Sadržaj:

- Primjena diferencijalnog računa
  - Tangenta i normala na graf funkcije
  - Pad i rast funkcije
  - Ekstremi
  - Zakrivljenost
  - Ispitivanje toka funkcije
  - Primjene

Tangenta i normala na graf funkcije

Jednadžba pravca koji prolazi točkom (x_0, y_0) jest:

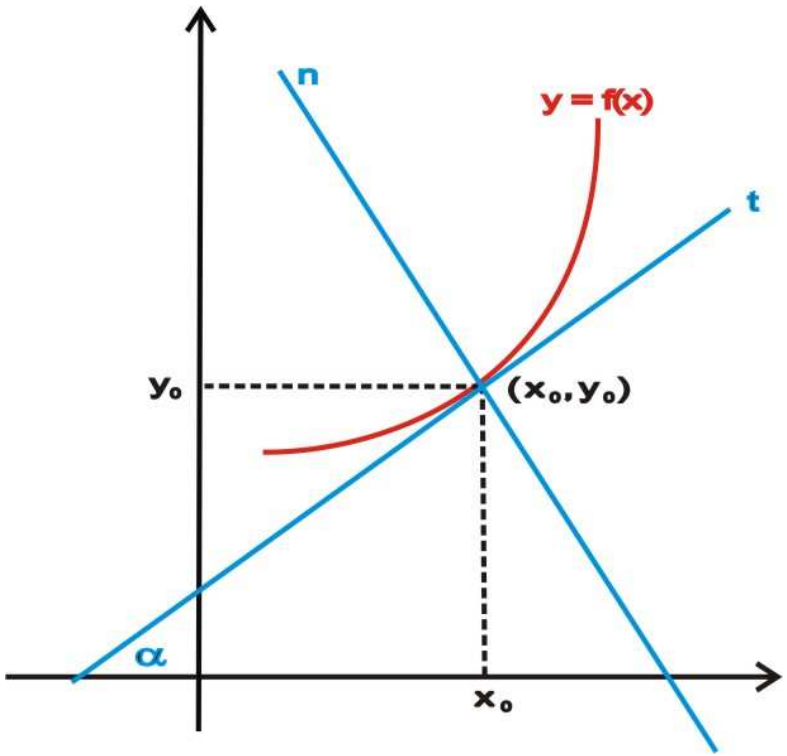
$$y - y_0 = k\,(x - x_0),$$

gdje je k koeficijent smjera pravca.

Ako je pravac tangenta na graf funkcije f, onda je njen koeficijent smjera jednak derivaciji funkcije u točki x_0:

$$k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0).$$

Normala **na graf funkcije u točki (x_0, y_0) jest pravac koji je okomit na tangentu. Iz veze za koeficijente smjera okomitih pravaca znamo da koeficijent smjera normale glasi $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$, uz uvjet da je $f'(x_0) \neq 0$.**



Tangenta na graf funkcije f u točki (x_0, y_0) ima jednadžbu:

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

Normala na graf funkcije f u točki (x_0, y_0) ima jednadžbu:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Ako je $f'(x_0) = 0$, onda je jednadžba tangente $y - y_0 = 0$, a normale $x - x_0 = 0$.

Primjer 1. Odredimo jednadžbe tangente i normale na graf funkcije $f(x)=x^3 - x + 2$ u točki s apscisom 1.

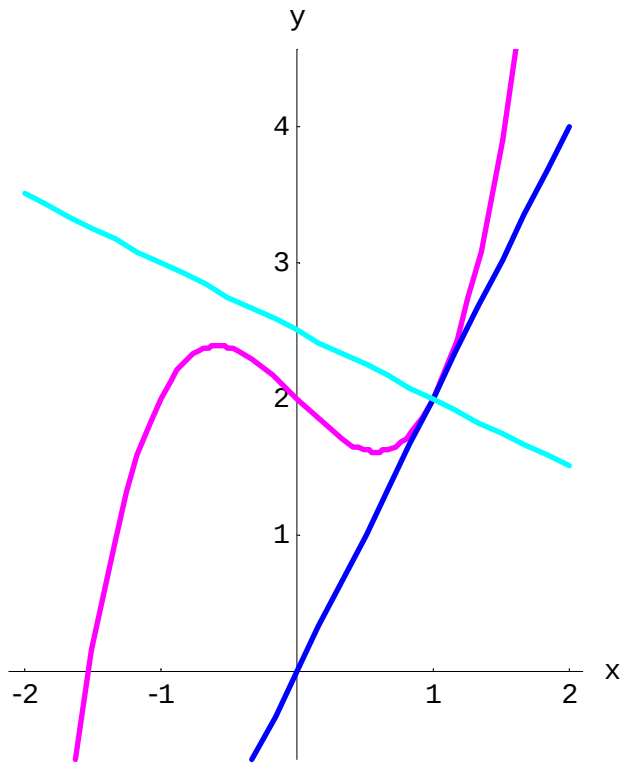
***Rješenje*: Budući da je f(1)=1 – 1 + 2=2, točka na krivulji je (1,2). Nadalje, f'(x) = $3x^2$ – 1, zato f'(1) = 2.**

Jednadžba tangente je:

t … y – 2 = 2 (x – 1) $\Rightarrow$ y = 2x,

a jednadžba normale je:

n … $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.



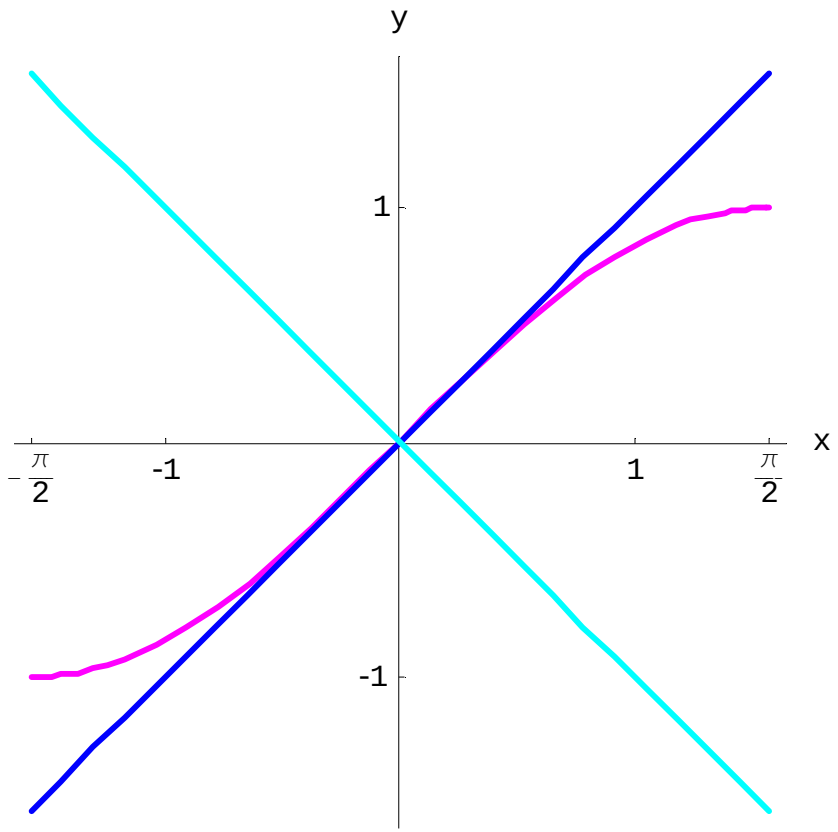
Primjer 2. Odredimo jednadžbe tangente i normalena graf funkcije f(x)=sin x u točki s apscisom 0.

***Rješenje*: Budući da je f'(x) = cos x, zato f'(0) = 1 i f(0) = sin0 = 0, to je jednadžba tangente:**

t … y – 0 = 1 (x – 0) $\Rightarrow$ y = x.

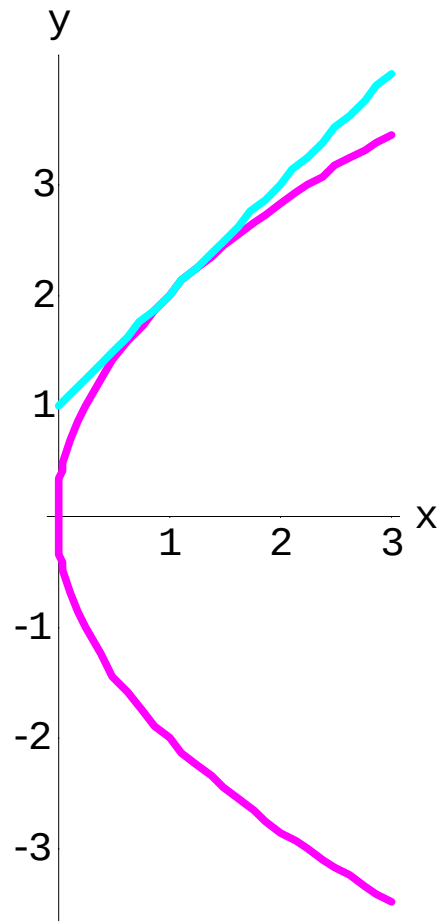
To znači na graf funkcije sinus ulazi u ishodište duž ovoga pravca, dakle, pod kutom od 45°.

n … y – 0 = -1 (x – 0) $\Rightarrow$ y = -x.



Primjer 3. Odredimo jednadžbu tangente na graf parabole y^2=4 x u točki na paraboli s koordinatama (x_0, y_0).

Rješenje: Iz jednadžbe parabole dobivamo: $2yy' = 4 \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{2}{y}$.



U točki (x_0, y_0) ova derivacija iznosi $y'(x_0) = \dfrac{2}{y_0}$,

pa je jednadžba tangente:

$t \quad \cdots \quad y - y_0 = \dfrac{2}{y_0}(x - x_0)$.

Specijalno, u točki $(x_0, y_0) = (1,2)$ jednadžba tangente je

$t \quad \ldots \quad y - 2 = 1 \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = x + 1.$

Primjer 4. Odredimo jednadžbe tangente i normale na krivulju

$$\begin{cases} x = 2t - sht + 1, \\ y = t + e^t + 2, \end{cases}$$

u točki kojoj odgovara parametar t = 0.

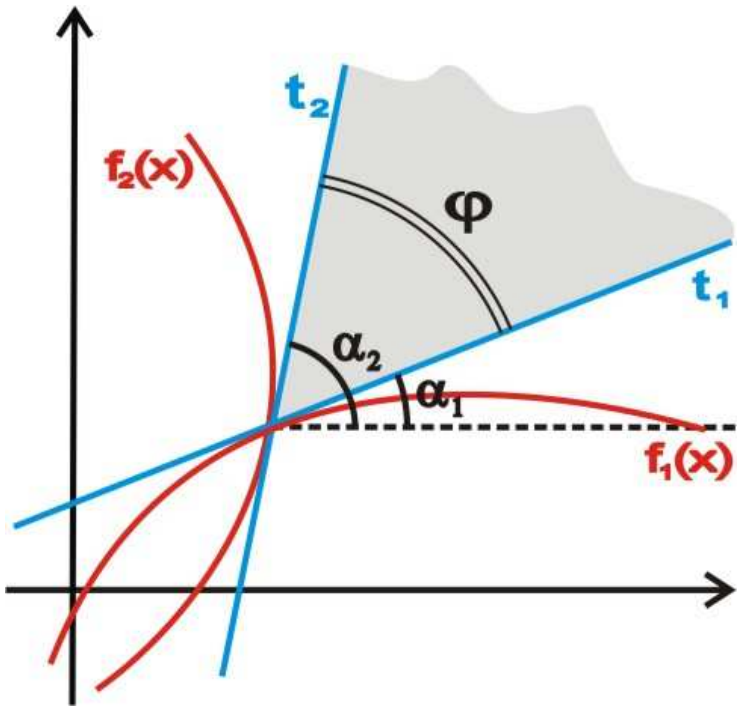
Rješenje: Radi se o točki T s koordinatama x=1, y=3. Nadalje,

$y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{1 + e^t}{2 - cht}$, $y'|_T = \dfrac{2}{1} = 2$. Zato je $t \cdots y - 3 = 2(x - 1)$, $\quad n \cdots y - 3 = -\dfrac{1}{2}(x - 1)$.

