Rješenja nekih zadataka iz Matematike 1

tekst može sadržavati pogreške - prijavite ih na gknez@sfsb.hr

Zadatak 1.

$$\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{8-x}}{x^2-16}=\left\{\begin{array}{c}\text{uvrštavanjem za } x=4\\ \text{ocito se radi o izrazu } \frac{0}{0}\end{array}\right\}=\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{8-x}}{(x+4)(x-4)}\cdot\frac{2+\sqrt{8-x}}{2+\sqrt{8-x}}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x+4)(x-4)(2+\sqrt{8-x})}=\left\{\begin{array}{c}\text{izraz } x-4 \text{ je taj}\\ \text{koji daje } \frac{0}{0}\\ \text{ali sad se krati}\end{array}\right\}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x+4)(2+\sqrt{8-x})}=\frac{1}{8\cdot 4}=\frac{1}{32}$$

Zadatak 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7-x^2}{1-x\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7-x^{2^{:x^2}}}{1-x^{\frac{3}{2}^{:x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

asimptotski za velike x je $x^2>\sqrt{x}$,
pa je $\frac{1}{x^2}<\frac{1}{\sqrt{x}}$,
pa je $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{x}}<0$, odatle 0^-

Zadatak 3.

Odrediti asimptote funkcije $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$!

Funkcija je definirana razlomkom, pa moramo ispitati točke prekida, tj. postoje li neke vrijednosti x za koje bi nazivnik mogao biti jednak nuli.

$$\sqrt{x^2-1}=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x_1=1,\ x_2=-1$$

Točke prekida su $x_1=1$ i $x_2=-1$ što znači da su pravci $x=1$ i $x=-1$ **vertikalne asimptote**. Primijetite da funkcija f nije dobro definirana za $x\in[-1,1]$, ali ovdje nam to nije od interesa! Treba provjeriti postoji li granična vrijednost koju funkcija f pokušava dostići kada pustimo varijablu x u beskonačnost:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1^{:x^2}}{\sqrt{x^2-1}^{:x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}}=\frac{1}{0}=\infty$$

Dakle funkcija f nije ograničena pa **nema horizontalnih asimptota**.

Pogledajmo ima li kosih asimptota, tj. pravaca $y=kx+l$ gdje je $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, a $l=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-k\cdot x)$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+0=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\left|\begin{array}{l}t=-x\Rightarrow x=-t\\ x\to-\infty\Rightarrow t\to+\infty\end{array}\right|=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{-t}{\sqrt{(-t)^2-1}}=-\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{t\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}=-1\end{array}\right.$$

Račun kazuje da će postojati **dvije kose asimptote** - ***lijeva***, čiji koeficijent smjera je $k_1=-1$, i ***desna*** s koeficijentom smjera $k_2=1$. Treba odrediti pripadne odsječke na osi y, tj. $l_1=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-k_1x)$ i $l_2=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-k_2x)$.

$$l_2 = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-k_2x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} - x\right) + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} - 1\right)}_{\to 0 \text{ brže nego što } x\to\infty}\right) + 0 = 0.$$

Objašnjenje: Očito je da $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \to 0$ kad $x \to +\infty$. U izrazu $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$ razlomak $\frac{1}{x^2} \to 0$ puno brže nego što $x \to \infty$, tj. nazivnik $\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \to 1$ puno brže nego što $x \to \infty$, pa izraz $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \to 1$ brže nego što $x \to \infty$. No tada i cijeli izraz $\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} - 1\right) \to 0$ brže nego što $x \to \infty$, pa je cijeli taj limes u konačnici jednak nuli!

$$l_1 = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_1x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}} - (-1)\cdot x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}} + x\right) =$$

