3. KINEMATIKA FLUIDA

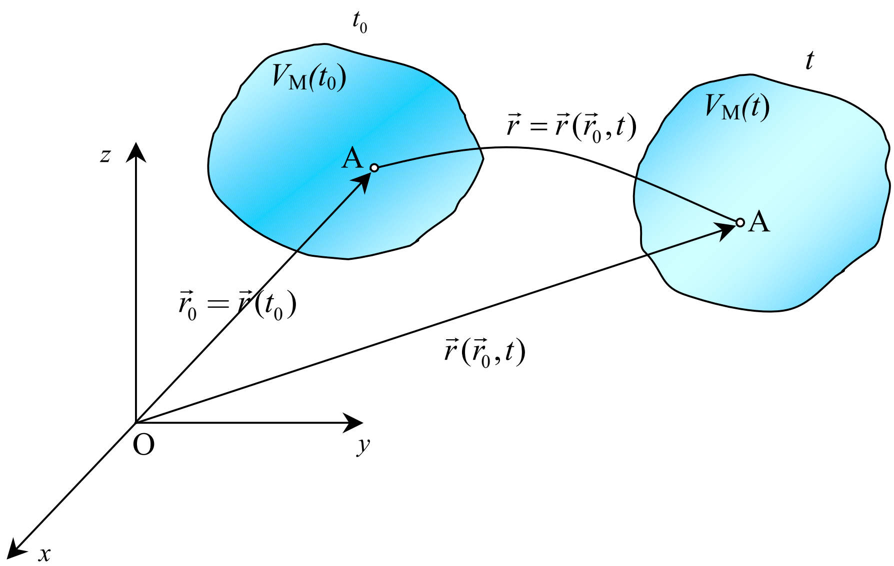
Kinematika fluida je dio fizike koji se bavi gibanjem fluida.

- Prema hipotezi kontinuuma vrijedi pravilo da svaka čestica fluida (materijalna točka) zauzima samo jednu točku prostora, a u jednoj točki prostora se može nalaziti samo jedna čestica kontinuuma.

3.1 Opis gibanja fluida

Lagrangeov opis gibanja fluida

- Položaji točaka prostora i položaji čestica fluida opisuju se radijus vektorom $\vec{r}$ (čije su komponente prostorne ili Eulerove koordinate x, y, z). U apsolutnom koordinatnom sustavu je položaj točke prostora je stalan u vremenu (prostorne koordinate x, y, z nisu funkcije vremena), a položaj gibajuće čestice fluida se mijenja s vremenom, što znači da su komponente radijus vektora $\vec{r}$ (vektora položaja) koje opisuju položaj čestice fluida jesu funkcija vremena. Gibanje čestice definirano je vremenskom promjenom njena vektora položaja u obliku $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (jednadžba gibanja čestice fluida).
- Brzina čestice fluida jest vremenska derivacija vektora položaja $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t)$ (točkica označuje vremensku derivaciju), a ubrzanje čestice fluida jest vremenska derivacija brzine $\vec{a} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$.



Slika uz opis gibanja čestica fluida

- Materijalni volumen se sastoji od beskonačnog broja čestica fluida, a koje su to čestice definirano je uočenom konfiguracijom $V_M(t_0)$ u početnom vremenskom trenutku t_0. Za potrebe opisa njihova gibanja nužno ih je razlikovati. S obzirom da se u jednoj točki prostora može nalaziti samo jedna čestica fluida, Čestice će se razlikovati po položaju kojeg zauzimaju u početnoj konfiguraciji. Za koordinate početnog položaja čestica fluida se uvodi posebna oznaka $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ i te se koordinate nazivaju materijalnim ili Lagrangeovim koordinatama. Jasno je da su materijalne koordinate vremenski nezavisne.

