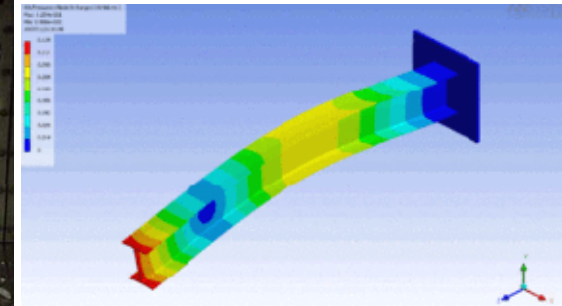
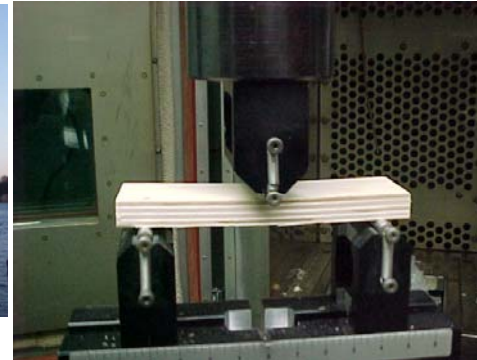
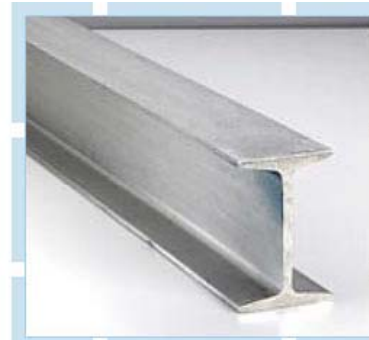
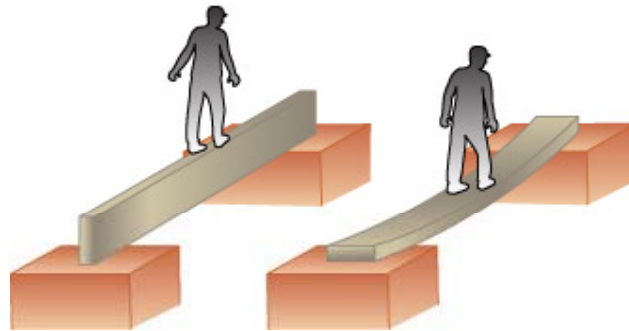
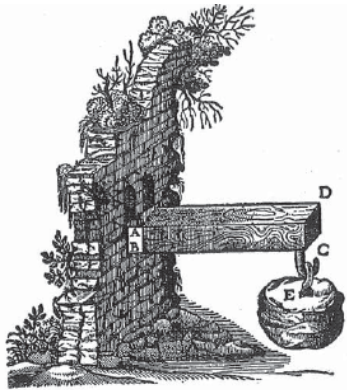


Savijanje*



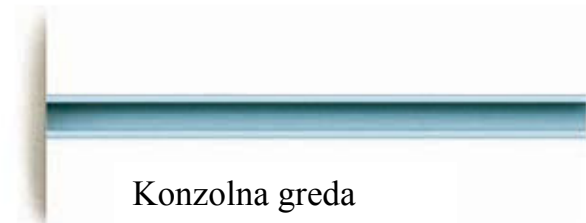
*Grupa autora, *Elastostatika I*, Tehnički fakultet, Bihać, 2003
*JM Gere, BJ Goodno, *Mechanics of Materials*, Cengage Learning, Seventh Edition, 2009.

Savijanje

Usljed primijenjenog opterećenja u gredi se razvijaju tangencijalne sile i momenti savijanja. U svrhu dimenzionisanja neophodno je odrediti maksimalne tangencijalne napone i momente!