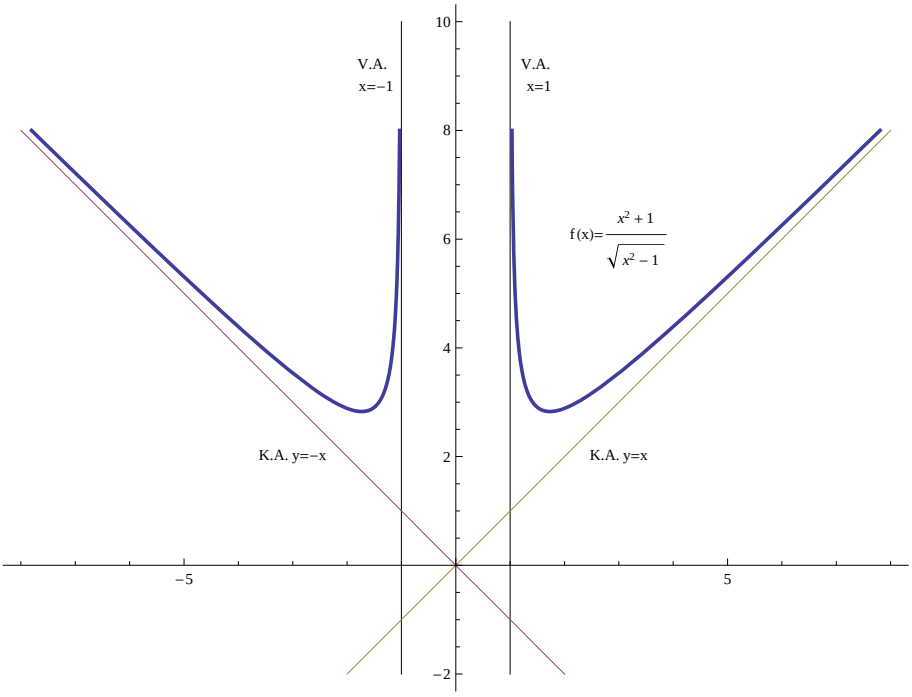
$$= \left|\begin{array}{l} t=-x \Rightarrow x=-t \\ x\to-\infty \Rightarrow t\to+\infty \end{array}\right| = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{(-t)^2+1}{\sqrt{(-t)^2-1}} - t\right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t^2+1}{\sqrt{t^2-1}} - t\right) = \{\text{analogno kao za } l_2\} = 0$$

Dakle zaključak je da postoje dvije kose asimptote:

$$\begin{array}{ll} y=-x, & \text{lijeva kosa asimptota} \\ y=x, & \text{desna kosa asimptota} \end{array}$$

A evo kako izgleda i graf te funkcije...



Derivirajte funkciju $y = (1 + \operatorname{arc\,ctg} x)^x$.

Radi se o tzv. logaritamskoj derivaciji ($y = f(x)^{g(x)}$, gdje su $f(x) = 1 + \operatorname{arc\,ctg} x$, $g(x) = x$).

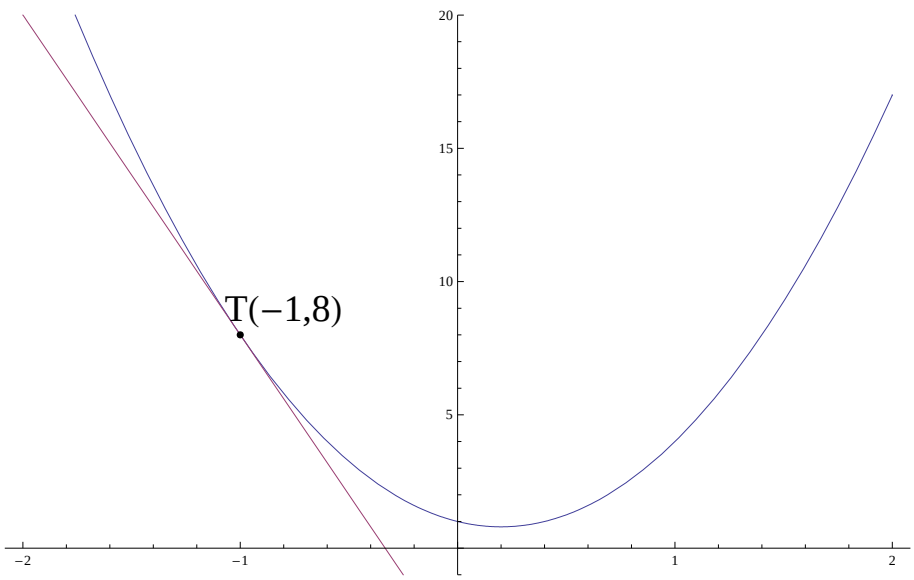
$$
\begin{aligned}
y &= (1 + \operatorname{arc\,ctg} x)^x \,/\, \ln \\
\ln y &= \ln (1 + \operatorname{arc\,ctg} x)^x \\
\ln y &= x \cdot \ln (1 + \operatorname{arc\,ctg} x) \,/' \qquad \begin{array}{l} y \text{ je funkcija po } x \\ \text{pa je } \ln y \text{ složena f-ja} \end{array} \\
\frac{1}{y} \cdot y' &= \ln (1 + \operatorname{arc\,ctg} x) + x \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{arc\,ctg} x} \cdot (1 + \operatorname{arc\,ctg} x)' \\
\frac{1}{y} \cdot y' &= \ln (1 + \operatorname{arc\,ctg} x) + x \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{arc\,ctg} x} \cdot \frac{1}{1 + x^2} \quad \Big/ \cdot y \\
y' &= y \cdot \left(\ln (1 + \operatorname{arc\,ctg} x) + x \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{arc\,ctg} x} \cdot \frac{1}{1 + x^2} \right) \\
y' &= (1 + \operatorname{arc\,ctg} x)^x \cdot \left(\ln (1 + \operatorname{arc\,ctg} x) + \frac{x}{(1 + \operatorname{arc\,ctg} x)(1 + x^2)} \right)
\end{aligned}
$$

Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = 5x^2 - 2x + 1$ u točki s apscisom $x_0 = -1$. Točka na grafu funkcije ima koordinate $T(x_0, f(x_0)) \equiv T(x_0, y_0)$.

Tangenta u točki T će glasiti: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

$$
\begin{aligned}
y_0 &= f(x_0) \Rightarrow y_0 = f(-1) = 8, \\
f'(x) &= 10x - 2 \\
f'(x_0) &= f'(-1) = 10 \cdot (-1) - 2 = -12 \\
y &= -12(x - (-1) + 8 \Rightarrow y = -12x - 4 \quad \text{(jednadžba tangente)}
\end{aligned}
$$

Evo i slikica



Odredite intervale monotonosti te lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \frac{-x^2-4}{2x-3}$.
Najprije valja uočiti da funkcija ima prekid u točki $x = \frac{3}{2}$. Odredimo stacionarne točke:

$$f'(x) = \frac{-2x(2x-3) - (-x^2-4)2}{(2x-3)^2} = \frac{-2x^2+6x+8}{(2x-3)^2}$$
$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{-2x^2+6x+8}{(2x-3)^2} = 0 \Longleftrightarrow -2x^2+6x+8 = 0$$
$$x_1 = -1, \quad x_2 = 4 \quad \ldots \text{stacionarne točke}$$

Intervali monotonosti jesu $I_1 = \langle -\infty, -1\rangle$, $I_2 = \left\langle -1, \frac{3}{2}\right\rangle$, $I_3 = \left\langle \frac{3}{2}, 4\right\rangle$, i $I_4 = \langle 4, +\infty\rangle$. Raste li ili pada funkcija f na intervalima I_1,I_2,I_3 i I_4 reći će nam predznak prve derivacije u nekoj od točaka tih intervala:

interval I_k	$I_1 = \langle -\infty, -1\rangle$	$I_2 = \left\langle -1, \frac{3}{2}\right\rangle$	$I_3 = \left\langle \frac{3}{2}, 4\right\rangle$	$I_4 = \langle 4, +\infty\rangle$
točka $x_0 \in I_k$	$-10 \in I_1$	$0 \in I_2$	$3 \in I_3$	$10 \in I_4$
$\operatorname{sgn}(f'(x_0))$	$-$	$+$	$+$	$-$
rast/pad funkcije f	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Iz dane tablice lako je zaključiti koji su ekstremi u stacionarnim točkama, ali to svakako treba utvrditi i računski:

$$f''(x) = (f'(x))' = \frac{(-2x^2+6x+8)'(2x-3)^2 - (-2x^2+6x+8)\left((2x-3)^2\right)'}{(2x-3)^4} =$$
$$= \frac{(-4x+6)(2x-3)^2 + (2x^2-6x-8)\cdot 2(2x-3)\cdot 2}{(2x-3)^4} = \frac{(2x-3)\left[-8x^2+24x-18+8x^2-24x-32\right]}{(2x-3)^4} =$$
$$= -\frac{50}{(2x-3)^3}.$$