- Gibajući materijalni volumen će u trenutku t zauzeti novi položaj, a budući da se radi o materijalnom volumenu u tom trenutku će se u njemu nalaziti iste čestice koje su u njemu bile i u trenutku t_0. Na primjer točka A koja je u početnoj konfiguraciji bila na položaju definiranom koordinatama $\vec{r}_0$, će u trenutku t biti u točki s koordinatama $\vec{r}$. Jasno je da će vrijednosti koordinata x, y, z zavisiti i od vremena i od točke u početnoj konfiguraciji, tako da vrijedi

$$\vec{r} = \vec{r}\left(\vec{r}_0, t\right), \text{ odnosno } \begin{aligned} x &= \xi_1\left(x_0, y_0, z_0, t\right) \\ y &= \xi_2\left(x_0, y_0, z_0, t\right) \\ z &= \xi_3\left(x_0, y_0, z_0, t\right) \end{aligned}$$

  Gornje jednadžbe opisuju vremenski promjenljivi položaj one čestice fluida koja je u trenutku t_0 bila na poziciji opisanoj vektorom položaja $\vec{r}_0$. Mijenjajući vektor $\vec{r}_0$ dobivaju je jednadžbe gibanja različitih čestica materijalnog volumena.
- Brzina čestice fluida jest vremenska derivacija vektora položaja

$$\vec{v}(\vec{r}_0, t) = \left.\frac{\partial \vec{r}(\vec{r}_0, t)}{\partial t}\right|_{\vec{r}_0 = \text{konst.}} = \frac{\mathrm{D}\vec{r}}{\mathrm{D}t}$$

  U mehanici se ona naziva materijalnom derivacijom, a zbog posebne važnosti se označuje s $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$. Materijalnom derivacijom se izražava vremenska promjena fizikalnog svojstva čestice fluida, onako kako bi to osjećao promatrač koji se giba zajedno s česticom. Gornji izraz opisuje promjenu brzine čestica fluida izraženu Lagrangeovim koordinatama. Promjenom koordinata $\vec{r}_0$ dobiju se brzine različitih čestica materijalnog volumena.
- Ubrzanje čestice fluida jest materijalna derivacija brzine

$$\vec{a}(\vec{r}_0, t) = \left.\frac{\partial \vec{v}(\vec{r}_0, t)}{\partial t}\right|_{\vec{r}_0 = \text{konst.}} = \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$$

  Ponovo se promjenom Lagrangeovih koordinata dolazi do ubrzanja različitih čestica kontinuuma, u bilo kojem trenutku.
- U Lagrangeovom opisu strujanja fluida se funkcijama Lagrangeovih koordinata i vremena mogu opisati i druga fizikalna svojstva čestica fluida. Ako se sa Φ označi neko fizikalno svojstvo kontinuuma (gdje za Φ može stajati skalarno fizikalno svojstvo poput gustoće i temperature, vektorsko poput položaja, brzine i ubrzanja ili tenzorsko svojstvo), općenito se može pisati:

$$\Phi = \Phi^{\mathrm{L}}\left(\vec{r}_0, t\right)$$

  Riječima bi se reklo da gornja jednadžba opisuje vremensku promjenu fizikalnog svojstva Φ čestice $\vec{r}_0$. Nadindeks L u oznaci funkcije ukazuje da je fizikalno svojstvo izraženo Lagrangeovim koordinatama.

Eulerov opis gibanja fluida

- U mehanici fluida se uglavnom koristi Eulerov opis strujanja fluida, koji se temelji na poljima fizikalnih veličina. Ako se svakoj točki prostora u svakom vremenskom trenutku pridruži fizikalno svojstvo one čestice fluida koja se u promatranom trenutku nalazi u promatranim točkama prostora dobije se polje fizikalne veličine izraženo prostornim (Eulerovim) koordinatama

$$\Phi = \Phi^{\mathrm{E}}\left(\vec{r}, t\right)$$

- Za polje koje nije funkcija vremena kaže se da je stacionarno, inače je nestacionarno.
- Vezu među Lagrangeovim i Eulerovim opisom nekog fizikalnog svojstva u strujanju fluida definiraju inverzne jednadžbe gibanja[1]:

$$x_0 = x_0(x, y, z, t)$$
$$y_0 = y_0(x, y, z, t) \qquad \text{ili kraće} \qquad \vec{r}_0 = \vec{r}_0(\vec{r}, t)$$
$$z_0 = z_0(x, y, z, t)$$

Gornje jednadžbe daju početni položaj (u trenutku t_0) one čestice fluida koja se u trenutku t nalazi na poziciji definiranoj prostornim koordinatama $\vec{r}$. Uvrštavanjem gornjeg izraza u Lagrangeov zapis fizikalnog svojstva Φ slijedi Eulerov zapis polja Φ

$$\Phi = \Phi^{\mathrm{L}}(\vec{r}_0, t) = \Phi^{\mathrm{E}}(\vec{r}_0(\vec{r}, t), t) = \Phi^{\mathrm{E}}(\vec{r}, t)$$

- Bez obzira što su fizikalna svojstva izražena prostornim koordinatama jasno je da su nositelji fizikalnih svojstava čestice fluida, a ne točke prostora. U točkama prostora u kojima nema čestica fluida polje fizikalne veličine nije definirano.