Kut između krivulja

Kut pod kojim se sijeku dvije krivulje definira se kao kut između njihovih tangenti u sjecištu.

Neka je α_1 kut koji zatvara prva tangenta s pozitivnim dijelom x-osi, k_1 njezin koeficijent smjera, a α_2 kut koji zatvara druga tangenta s pozitivnim dijelom x-osi, k_2 njezin koeficijent smjera. Ako je koeficijent smjera negativan, tada je i kut negativan, biramo ga unutar intervala $(-\pi/2,0)$.



Kut pod kojim se sijeku krivulje je $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Poredak krivulja biramo tako da bude $k_2 > k_1$, tj. $\alpha_2 > \alpha_1$, pa φ može poprimiti vrijednosti unutar intervala $(0,\pi)$.

Ovaj kut φ možemo računati i direktno, bez da računamo pojedinačne kutove, što ponekad može biti korisno. Prisjetimo se kako se određuje kut između dva pravca:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

Koeficijente smjera računamo pomoću derivacija:

$$k_1 = f'_1(x_0), \qquad k_2 = f'_2(x_0).$$

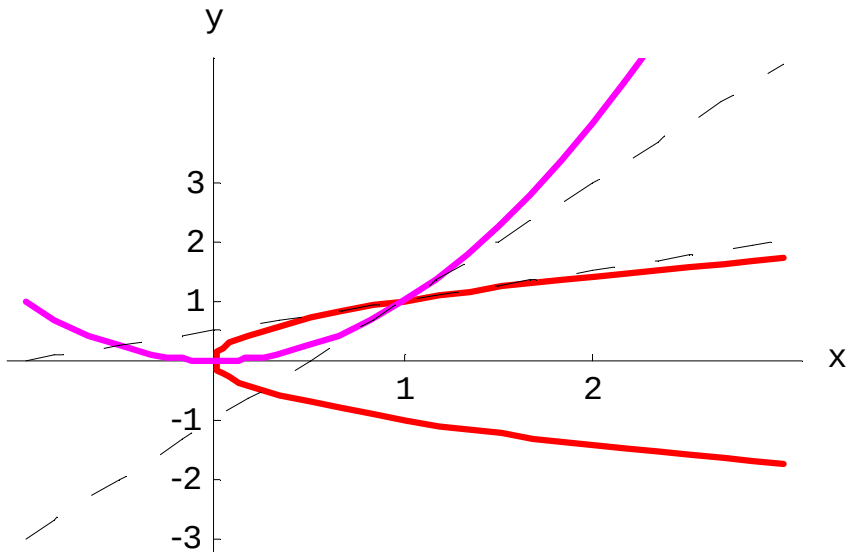
Primjer 5. **Izračunajmo kut pod kojim se sijeku dvije krivulje $y = \sqrt{x}$ i $y = x^2$ u točki (1,1) (nactrtate sliku!).**

***Rješenje*:**

$$k_1 = f_1'(1) = (\sqrt{x})'\Big|_{x=1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=1} = \frac{1}{2},$$

$$k_2 = f_2'(1) = (x^2)'\Big|_{x=1} = 2x\Big|_{x=1} = 2.$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}.$$



Dakle, $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4} = 36^\circ 52'$.

Napomena. Ako je k_1 negativan, takav da je i nazivnik u $\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ negativan, onda je $\operatorname{tg}\varphi$ negativan, odnosno kut $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ veći od 90°. Tad je potrebno uzeti suplement kuta, dakle, dodati mu 180°. Takav slučaj će se dogoditi u slijedećem primjeru.

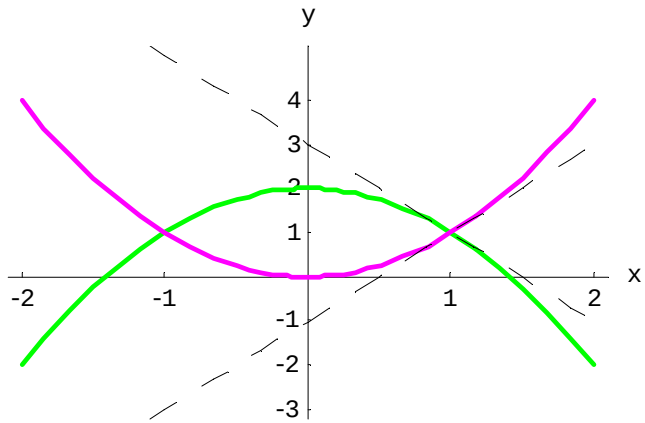
Primjer 6. Izračunajmo kut pod kojim se sijeku dvije krivulje $f_1(x) = 2 - x^2$ i $f_2(x) = x^2$ (nactrtate sliku!).

Rješenje:

U njihovom sjecištu (1,1) koeficijenti smjera tangenti su $k_1 = f_1'(1) = (1 - x^2)'\big|_{x=1} = -2x\big|_{x=1} = -2$ i

$k_2 = f_2'(1) = (x^2)'\big|_{x=1} = 2x\big|_{x=1} = 2$. Zato je

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2-(-2)}{1+2\cdot(-2)} = -\frac{4}{3}$, a odatle čitamo



$\varphi - 180^\circ = -53^\circ 07'$, te je $\varphi = 126^\circ 53'$.

Primjer 7. Za koje vrijednosti parametra α se grafovi funkcija $y = \alpha x^2$ i $y = \alpha(x-2)^2$ sijeku pod pravim kutem?

Rješenje:

Najprije odredimo koordinate presječne točke grafova ovih funkcija:

$\alpha x^2 = \alpha(x-2)^2 \Leftrightarrow x = x - 2$ ili $x = 2 - x$.

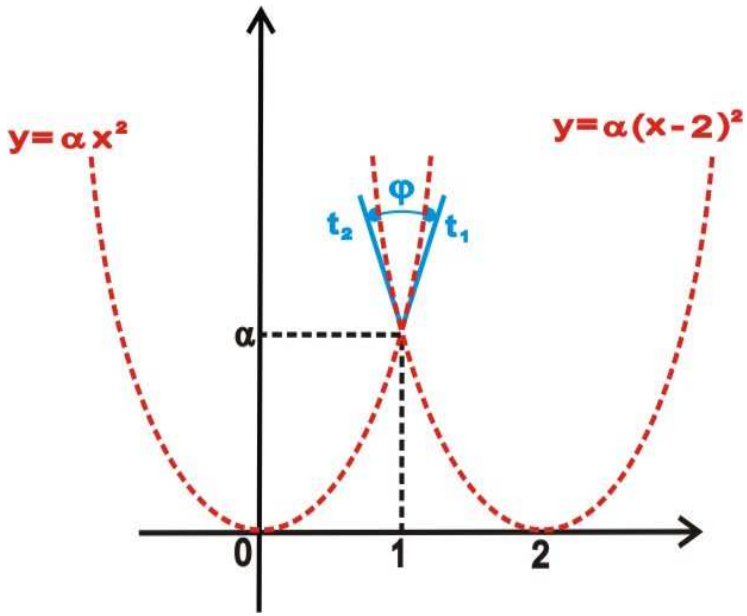
Slijedi da je x=1, pa je y=α. Nadalje, koeficijenti smjera tangenti na obje krivulje su

$y_1 = \alpha x^2$, $y_1' = 2\alpha x$, $k_1 = y_1'(1) = 2\alpha$,

$y_2 = \alpha(x-2)^2$, $y_2' = 2\alpha(x-2)$, $k_2 = y_2'(1) = -2\alpha$.

Krivulje se sijeku pod pravim kutem ako je

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \Leftrightarrow 2\alpha = -\frac{1}{-2\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \text{ ili } \alpha = -\frac{1}{2}.$$



Pad i rast funkcije

U ovom ćemo poglavlju pretpostaviti da je **funkcija neprekinuto diferencijabilna** u svakoj točki područja definicije.

Interval (a,b) na kojem je funkcija bilo rastuća bilo padajuća **nazivamo interval monotonosti** funkcije *f*.

Sljedeći je teorem je modifikacija Korolara 2 iz prethodnog poglavlja tj. ako je $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) na nekom otvorenom intervalu iz $\mathbb{R}$, onda je funkcija strogo rastuća (resp. strogo padajuća).

Teorem 1. (a) Funkcija *f* raste na intervalu (a,b) ako i samo ako je $f'(x) \geq 0$ za svako $x \in (a,b)$.

(b) Funkcija *f* pada na intervalu (a,b) ako i samo ako je $f'(x) \leq 0$ za svako $x \in (a,b)$.

Dokaz: (a) Trebamo dokazati oba smijera. Neka je *f* raste na (a,b). Obaberimo proizvoljni $x \in (a,b)$. Kako *f* raste, za $h < 0$ vrijedi $f(x+h) \leq f(x)$, pa je

$\lim\limits_{h\to 0-} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$, a za h>0 vrijedi f(x+h) $\geq$ f(x), pa je

$\lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$. Kako je *f* diferencijabilna, to je

$$f'(x) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0.$$

Kako je x proizvoljno odabrana, zaključujemo da je f'(x) $\geq$ 0 za svako x $\in$ (a,b). Dokazimo drugi smjer. Neka je f'(x) $\geq$ 0 za svako x $\in$ (a,b). Odaberimo bilo koje x_1 i $x_2 \in$ (a,b) tako da je $x_1 < x_2$. Prema Lagrangeovu teoremu postoji $c \in (x_1,x_2)$ tako da je $f(x_2)-f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$. Dakle imamo da je $f(x_1) \leq f(x_2)$, što znači da je frastuća na intervalu (a,b).

Tvrdnja (b) se dokazuje na isti način. Q.E.D.

Krajnje točke intervala monotonosti su ili rubovi područja definicije funkcije ili stacionarne točke (tj. točke za koje vrijedi f'(x) = 0).

Postupak nalaženje stacionarnih točaka i intervala monotonosti:

1) Izračunamo derivaciju *f'*.

2) Rješimo jednadžbu f '(x) = 0. Njezina su rješenja **stacionarne točke**.

3) Stacionarnim točkama područje definicije podijelimo na **intervale monotonosti**. Provjerom predznaka derivacije određujemo jesu li oni intervali rasta ili untervali pada funkcije.

Primjer 8. Odredimo intervale monotonosti za funkciju

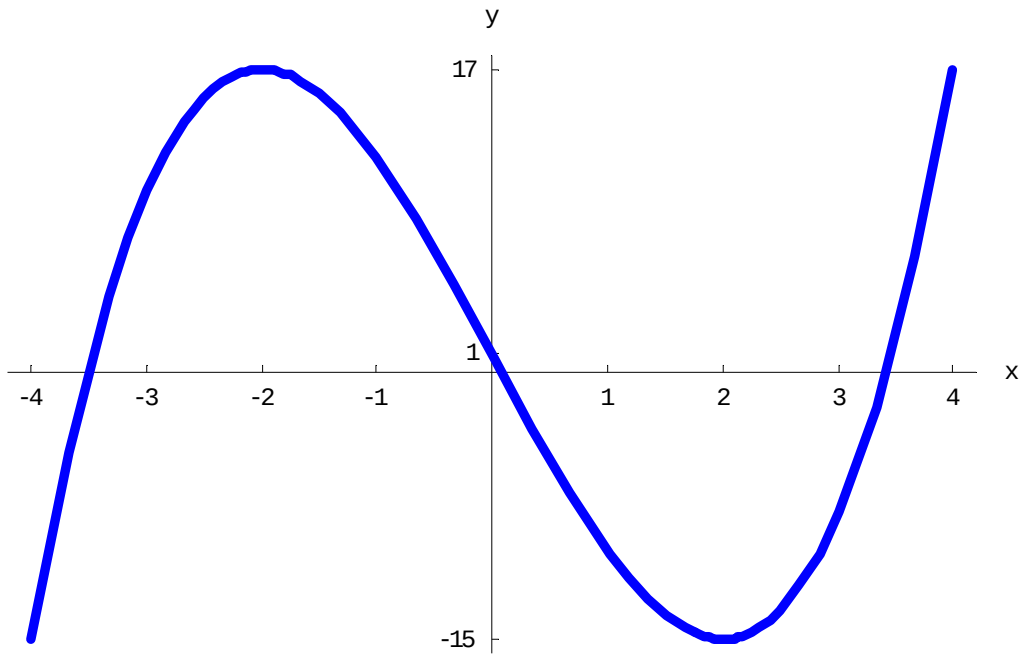
$$f(x) = x^3 - 12x + 1.$$

Rješenje: Derivacija funkcije je $f'(x) = 3x^2 - 12$. Stacionarne točke dobivamo iz:

$$3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3(x+2)(x-2) = 0,$$

odakle slijedi $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Funkcija (strogo) raste na onim inervalima (a,b) na kojima je f'(x) > 0, tj. $3(x+2)(x-2) > 0$. Ova je nejednakost ispunjena za $x \in (-\infty, -2)$ ili $x \in (2,\infty)$. Za $x \in (-2,2)$ vrijedi f'(x) < 0 i na tom intervalu funkcija (strogo)

pada.



