g z_2\right)Q_2+P_\mathrm{P}-P_\mathrm{F}$$

Modificirana Bernoullijeva jednadžba postavljena između točaka 1 do5 je:

$$\left(\alpha_5\frac{v_5^2}{2g}+\frac{p_5}{\rho g}+z_5\right)=\left(\alpha_1\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1\right)-h_\mathrm{F15}\,,\ \text{gdje je }\ h_\mathrm{F15}=\frac{P_\mathrm{F15}}{\rho g Q_1}$$

Modificirana Bernoullijeva jednadžba između točaka 5 i 6 glasi

$$\left(\alpha_6\frac{v_6^2}{2g}+\frac{p_6}{\rho g}+z_6\right)=\left(\alpha_5\frac{v_5^2}{2g}+\frac{p_5}{\rho g}+z_5\right)+h_\mathrm{P}-h_\mathrm{F56}\,,\ \text{gdje su }\ h_\mathrm{F56}=\frac{P_\mathrm{F56}}{\rho g Q}\ \text{ i }\ h_\mathrm{P}=\frac{P_\mathrm{P}}{\rho g Q}\,,$$

a između točaka 6 i 3

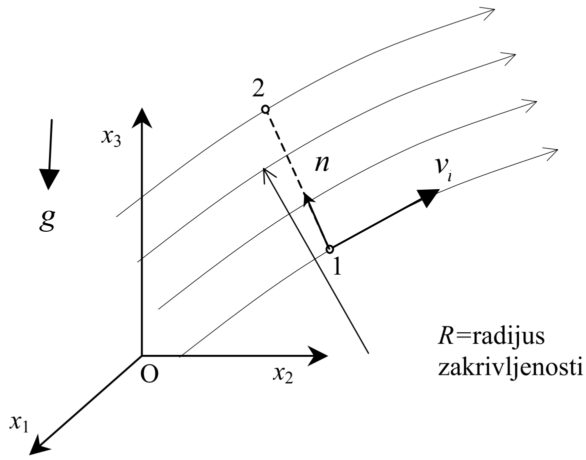
$$\left(\alpha_3\frac{v_3^2}{2g}+\frac{p_3}{\rho g}+z_3\right)=\left(\alpha_6\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p_6}{\rho g}+z_6\right)-h_\mathrm{F63}\,,\ \text{gdje je }\ h_\mathrm{F63}=\frac{P_\mathrm{F63}}{\rho g Q_3}$$

Iz kombinacije prethodnih jednadžbi dobije se modificirana Bernoullijeva jednadžba između presjeka 1 i 3

$$\left(\alpha_3\frac{v_3^2}{2g}+\frac{p_3}{\rho g}+z_3\right)=\left(\alpha_1\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1\right)+h_\mathrm{P}-h_\mathrm{F15}-h_\mathrm{F56}-h_\mathrm{F63}$$

Dakle modificirana Bernoullijeva jednadžba vrijedi duž strujnice. Analogno se dobije izraz za modificiranu Bernoullijevu jednadžbu između presjeka 1 i 4 ili između presjeka 2 i 3 ili između presjeka 2 i 4. Važno je zapamtiti da se snaga viskoznih sila dobije množenjem visine gubitaka h_F s pripadajućim težinskim protokom, kao i snaga pumpe (u ovom primjeru $P_\mathrm{P}=\rho g\left(Q_1+Q_2\right)h_\mathrm{P}$).

Promjena tlaka okomito na strujnice
(integral jednadžbe gibanja fluida po putu okomitom na strujnice)



Slika uz definiciju promjene tlaka okomito na strujnice

Izraz za promjenu tlaka okomito na strujnice je:

$$p_2 = p_1 - \rho g\left(z_2 - z_1\right) + \int_1^2 \rho \frac{v^2}{R} \mathrm{d}n$$

udaljenost n se mjeri od središta zakrivljenosti strujnice.

1. *U strujanju fluida s ravnim strujnicama* ($R = \infty$) *promjena tlaka okomito na strujnice ista je kao u fluidu u mirovanju.*
2. U strujanju fluida u horizontalnoj ravnini sa zakrivljenim strujnicama tlak raste od središta zakrivljenosti strujnica.