2. HIDROSTATIKA

Osnovna jednadžba gibanja (II. Newtonov zakon) čestice idealnog fluida i realnog fluida u relativnom mirovanju

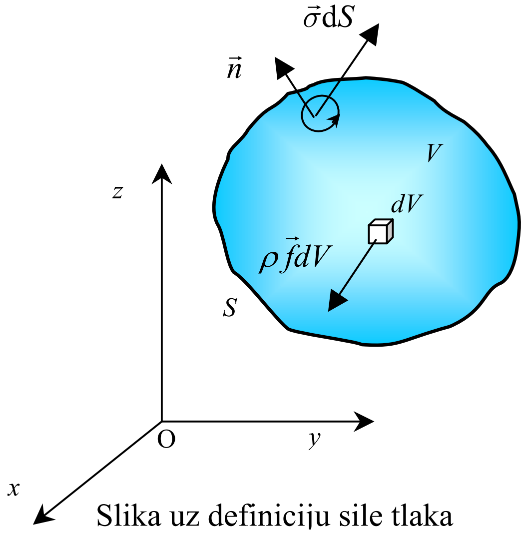
$$\int_V \rho \vec{a} \mathrm{d}V = \int_V \rho \vec{f} \mathrm{d}V + \int_S \vec{\sigma} \mathrm{d}S$$

$$\int_V \rho \vec{a} \mathrm{d}V = \int_V \rho \vec{f} \mathrm{d}V + \int_S \left(-p\vec{n} + \vec{\sigma}^t\right) \mathrm{dS}$$

Uz zanemarenje viskoznih sila

$$\int_V \rho \vec{a} \mathrm{d}V = \int_V \rho \vec{f} \mathrm{d}V - \int_S p\vec{n} \mathrm{dS} = \int_V \rho \vec{f} \mathrm{d}V - \int_V \nabla p \mathrm{dV}$$

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{f} - \nabla p \quad \text{ili} \quad \rho \vec{a} = \rho \vec{f} - \mathrm{grad} p$$



Slika uz definiciju sile tlaka

2.1 Osnovna jednadžba statike fluida

Osnovna jednadžba gibanja za slučaj $\vec{a} = 0$ izražava ravnotežu masenih sila i sila tlaka.

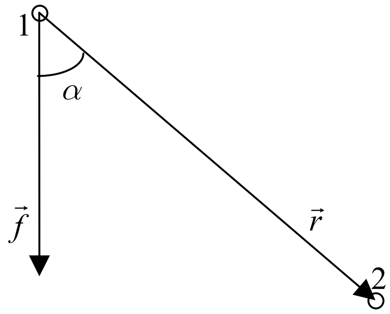
$$\rho \vec{f} = \nabla p \quad \text{ili} \quad \rho \vec{f} = \mathrm{grad} p$$

Iz osnovne jednadžbe statike imajući na umu svojstva gradijenta zaključuje se:

1) *Ako nema masenih sila (* $\vec{f} = 0$ *) slijedi da je tlak p konstantan,*
2) *Tlak najbrže raste u smjeru* grad$p$ *tj. u smjeru masene sile, a najbrže opada u smjeru* – grad$p$ *tj. u smjeru suprotnom od masene sile,*
3) *Budući da je* grad$p$ *okomit na površinu p=konst. promjena tlaka u okomitom smjeru na vektor masene sile je jednaka nuli. Drugim riječima, vektor masene sile je okomit na površine konstantnog tlaka (izobare).*

   Također vrijedi:
4) *Granica dvaju fluida u mirovanju poklapa se s izobarom, te je vektor masene sile u svakoj točki okomit na razdjelnu površinu,*
5) *Vektor masene sile je usmjeren od razdjelne površine prema fluidu veće gustoće,*
6) *Na granici dvaju fluida tlak je neprekidan, ako se zanemare učinci površinske napetosti.*

2.2 Promjena tlaka u mirujućem fluidu u polju sile teže



Promjena tlaka između dvije točke

(uz $\rho =$ konst. i $\vec{f} =$ konst.)