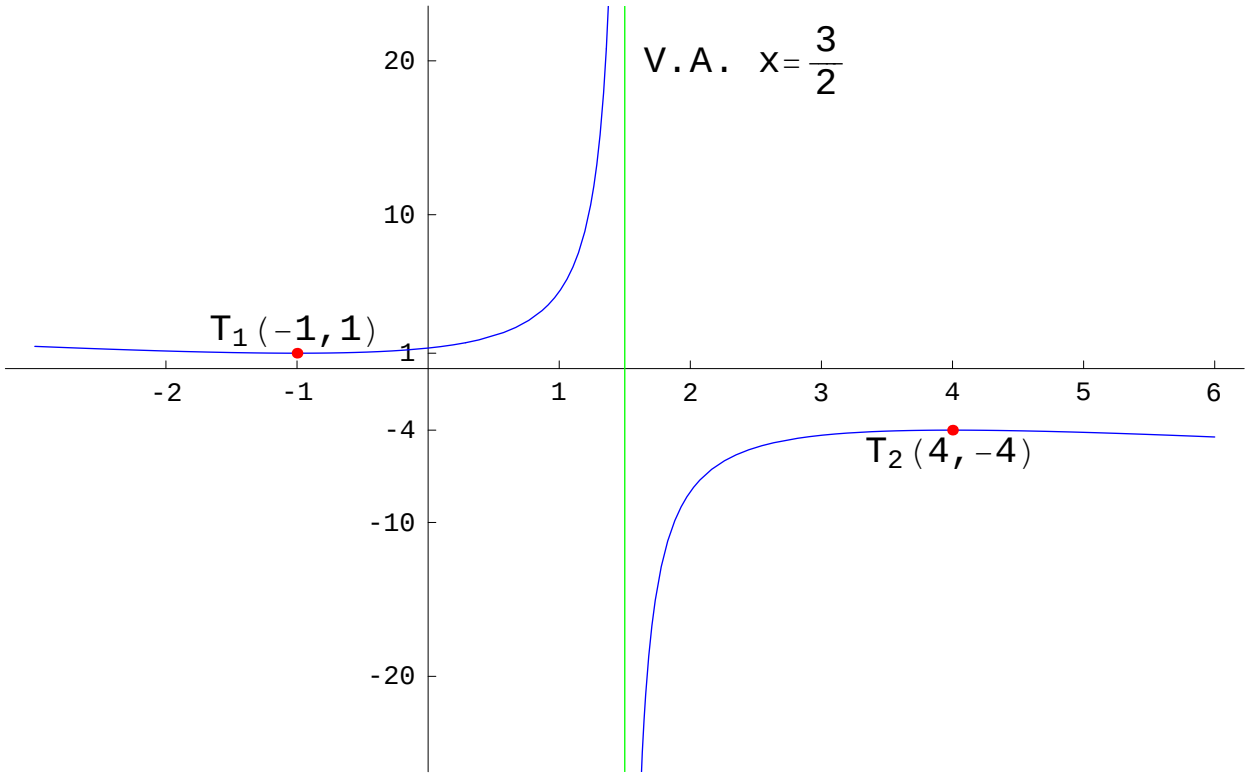
Ispitajmo stacionarne točke:

$$f''(x_1) = f''(-1) = -\tfrac{50}{(2\cdot(-1)-3)^3} > 0 \Longrightarrow \text{u } x_1 = -1 \ f \text{ postiže lokalni minimum,}$$
$$f''(x_2) = f''(4) = -\tfrac{50}{(2\cdot 4-3)^3} < 0 \Longrightarrow \text{u } x_2 = 4 \ f \text{ postiže lokalni maksimum.}$$

Sada treba odrediti točke ekstrema, tj. točku lokalnog minimuma $T_1\left(x_1, y_1\right)$ i točku lokalnog maksimuma $T_2\left(x_2, y_2\right)$.

$$y_1 = f(x_1) = f(-1) = \tfrac{-(-1)^2-4}{2\cdot(-1)-3} = \tfrac{-1-4}{-5} = \tfrac{-5}{-5} = 1,$$
$$y_2 = f(x_2) = f(4) = \tfrac{-4^2-4}{2\cdot 4-3} = \tfrac{-20}{5} = -4.$$

Funkcija f u točki $T_1(-1, 1)$ postiže lokalni minimum, dok u točki $T_2(4, -4)$ f postiže lokalni maksimum. Graf pokazuje slika na sljedećoj stranici.