Graf funkcije

$$f(x) = x^3 - 12x + 1.$$

Funcija raste na intervalima **(-∞,-2), (2,∞),** ***a pada na intervalu*** **(-2,2).**

Ponašanje funkcije opisujemo sljedećom tablicom. Znak ↗ stavljamo na intervalu rasta, a znak ↘ na intervalu pada.

	-∞	-2	2	+∞
predznak *f'*	+	-	+	
funkcija *f*	↗	↘	↗	

Primjer 9. Odredimo stacionarne točke i intervale monotonosti za funkciju

$$f(x) = x^4 - x^3.$$

Rješenje:

1. Derivacija funkcije je $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$.
2. Stacionarne točke tražimo iz jednadžbe

$$f'(x) = x^2(4x - 3) = 0$$

čija su rješenja $x_1 = 0$ i $x_2 = \frac{3}{4}$.

3. Intervali monotonosti su $(-\infty, 0), \left(0, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \infty\right)$. Izaberimo po jednu točku iz svakog intervala i odredimo predznak derivacije:

$$\begin{array}{llll} x = -1, & f'(-1) < 0 & \Rightarrow & (-\infty, 0) \quad \text{je interval pâda,} \\ x = 1/2, & f'(1/2) < 0 & \Rightarrow & (0, 3/4) \quad \text{je interval pâda,} \\ x = 1, & f'(1) < 0 & \Rightarrow & (3/4, \infty) \quad \text{je interval rasta.} \end{array}$$

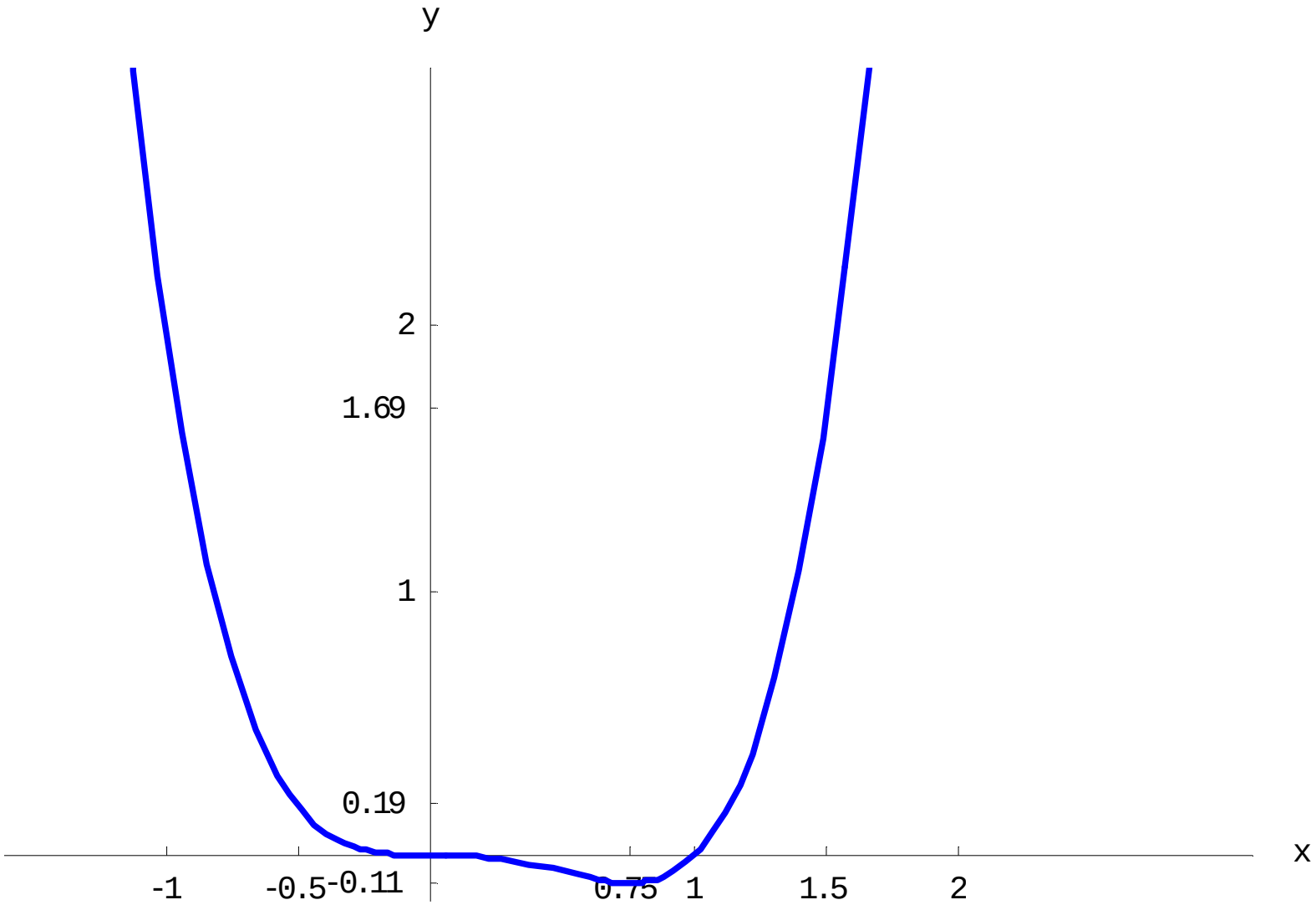
Vidimo da funkcija pada i na intervalu $(-\infty,0)$ i na intervalu $(0,3/4)$. Zato se može kazati da je $(-\infty,3/4)$ interval pada. Međutim, zbog važnosti stacionarne točke, mi ćemo taj interval ipak rastaviti stacionarnom točkom na dva dijela.

4. Rezultate možemo zapisati u obliku sljedeće tablice, koja opisuje tijek funkcije.

	-∞		0		3/4		+∞
predznak *f'*		-		-		+	
funkcija *f*		↘		↘		↗	

Skicirajmo graf funkcije. U tu svrhu pomoći će nam podatak da su nultočke x=0 (trostruka!) i x=1, te vrijednosti u nekoliko karakterističnih točaka:

x	- 1	- 0.5	0	0.75	1	1.5	2
f(x)	2	0.19	0	- 0.11	0	1.69	8



Graf funkcije

$$f(x) = x^4 - x^3.$$

Ekstremi funkcije

Ponovimo definiciju lokalnog maksimuma i minimuma danu u prethodnom poglavlju:

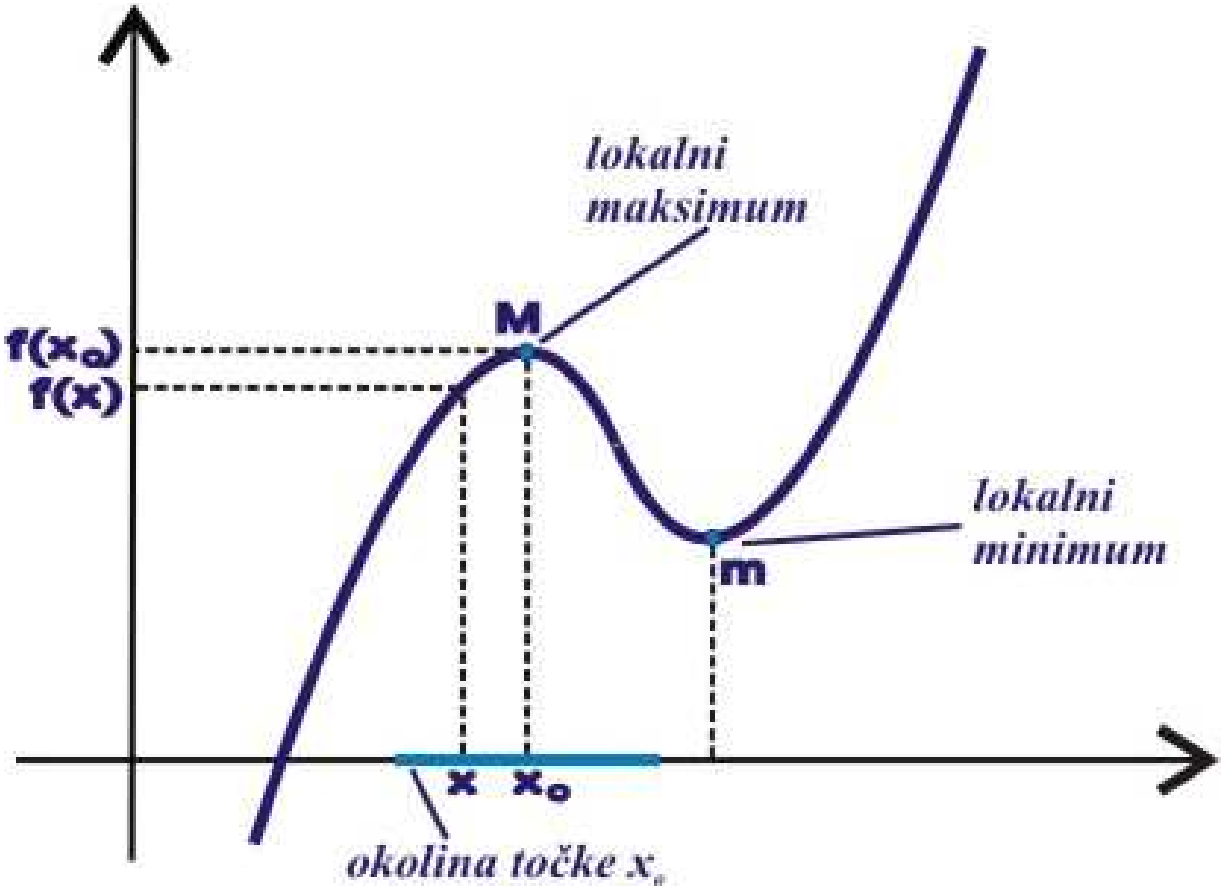
Funkcija *f* ima u x_o lokalni maksimum ako postoji interval (a,b) koji sadrži x_o takav da vrijedi

$$f(x_O) \geq f(x), \qquad \text{za svaki } x \in (a,b).$$

Funkcija *f* ima u x_o lokalni minimum ako postoji interval (a,b) koji sadrži x_o takav da vrijedi

$$f(x_O) \leq f(x), \qquad \text{za svaki } x \in (a,b).$$

Minimum imaksimum jednom rječju zovemo ekstremima funkcije *f*.



Ekstremi funkcije. Riječ lokalni označava da je vrijednost funkcije u toj točki veća (ili manja) od vrijednosti u svim susjednim točkama, ali ne mora bitinajveća (najmanja) vrijednost funkcije na čitavom području definicije.

Razlikujemo dvije vrste uvjeta za postojanje lokalnog ekstrema u nekoj točki: *nužan uvjet* je uvjet kojeg ispunjava svaka točka u kojoj funkcija ima lokalni ekstrem; *dovoljan uvjet* je uvjet koji znači da funkcija u nekoj točki ima lokalni ekstrem čim je taj uvjet ispunjen.

