Matematika 1

20. siječnja 2010.

XIV. Zadaća
Diferencijalni račun: Primjena

1. Ispitajte tok sljedećih funkcija i nacrtajte njihove grafove[1]:

   a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x - 9$

   Rješenje:

   A **1)** Domena $D_f = \mathbb{R}$, **2)** neprekidna je na $\mathbb{R}$, **3)** nije niti parna niti neparna, **4)** nema asimptota, **5)** nema racionalnih nultočki, sjecište grafa s $y-$osi: $S(0,-9)$, **6)** nije periodična

   B **1)** f raste na $\langle -\infty, \frac{6-2\sqrt{3}}{3}\rangle \cup \langle \frac{6+2\sqrt{3}}{3}, +\infty\rangle$, a f pada na $\langle \frac{6-2\sqrt{3}}{3}, \frac{6+2\sqrt{3}}{3}\rangle$, **2)** f ima lokalni maksimum u $x_1 = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$, a on iznosi $f(\frac{6-2\sqrt{3}}{3}) \approx -5.92$; f ima lokalni minimum u $x_2 = \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$, a on iznosi $f(\frac{6+2\sqrt{3}}{3}) \approx -12.08$;

   C **1)** f konkavna na $\langle -\infty, 2\rangle$, a konveksna na $\langle 2, +\infty\rangle$, **2)** f ima jednu točku infleksije: $I(2, f(2)) = (2, -9)$

   b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

   Rješenje:

   A **1)** Domena $D_f = \mathbb{R}$, **2)** neprekidna je na $\mathbb{R}$, **3)** f je neparna, **4)** nema vertikalne asimptote, nema kosih asimptota, pravac $y = 0$ je i desna i lijeva horizontalna asimptota, **5)** nultočka $N(0,0)$, sjecište grafa s $y-$osi: $S(0,0)$, **6)** nije periodična

   B **1)** f pada na $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$, a f raste na $\langle -1, 1\rangle$, **2)** f ima globalni maksimum u $x_1 = 1$, a on iznosi $f(1) = 0.5$; f ima globalni minimum u $x_2 = -1$, a on iznosi $f(-1) = -0.5$;

[1] grafovi su poslije zadataka

C **1)** f konkavna na $\langle -\infty, -\sqrt{3}\rangle \cup \langle 0, \sqrt{3}\rangle$, a konveksna na $\langle -\sqrt{3}, 0\rangle \cup \langle \sqrt{3}, +\infty\rangle$, **2)** f ima tri točke infleksije: $I_1\left(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})\right) = (-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{4})$, $I_2\left(0, f(0) = (0,0)\right)$, $I_3\left(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})\right) = (\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$

Rješenje:

A **1)** Domena $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, **2)** neprekidna je na $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, **3)** zbog nesimetričnosti domene s obzirom na 0, ne ispitujemo (ne)parnost funkcije, **4)** $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, pravac $x = 1$ je vertikalna asimptota, pravac $y = x - 1$ je i lijeva i desna kosa asimptota, nema horizontalnih asimptota, **5)** f nema realnih nultočki, sjecište grafa s $y-$osi: $S(0, -5)$, **6)** nije periodična

B **1)** f raste na $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$, a f pada na $\langle -1, 1\rangle \cup \langle 1, 3\rangle$, **2)** f ima lokalni maksimum u $x_1 = -1$, a on iznosi $f(-1) = -4$; f ima lokalni minimum u $x_2 = 3$, a on iznosi $f(3) = 4$;

C **1)** f konkavna na $\langle -\infty, 1\rangle$, a konveksna na $\langle 1, +\infty\rangle$, **2)** f nema točke infleksije

d) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

Rješenje:

A **1)** Domena $D_f = \mathbb{R}$, **2)** neprekidna je na $\mathbb{R}$, **3)** nije niti parna niti neparna, **4)** nema vertikalne asimptote, nema kosih asimptota, nema lijeve horizontalne, a pravac $y = 0$ je desna horizontalna asimptota, **5)** nultočka $N(0, 0)$, sjecište grafa s $y-$osi: $S(0, 0)$, **6)** nije periodična

B **1)** f raste na $\langle -\infty, 1\rangle$, a f pada na $\langle 1, +\infty\rangle$, **2)** f ima globalni maksimum u $x_0 = 1$, a on iznosi $f(1) = e^{-1} \approx 0.37$; f nema lokalnih minimuma;