Principom matematičke indukcije dokažite ili opovrgnite tvrdnju:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

Baza indukcije $n = 1$:

$$1^3 = 1^2(2 \cdot 1^2 - 1) \Rightarrow 1 = 1 \quad \checkmark$$

Pretpostavka indukcije $n = k$:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2k-1)^3 = k^2(2k^2-1).$$

Korak indukcije, $n = k+1$.
Treba pokazati da vrijedi $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2(k+1)-1)^3 = (k+1)^2(2(k+1)^2-1)$. Pa krenimo

$$\underbrace{1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2k-1)^3}_{\substack{\text{po pretpostavci indukcije} \\ = k^2(2k^2-1)}} + (2(k+1)-1)^3 =$$

$$= k^2(2k^2-1) + (2(k+1)-1)^3 =$$
$$= 2k^4 - k^2 + (2k+1)^3 =$$
$$= 2k^4 - k^2 + 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 =$$
$$= 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1 =$$
$$= 2k^4 + 2k^3 + 6k^3 + 6k^2 + 5k^2 + 5k + k + 1 =$$
$$= 2k^3(k+1) + 6k^2(k+1) + 5k(k+1) + k + 1 =$$
$$= (k+1)(2k^3 + 6k^2 + 5k + 1) =$$
$$= (k+1)(2k^3 + 2k^2 + 4k^2 + 4k + k + 1) =$$
$$= (k+1)\left[2k^2(k+1) + 4k(k+1) + k + 1\right] =$$
$$= (k+1)^2(2k^2 + 4k + 1) = (k+1)^2(2k^2 + 4k + 2 - 1) =$$
$$= (k+1)^2\left[2(k^2 + 2k + 1) - 1\right] = (k+1)^2(2(k+1)^2 - 1). \checkmark$$

što je i trebalo dokazati!

Odredite domenu funkcije $f(x) = \sqrt{\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(2x+3)}{x^2-4}}$.

1. U nazivniku ne smije biti nula $\Rightarrow x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq \pm 2$.

2. Izraz pod logaritmom mora pripadati domeni logaritamske funkcije, a to je $\mathbb{R}^+ = \langle 0, +\infty \rangle$ i zato:

$$2x + 3 > 0 \Rightarrow x > -\frac{3}{2} \Rightarrow x \in \left\langle -\frac{3}{2}, +\infty \right\rangle .$$

3. Izraz pod korijenom mora biti nenegativan: $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(2x+3)}{x^2-4} \geq 0$. To će biti slučaj kada su brojnik i nazivnik jednakih predznaka:

$$\begin{array}{rl} \log_{\frac{1}{2}}(2x+3) & \geq 0 \\ x^2 - 4 & > 0 \end{array} \quad ili \quad \begin{array}{rl} \log_{\frac{1}{2}}(2x+3) & \leq 0 \\ x^2 - 4 & < 0 \end{array}$$

Uočite da rješavajući se logaritma te nejednakosti mijenjaju znak!

$$\begin{array}{rl} 2x+3 & \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ x^2 & > 4 \end{array} \quad ili \quad \begin{array}{rl} 2x+3 & \geq \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ x^2 & < 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} x & \leq -1 \\ x < -2 & i \;\; x > 2 \end{array} \quad ili \quad \begin{array}{rl} x & \geq -1 \\ x > -2 & i \;\; x < 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} x & \in \langle -\infty, -1] \\ x & \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle \end{array} \quad ili \quad \begin{array}{rl} x & \in [-1, +\infty\rangle \\ x & \in \langle -2, 2\rangle \end{array}$$