Fermatov teorem daje nužan uvjet:

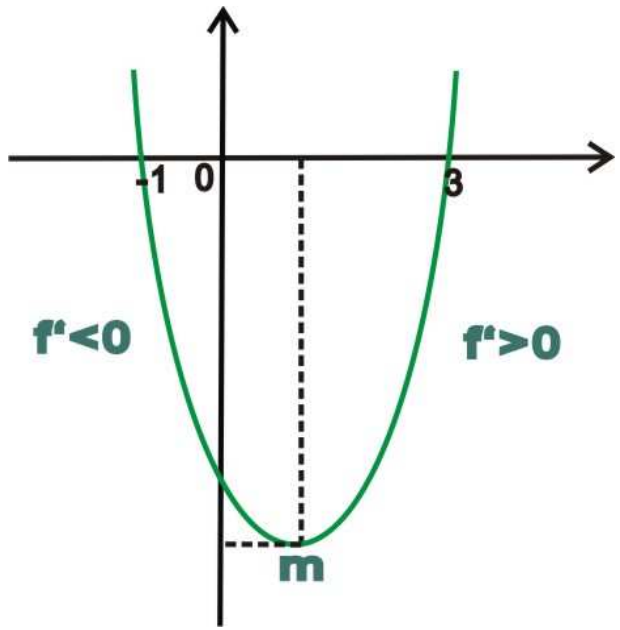
Nužan uvjet za postojanje lokalnog ekstrema

Neka je funkcija f neprekinuta u točki c. Ako funkcija f ima lokalni ekstrem u točki c, tada je c kritična točka funkcije f (tj. f '(c) = 0 ili f '(c) ne postoji).

Ilustrirajmo to sljedećim primjerima:

Primjer 10. **Odredimo ekstrem funkcije $f(x) = x^2 - 2x - 3$.**

Rješenje: **Derivacija je $f'(x) = 2x - 2$.**
Derivacija je jednaka nuli za $x_O=1$. U intervalu $(-\infty,1)$ derivacija je negativna, što znači da je to interval pâda. U intervalu $(1,\infty)$ derivacija je pozitivna, što znači da je to interval rasta. Stoga funkcija pada lijevo od točke x_O, a desno od nje raste, pa je x_O točka u kojoj funkcija ima minimum.



Primjer 11. Odredimo ekstrem funkcije f(x) = $|x|$.

Rješenje: Budući je

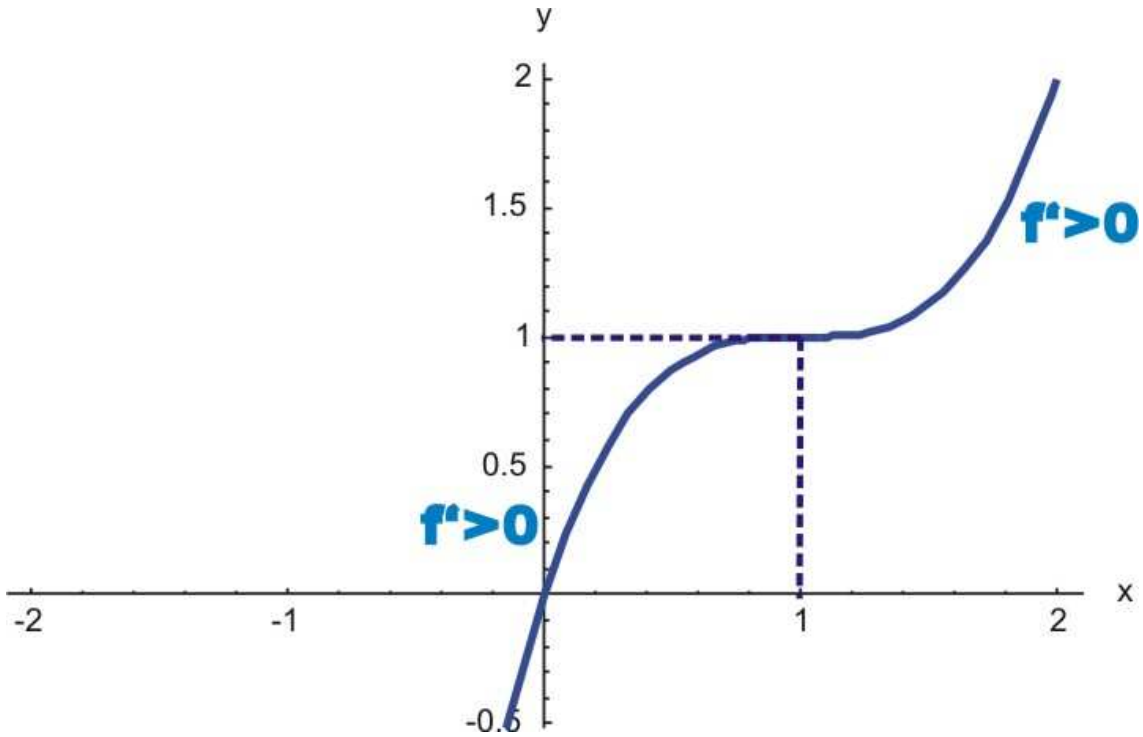
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geq 0 \\ -x, & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$$, to je derivacija

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x > 0 \\ -1, & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$$, a derivacija ne postoji u x = 0. U intervalu $(-\infty,0)$ derivacija je negativna, a u $(0,\infty)$ derivacija je pozitivna. Stoga funkcija pada lijevo od točke x=0, a desno od x=0 raste, pa je x=0, točka u kojoj funkcija ima minimum.

Primjer 12. Odredimo ekstrem funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

Rješenje: Izračunajmo derivaciju: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2$.

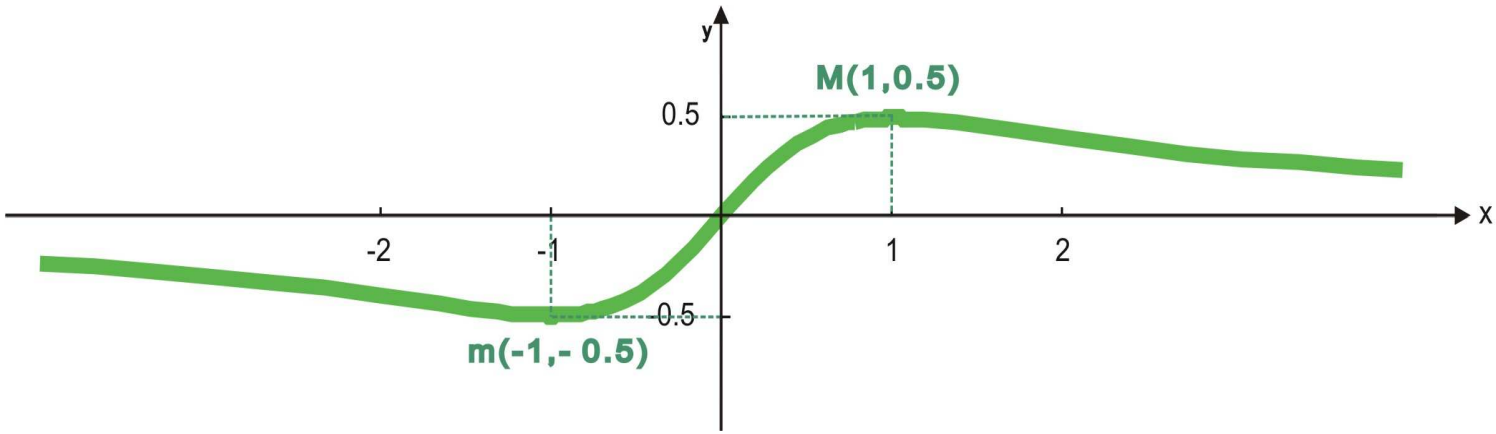
Derivacija je jednaka nuli za $x_O=1$. U intervalu $(-\infty,1)$ derivacija je pozitivna, što znači da je to interval rasta. U intervalu $(1,\infty)$ derivacija je ponovno pozitivna, te je i to interval rasta. Znači da funkcija raste lijevo i desno od točke x_O, pa u točki x_O funkcija nema ekstrem.



Primjer 13. Odredimo ekstreme funkcije $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

Rješenje: Izračunajmo derivaciju: $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Derivacija je jednaka nuli za x_1= - 1 i x_2=1. Vrijedi $f'\left(-1^-\right)<0$, $f'\left(-1^+\right)>0$, pa funkcija u točki x_1= - 1 **ima minimum.** Pri prolazu kroz u točku x_2= 1 derivacija ima predznake $f'\left(1^-\right)>0$, $f'\left(1^+\right)<0$, pa funkcija u toj točki **ima maksimum.**



Primjer 14. Dokazati **Bernoullijevu nejednakost:**

$$(1+h)^r > 1 + r \cdot h, \text{ za svaki } r > 1 \text{ i } h > 0.$$

Rješenje: Promatrajmo funkciju $f(h) = (1+h)^r - 1 - r \cdot h$. Vrijedi: $f'(h) = r(1+h)^{r-1} - r = r\left((1+h)^{r-1} - 1\right) > 0$ ako je $h > 0$ i $r > 1$. Zato je funkcija strogo rastuća na $[0,\infty)$ ako je $r > 1$. Posebice vrijedi $f(h) > f(0)$ za svako $h > 0$ i $r > 1$, tj. $(1+h)^r - 1 - r \cdot h > f(0) = 1^r - 1 = 0$.

***

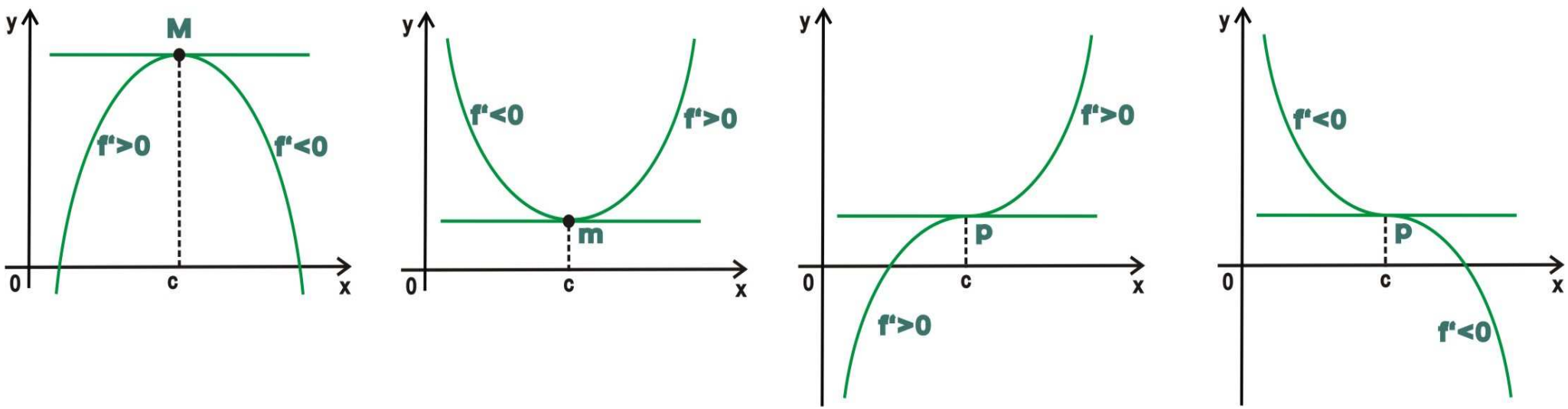
Reći ćemo da funkcija *f* mijenja predznak u točki c, ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da su vrijednosti funkcije *f* na intervalu $(c - \varepsilon, c)$ stalnog i suprotnog predznaka od vrijednosti funkcije na intervalu $(c, c + \varepsilon)$. Primjetimo da funkcija može mijenjati predznak u nekoj točki, a da pri tome nije definirana u toj točki.