Jednostavno oslonjena greda

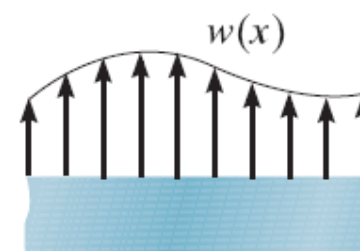


Konzolna greda

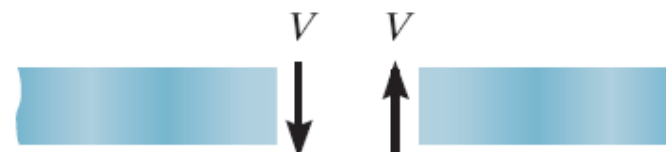


Greda s prepostom

Vrste greda



Pozitivno orijentisano kontinualno opterećenje



Pozitivno unutrašnje tangencijalno opterećenje



Pozitivni unutrašnji moment savijanja

Konvencija o predznaku opterećenja

Savijanje

Geometrijske karaktersitike poprečnih presjeka*

Karakteristike poprečnih presjeka neophodnih za proračun napona:

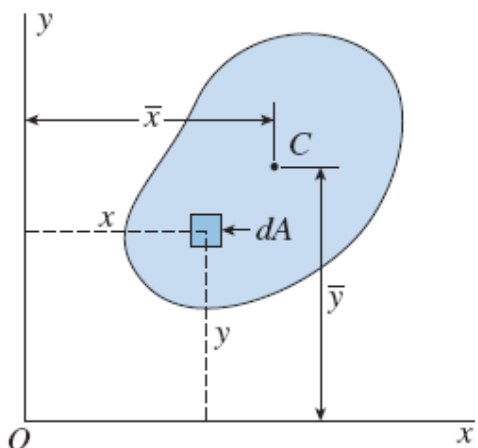
1. Površina poprečnog presjeka – aksijalno neprezanje
2. Moment površine prvog reda – statički moment površine – raspodjela tangencijalnih napona u poprečnim presjecima grede izložene savijanju silama
3. Momenti površine drugog reda (momenti inercije):
 - a. Aksijalni moment inercije – računanje normalnih napona i deformacija greda izloženih savijanju
 - b. Polarni moment inercije – računanje napona pri uvijanju
 - c. Centrifugalni momenti inercije – određivanje ekstremnih vrijednosti aksijalnih momenata inercije ravne površine

*Grupa autora, *Elastostatika I*, Tehnički fakultet, Bihać, 2003

Savijanje

Geometrijske karaktersitike poprečnih presjeka

Težište – geometrijski centar površine



$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{S_y}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} = \frac{S_x}{A}$$

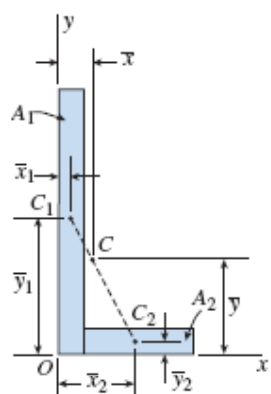
S_x – statički moment inercije s obzirom na x osu

$$S_x = \int y dA$$

S_y – statički moment inercije s obzirom na y osu

$$S_y = \int x dA$$

Konačan broj jednostavnih oblika



$$\bar{x} = \frac{\sum_i \bar{x}_i A_i}{\sum_i A_i}$$

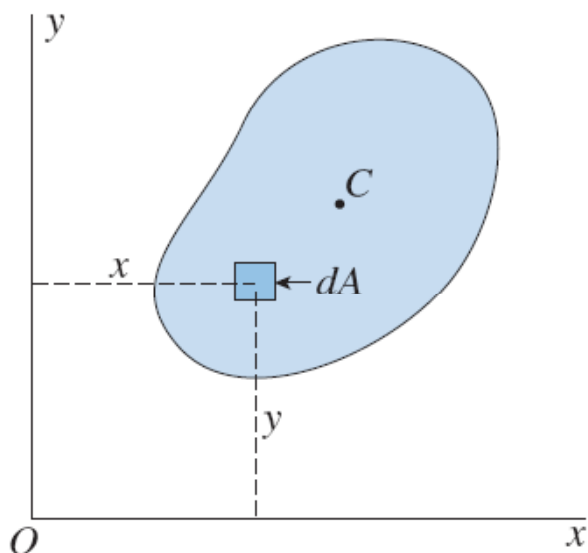
$$\bar{y} = \frac{\sum_i \bar{y}_i A_i}{\sum_i A_i}$$

Centralne (težišne) ose – prolaze kroz težište - centralni momenti jednaki nuli!!!