<u>Materijalna derivacija</u>

- Materijalna derivacija izražava brzinu promjene fizikalnog svojstva čestice fluida, tj. promjenu koju bi osjetio promatrač koji bi se gibao zajedno s česticom. Za fizikalno svojstvo zapisano Lagrangeovim koordinatama ona je definirana kao

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \left.\frac{\partial \Phi^{\mathrm{L}}(\vec{r}_0, t)}{\partial t}\right|_{\vec{r}_0 = \mathrm{konst.}}$$

Materijalna derivacija istog tog fizikalnog svojstva zapisanog u Eulerovim koordinatama glasi

$$\frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t} = \left.\frac{\partial \Phi^{\mathrm{E}}(\vec{r}, t)}{\partial t}\right|_{\vec{r} = \mathrm{konst.}} + v_i^{\mathrm{E}}(\vec{r}, t) \cdot \nabla \Phi^{\mathrm{E}}(\vec{r}, t)\Big|_{t = \mathrm{konst.}}$$

Prvi član desne strane gornjeg izraza označuje lokalnu promjenu fizikalnog svojstva, koju bi osjetio promatrač u fiksnoj točki prostora, dok drugi član desne strane označuje konvektivnu ili prijenosnu brzinu promjene fizikalnog svojstva, uslijed pomicanja čestice fluida u polju Φ. Ispuštajući oznaku E za Eulerovsko polje i izbjegavajući eksplicitno navođenje zavisnosti polja Φ od prostornih i vremenske koordinate, gornji izraz u razvijenom obliku poprima oblik:

$$\frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t} = \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial t}}_{\substack{\text{lokalna}\\ \text{promjena}}} + \underbrace{v_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}}_{\text{konvektivna promjena}}$$

Moguće je definirati i operator materijalne derivacije, koji glasi:

$$\frac{\mathrm{D}\bullet}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \bullet$$

Gdje umjesto oznake • može stajati skalarno, vektorsko ili tenzorsko polje izraženo u funkciji prostornih koordinata i vremena.

[1] Nužan i dovoljan uvjet za postojanje inverzne funkcije je da je determinanta $\left|\partial \vec{r} / \partial \vec{r}_0\right|$ različita od nule i konačna.

- Dok se u Lagrangeovom opisu strujanja fluida polazi od jednadžbi gibanja (čijim se deriviranjem dolazi do brzine i ubrzanja), u Eulerovom se opisu polazi od polja brzine (jer se polje brzine pojavljuje u operatoru materijalne derivacije).

3.2 Strujnice

- Strujnice su zamišljene krivulje kojima se u svakoj točki smjer tangente poklapa sa smjerom vektora brzine. Na strujnicama se ucrtava smjer strujanja kao što prikazuje slika. Za nestacionarno polje brzine, slika strujnica se mijenja od trenutka do trenutka, pa se slika strujnica odnosi na jedan izabrani vremenski trenutak, npr. $t=t_1$. Ako se pravac vektora brzine poklapa s tangentom na strujnicu, tada je usmjereni element luka strujnice $d\vec{r}$ paralelan vektoru brzine $\vec{v}$, te je njihov vektorski produkt jednak nuli, odnosno pripadajuće komponente im se razlikuju istim faktorom, tako da vrijedi:

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}y}{v_y(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}z}{v_z(x,y,z,t)}$$

- Osnovno svojstvo strujnica je da se one ne mogu presijecati, jer bi to značilo da u točki presjeka vektor brzine ima dva različita smjera, što je nefizikalno. Izuzetak čine točke zastoja u kojima je brzina jednaka nuli.