C **1)** f konkavna na $\langle -\infty, 2\rangle$, a konveksna na $\langle 2, +\infty\rangle$, **2)** f ima jednu točku infleksije: $I\left(2, f(2)\right) = (2, 2e^{-2}) \approx (2, 0.27)$

e) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

Rješenje:

A **1)** Domena $D_f = \langle 0, +\infty\rangle \setminus \{1\}$, **2)** neprekidna je na $\langle 0, +\infty\rangle \setminus \{1\}$ **3)** zbog nesimetričnosti domene s obzirom na 0, ne ispitujemo (ne)parnost funkcije, **4)** $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, pravac $x = 1$ je vertikalna asimptota, nema desne kose asimptota, nema desne horizontalne asimptote, **5)** f nema nultočaka niti sjecišta grafa s $y-$osi, **6)** nije periodična

B **1)** f pada na $\langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, e\rangle$, a f raste na $\langle e, +\infty\rangle$, **2)** f nema lokalni maksimum; f ima lokalni minimum u $x_0 = e$, a on iznosi $f(e) = e$;

C **1)** f konkavna na $\langle 0, 1\rangle \cup \langle e^2, +\infty\rangle$, a konveksna na $\langle 1, e^2\rangle$, **2)** f ima jednu točku infleksije: $I\left(e^2, f(e^2)\right) = (e^2, e^2/2) \approx (7.38, 3.69)$

2. Komad žice duge 20 metara treba presjeći na dva komada duljine $20-x$ metara i x metara tako da od komada duljine x metara načimo kvadrat, a od komada duljine $20 - x$ metara krug, ali tako da suma površina kvadrata i kruga bude minimalna.
   Rješenje: Treba odrediti lokalni minimum funkcije $f(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(20-x)^2}{4\pi}$. Traženi x^* je jednak $\frac{80}{\pi+4}$.

3. Zbroj trostrukog broja x i peterostrukog broja y jednak je 22. Koliki trebaju biti brojevi x i y da bi njihov produkt bio maksimalan?
   Rješenje: Treba odrediti lokalni maksimum funkcije $f(y) = \frac{22-5y}{3} \cdot y$. Traženi y^* je jednak $\frac{11}{5}$, a traženi x^* je jednak $\frac{11}{3}$.

4. Volumen konzerve soka (oblika uspravnog valjka) jednak je $V = 0.33\, dm^3$. Koliki mora biti polumjer baze te konzerve da bi se potrošilo najmanje lima za njenu proizvodnju?
   Rješenje: Treba odrediti lokalni minimum funkcije $O(r) = 2r^2\pi + \frac{0.66}{r}$. Traženi r^* je jednak $\sqrt[3]{\frac{0.66}{4\pi}}$.

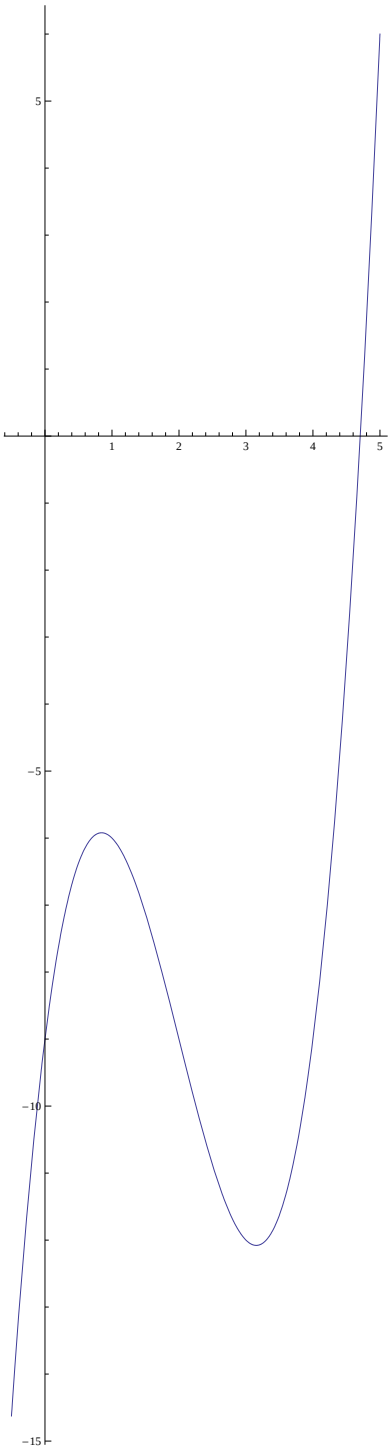

Figure 1: Graf funkcije $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x - 9$