Dovoljan uvjet za postojanje lokalnog ekstrema

Ako prva derivacija *f'* mijenja predznak u kritičnoj točki c, tada funkcija *f* ima lokalni ekstrem u točki c. Pri tome vrijedi sljedeće:

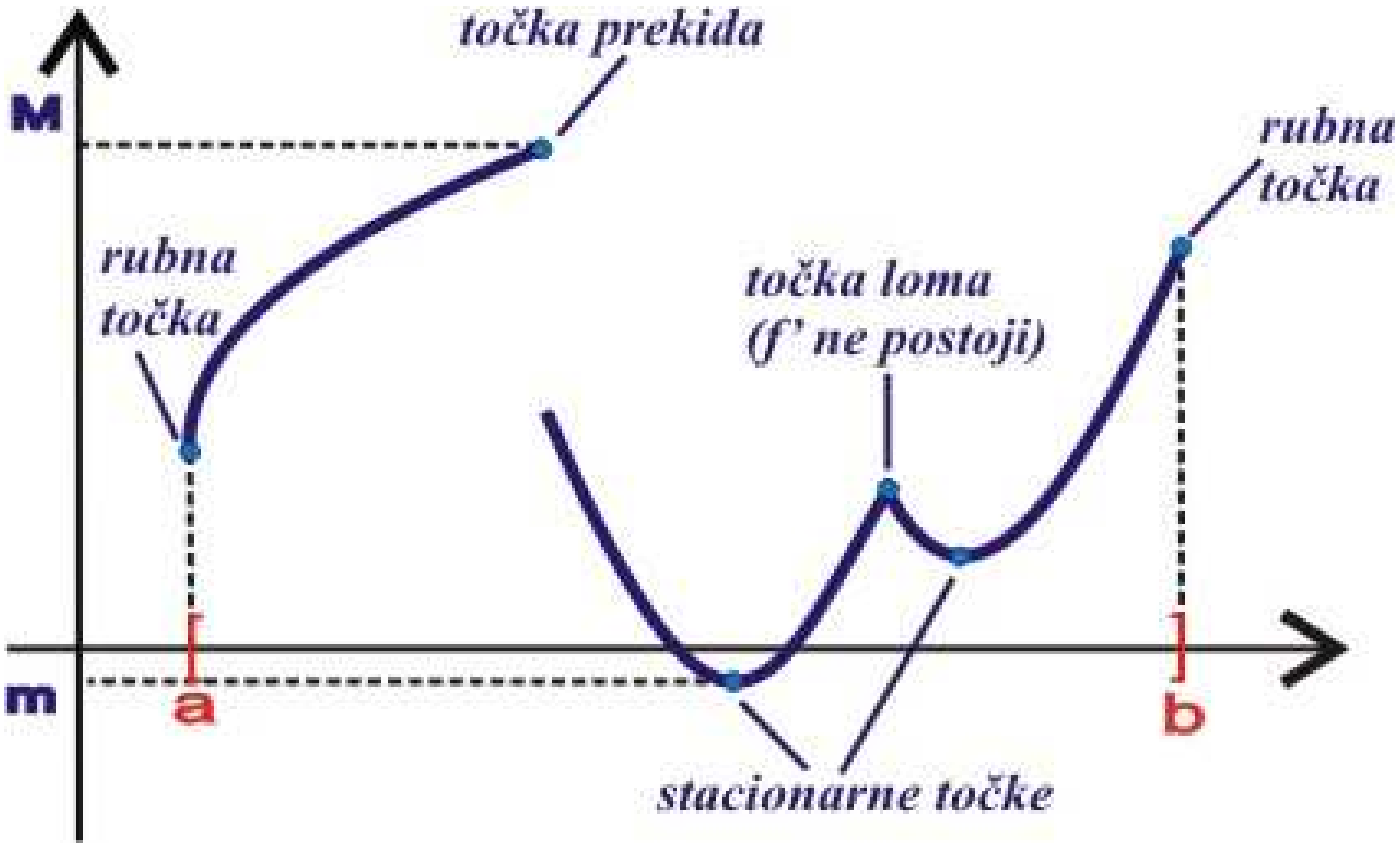
	na intervalu $(c - \varepsilon, c)$	na intervalu $(c, c + \varepsilon)$	f(c)
predznak od f '(x)	+	–	maksimum
predznak od f '(x)	–	+	minimum
predznak od f '(x)	+	+	nije ekstrem
predznak od f '(x)	–	–	nije ekstrem

Sljedeća slika opisuje ove četiri situacije



Globalni ekstrem.

Ako tražimo maksimum ili minimum funkcije na <u>cijelom zatvorenom intervalu</u> [a,b], onda govorimo o globalnim ekstremima. Globalni ekstrem može se postizati u kritičnim točkama unutar intervala [a,b] ili na njegovom rubu.



Ekstremi funkcije poprimaju se ili u stacionarnim točkama ili u točkama prekida ili u rubnim točkama intervala.

Dakle:

Na zatvorenom intervalu [a,b] funkcija može poprimiti globalni ekstrem u sljedećim točkama:

- u krajevima intervala,
- u točkama u kojima je derivacija jednaka nuli,
- u točkama u kojima derivacija ne postoji (točke prekida ili loma).

Primjer 15. Odredimo maksimum i minimum funkcije $f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} - 2 \cdot x$ na intervalu [-1,2].

Rješenje: Funkcija je neprekinuta. Njezina derivacija je:

$$f'(x) = 2x^{-1/3} - 2 = 2\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}.$$

Odavde dobivamo stacionarnu točku x_1 = 1i točku loma x_2 = 0 (u kojoj derivacija nije definirana). Ekstremi se još mogu poprimiti u rubnim točkama x_3 = -1 i x_4 = 2.

Izračunajmo vrijednosti u svim kritičnim točkama:

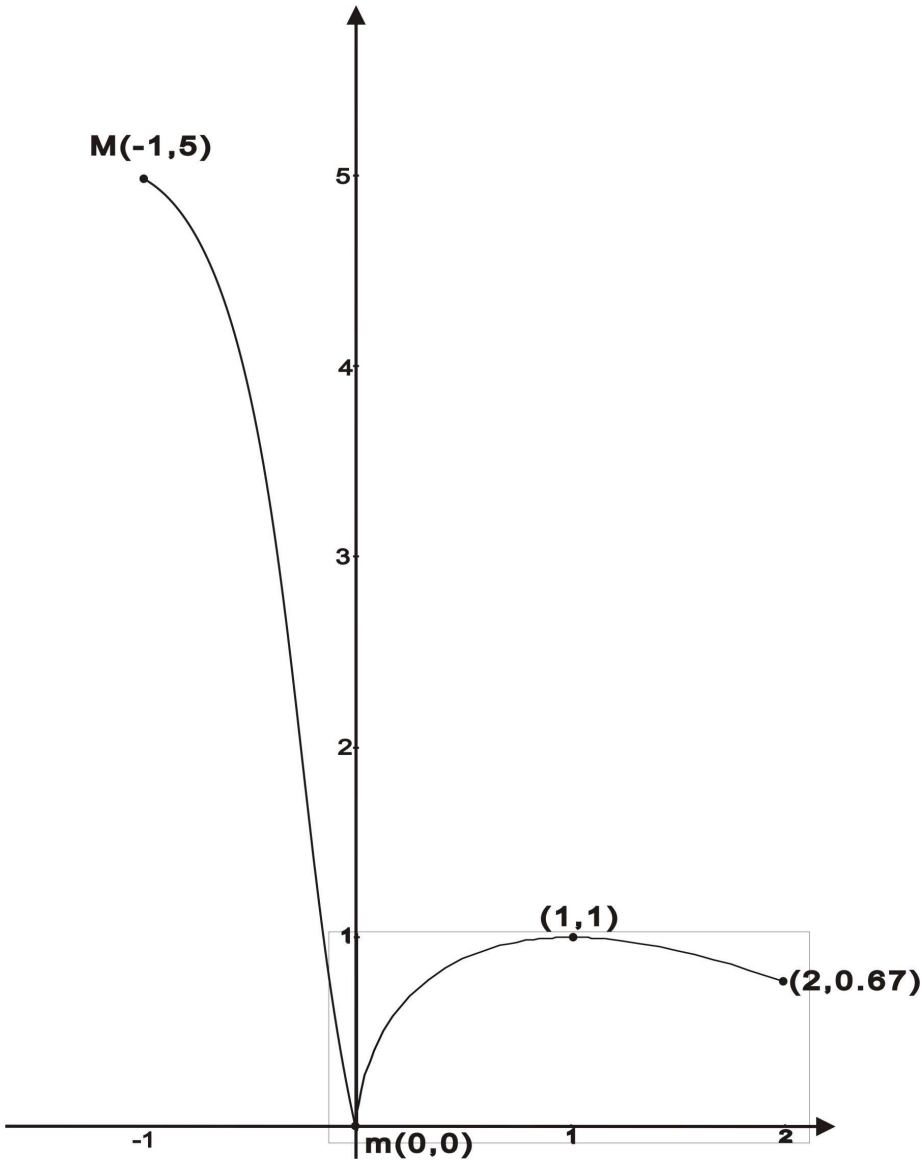
$$f(x_1) = f(1) = 1,$$

$$f(x_2) = f(0) = 0,$$

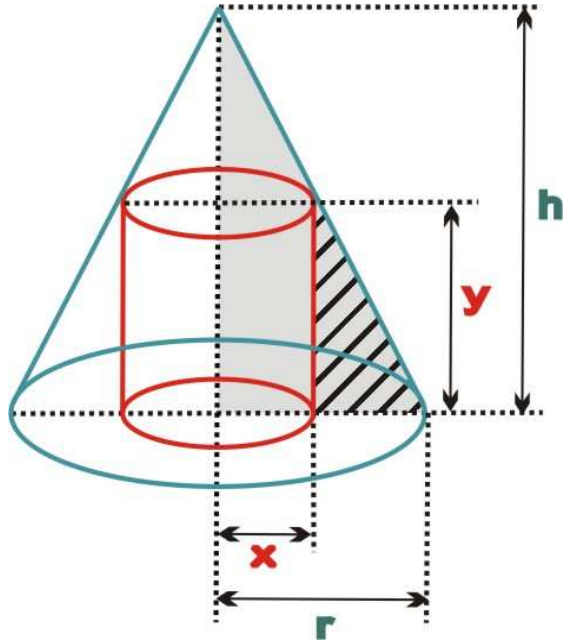
$$f(x_3) = f(-1) = 5,$$

$$f(x_4) = f(2) = 3\sqrt[3]{4} - 4 \approx 0.76.$$

Dakle, globalni minimum je 0 (za x = 0), a globalni maksimum je 5 (za x = -1).



Primjer 16. Odredimo valjak najvećeg volumena koji je upisan u stožac visine *h* i radijusa baze *r*, tako da baza valjka leži na bazi stošca.



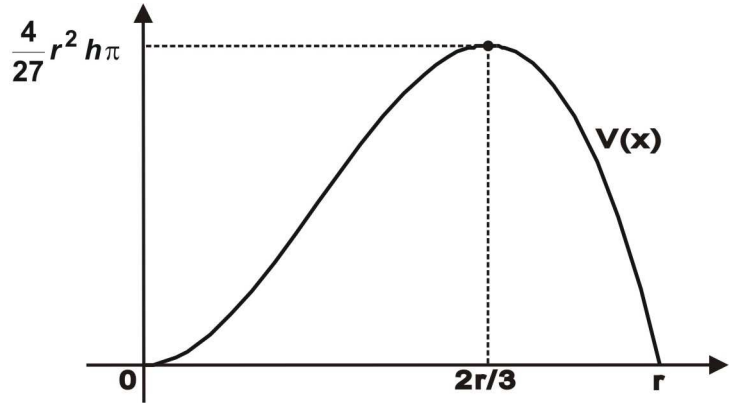
Rješenje: U skladu sa oznakama na slici desno volumen valjka je:

$$V = B \cdot y = x^2 \pi \cdot y .$$

Iz sličnosti trokuta dobivamo: $\dfrac{r-x}{y} = \dfrac{r}{h}$, tj.

$y = (r-x)\dfrac{h}{r}$. Sada je $V = V(x) = x^2 (r-x)\dfrac{h}{r}\pi$.

To je neprekinuta funkcija na zatvorenom intervalu [0,r], pa ona sigurno postiže svoj maksimum na tom intervalu.

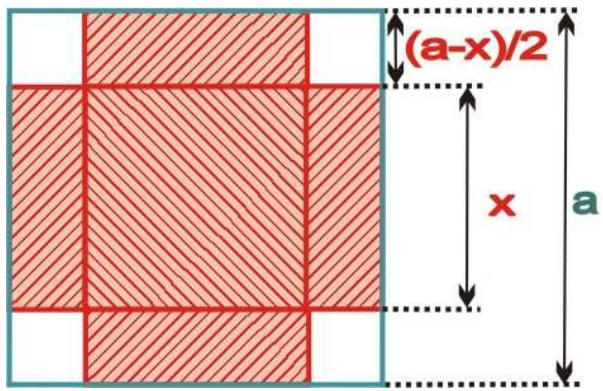


Odredimo derivaciju:

$$V'(x) = \left(2rx - 3x^2\right)\frac{h}{r}\pi = x\left(2r - 3x\right)\frac{h}{r}\pi.$$

Stacionarne točke su: $x_1 = 0$ i $x_2 = \frac{2}{3}r$. Za $x_1 = 0$ je $V(x_1) = V(0) = 0$ i to svakako nije traženi maksimum. Primjetimo da vrijedi isto tako V(r) = 0. Dakle maksimum se mora postići u nekoj točki između 0 i r. To će biti u drugoj stacionarnoj točki: $V(x_2) = V\left(\frac{2}{3}r\right) = \frac{4}{27}r^2h\pi$. Budući je V'(x) < 0 za $x \in \left(0, \frac{2}{3}r\right)$ i V'(x) > 0 za $x \in \left(\frac{2}{3}r, r\right)$, to je $x_2 = \frac{2}{3}r$ točka maksimuma.