Iz osnovne jednadžbe statike sljedi:

$$\rho \vec{f} = \nabla p$$

$$\rho \vec{f} \cdot d\vec{r} = \nabla p \cdot d\vec{r} = dp$$

$$p_2 = p_1 + \rho \vec{f} \cdot \vec{r}$$

ili

$$p_2 = p_1 + \rho \vec{f} \cdot \vec{r} = p_1 + \rho \left|\vec{f}\right| \left|\vec{r}\right| \cos(\alpha)$$

Iz svojstva skalrnog produkta je jasno da se pri određivanju promjene tlaka može ili put projicirati na silu ili silu na put.

Očito je da ako se poveća tlak p_1 u točki 1, da će se on povećati i u točki 2, odnosno u svim drugim točkama, što je bit Pascalova zakona koji kaže da se tlak narinut izvana na fluid u mirovanju širi jednoliko u svim smjerovima.

Promjena tlaka u mirujućem fluidu u polju sile teže ($g = 9,80665$ m/s^2)

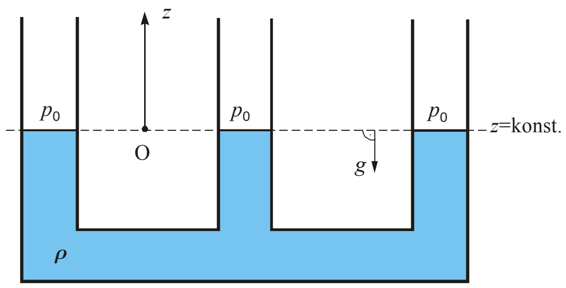
$$p = p_0 - \rho g z = p_0 + \rho g h \quad \text{ili} \quad \frac{p}{\rho g} + z = \frac{p_0}{\rho g} = \text{konst.}$$

gdje z označuje visinu, h dubinu, a p_0 tlak u ishodištu koordinatnog sustava.

$\frac{p}{\rho g} =$ visina tlaka, $\left[\frac{p}{\rho g}\right] = \mathrm{L}$, $\left[\frac{p}{\rho g}\right]_{\mathrm{SI}} =$ m stupca fluida,

$\frac{p}{\rho g} + z =$ piezometrička visina.

Princip spojenih posuda

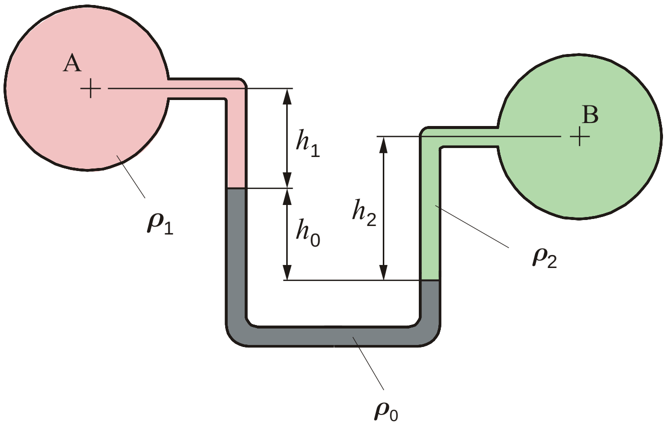


Ako homogena kapljevina miruje u više međusobno spojenih posuda, tada će slobodne površine otvorene prema istom atmosferskom tlaku p_0 ležati u istoj izobari (za mirujući fluid to je horizontalna ravnina).

2.3 Hidrostatski manometri

Postupak za postavljanje jednadžbe manometra (jednadžbe promjene tlaka između dviju točaka koje se mogu međusobno spojiti kroz fluid)

Polazi se s tlakom u jednoj točki i tom se tlaku dodaju sve promjene tlaka oblika $\rho g h$, (idući od meniskusa do meniskusa) i to s pozitivnim predznakom ako se ide prema dolje, a s negativnim ako se ide prema gore. Kada se dođe do druge točke tako dobiveni izraz se izjednačuje s tlakom u toj točki.



