A. Matematičke osnove

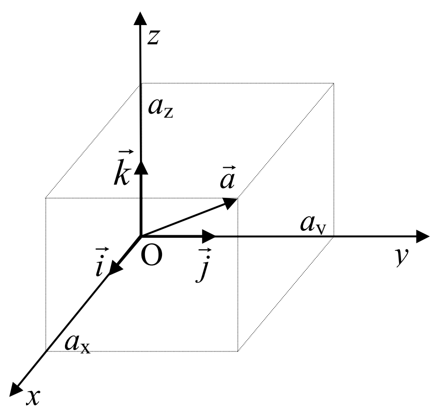
U fizici se razlikuju skalarne, vektorske i tenzorske veličine. Skalarne veličine definirane su jednim brojem (skalarom), a takve su veličine npr. masa *m*, volumen *V*, gustoća ρ, specifična unutarnja energija *u* itd. Vektorske veličine su određene smjerom, intenzitetom i orijentacijom, odnosno s pomoću tri komponente (npr. tri projekcije na osi koordinatnog sustava), a takve su veličine brzina $\vec{v}$, ubrzanje $\vec{a}$, sila $\vec{F}$, vektor površinske gustoće snage toplinskog toka $\vec{q}$ itd. Vektorske veličine se u literaturi još označavaju i masno otisnutim slovima (***v, a, F, q***). Tenzorske veličine mogu biti drugog, trećeg ili višeg reda. Tenzori drugog reda definirani su s devet komponenti, tenzori trećeg reda s 27 komponenti, odnosno općenito broj komponenti tenzora *n*-tog reda je 3^n. Tako bi se i skalari mogli smatrati tenzorima nultog reda, a vektori su tenzori prvog reda. Tipični tenzori drugog reda u mehanici fluida su: tenzor naprezanja **T**, tenzor brzine deformacije **D**, tenzor vrtložnosti **V** itd.

A.1 GIBBSOV ILI Simbolički zapis vektora

Gore navedeni primjeri označavanja vektorskih i tenzorskih veličina se naziva simboličkim ili Gibbsovim, a takav zapis ne zavisi od izbora koordinatnog sustava. Tako bi drugi Newtonov zakon primijenjen na tijelo mase *m*, na kojeg djeluje rezultantna sila $\vec{F}$, glasio:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Iz navedenog zapisa se može zaključiti da su vektor $\vec{a}$, ubrzanja tijela, i vektor sile $\vec{F}$ kolinearni vektori i da je vektor sile razmjeran umnošku mase i ubrzanja. Također se može zaključiti da ako na isto tijelo djeluje dva puta veća sila, da će i ubrzanje biti dva puta veće. U fizici se, međutim, ne zadovoljava s ovakvim relativnim odnosima među veličinama, nego se sadržaj svake veličine želi brojčano definirati. Brojčano iskazivanje sadržaje vektorske fizikalne veličine podrazumijeva izbor koordinatnog sustava, te prikaz vektora s pomoću komponenti, koje su projekcije tog vektora na osi izabranog koordinatnog sustava. Tada je svaka komponenta jedna skalarna veličina čiji se sadržaj iskazuje mjernim brojem i mjernom jedinicom. Slika 1. prikazuje desni kartezijski koordinatni sustav O*xyz* u kojem su $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ jedinični vektori (ortovi) u smjeru osi *x*,*y* i *z*. Skup triju jediničnih vektora u smjerovima koordinatnih osi se naziva bazom vektorskog prostora, a svi vektori u prostoru se mogu prikazati kao linearna kombinacija tih baznih vektora. Koeficijenti te linearne kombinacije su komponente vektora, odnosno projekcije vektora na smjer triju osi. Projekcije vektora $\vec{a}$ na smjer pojedinih osi dobivaju se njegovim skalarnim množenjem (vidjeti poglavlje A.2.3) s ortovima $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$. Tako bi se vektor $\vec{a}$ prikazao zbrojem:



Slika 1. Koordinatni sustav

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

Sila $\vec{F}$ se također može prikazati s pomoću komponenti:

$$\vec{F} = F_{\mathrm{x}}\vec{i} + F_{\mathrm{y}}\vec{j} + F_{\mathrm{z}}\vec{k}$$

Uvrštavanjem izraz prelazi u oblik:

$$m\left(a_{\mathrm{x}}\vec{i} + a_{\mathrm{y}}\vec{j} + a_{\mathrm{z}}\vec{k}\right) = F_{\mathrm{x}}\vec{i} + F_{\mathrm{y}}\vec{j} + F_{\mathrm{z}}\vec{k}$$

Vektorska jednadžba se može razložiti na tri skalarne jednadžbe. Izjednačavajući koeficijente uz jedinične vektore $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$, na lijevoj i desnoj strani gornjeg izraza slijede te tri skalarne jednadžbe:

$$m\,a_{\mathrm{x}} = F_{\mathrm{x}}$$
$$m\,a_{\mathrm{y}} = F_{\mathrm{y}}$$
$$m\,a_{\mathrm{z}} = F_{\mathrm{z}}$$

A.2 Operacije s vektorima

A.2.1 Zbrajanje vektora

Zbroj dvaju vektora je vektor. Ako je zbroj vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak vektoru $\vec{c}$, to bi u Gibbsovom zapisu glasilo:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

vektorska jednadžba se može raspisati u tri skalarne jednadžbe:

$$c_x = a_x + b_x$$
$$c_y = a_y + b_y$$
$$c_z = a_z + b_z$$

Izraz izražava poznato pravilo za analitičko zbrajanje vektora, po kojemu se vektori zbrajaju tako da im se zbroje pripadajuće komponente.

A.2.2 Množenje vektora skalarom

Umnožak skalara i vektora je vektor. Ako je vektor $\vec{c}$ jednak umnošku skalara λ s vektorom $\vec{a}$ tada se može pisati:

$$\vec{c} = \lambda\,\vec{a}$$

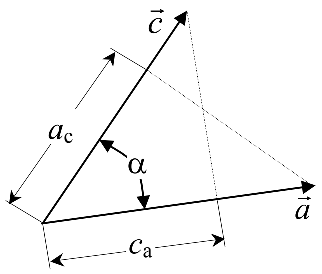
Jednadžba se može razložiti na tri skalarne jednadžbe

$$c_x = \lambda\,a_x$$
$$c_y = \lambda\,a_y$$
$$c_z = \lambda\,a_z$$

Izraz iskazuje poznato pravilo koje kaže da se vektor množi skalarom tako da mu se skalarom pomnoži svaka komponenta.

A.2.3 Skalarni produkt dvaju vektora

Skalarni ili unutarnji produkt dvaju vektora je skalar koji je po veličini jednak umnošku intenziteta obaju vektora i kosinusa kuta među njima. Skalarni produkt označuje se točkicom. Slika 2. prikazuje vektore $\vec{a}$ i $\vec{c}$, koji međusobno čine kut α. Ako se sa λ označi njihov skalarni produkt, može se pisati:



Slika 2. Skalarni produkt dvaju vektora

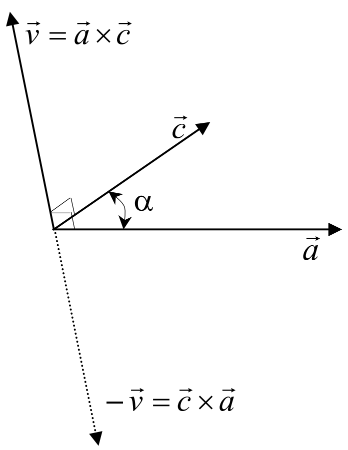
$$\lambda = \vec{a} \cdot \vec{c} = ac\cos\alpha = ac_{\mathrm{a}} = a_{\mathrm{c}}c$$