Primjer 17. **Od kartona oblika kvadrata stranice duljine a, trebamo napraviti otvorenu kutiju što je moguće većeg volumena.**



Rješenje: **Kutiju ćemo napraviti tako da od kartona odrežemo male kvadrate u četiri kuta kartona. U skladu sa oznakama na slici desno volumen tako dobivene kutije je:**

$$V(x) = B \cdot h = x^2 \cdot \frac{a - x}{2}$$

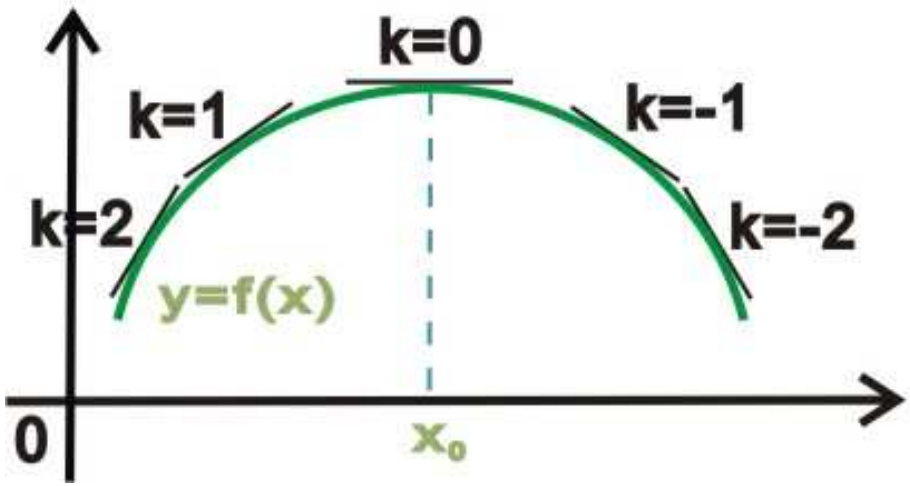
Ovo je neprekinuta funkcija na zatvorenom intervalu [0,a], pa ona sigurno postiže svoj maksimum na tom intervalu. Odredimo derivaciju:

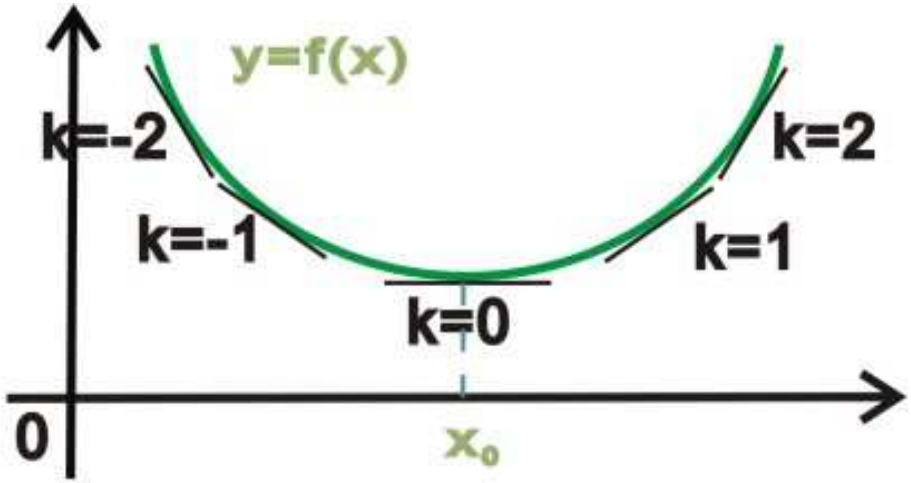
$$V'(x) = a \cdot x - \frac{3}{2}x^2 = x\left(a - \frac{3}{2}x\right).$$

Stacionarne točke su: $x_1 = 0$ i $x_2 = \frac{2}{3}a$. Za $x_1 = 0$ je $V(x_1) = V(0) = 0$ i to svakako nije traženi maksimum. Primjetimo da je i V(a) = 0. Dakle maksimum se mora postići u nekoj točki između 0 i a. To će biti u drugoj stacionarnoj točki: $V(x_2) = V\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{2}{27}a^3$. Nadalje, V'(x) > 0 za $x \in \left(0, \frac{2}{3}a\right)$ i V'(x) < 0 za $x \in \left(\frac{2}{3}a, r\right)$, pa je x_2 točka maksimuma. Dakle, tražena kutija ima kvadratnu bazu stranice *2a/3* i volumen $2a^3/27$.

Druga derivacija i ekstremi

Nije uvijek jednostavno odrediti predznak prve derivacije s ciljem određivanja karaktera stacionarne točke. Tada imamo kriterij koji koristiti vrijednost druge derivacije u stacionarnoj točki.





Promatrajmo situaciju kada f ima u točki x_0 maksimum. Lijevo od x_0 vrijednost derivacije je pozitivna, desno od x_0 je negativna. Dakle, nagib tangente *opada*, od pozitivnih vrijednosti prema negativnim. Zato je vrijednost druge derivacije f'' u okolini u točke x_0 *negativna*.

Ako f ima u točki x_0 minimum, onda nagib tangente *raste* od negativnih

vrijednosti prema pozitivnim, pa je vrijednost druge derivacije f'' u okolini u točke x_0 *pozitivna*.

Tako dobivamo sljedeći kriterij:

Ispitivanje karaktera ekstrema pomoću druge derivacije

1) **Izračunajmo f' i f''.**
2) **Rješimo jednadžbu $f'(x) = 0$. Njena su rješenja stacionarne točke $\{ x_0 \}$.**

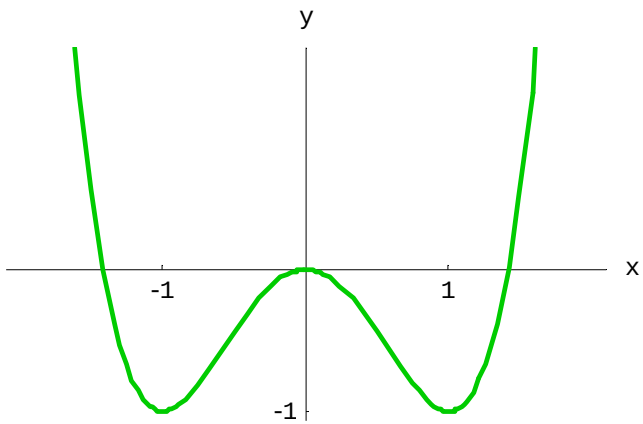
3a) Ako je $f''(x_0) > 0$, onda se u x_0 postiže minimum.

3b) Ako je $f''(x_0) < 0$, onda se u x_0 postiže maksimum.

3c) Ako je $f''(x_0) = 0$, onda karakter točke $(x_0, f(x_0))$ istražujemo pomoću predznaka prve derivacije u okolini točke x_0.

Primjer 18. **Odredimo ekstreme funkcije $f(x) = x^4 - 2x^2$.**

Rješenje:



1. $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1)$,

   $f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1)$.

2. Stacionarne točke su: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

3. Odredimo predznak druge derivacije u stacionarnim točkama:

$f''(x_1) = f''(-1) = 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ u x_1 je lokalni minimum,

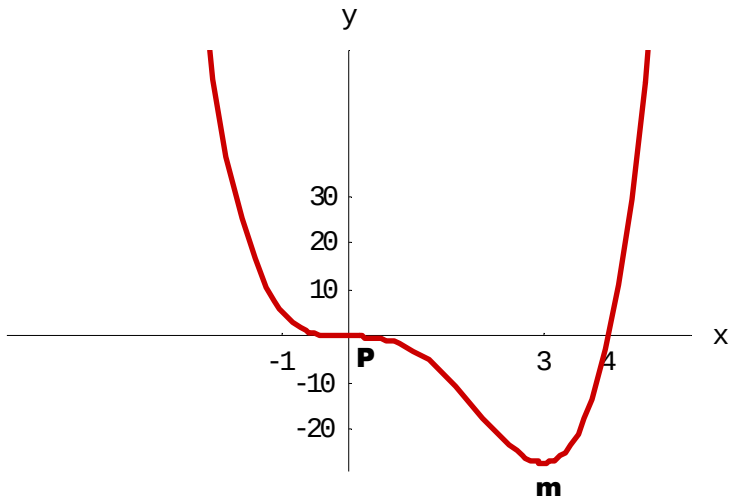
$f''(x_2) = f''(0) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ u x_2 je lokalni maksimum,

$f''(x_3) = f''(1) = 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ u x_3 je lokalni minimum.

Vrijednosti funkcije u tim točkamasu: $f(x_1) = f(-1) = -1$, $f(x_2) = f(0) = 0$, $f(x_3) = f(1) = -1$. Graf funkcije je prikazan na slici gore.

Primjer 19. Odredimo ekstreme funkcije $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Rješenje:



1. $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$,

   $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$.

2. Stacionarne točke su: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

3. Odredimo predznak druge derivacije u stacionarnim točkama:

$f''(x_1) = f''(0) = 0 \quad \Rightarrow$ trebamo ispitati predznak f' u okolini x_1,

$f''(x_2) = f''(3) = 36 > 0 \quad \Rightarrow$ u x_2 je lokalni minimum, $f(x_2) = f(3) = -27$.

Budući je $4x^2 > 0$ za $x \neq 0$ i $x - 3 < 0$ u okolini točke $x_1 = 0$, to je $f'(x) = 4x^2(x-3)$ uvijek negativan u okolini te točke. Zato točka $x_1 = 0$ nije ekstrem (to je točka u kojoj je infleksija). Graf funkcije je prikazan na slici gore.

Zakrivljenost

Slično kao gore, ovdje ćemo opisati postupak za ispitivanje zakrivljenosti funkcije, pri ćemu ćemo koristiti drugu derivaciju funkcije.

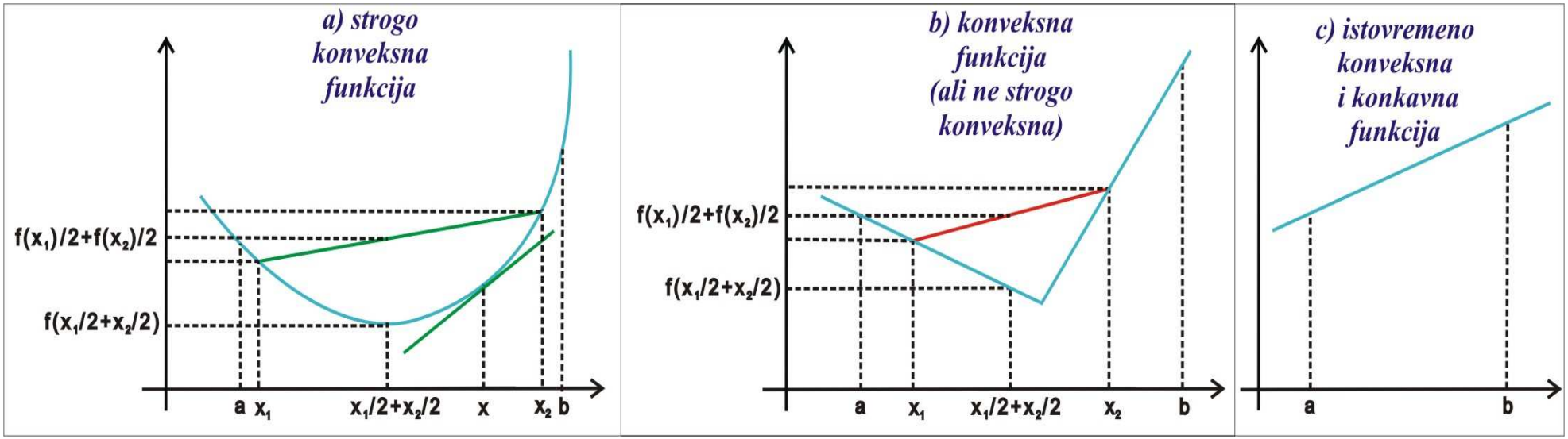
Kažemo da je funkcija f konveksna na intervalu (a,b) $\in \mathcal{D}(f)$ ako za proizvoljne točke $x_1, x_2 \in (a,b)$ takve da je $x_1 \neq x_2$ vrijedi

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \qquad \lambda \in (0,1).$$

Slično, kažemo da je funkcija f konkavna na intervalu (a,b) $\in \mathcal{D}(f)$ ako za proizvoljne točke $x_1, x_2 \in (a,b)$ takve da je $x_1 \neq x_2$ vrijedi

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \qquad \lambda \in (0,1).$$

U slučaju strogih nejednakosti, kažemo da je funkcija f strogo konveksna odnosno strogo konkavna.