Savijanje

Geometrijske karakteristike poprečnih presjeka

Momenti inercije – momenti inercije drugog reda



$$I_x = \int_A y^2 dA$$

– aksijalni moment inercije s obzirom na x osu

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

– aksijalni moment inercije s obzirom na y osu

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

– centrifugalni moment inercije s obzirom na x i y osu

$$I_0 = \int_A r^2 dA$$

– polarni moment inercije s obzirom na tačku O

$$I_0 = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y$$

Savijanje

Geometrijske karaktersitike poprečnih presjeka

Momenti inercije – momnti inercije drugog reda

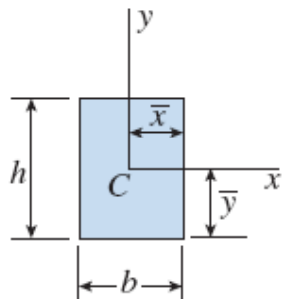
- Polarni moment inercije za tačku se ne mijenja s rotacijom koordinatnog sistema – zbir centralnih momenata inercije je konstantan
- Centralni momenti inercije su pozitivne veličine
- Centrifuglani moment inercije može biti pozitivan, negativan ili nula ; jednak je nuli u odnosu na ravan simetrije, ako se jedna od težišnih osa podudara s ravni simetrije
- Momenti inercije u odnosu na težišne ose su centralni ili sopstveni momenti inercije

Poluprečnici inercije

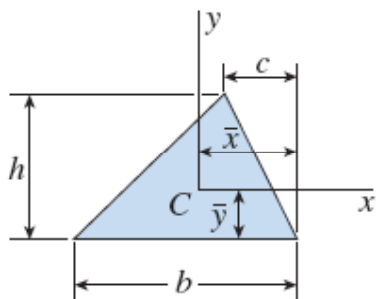
$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Savijanje

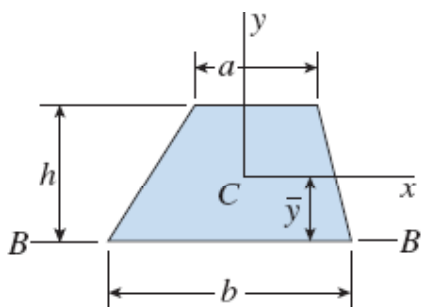
Geometrijske karaktersitike poprečnih presjeka



$$A = bh \quad \bar{x} = \frac{b}{2} \quad \bar{y} = \frac{h}{2}$$
$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{hb^3}{12} \quad I_{xy} = 0 \quad I_P = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2)$$



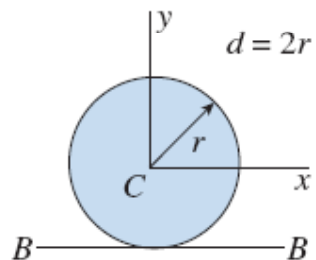
$$A = \frac{bh}{2} \quad \bar{x} = \frac{b+c}{3} \quad \bar{y} = \frac{h}{3}$$
$$I_x = \frac{bh^3}{36} \quad I_y = \frac{bh}{36}(b^2 - bc + c^2)$$
$$I_{xy} = \frac{bh^2}{72}(b - 2c) \quad I_P = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2 - bc + c^2)$$



$$A = \frac{h(a+b)}{2} \quad \bar{y} = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$$
$$I_x = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+b)} \quad I_{BB} = \frac{h^3(3a+b)}{12}$$