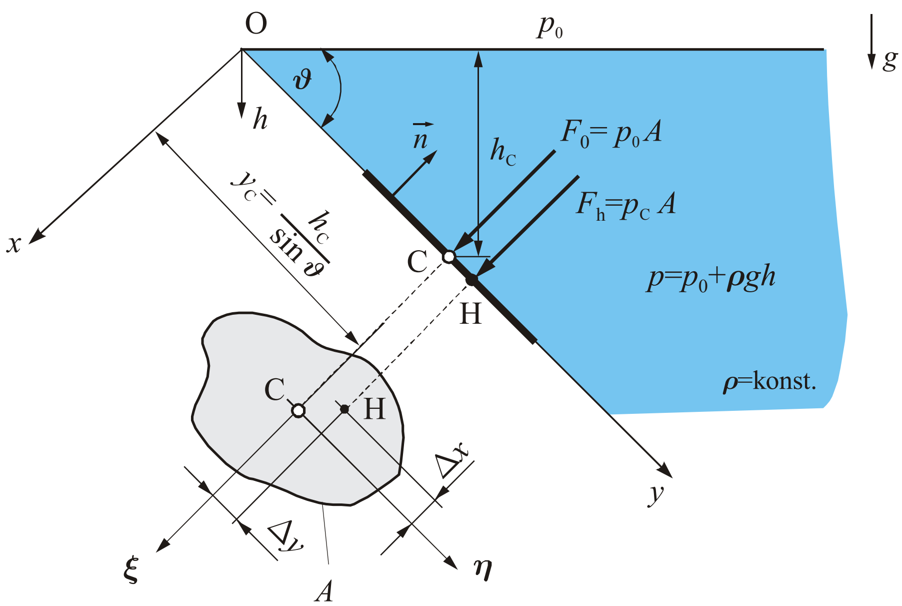
Primjer diferencijalnog manometra:

- jednadžba od točke B do točke A
$p_B + \rho_2 g h_2 - \rho_0 g h_0 - \rho_1 g h_1 = p_A$

- jednadžba od točke A do točke B
$p_A + \rho_1 g h_1 + \rho_0 g h_0 - \rho_2 g h_2 = p_B$

Apsolutni tlak se mjeri od apsolutne nule (100% vakuum).
Manometarski tlak p_M je razlika apsolutnog p i atmosferskog tlaka p_a (mjeri se u odnosu na atmosferski tlak) $p_M = p - p_a$. Pozitivni manometarski tlak se naziva pretlak, a negativni podtlak.

2.4 Sila tlaka na ravne površine



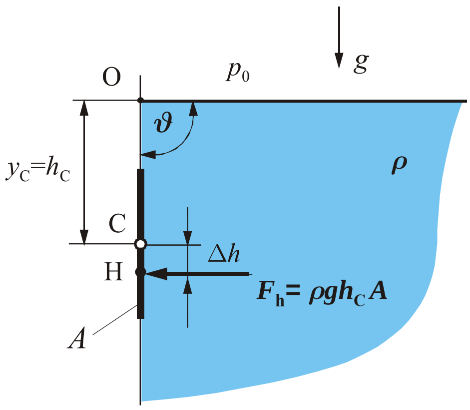
$$F = \int_S p dS = \int_S (p_0 + \rho g h) dS = p_0 S + \rho g \int_S h dS = p_0 S + \rho g \cdot \sin(\alpha) \underbrace{\int_S y dS}_{y_c S} = p_0 S + \rho g h_c S$$

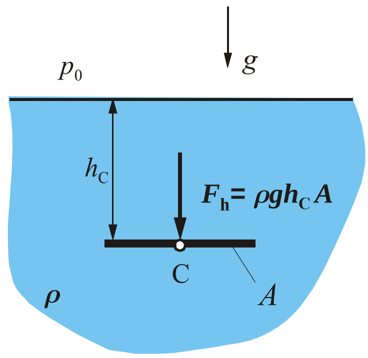
$$F_h\left(y_c+\Delta y\right)=\int_S \rho\cdot g\cdot h\cdot y dS=\rho\cdot g\cdot\sin\left(\alpha\right)\underbrace{\int_S y^2 dS}_{I_{xx}}$$

$$\rho\cdot g\cdot\sin\left(\alpha\right)\cdot y_c\cdot S\cdot\left(y_c+\Delta y\right)=\rho\cdot g\cdot\sin\left(\alpha\right)\underbrace{\left(I_{\xi\xi}+y_c^2 S\right)}_{I_{xx}}$$