<u>Za graf konveksne funkcije vrijede sljedeće tvrdnje (vidi sliku a) gore):</u>

a) graf zakreće na gore na intervalu (a, b);

b) u svakoj točki $x \in (a, b)$ graf se nalazi iznad tangente u toj točki;

c) za proizvoljne točke $x_1, x_2 \in (a, b)$ takve da je $x_1 < x_2$, dio grafa $f|_{[X1,X2]}$ nalazi se ispod sekante kroz točke $(x_1,f(x_1))$ i $(x_2,f(x_2))$;

d) ako je funkcija f derivabilna na intervalu (a, b), tada je f (strogo) konveksna na intervalu (a,b) ako i samo ako je derivacija f' (strogo) rastuća na intervalu (a,b).

Nacrtaj analogne slike za konkavnu funkciju i iskaži tvrdnje analogne gornjim.

Dovoljan uvjet zakrivljenosti

Neka je funkcija f dva puta derivabilna na intervalu (a,b). Ako je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in (a,b)$, tada je funkcija *f* strogo konveksna na intervalu (a,b). Ako je $f''(x) < 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je funkcija f strogo konkavna na intervalu (a,b).

Zaista, kako f'' postoji na intervalu (a, b), to po definiciji derivacije na tom intervalu postoji i prva derivacija f'. Uz to, ako je $f''(x) > 0$ na (a,b), tada je po Teoremu 1 prva derivacija f' strogo raste na tom intervalu, pa je funkcija f konveksna. Dokaz u konkavnom slučaju je sličan.

Uvjet $f''(x) > 0$ ili $f''(x) < 0$ je samo dovoljan, ali ne i nužan uvjet zakrivljenosti. Primjerice, funkcija $f(x) = x^4$ je konveksna na citavom skupu R, ali je $f''(0) = 0$.

U proučavanju funkcija zanimaju nas točke u kojima se zakrivljenost mijenja.

Reći ćemo da glatka funkcija f ima infleksiju u točki c ako postoji ε-okolina točke c, $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \in \mathcal{D}(f)$, takva daje f strogo konveksna na intervalu $(c-\varepsilon, c)$ i strogo konkavna na intervalu $(c, c+\varepsilon)$ ili obrnuto. Tada je (c,f(c)) točka infleksije grafa funkcije f.

Nužan uvjet za postojanje infleksije

Ako funkcija f ima infleksiju u točki c i ako f"(c) postoji, tada je f"(c) = 0.

Zaista, kako f"(c) postoji, to je funkcija f' derivabilna u točki c, pa je i neprekidna u točki c. Neka funkcija f ima infleksiju u točki c i to tako da je, na primjer, strogo konveksna lijevo od točke c i strogo konkavna desno od točke c. To znači da je f' strogo rastuća lijevo od točke c i strogo padajuća desno od točke c, odnosno f' ima lokalni maksimum u točki c. No tada je f"(c) = 0 prema nužnom uvjetu za postojanje eksterma.

Uvjet f"(c) = 0 je nužan za postojanje infleksije, ali ne i dovoljan. Primjerice, za funkcije $f(x) = x^3$ i $f(x) = x^4$ vrijedi f"(0) = 0, a samo prva funkcija ima infleksiju u točki x = 0, dok druga nema.

Dovoljan uvjet za postojanje infleksije

Neka je funkcija dva puta derivabilna na nekoj ε-okolini točke c, osim možda u točki c. Ako druga derivacija f" mijenja predznak u točki c, tada funkcija f ima infleksiju u točki c.

Zaista, ako f" mijenja predznak u točki c, onda je funkcija f konveksna lijevo od točke c, a konkavna desno od točke c, ili obrnuto, pa stoga ima infleksiju u točki c.

Primjerice, za funkciju $f(x) = \operatorname{tg} x$ vrijedi $f''(x) = (-2)\cos^{-3}x\,(-\sin x)$, $f''(0)=0$. Očito je $f''(x) < 0$ za $-\pi/2 < x < 0$ i $f''(x) > 0$ za $0 < x < \pi/2$. Dakle, funkcija tg x je konkavna za $-\pi/2 < x < 0$ i konveksna za $0 < x < \pi/2$, pa ima infleksiju u točki $x = 0$.

Derivacije višeg reda i karakter ekstrema

Konačno, za ispitivanje lokalnih ekstrema i točaka infleksije možemo koristiti i više derivacije. Sljedeći važan teorem navodimo bez dokaza.

Kriterij za infleksiju i ekstrem

Teorem 2 Neka funkcija f ima u nekoj ε-okolini točke c neprekidne derivacije do uključivo reda n, pri cemu je $n \geq 3$. Neka vrijedi

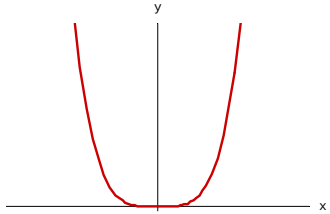
$$f''(c) = f'''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0 \quad \text{i} \quad f^{(n)}(c) \neq 0.$$

Ako je n neparan, tada funkcija ima infleksiju u točki c. Ako je n paran i uz to još i $f'(c) = 0$, tada funkcija ima lokalni ekstrem u točki c. Karakter ekstrema ovisi o predznaku derivacije, pa je

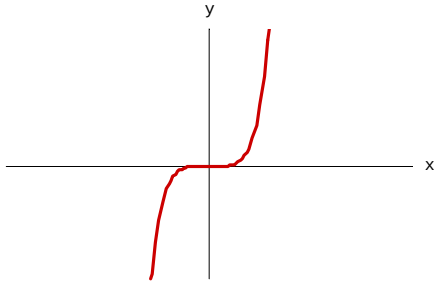
c točka minimuma,	ako je	$f^{(n)}(c) > 0$,
c točka maksimuma,	ako je	$f^{(n)}(c) < 0$.

Primjer 20. Odredimo točke ekstrema i infleksije sljedećih funkcija.

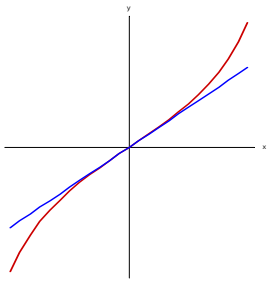
a) $f(x) = x^4$. Vrijedi $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, $f^{IV}(0) = 24 \neq 0$. Kako je $f'(0) = 0$ i $f^{IV}(0) > 0$, zadana funkcija ima po Teoremu 2 lokalni minimum u točki $x = 0$.



b) $f(x) = x^5$. Vrijedi $f''(0) = f'''(0) = f^{IV}(0) = 0$, $f^{V}(0) = 120 \neq 0$. Kako je $n = 5$ neparan, iz Teorema 2 slijedi da zadana funkcija ima infleksiju u točki $x = 0$. U ovom slučaju radi se o ”horizontalnoj infleksiji”, jer je $f'(0) = 0$, odnosno tangenta u točki infleksije je paralelna s x-osi.



c) $f(x) = \operatorname{tg} x$. Vrijedi $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 2 \neq 0$ pa je po Teoremu 2 tocka $x = 0$ točka infleksije. U ovom slučaju radi se o ”kosoj infleksiji”, jer je $f'(0) = 1$, odnosno tangenta u točki infleksije zatvara s x-osi kut od $\pi/4$.



Primjer 21. Dokažimo nejednakost:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \qquad \text{za} \quad x > 0.$$

a) Dokažimo prvo desnu nejednakost $\sin x < x$ za $x > 0$. Promatrajmo funkciju $f(x) = \sin x - x$. Vrijedi $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Zato funkcija f pada na $\mathbb{R}$, pa je $f(x) \leq f(0) = 0$ za sve $x > 0$. Dokazali smo da je $\sin x \leq x$ za sve $x > 0$. Može li vrijediti jednakost za neki $x > 0$? Ne može, jer je $f'(x) = \cos x - 1 < 0$ za sve x $\in$ (0, 2π), pa funkcija f strogo pada na (0, 2π). Dakle $\sin x < x$ za sve x $\in$ (0, 2π). Osim toga je $\sin x \leq 1 < x$ za sve x $\in$ (2π, ∞).

b) Dokažimo sada lijevu nejednakost $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$ za $x > 0$. Promatrajmo funkciju $g(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x$. Onda je $g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$, $g''(x) = -x + \sin x$. Prema već dokazanoj nejednakosti a) vrijedi da je $g''(x) < 0$ za sve $x > 0$. Zato funkcija g' strogo pada na intervalu (0,∞), pa

vrijedi $g'(x) < g'(0) = 0$ za sve $x > 0$. Stoga i funkcija g strogo pada na intervalu $(0,\infty)$, pa vrijedi $g(x) < g(0) = 0$ za $x > 0$, što je i trebalo dokazati.

Ispitivanje toka funkcije

Ispitivanje toka funkcije je složen postupak u kojem se primjenjuje sve što je do sada rečeno o funkcijama i derivacijama. Ispitivanje funkcije y = f(x) sastoji se od sljedećih koraka:

1. **Područje definicije - potrebno je poznavati elementarne funkcije i postupke za rješavanje jednadžbi ili nejednadžbi.**
2. **Parnost - provjerava se pomoću definicije.**
3. **Periodičnost - provjerava se pomoću definicije. Pri tome je važno uočiti da elementarna funkcija ne može biti periodična ako ne sadrži neku od trigonometrijskih funkcija.**
4. **Nul-točke - postupak se sastoji od rjesavanja jednadžbe f(x) = 0.**
5. **Asimptote (vertikalne, horizontalne i kose) postupak koji je opisan u poglavlju o funkcijama sastoji se od nalazenje limesa te primjene L'Hospitalovog pravila ukoliko je to potrebno.**
6. **Ekstremi - potrebno je provjeriti nužne i dovoljne uvjeta ekstrema. Provjera nužnih uvjeta vrši se traženjem stacionarnihi kritičnih točkaka (potrebno je odrediti područje definicije prve derivacije f' i riješiti**

jednadzbu f'(x) = 0).

Provjera dovoljnih uvjeta ekstrema može se vršiti na tri načina: pomoću promjene predznaka prve derivacije, pomoću druge derivacije ili pomoću viših derivacija.

7. **Intervali monotonosti** - nakon što smo u prethodnoj točki izračunali prvu derivaciju f', intervale monotonosti određujemo promatrajući predznake od f'.

8. **Intervali zakrivljenosti** - prvo je potrebno izračunati drugu derivaciju f". Potom intervale konveksnosti i konkavnosti možemo odrediti promatrajući predznake od f". Takoder možemo pogledati gdje prva derivacija f' raste, a gdje pada.

9. **Točke infleksije** - potrebno je naći točke u kojima druga derivacija f" mijenja predznak, odnosno točke koje ispunjavaju dovoljne uvjete infleksije. Za provjeru dovoljnih uvjeta infleksije možemo koristiti i vise derivacije po Teoremu 2.

10. **Graf funkcije** - potrebno je sve do sada dobivene informacije o funkciji spojiti u suvislu sliku. Prilikom crtanja grafa moguće je otkriti nelogičnosti, odnosno pogreške u prethodnom računu te ih ispraviti.

Primjer 21. Ispitati tok i nacrtati graf funkcije $f(x)=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$.

1. **Područje definicije**

   Domena funkcije je $\mathcal{D}$ (f) = $\mathbb{R}$.