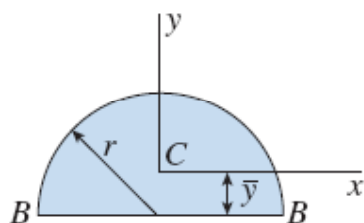
Savijanje

Geometrijske karaktersitike poprečnih presjeka



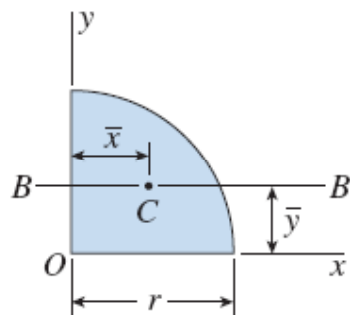
$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \quad I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$I_{xy} = 0 \quad I_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \quad I_{BB} = \frac{5\pi r^4}{4} = \frac{5\pi d^4}{64}$$



$$A = \frac{\pi r^2}{2} \quad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$I_x = \frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{72\pi} \approx 0.1098r^4 \quad I_y = \frac{\pi r^4}{8} \quad I_{xy} = 0 \quad I_{BB} = \frac{\pi r^4}{8}$$



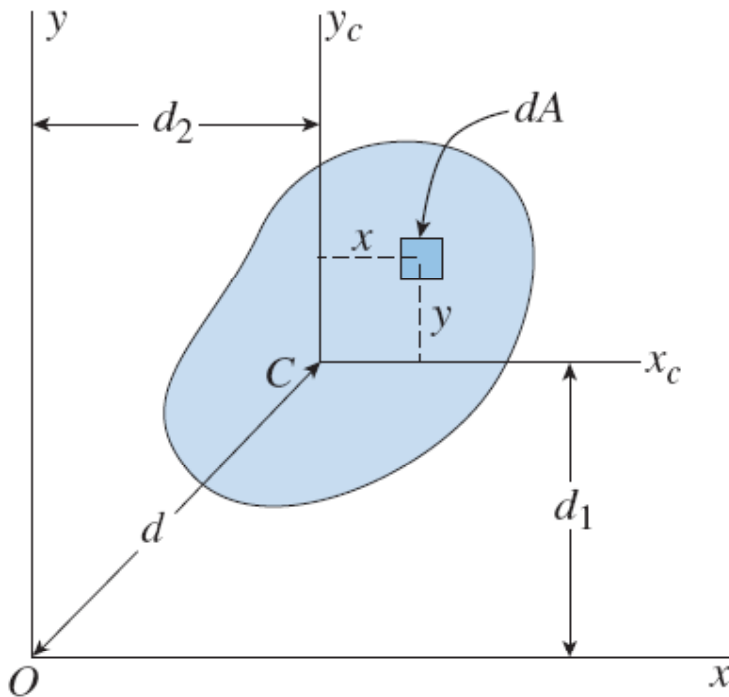
$$A = \frac{\pi r^2}{4} \quad \bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16} \quad I_{xy} = \frac{r^4}{8} \quad I_{BB} = \frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{144\pi} \approx 0.05488r^4$$

Savijanje

Geometrijske karakteristike poprečnih presjeka

Steiner-ova (Štajner) teorema – teorema paralelnih osa – promjena momenata inercije s translacijom koordinatnog sistema



$$I_x = \int_A (y + d_1)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2d_1 \int_A y dA + d_1^2 \int_A dA = I_{x_c} + Ad_1^2$$

$$I_x = I_{x_c} + Ad_1^2$$

$$I_y = I_{y_c} + Ad_2^2$$

Moment inercije površine u odnosu na bilo koju osu u ravni jednak je momentu inercije u odnosu na paralelnu težišnu osu i proizvoda površine i kvadrata udaljenosti između dvije ose

$$I_{xy} = \int_A (x + d_1)(y + d_2) dA = \int_A xy dA + d_1 \int_A y dA + d_2 \int_A x dA + d_1 d_2 \int_A dA$$

$$I_{xy} = I_{xyc} + Ad_1 d_2$$