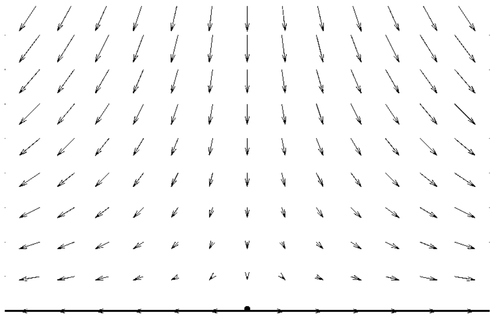
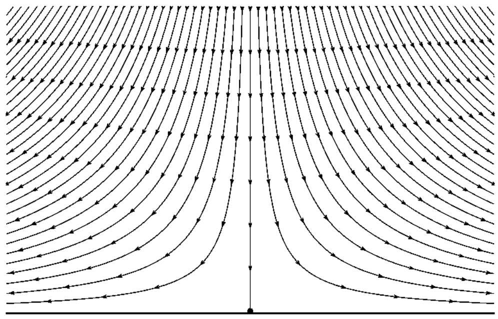
3.3 Trajektorije

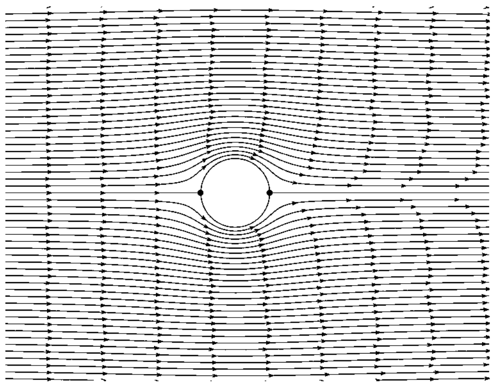
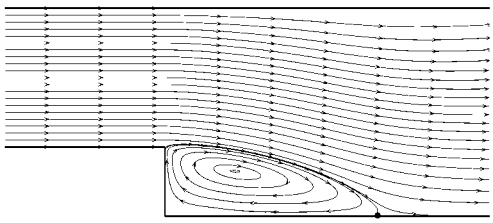
- Trajektorija je prostorna krivulja koju svojim gibanjem opisuje čestica fluida. Jednadžbe gibanja čestice fluida zapisane u Lagrangeovim koordinatama označuju parametarski zapis jednadžbe trajektorije. U Eulerovom opisu strujanja, gdje se polazi od polja brzine, do jednadžbe trajektorija se dolazi, polazeći od definicije brzine čestice kontinuuma. Ako je $d\vec{r}$ usmjereni infinitezimalni element puta kojeg prevali čestica kontinuuma gibajući se po svojoj trajektoriji za infinitezimalno vrijeme dt, tada za taj usmjereni element luka trajektorije, iz same definicije brzine slijedi: $\mathrm{d}\vec{r}=\vec{v}(\vec{r},t)\cdot\mathrm{d}t$, što se može prikazati i u obliku sustava diferencijalnih jednadžbi:

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}y}{v_y(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}z}{v_z(x,y,z,t)}=\mathrm{d}t$$

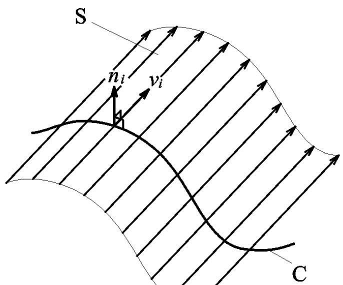
  čijim se rješavanjem uz početne uvjete za $t=t_0$, $\vec{r}\left(t_0\right)=\vec{r}_0$, dolazi do jednadžbi trajektorija.

- Krivulja obilježenih čestica u danom vremenskom trenutku spaja sve čestice fluida koje su prošle zadanom točkom prostora.
- U stacionarnom strujanju trajektorije, strujnice i krivulje obilježenih čestica se poklapaju.

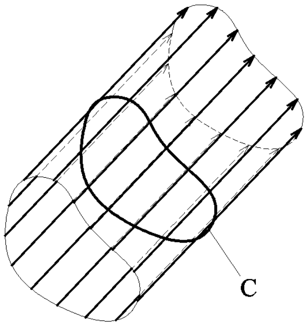
	
vektori brzine za strujanje u blizini točke zastoja	strujnice za strujanje u blizini točke zastoja

	
Strujnice pri optjecanju cilindra	slika strujnica za slučaj naglog proširenja

3.4 Strujna površina i strujna cijev



Strujna površina je sastavljena od strujnica koje prolaze točkama neke krivulje C.
Vektor brzine je tangencijalan na površinu $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$, pa kroz strujnu površinu nema protoka $Q=\int_S \vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=0$.