U gornjem su izrazu a i c intenziteti vektora $\vec{a}$ i $\vec{c}$, a c_{a} i a_{c} projekcije vektora $\vec{c}$ na vektor $\vec{a}$, odnosno projekcije vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{c}$. Skalarni produkt dvaju vektora jednak je umnošku prvog vektora s projekcijom drugog vektora na smjer prvog, ili obrnuto. Iz gornjeg izraza je jasno da je skalarni produkt dvaju ortova jednak kosinusu kuta između njih, te da je skalarni produkt okomitih vektora jednak nuli. Skalarni produkt vektora samog sa sobom daje kvadrat njegova intenziteta.
Skalarni produkt izražen preko komponenti vektora definiran je izrazom

$$\lambda = a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z$$

A.2.4 Vektorski produkt dvaju vektora

Vektorski ili vanjski produkt dvaju vektora je vektor, koji je okomit na oba vektora koja čine produkt, a po veličini je jednak umnošku intenziteta tih vektora i sinusa kuta među vektorima. Orijentacija vektora koji je rezultat vektorskog produkta dvaju vektora određuje se pravilom desne ruke. Ako se prstima desne ruke ide od prvog vektora u produktu prema drugom vektoru, palac će pokazivati orijentaciju vektorskog produkta. Vektorski produkt vektora označuje se znakom “×”. Slika 4. prikazuje vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{c}$. Vektorski produkt je označen sa $\vec{v}$. Vektor $\vec{v}$ je okomit i na vektor $\vec{a}$ i na vektor $\vec{c}$, a orijentacija mu je određena pravilom desne ruke. Jasno je da ako se vektorima u vektorskom produktu zamjene mjesta da će prema pravilu desne ruke i vektorski produkt promijeniti predznak, kao što je naznačeno na slici 3.



Slika 3. Vektorski produkt dvaju vektora

Intenzitet vektora $\vec{v}$ je prema rečenom pravilu:

$$v = ac\sin\alpha$$

Iz gornjeg izraza je jasno da će vektorski produkt dvaju kolinearnih vektora biti jednak nuli (vektorski produkt vektora samog sa sobom je također jednak nuli), a da će intenzitet vektorskog produkta okomitih vektora biti jednak umnošku njihovih intenziteta. Vektorski produkt dvaju ortova jednak je sinusu kuta među njima. Geometrijski gledano intenzitet vektorskog produkta ima značenje površine paralelograma čije su stranice vektori $\vec{a}$ i $\vec{c}$.

Ako se vektori u vektorskom produktu $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{c}$ prikažu s pomoću komponenti, slijedi:

$$\vec{v} = \vec{a} \times \vec{c} = (a_y c_z - a_z c_y)\vec{i} + (a_z c_x - a_x c_z)\vec{j} + (a_x c_y - a_y c_x)\vec{k}$$

A.2.5 Složeni produkt vektora

Vektorski produkt dvaju vektora je vektor kojeg možemo također skalarno ili vektorski množiti s drugim vektorima tako da se dobivaju vektorsko-vektorski ili vektorsko-skalarni produkti vektora. Skalarno-vektorski produkt vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je skalar $\lambda = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, jer je vektorski produkt u zagradi također vektor. Geometrijski gledano skalarno-vektorski produkt je volumen paralelopipeda kojemu su bridovi vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Vektorski produkt vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$, po intenzitetu odgovara površini baze paralelopipeda, a skalarni produkt odgovara projekciji trećeg brida na smjer okomice na tu bazu, odnosno umnošku visine paralelopipeda i rečene površine baze. Ovaj produkt se može prikazati preko determinante trećeg reda u kojoj su redci komponente vektora koji čine produkt i to u redoslijedu u kojem se pojavljuju u produktu, kako slijedi:

$$\lambda = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - a_z b_y c_x - a_y b_x c_z - a_x b_z c_y$$

vrijedi:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$$

A.2.6 Tenzorski produkt dvaju vektora

Tenzorski produkt dvaju vektora je tenzor drugog reda. Ako među vektorima nema oznake niti za skalarni niti za vektorski produkt, podrazumijeva se tenzorski produkt[1]. Ako je tenzor **T** rezultat množenja vektora $\vec{a}$ i $\vec{c}$, može se pisati:

$$\mathbf{T} = \vec{a}\vec{c}$$

Tenzori se kao i vektori prikazuju s pomoću komponenti. Prikazom vektora u gornjem izrazu s pomoću komponenti slijedi:

[1] Poneki autori tenzorski produkt označavaju posebnim simbolom, npr. ⊙.

$$T_{ij} = a_i c_j = \begin{pmatrix} a_x c_x & a_x c_y & a_x c_z \\ a_y c_x & a_y c_y & a_x c_z \\ a_z c_x & a_z c_y & a_z c_z \end{pmatrix}$$

Tenzor drugog reda ima dva slobodna indeksa i 3^2=9 komponenti. Dijagonala koje se proteže od lijevog gornjeg do desnog donjeg člana u gornjoj tablici se naziva glavnom dijagonalom tenzora.

A.2.6 Unutarnji produkt vektora i tenzora

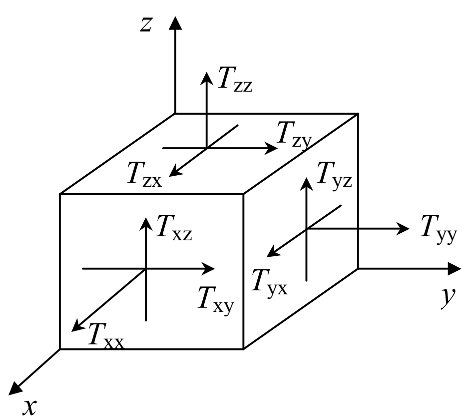
Kao što je rečeno vektori, kao tenzori prvog reda, se mogu množiti skalarno, vektorski ili tenzorski, a rezultat množenja je skalar vektor ili tenzor. Također je pokazano da se od tenzorskog produkta vektora dolazi do njihova skalarnog produkta jednostavnom kontrakcijom (izjednačavanjem) indeksa u tenzorskom produktu. Kod tenzora višeg reda definiraju se samo unutarnji produkt, i tenzorski produkt. Pri unutarnjem produktu red tenzora umnoška se smanjuje, a pri tenzorskom produktu se povećava. Tako je unutarnji produkt vektora i tenzora drugog reda vektor, produkt se označuje točkicom pa se može simbolički zapisati u obliku $\vec{a} = \vec{b} \otimes \mathsf{T}$. Prikazom sadržaja vektora i tenzora preko komponenti slijedi:

$$\vec{a} = \vec{b} \otimes \mathsf{T} = (b_x T_{xx} + b_y T_{yx} + b_z T_{zx})\vec{i} + (b_x T_{xy} + b_y T_{yy} + b_z T_{zy})\vec{j}(b_x T_{xz} + b_y T_{yz} + b_z T_{zz})\vec{k}$$

Tipičan primjer primjene skalarnog produkta u mehanici kontinuuma je određivanje vektora naprezanja na elementarnoj površini orijentiranoj vektorom jedinične normale $\vec{n}$. Kao što je prije spomenuto tenzor naprezanja definira stanje naprezanja u točki prostora, a svaki redak tog tenzora sadrži tri komponente vektora naprezanja na površinama orijentiranim vektorima normale u smjeru osi x, y i z, kao što pokazuje slika 4. Vektor naprezanja na površini orijentiranoj vektorom jedinične normale $\vec{n}$ (označen sa $\vec{\sigma}$, odnosno u indeksnom zapisu sa σ_i) je definiran izrazom:

$$\vec{\sigma} = \vec{n} \otimes \mathsf{T}$$

A.2.7 Tenzor naprezanja



Slika 4. Komponente tenzora naprezanja

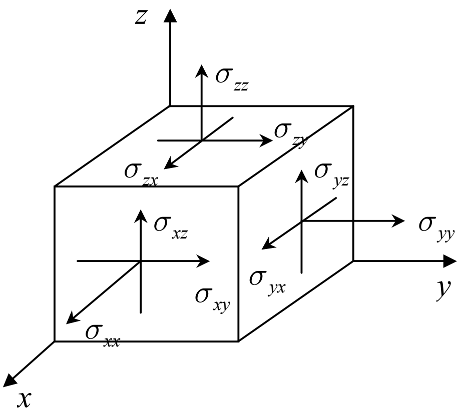
Tipični tenzor drugog reda koji je pojavljuje u mehanici kontinuuma je tenzor naprezanja. U tenzoru naprezanja komponente na glavnoj dijagonali označavaju normalna naprezanja, a komponente izvan glavne dijagonale tangencijalna naprezanja. Slika 4. ilustrira sadržaj komponenti tenzora naprezanja na primjeru elementarnog paralelopipeda dimenzija dx, dy i dz. Na tom su paralelopipedu tri karakteristične površine, čiji vektori vanjske normale (vektori okomiti na površinu i gledaju od paralelopipeda) gledaju u pozitivnim smjerovima osi. Na svakoj toj površini djeluje vektor naprezanja koji se može razložiti u tri komponente, jednu okomitu (normalnu) na površinu i dvije tangencijalne.

Stanje naprezanja u točki prostora jednoznačno je definirano tenzorom naprezanja. Komponente tenzora naprezanja definirane su komponentama triju vektora naprezanja koji djeluju na površinama orijentiranim normalama u smjeru osi koordinatnog sustava, kao na slici. Svaki vektor naprezanja ima jednu normalnu komponentu (okomitu na površinu) i dvije tangencijalne (smične) komponente. Tablični zapis komponenti tenzora naprezanja

$$\sigma_{ji} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Prvi indeks označuje redak, tj. smjer normale na površinu, a drugi stupac odnosno pravac djelovanja komponente tenzora naprezanja.

Tenzor naprezanja je simetričan $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (osim ako postoje maseni i površinski momenti).



Slika uz definiciju komponenti tenzora naprezanja

Veza između vektora i tenzora naprezanja:

(vektor naprezanja je projekcija tenzora naprezanja na smjer normale)

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = \vec{n} \otimes \mathsf{T} = (n_x\sigma_{xx} + n_y\sigma_{yx} + n_z\sigma_{zx})\vec{i} +$$

$$+(n_x\sigma_{xy} + n_y\sigma_{yy} + n_z\sigma_{zy})\vec{j} + (n_x\sigma_{xz} + n_y\sigma_{yz} + n_z\sigma_{zz})\vec{k}$$

Dogovor o predznacima naprezanja:

Pozitivna naprezanja na površinama orijentiranim normalama u pozitivnom smjeru koordinatnih osi također gledaju u pozitivne smjerove tih osi i obrnuto, pozitivna naprezanja na površinama orijentiranim normalama koje gledaju u negativnom smjeru koordinatnih osi, također gledaju u negativne smjerove tih osi.

A.3 Diferencijalni operatori

A.3.1 Diferencijalni operatori Nabla

Operator nabla: $grad\bullet = \nabla\bullet = \frac{\partial \bullet}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \bullet}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \bullet}{\partial z}\vec{k}$

A.3.2 Derivacija u smjeru jediničnog vektora $\vec{n}$

$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \vec{n} \cdot \mathrm{grad}\,\Phi$ (projekcija vektora gradijenta na smjer normale)

A.3.3 Totalni prirast polja na putu

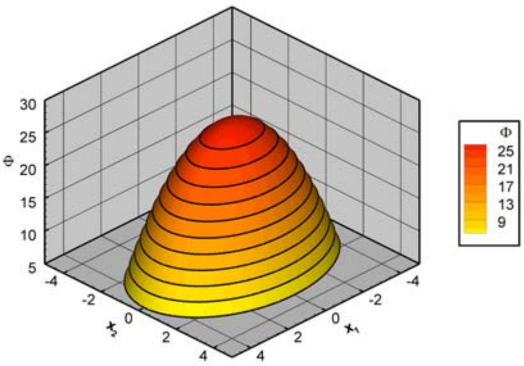
$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x \cdot \vec{i} + \mathrm{d}y \cdot \vec{j} + \mathrm{d}z \cdot \vec{k}$$

$$\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}\vec{r} \cdot \mathrm{grad}\,\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathrm{d}z$$