$$\Delta y=\frac{I_{\xi\xi}}{y_c S}$$

- Sila F_0 uslijed konstantnog tlaka p_0 okomita je na ravnu površinu A i djeluje u njenom težištu, a po veličini je: $F_0=p_0 A$
- Sila F_h uslijed promjenjivog hidrostatskog tlaka $p_\mathrm{h}=\rho g h$ okomita je na ravnu površinu A i djeluje u točki H, a po veličini je: $F_h=p_\mathrm{C} A=\rho g h_\mathrm{C} A$ gdje je h_C dubina na kojoj se nalazi težište C površine A.
- Položaj točke H je u odnosu na težište C površine A definiran pomacima Δx i Δy za koje vrijedi: $\Delta y=\dfrac{I_{\xi\xi}}{y_\mathrm{C} A}$ i $\Delta x=\dfrac{I_{\xi\eta}}{y_\mathrm{C} A}$ gdje je $y_\mathrm{C}=h_\mathrm{C}/\sin\vartheta$ udaljenost težišta C od slobodne površine, mjereno u ravnini u kojoj se nalazi površina (udaljenost $\overline{\mathrm{OC}}$ prema slici), a $I_{\xi\xi}$ i $I_{\xi\eta}$ su glavni i centrifugalni moment inercije površine A u odnosu na osi ξ i η kroz težište, prema slici. Pomak Δx je za površine s barem jednom osi simetrije jednak nuli (vidjeti kao primjer tablicu koja prikazuje podatke o centrifugalnom momentu inercije $I_{\xi\eta}$).
- Za vertikalno uronjenu površinu prema slici vrijedi $y_\mathrm{C}=h_\mathrm{C}$. Za horizontalno uronjenu površinu ($\vartheta=0$) $y_\mathrm{C}\to\infty$ pa su prema gornjim izrazima $\Delta x=\Delta y=0$, te će sila F_h djelovati u težištu površine, kao i za slučaj konstantnog tlaka p_0.



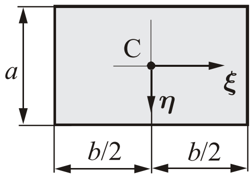
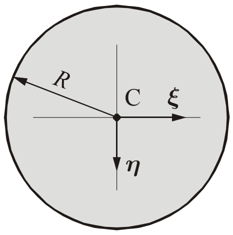
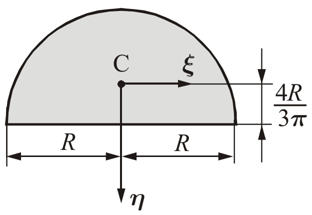
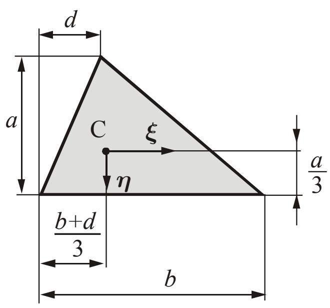
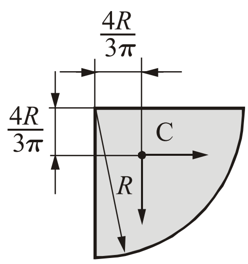


Momenti M_x i M_y sile hidrostatskog tlaka u odnosu na težište C površine ne zavise od dubine na kojoj se težište nalazi

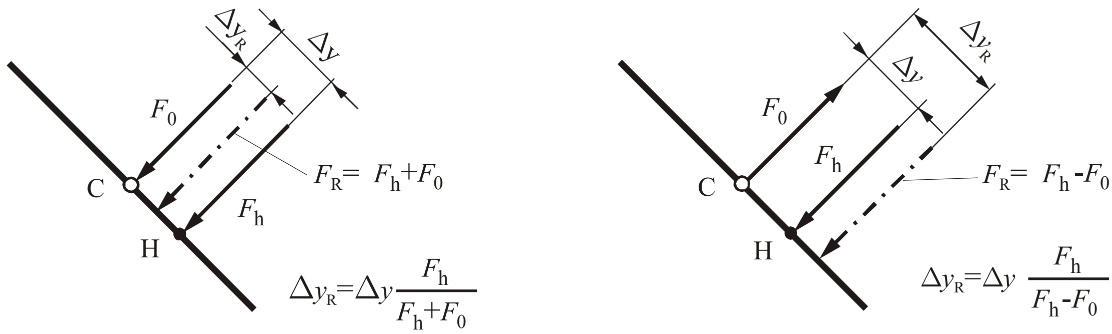
$$M_x=F_\mathrm{h}\cdot\Delta y=\rho g h_\mathrm{C} A\cdot\frac{I_{\xi\xi}}{y_\mathrm{C}\cdot A}=\rho g I_{\xi\xi}\sin\vartheta$$

$$M_y=F_\mathrm{h}\cdot\Delta x=\rho g h_\mathrm{C} A\cdot\frac{I_{\xi\eta}}{y_\mathrm{C}\cdot A}=\rho g I_{\xi\eta}\sin\vartheta$$