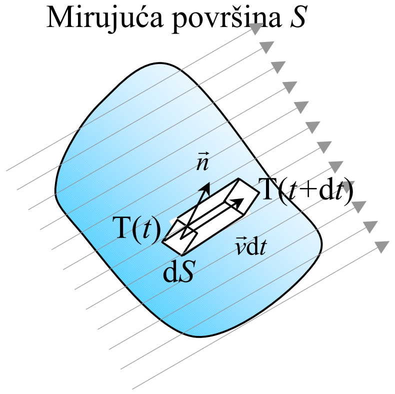
Ako je krivulja C zatvorena, strujna površina prelazi u plašt strujne cijevi, kroz kojeg nema protoka fluida, kao i kroz plašt neke fizičke cijevi.
Ako je površina poprečnog presjeka cijevi $\mathrm{d}S$ infinitezimalna, govori se o elementarnoj strujnoj cijevi. U graničnom prijelazu $\mathrm{d}S\to 0$ elementarna strujna cijev prelazi u strujnicu.

3.6 Protok

Volumenski protok ili jednostavno protok Q jest volumen čestica fluida koje u jediničnom vremenu prođu kroz promatranu površinu S orijentiranu jediničnim vektorom normale $\vec{n}$. Ako se čestice fluida gibaju brzinom $\vec{v}$, a točke površine brzinom $\vec{u}$, tada je relativna brzina gibanja čestica fluida u odnosu na površinu $\vec{w}=\vec{v}-\vec{u}$, a protok Q je definiran izrazom

$$Q=\int_S \vec{w}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\int_S\left(\vec{v}-\vec{u}\right)\cdot\vec{n}\mathrm{d}S\,.$$

Mirujuća površina S

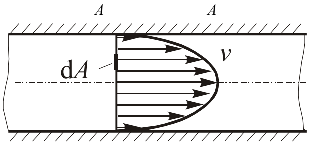


Primjer 1: Protok kroz mirujuću površinu ($\vec{u}=0$) je prema općoj formuli $Q=\int_S \vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$.

Čestica fluida T se u trenutku t nalazi na površini $\mathrm{d}S$, a u trenutku t+dt će zauzeti novi položaj u prostoru, pri čemu će prevaliti put $\vec{v}\mathrm{d}t$, odnosno svojim gibanjem opisati kosu prizmu, kojoj je visina jednaka projekciji vektora puta na smjer normale $\mathrm{d}h=\vec{n}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t$. Volumen čestica fluida koje u vremenu $\mathrm{d}t$ prođu kroz površinu dS jednak je volumenu prizme $\mathrm{d}V=\mathrm{d}S\cdot\mathrm{d}h=\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S\cdot\mathrm{d}t$. Elementarni protok kroz površinu $\mathrm{d}S$ jednak je po definiciji omjeru volumena $\mathrm{d}V$ i vremena $\mathrm{d}t$, tj. $\mathrm{d}Q=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$, a ukupni protok kroz površinu S jednak je zbroju svih elementarnih protoka, što se opisuje integralom $Q=\int_S \vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$.

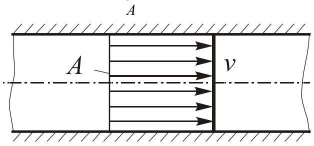
Poseban slučaj (brzina okomita na ravnu površinu)

$$Q=\int_A \vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A=\int_A v\mathrm{d}A$$

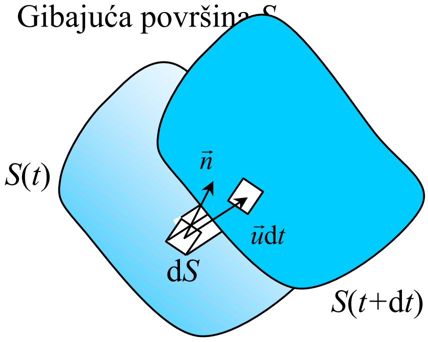


Brzina je okomita na ravnu površinu i konstantna

$$Q=\int_A v\mathrm{d}A=vA$$



Gibajuća površina S



Primjer 2: Protok kroz površinu koja se giba brzinom $\vec{u}$ u mirujućem fluidu ($\vec{v}=0$) je prema općoj formuli $Q=\int_S -\vec{u}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$.