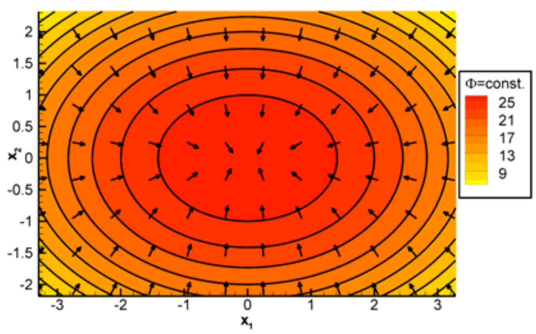
Prirast polja je najveći pri pomaku u smjeru gradijenta (gradijent pokazuje smjer najbržeg porasta polja).
Smanjenje polja je najveće pri pomaku u smjeru suprotnom od smjera gradijenta.
Pri pomaku u smjeru okomitom na smjer gradijenta nema prirasta polja (vektor grad Φ je okomit na plohu Φ=konst.)

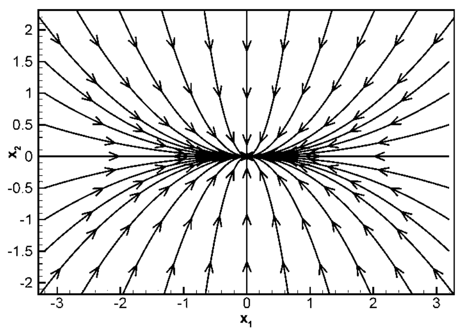
A.3.4 Geometrijska interpretacija gradijenta na primjeru funkcije dviju varijabli

Prostorni prikaz polja $\Phi = \Phi(x, y)$
Crte označuju presjeke sa Φ=konst.



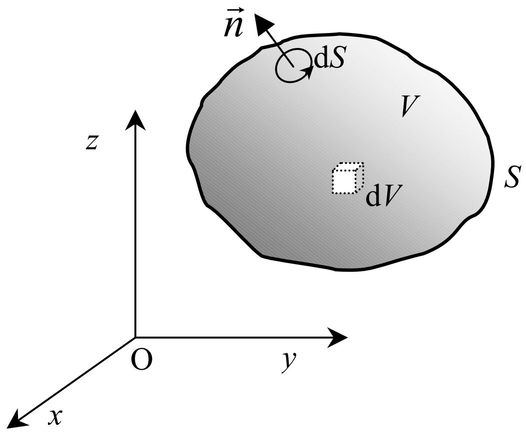
Polje gradijenta je vektorsko polje. Vektorsko polje se vizualizira vektorskim krivuljama koje svojim tangentama pokazuju smjer vektora vektorskog polja. Desna slika prikazuje vektorske krivulje koje vizualiziraju polje gradijenta Φ gornjeg primjera.





Dvodimenzijski prikaz polja izolinijama
Vektori označuju smjer gradijenta

A.4 Gaussova formula



Slika uz Gaussovu formulu

Povezuje volumenski integral s površinskim integralom po zatvorenoj površini S koja opasuje volumen V:

$$\int_S \bullet \vec{n} \mathrm{d}S = \int_V \nabla \bullet \mathrm{d}V$$

gdje umjesto točkice može stajati skalarno, vektorsko ili tenzorsko polje.

Primjeri:

$$\int_S p\vec{n}\mathrm{d}S = \int_V \nabla p \mathrm{d}V \text{ ili } \int_S p\vec{n}\mathrm{d}S = \int_V \mathrm{grad} p \mathrm{d}V$$

$$\int_S \vec{v} \cdot \vec{n}\mathrm{d}S = \int_V \nabla \vec{v} \mathrm{d}V \text{ ili } \int_S \vec{v} \cdot \vec{n}\mathrm{d}S = \int_V \mathrm{div} \vec{v} \mathrm{d}V$$