Napravi se presjek intervala u svakom od gornja dva slučaja

$$x \in \langle -\infty, -2\rangle \qquad ili \qquad x \in [-1, 2\rangle$$

---

a konačno rješenje je unija dobivenih intervala

$$x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup [-1, 2\rangle .$$

Funkcija je dobro definirana kada su sva tri uvjeta ispunjena, tj. $\begin{array}{l} x \neq \pm 2, \\ x \in \left\langle -\frac{3}{2}, +\infty \right\rangle \\ x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup [-1, 2\rangle \end{array}$, pa je domena presjek tih uvjeta, što znači $\mathcal{D}_f = [-1, 2\rangle$.

Ispitajte tok funkcije $f(x) = 2^{\frac{x}{x-1}} - 1$.

1. Domena - dijeljenje s nulom nije definirano pa za nazivnik eksponenta mora vrijediti $x - 1 \neq 0$, tj. $x \neq 1$. Zato je domena $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Parnost, neparnost, periodičnost - funkcija je definirana preko eksponencijalne funkcije, koja nema niti jedno spomenuto svojstvo, pa takva je i funkcija f: nije ni parna, nije neparna niti periodična. Naravno, ako se ne znaju svojstva eksponencijalne funkcije tada se ne može ovako nešto ustvrditi već je nužno računski ispitati!

3. Nultočke: $f(x) = 0 \Rightarrow 2^{\frac{x}{x-1}} - 1 = 0 \Rightarrow 2^{\frac{x}{x-1}} = 1 \Rightarrow \dfrac{x}{x-1} = 0 \Rightarrow x = 0.$

4. Sjecište s osi y: f(0)=0.

5. Točke ekstrema, intervali monotonosti:

$$f'(x) = \left(2^{\frac{x}{x-1}} - 1\right)' = 2^{\frac{x}{x-1}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} = -\frac{2^{\frac{x}{x-1}} \ln 2}{(x-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{2^{\frac{x}{x-1}} \ln 2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{x-1}} = 0$ nema rješenja - nula nije u slici eksponencijalne funkcije.

Dakle ne postoje stacionarne točke, tj. funkcija ne poprima ekstremne vrijednosti.

Intervali monotonosti - pogledamo li bolje funkciju $f'(x) = -\frac{2^{\frac{x}{x-1}} \ln 2}{(x-1)^2}$, jasno je da poprima samo negativne vrijednosti za sve $x \in \mathcal{D}_f$ pa je funkcija f padajuća na čitavom području definicije!

No evo i formalno: intervali monotonosti jesu $\langle -\infty, 1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$ imamo:

interval I_k	$I_1 = \langle -\infty, 1\rangle$	$I_2 = \langle 1, +\infty\rangle$
točka $x_0 \in I_k$	$-1 \in I_1$	$2 \in I_2$
$\operatorname{sgn}(f'(x_0))$	$-$	$-$
rast/pad funkcije f	$\searrow$	$\searrow$

6. Točke infleksije, konveksnost i konkavnost:

$$f''(x) = \left(-\frac{2^{\frac{x}{x-1}}\ln 2}{(x-1)^2}\right)' = -\frac{2^{\frac{x}{x-1}}\ln^2 2\frac{-1}{(x-1)^2}\cdot(x-1)^2 - 2^{\frac{x}{x-1}}\ln 2\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2^{\frac{x}{x-1}}\ln 2\cdot(\ln 2 + 2(x-1))}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = 0 \Longrightarrow \frac{2^{\frac{x}{x-1}}\ln 2\cdot(\ln 2 + 2(x-1))}{(x-1)^4} = 0 \Longrightarrow 2^{\frac{x}{x-1}}\ln 2\cdot(\ln 2 + 2(x-1)) = 0.$$

Barem jedan od faktora mora biti nula da bi njihov umnožak bio jednak nuli...

$$2^{\frac{x}{x-1}}\ln 2\cdot(\ln 2 + 2(x-1)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2^{\frac{x}{x-1}}\ln 2 = 0 \Rightarrow 2^{\frac{x}{x-1}} = 0 \quad \text{nema rješenja,} \\ \ln 2 + 2(x-1) = 0 \Rightarrow 2(x-1) = -\ln 2 \Rightarrow x = \frac{2-\ln 2}{2} \approx 0.653426. \end{cases}$$