Gibanjem površine S, element dS opisuje kosu prizmu kojoj je duljina brida $\vec{u}\mathrm{d}t$, a volumen $\mathrm{d}V=\vec{u}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S\cdot\mathrm{d}t$. Dakle gibanjem površine S mirujuće čestice fluida prelaze s desne na lijevu stranu površine, pa gledano relativno u odnosu na površinu to je isto kao da je površina mirovala, a čestice brzinom $-\vec{u}$ prolazile kroz površinu. Zato je protok definiran izrazom $Q=\int_S -\vec{u}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$.

Primjer 3: Protok kroz materijalnu površinu ($\vec{u}=\vec{v}$)
$Q=\int\limits_S(\vec{v}-\vec{u})\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=0$. Jasno je da kroz materijalnu površinu nema protoka čestica fluida jer se ona sastoji stalno od jednih te istih čestica.

Protok fizikalne veličine

Čestice fluida osim volumena imaju masu, energiju, količinu gibanja, itd. Prolaskom čestice fluida kroz neku površinu, ona pronosi fizikalne veličine, pa se govori o protocima: volumena (što je gore definirano jednostavno kao protok), mase, energije, količine gibanja i sl. Ako se sa F označi fizikalna veličina, a sa Φ volumensku gustoću te fizikalne veličine, koja je definirana izrazom

$$\Phi=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta V}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}V},$$

odnosno sadržaj fizikalne veličine unutar čestice fluida (unutar infinitezimalnog volumena $\mathrm{d}V$) jest $\mathrm{d}F=\Phi\mathrm{d}V$, a sadržaj te fizikalne veličine unutar određenog volumena V je definiran integralom

$$F=\int\limits_V\Phi\mathrm{d}V$$

Primjeri: $F=V\ \Rightarrow\ \Phi=1$; $F=m\ \Rightarrow\ \Phi=\rho$; $F=m\vec{v}\ \Rightarrow\ \Phi=\rho\vec{v}$, $F=\frac{1}{2}mv^2\ \Rightarrow\ \Phi=\frac{1}{2}\rho v^2$

Dakle za slučaj gibajuće površine u gibajućem fluidu, volumenski protok kroz elementarnu površinu $\mathrm{d}S$ će biti $\mathrm{d}Q=(\vec{v}-\vec{u})\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$, a protok fizikalne veličine pronesene kroz tu površinu je $\mathrm{d}Q_F=\Phi(\vec{v}-\vec{u})\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$, odnosno protok fizikalne veličine kroz ukupnu površinu je

$$Q_F=\int\limits_S\Phi(\vec{v}-\vec{u})\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$$

Primjeri:

a) Maseni protok: $Q_m=\dot{m}=\int\limits_S\rho(\vec{v}-\vec{u})\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$; $[\dot{m}]=\mathrm{MT}^{-1}$, $[\dot{m}]_{\mathrm{SI}}=\mathrm{kg/s}$. Za slučaj mirujuće površine: $\dot{m}=\int\limits_S\rho\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$. Za $\rho=\text{konst.}$ vrijedi $\dot{m}=\rho Q$.

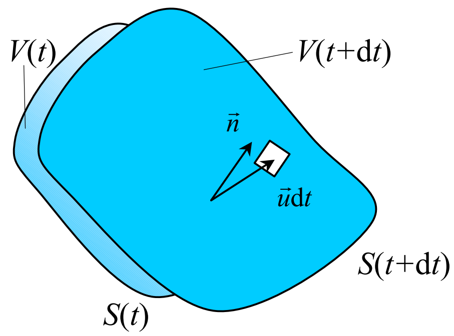
b) Težinski protok $Q_G=\dot{G}=\int\limits_S\rho g(\vec{v}-\vec{u})\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$; $[\dot{G}]=\mathrm{MLT}^{-3}$, $[\dot{G}]_{\mathrm{SI}}=\mathrm{N/s}$. Za slučaj mirujuće površine: $\dot{G}=\int\limits_S\rho g\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$. Za $\rho=\text{konst.}$ i $g=\text{konst.}$ vrijedi $\dot{G}=\dot{m}g=\rho gQ$.