Geometrijska svojstva nekih površina

Geometrijski lik	Površina	$I_{\xi\xi}$	$I_{\eta\eta}$	$I_{\xi\eta}$
	$A = ab$	$\frac{ba^3}{12}$	$\frac{ab^3}{12}$	0
	$A = R^2\pi$	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	0
	$A = \frac{1}{2}R^2\pi$	$0{,}1098R^4$	$0{,}3927R^4$	0
	$A = \frac{ab}{2}$	$\frac{ba^3}{36}$		$\frac{ba^2}{72}(b-2d)$
	$A = \frac{1}{4}R^2\pi$	$0{,}05488R^4$	$0{,}05488R^4$	$-0{,}01647R^4$

Položaj rezultantne sile F_R=F_h+F_0 za slučaj istosmjernih i mimosmjernih sila F_0 i F_h.

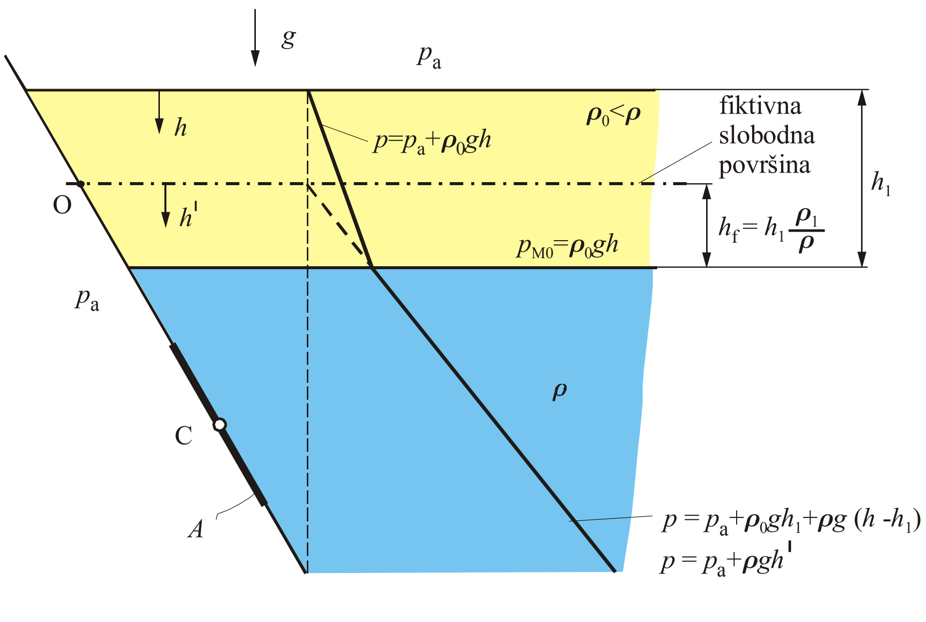


a) istosmjerne sile b) mimosmjerne sile

<u>Fiktivna slobodna površina</u>

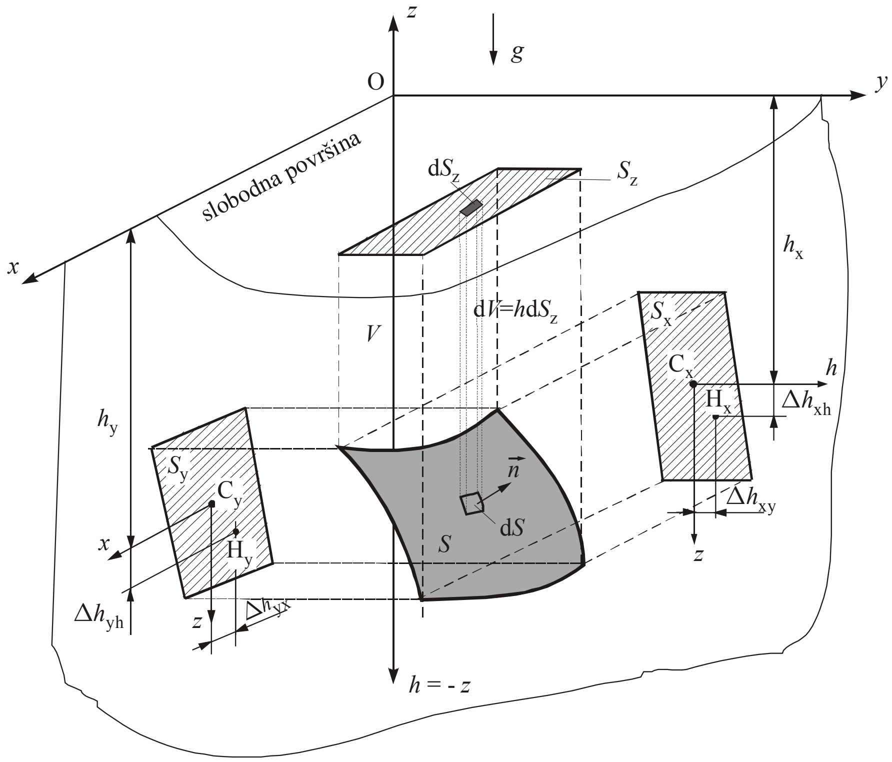
Ako je tlak s obje strane površine isti (slučaj otvorenog spremnika), sile konstantnog tlaka se poništavaju. Za slučaj zatvorenog spremnika rezultatntna sila konstantnog tlaka se računa s manometarskim tlakom p_{M0} u spremniku. Računanje sile konstantnog tlaka (<u>u slučaju da je površina potpuno uronjena u fluid</u>) može se izbjeći uvođenjem fiktivne slobodne površine. Fiktivna slobodna površina je udaljena od stvarne slobodne površine za visinu manometarskog tlaka $h_f = p_{M0}/\rho g$ (za slučaj pretlaka je iznad, a za slučaj podtlaka ispod stvarne slobodne površine). <u>Ako fiktivna slobodna površina padne ispod težišta C površine, dubina *h* postaje negativna, a svi izrazi i dalje vrijede</u>.