U točki $x_{infl} = \frac{2-\ln 2}{2}$ ispunjen je nužni uvjet za točku infleksije funkcije f. Još treba vidjeti jesu li ispunjeni i dovoljni uvjeti, tj. da funkcija f'' mijenja predznak u okolini točke x_{infl}. Za neki $\varepsilon > 0$ vrijednosti $f''(x_{infl} - \varepsilon)$ i $f''(x_{infl} + \varepsilon)$ moraju biti suprotnih predznaka! Dovoljno je numerički provjeriti: uzme li se npr. $\varepsilon = 0.1$ tada je $f''\left(\frac{2-\ln 2}{2} - 0.1\right) < 0$, a $f''\left(\frac{2-\ln 2}{2} + 0.1\right) > 0$ i zaključujemo da je funkcija f lijevo od točke x_{infl} konkavna, a desno od nje konveksna. Sama točka infleksije je $T_{infleksije}\left(x_{infl}, f\left(x_{infl}\right)\right) \equiv T_{infleksije}\left(\frac{2-\ln 2}{2}, -0.729329\right)$.

Preciznije, domenu funkcije f, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ ćemo rastaviti na intervale konveksnosti i konkavnosti (pri čemu moramo paziti na točku prekida):

interval	$\langle -\infty, \frac{2-\ln 2}{2}\rangle$	$\langle \frac{2-\ln 2}{2}, 1\rangle$	$\langle 1, +\infty\rangle$
funkcija je	konkavna	konveksna	konveksna

7. Asimptote

Vertikalna - ispitati točku prekida

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(2^{\frac{x}{x-1}} - 1\right) = 2^{\frac{1^-}{1^- - 1}} - 1 = 2^{\frac{1^-}{0^-}} - 1 = 2^{-\infty} - 1 = \frac{1}{2^{\infty}} - 1 = 0 - 1 = -1$$

Znači kada se prilazi broju 1 slijeva, iz smjera brojeva koji su neizmjerivo malo manji od 1, funkcijske vrijednosti teže broju -1. (ali se vrijednost -1 ne može postići).

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(2^{\frac{x}{x-1}} - 1\right) = 2^{\frac{1^+}{1^+ - 1}} - 1 = 2^{\frac{1^+}{0^+}} - 1 = 2^{+\infty} - 1 = +\infty - 1 = +\infty$$

Kada se prilazi broju 1 zdesna, brojevima koji su neizmjerivo malo veći od jedan, funkcijske vrijednosti neizmjerivo rastu u $+\infty$. Dakle, pravac $x = 1$ je desna vertikalna asimptota.

Horizontalne asimptote - limesi u beskonačnosti - što se dogadja s funkcijskim vrijednostima kada $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2^{\frac{x}{x-1}} - 1\right) = \lim_{x\to\pm\infty} 2^{\frac{x}{x-1}} - 1 = 2^{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}} - 1 = 2^1 - 1 = 1$$

Pravac $y = 1$ je horizontalna asimptota u lijevoj i u desnoj strani.

Kose asimptote - činjenica da je pravac $y = 1$ horizontalna asimptota i u lijevoj i u desnoj

strani eliminira postojanje kosih asimptota. To potvrdjuje i sljedeći račun:

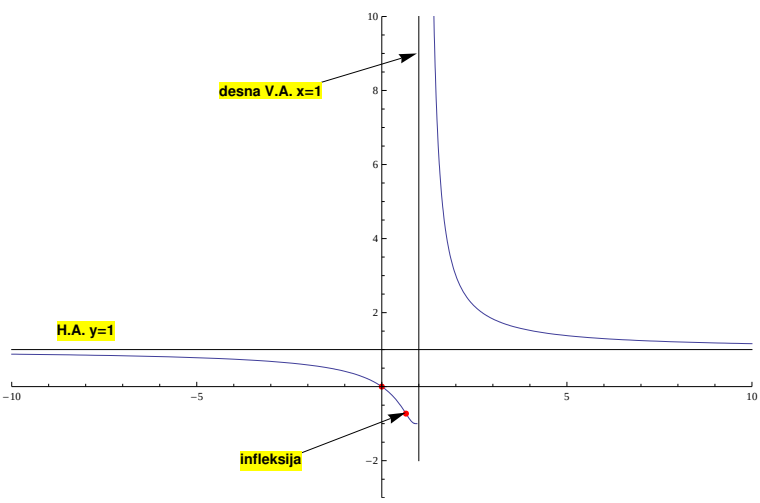
$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2^{\frac{x}{x-1}} - 1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2^{\frac{x}{x-1}}}{x} - \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} 2^{\frac{x}{x-1}}}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} x} - 0 =$$