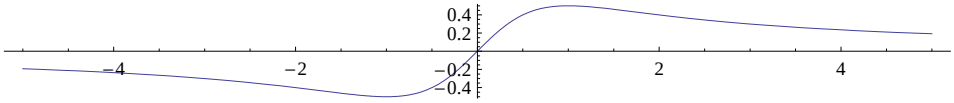

Figure 2: Graf funkcije $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

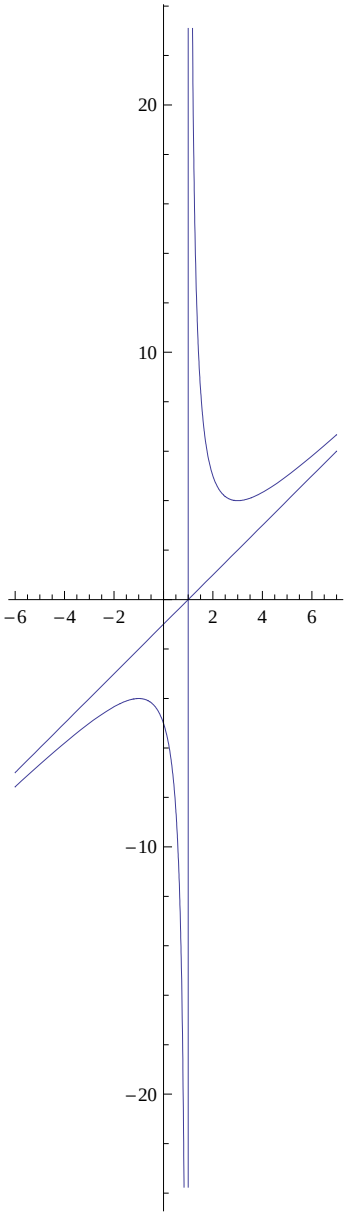

Figure 3: Graf funkcije $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$

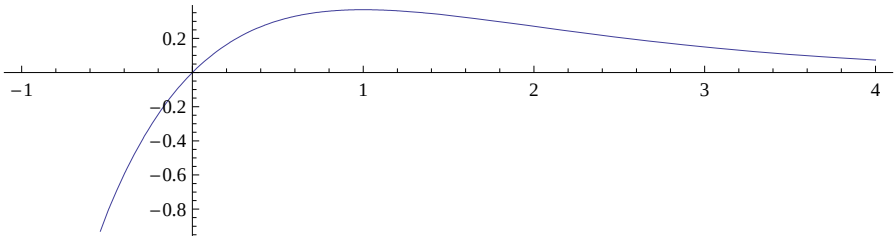

Figure 4: Graf funkcije $f(x) = x \cdot e^{-x}$

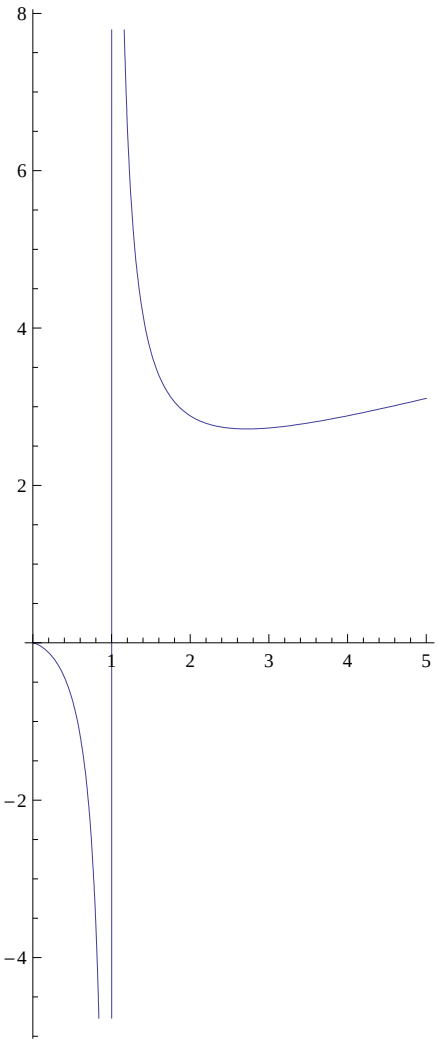

Figure 5: Graf funkcije $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$