Fiktivna slobodna površina se može uvesti i za slučaj mirovanja dvaju fluida različitih gustoća prema slici.



<u>2.5 Sila tlaka na zakrivljene površine</u>

Sila tlaka na zakrivljenu površinu se razlaže na komponente u smjerovima osi. Zakrivljena površina *S* se projicira na koordinatne ravnine. Projekcija površine je pozitivna ako je kut između vektora normale i pozitivnog smjera osi manji od 90° (fluid je ispred površine *S* gledano iz pozitivnog smjera osi).



- Izrazi za komponente F_x^0 , F_y^0 , F_z^0 sile $\vec{F}^0$ uslijed konstantnog tlaka

  $F_x^0 = -p_0 S_x$; $\qquad F_y^0 = -p_0 S_y$; $\qquad F_z^0 = -p_0 S_z$

- Izrazi za horizontalne komponente F_x i F_y sile uslijed promjenjivog hidrostatskog tlaka $p_h = \rho g h$ i za pomake hvatišta tih komponenti u odnosu na težišta projekcija su:

  $F_x = -p_{Cx} \cdot S_x = -\rho g h_x S_x \qquad F_y = -p_{Cy} \cdot S_y = -\rho g h_y S_y$

  $$\Delta h_{xh} = \frac{I_{\eta\eta}}{h_x \cdot |S_x|} \qquad \Delta h_{yh} = \frac{I_{\xi\xi}}{h_y \cdot |S_y|}$$