c) Protok količine gibanja: $(Q_{\mathrm{KG}})_k=\int\limits_S\rho v_k(\vec{v}-\vec{u})\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$; $[(Q_{\mathrm{KG}})_k]=\mathrm{MLT}^{-2}$, $[(Q_{\mathrm{KG}})_k]_{\mathrm{SI}}=\mathrm{N}$. Za slučaj mirujuće površine: $(Q_{\mathrm{KG}})_k=\int\limits_S\rho v_k\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$. (Protok količine gibanja je vektorska veličina!)

d) Protok kinetičke energije: $Q_{\mathrm{EK}}=\int\limits_S\frac{1}{2}\rho v^2(\vec{v}-\vec{u})\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$; $[Q_{\mathrm{EK}}]=\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-3}$, $[Q_{\mathrm{EK}}]_{\mathrm{SI}}=\mathrm{W}$.

3.7 Leibnitzov teorem

Brzina promjene veličine volumena



Gibajuća površina S

a) Opći slučaj volumena V čija se granica S giba brzinom $\vec{u}$

Brzina promjene volumena je po definiciji $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{V(t+\mathrm{d}t)-V(t)}{\mathrm{d}t}$, a element površine $\mathrm{d}S$ opisuje element volumena $d(dV)=\vec{u}\cdot\vec{n}\mathrm{d}t\mathrm{d}S$, što integrirano po površini S daje razliku volumena $V(t+\mathrm{d}t)-V(t)$, te je konačno:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\int_S \vec{u}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\int_V \nabla\cdot\vec{u}\mathrm{d}V .$$

Brzina promjene sadržaja fizikalne veličine unutar volumena

$$\frac{d}{dt}\int_V f\phi dV=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{V(t+\Delta t)} f(\vec{r},t+\Delta t)dV-\int_{V(t)} f(\vec{r},t)dV\right]=$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{V(t)} f(\vec{r},t+\Delta t)dV-\int_{V(t)} f(\vec{r},t)dV+\int_{V(t+\Delta t)} f(\vec{r},t+\Delta t)dV-\int_{V(t)} f(\vec{r},t+\Delta t)dV\right]=$$

$$\int_{V(t)}\frac{\partial f}{\partial t}dV+\int_{V(t+\Delta t)-V(t)} f(\vec{r},t+\Delta t)dV=\int_{V(t)}\frac{\partial f}{\partial t}dV+\int_{S(t)} f\vec{u}\cdot\vec{n}dS=\int_{V(t)}\frac{\partial f}{\partial t}dV+\int_{S(t)}\nabla\cdot(f\vec{u})dV$$

a) Opći slučaj gibajućeg volumena

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V f\mathrm{d}V=\underbrace{\int_V\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V}_{\text{lokalna promjena}}+\underbrace{\int_S f\vec{u}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S}_{\text{promjena uslijed gibanja volumena}}=\int_V\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\nabla\cdot\left(f\vec{u}\right)\right)\mathrm{d}V$$

b) Materijalni volumen ($\vec{u}=\vec{v},\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\to\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$)

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V_\mathrm{M}} f\mathrm{d}V=\int_{V_\mathrm{M}}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V+\int_{S_\mathrm{M}} f\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\int_{V_\mathrm{M}}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\nabla\cdot\left(f\vec{v}\right)\right)\mathrm{d}V$$

c) Mirujući volumen ($\vec{u}=0$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V f\mathrm{d}V=\int_V\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V$$

3.8 Materijalni volumen

- Materijalni volumen V_M (fluidno tijelo) je uočeni dio prostora ispunjen fluidom koji se tijekom gibanja sastoji stalno od jednih te istih čestica. Materijalni volumen je od okoline odijeljen materijalnom površinom S_M koja se također sastoji stalno od jednih te istih čestica. Jasno je da je brzina gibanja materijalne površine jednaka brzini gibanja čestica fluida, koje čine materijalnu površinu.
- U općem slučaju materijalni volumen tijekom gibanja mijenja svoj položaj, oblik i veličinu, pa je za opis njegova gibanja, potrebno opisati gibanje svake njegove čestice.
- Nema protoka kroz materijalnu površinu ($\vec{v} = \vec{u}$). Brzina promjene sadržaja fizikalne veličine za materijalni volumen jednaka je

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_M(t)} f dV = \int_{V_M(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{S_M(t)} f\vec{v}\cdot\vec{n} dV$$