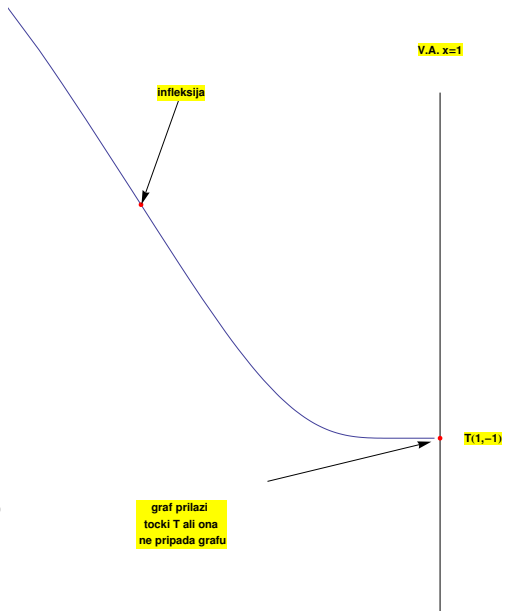
$$= \frac{2^{\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1}}}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} x} = \frac{2^1}{\pm\infty} = 0$$

Skupimo li sve činjenice na jedno mjesto, evo što smo saznali o funkciji $f(x) = 2^{\frac{x}{x-1}} - 1$:

- definirana je na skupu $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
- nije parna, nije neparna, nije periodična;
- ima jednu nultočku $x = 0$, tj. graf joj prolazi ishodišem (tu siječe i os y)
- nema ekstremnih vrijednosti
- padajuća je na čitavom području definicije
- ima jednu točku infleksije: $T_{infleksije}\left(\frac{2-\ln 2}{2}, -0.729329\right)$ – konkavna je na intervalu $\langle -\infty, \frac{2-\ln 2}{2}\rangle$ i konveksna na intervalima $\langle \frac{2-\ln 2}{2}, 1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$;
- pravac $x = 1$ je desna vertikalna asimptota, dok limes slijeva u 1 je konačan i iznosi -1.
- pravac $y = 1$ je horizontalna asimptota u lijevoj i u desnoj strani
- nema kosih asimptota.

Na slikama je graf funkcije f kao i uvecani dio grafa koji pokazuje kako se ponaša graf kada $x \to 1^-$.





Odredite jednadžbe tangente i normale na graf funkcije $f(x) = x\sin^2 x$ u točki s apscisom $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Jednadžba tangente na graf funkcije f u točki x_0 glasi $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$, gdje je $y_0 = f(x_0)$.

Točka na grafu funkcije f u kojoj računamo tangentu i normalu je $T_0(x_0, y_0)$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \sin^2 x + x \cdot 2\sin x \cos x = \sin^2 x + x\sin(2x) \\
f'(x_0) &= f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\
y_0 &= f(x_0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{točka na grafu je } T_0\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\
y &= 1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \Longrightarrow y = x \qquad \ldots\text{jednadžba tangente}
\end{aligned}
$$

Neka je jednadžba normale $y = kx + l$. Ona je okomita na tangentu i prolazi točkom T_0. Iz tih činjenica odrede se k i l.

$$
\begin{aligned}
&k = -1 \text{ je koeficijent smjera normale - odredi se iz uvjeta okomitosti na tangentu} \\
&y_0 = k \cdot x_0 + l \Rightarrow \frac{\pi}{2} = -1 \cdot \frac{\pi}{2} + l \Rightarrow l = \pi \\
&y = -x + \pi \qquad \text{jednadžba normale}
\end{aligned}
$$