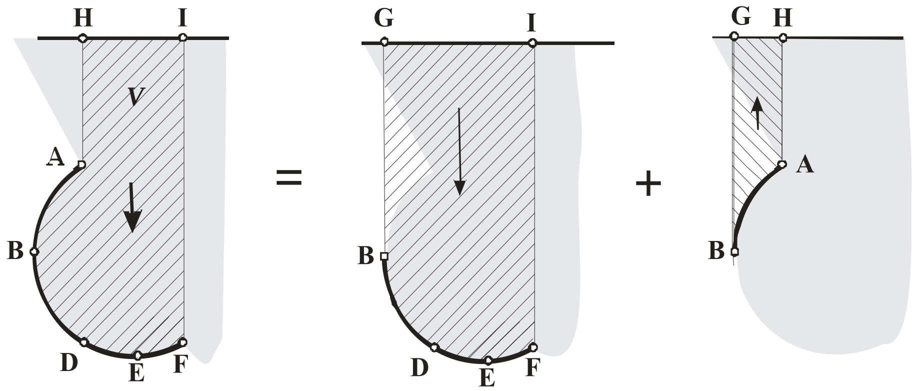
  $$\Delta h_{xy} = \frac{I_{\eta\xi}}{h_x \cdot |S_x|} \qquad \Delta h_{yx} = \frac{I_{\xi\varsigma}}{h_y \cdot |S_y|}$$

- Vertikalna komponenta F_z sile hidrostatskog tlaka na površinu S je po veličini jednaka težini fluida koji se nalazi u volumenu V između površine S i slobodne površine. Sila F_z prolazi težištem volumena V. Predznak komponente sile F_z ovisi o predznaku projekcije S_z, te se može pisati da je

  $$F_z = \mp \rho g V$$

  Negativni predznak se odnosi na slučaj pozitivne projekcije površine S_z (fluid je iznad površine S), a pozitivni predznak za slučaj negativne projekcije S_z (fluid je ispod površine S).

***Primjer**:* Vertikalna i horizontalna komponenta sile na zakrivljenu površinu ABDEF (prema slici) širine B (okomito na ravninu slike). Fluid je označen sivom bojom, a točke G, H i I su na slobodnoj površini.

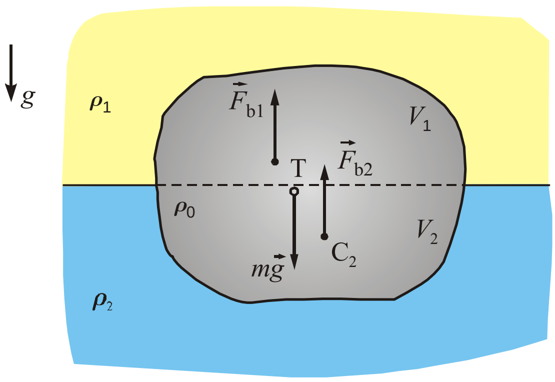


Vertikalna komponenta jednaka je po veličini težini fluida u osjenčanom volumenu V, djeluje prema dolje i prolazi težištem tog volumena. Na dijelu površine BDEF fluid je iznad površine, te sila djeluje prema dolje, a po veličini je jednaka težini fluida u volumenu BDEFIGB. Na dijelu površine AB fluid je ispod površine pa sila djeluje prema gore, a po veličini je jednaka težini fluida u volumenu AHGBA.
Horizontalne komponente sile tlaka na dijelovima površine EF i ED se međusobno poništavaju. Projekcija površine s kojom se računa horizontalna sila tlaka je dakle jednaka umnošku visine $\overline{\mathrm{AD}}$ sa širinom B površine.

2.6 Sila uzgona

Sila uzgona je rezultat djelovanja sila tlaka po površini tijela uronjenog u fluid. Sila uzgona je jednaka težini fluida istisnutog tijelom (težini istisnine), djeluje vertikalno u vis i prolazi težištem istisnine.

Sila uzgona na granici dvaju fluida
Slika prikazuje slučaj plivanja tijela mase m, gustoće ρ_0 na razdjelnoj površini dvaju fluida gustoća ρ_1 i ρ_2. Točke C_1 i C_2 su težišta volumena istisnine V_1 i V_2, a T je težište tijela.



Sila F_b uzgona je zbroj $F_b = F_{b1} + F_{b2} = \rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2$
Uvjet plivanja (ravnoteže) je da su rezultantna sila (tj. $F_b = mg$) i rezultantni moment na tijelo jednaki nuli (tj. suma momenata sila F_{b1} i F_{b2} u odnosu na težište tijela mora biti jednaka nuli). Jasno je da vrijedi $\rho_2 > \rho_0 > \rho_1$. Za slučaj $\rho_2 >> \rho_1$ sila F_{b2} se zanemaruje.