2. **Parnost**

   Vrijedi $f(-1)=\sqrt[3]{2+1}=\sqrt[3]{3}$, dok je $f(1)=\sqrt[3]{2-1}=\sqrt[3]{1}=1$. Zaključujemo da funkcija nije ni parna ni neparna jer ne vrijedi f(-x) = f(x) ili f(-x) = -f(x) za sve x$\in$ $\mathcal{D}$ (f).

3. **Periodičnost**

   Funkcija nije periodična, jer je elementarna, a ne sadrži neku od trigonometrijskih funkcija.

4. **Nul-točke**

   Riješimo jednadžbu f(x) = 0. Vrijedi

$$\sqrt[3]{2x^2-x^3}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2-x^3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(2-x)=0$$

   pa su nul-točke $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$.

5. **Asimptote**

   a) **Vertikalne asimptote**

   Funkcija nema vertikalnih asimptota jer je $\mathcal{D}$ (f) = $\mathbb{R}$.

b) Kose asimptote

U lijevoj strani vrijedi

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} = -1,$$

$$l = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x\right) = (\infty - \infty)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + 1\right) = (-\infty \cdot 0) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + 1\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x} - 1\right)^{-2/3}\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{2}{x} - 1\right)^{-2/3} = \frac{2}{3}.$$

Dakle, pravac y = -x + 2/3 je lijeva kosa asimptota. U desnoj strani vrijedi

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} = -1,$$

$$l = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x\right) = (-\infty + \infty)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + 1\right) = (+\infty \cdot 0) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + 1\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x} - 1\right)^{-2/3}\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{2}{x} - 1\right)^{-2/3} = \frac{2}{3}.$$

Dakle, pravac y = -x + 2/3 je i desna kosa asimptota.

6. Ekstremi

Izračunajmo prvu derivaciju:

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(2x^2-x^3\right)^{-2/3}\left(4x-3x^2\right)=\frac{x(4-3x)}{3\sqrt[3]{x^4(2-x)^2}}.$$

Područje definicije derivacije jednako je $\mathcal{D}$(f ') = $\mathbb{R}$ \ {0,2}. Dakle, dvije kritične točke funkcije su $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$. Za $x \in \mathcal{D}$(f ') vrijedi

$$f'(x)=\frac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}}.$$

Stacionarna točka (treca kritična točka) je $x_3 = 4/3$.

Dakle, imamo tri točke u kojima funkcija može imati lokalne ekstreme. Dovoljne uvjete ekstrema provjerit ćemo pomoću predznaka prve derivacije, odnosno provjerit ćemo da li u kritičnim točkama prva derivacija mijenja predznak.

Imamo tri slučaja:

(i) Za x < 0 je brojnik veći od nule, a nazivnik manji of nule pa je f ' (x) < 0.

(ii) Za 0 < x < 4/3 su i brojnik i nazivnik veći od nule, pa je f '(x) > 0.

(iii) Za x > 4/3 je brojnik manji od nule, a nazivnik veći od nule pa je f(x) < 0.

Imamo tablicu:

	$-\infty$		0		4/3		2		$+\infty$
predznak *f'*		-		+		-		-	
funkcija *f*		↘		↗		↘		↘	

Zaključiti da funkcija ima lokalni minimum u $x_1 = 0$, lokalni maksimum u $x_3 = 4/3$, a da nema lokalni ekstrem u kritičnoj točki $x_2 = 2$. Vrijednost lokalnog minimuma je f(0) = 0, a lokalnog maksimuma $f(4/3) = 2\sqrt[3]{4}/3$.

7. Intervali monotonosti

Monotonost smo vec ispitali u prethodnoj točki: funkcija strogo pada na intervalima (-∞,0) i (4/3,+ ∞), a strogo raste na intervalu (0,4/3).

8. Intervali zakrivljenosti

Izračunajmo drugu derivaciju:

$$f''(x) = \frac{1}{3}\,\frac{-3\sqrt[3]{x(2-x)^2} - \dfrac{4-3x}{\left(3x(2-x)^2\right)^{2/3}}\left[(2-x)^2 + x\cdot 2(2-x)(-1)\right]}{\sqrt[3]{x^2(2-x)^4}}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{-3x(2-x)^2 - \frac{1}{3}(4-3x)(2-x)(2-3x)}{\sqrt[3]{x^4(2-x)^8}} = \frac{-8}{9\sqrt[3]{x^4(2-x)^5}}.$$

Vidimo da je predznak od f '' obrnut od predznaka izraza 2-x. Dakle,

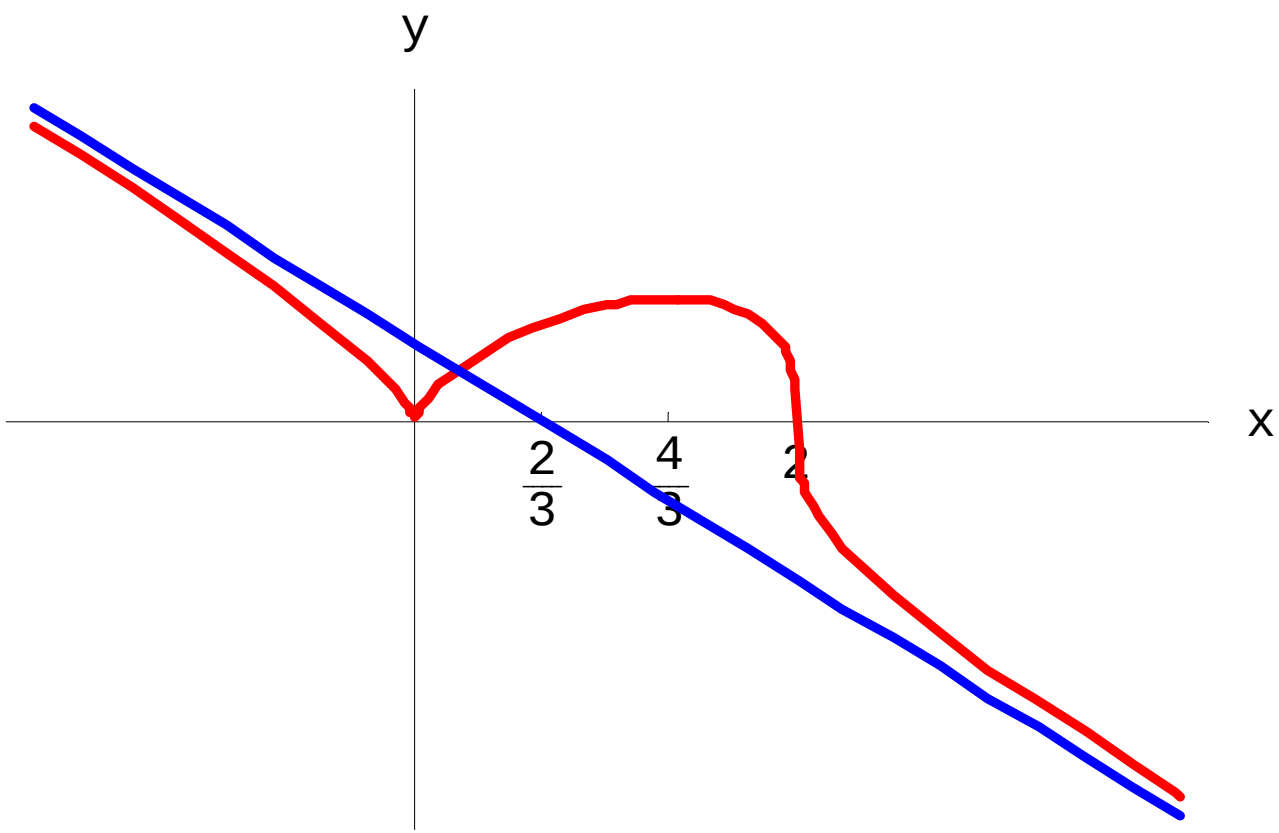
	$-\infty$	2	$+\infty$
predznak *f''*	-		+
funkcija *f*	**konkavna**		**konveksna**

9. Točke infleksije

Iz razmatranja zakrivljenosti u prethodnoj točki, zaključujemo da je x = 2 jedina točka infleksije funkcije f.

10. Graf funkcije

Kombinirajuci sve prethodne rezultate dobijemo graf zadane funkcije i njene kose asimptote, koji je prikazan na sljedećoj slici.


y
x
2/3
4/3
2

Primjene

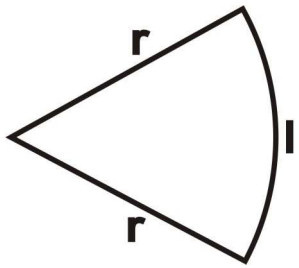
Diferencijalni račun izložen u prethodnim poglavljima ima primjene u rješavanju mnogih praktičnih problema.

Primjer 22. **Mjerenjem neke veličine dobili smo niz podataka: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Za odabir najbolje procjene mjerenih veličina biramo *metodu najmanjih kvadrata*, tj. tražimo onaj x za koji se postiže minimum izraza**

$$(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_n)^2.$$

Promatramo funkciju: $f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_n)^2$. Imamo da je $f'(x) = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + \cdots + 2(x - x_n) = 2[n \cdot x - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)]$, pa je stacionarna točka $x = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$. Druga derivacija je: $f''(x) = 2 \cdot n > 0$ za svako x $\in \mathbb{R}$. Zato funkcija ima minimum u stacionarnoj točki. Dakle, najbolja procjena mjerenih veličina prema kriteriju najmanjih kvadrata je *aritmetička sredina* rezultata mjerenja.

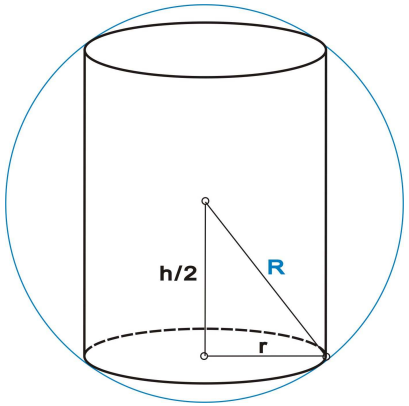
Primjer 23. Od žice duljine *d* napravi kružni isječak najveće površine.



Rješenje: Neka je *r* polumjer kružnog isječka, a *l* luk. Treba biti $d = 2r + l$. Površina isječka je $P = \frac{1}{2} r \cdot l$. Budući je $l = d - 2r$, to imamo $P(r) = \frac{1}{2} r \cdot (d - 2r)$, $d =$ const. Tražimo maksimum funkcije $P(r)$ na intervalu [0,d]. Derivacija ove funkcije je $P'(r) = \frac{1}{2} d - 2r$, pa dobivamo stacionarnu točku iz $\frac{1}{2} d - 2r = 0 \Rightarrow$ $r = \frac{d}{4}$. Budući je $P''(r) = -2 < 0$ za svako *r*, to je funkcija konkavna i ima maksimum u stacionarnoj točki. Dakle, maksimalna površina iznosi

$$P\left(\frac{d}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{4} \cdot \left(d - \frac{d}{2}\right) = \frac{d^2}{16}.$$

Primjer 24. U kuglu polumjera R upiši valjak najvećeg volumena.



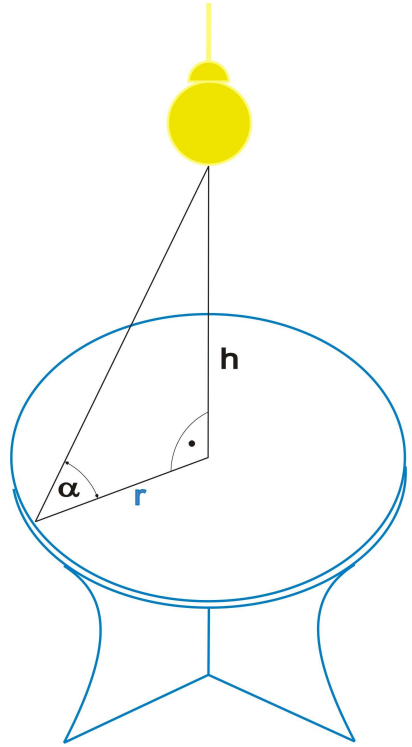
Rješenje: Neka je r polumjer baze valjka, a h njegova visina. Treba biti $R^2 = \frac{h^2}{4} + r^2$. Volumen valjka je $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Budući je $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$, to imamo $V(h) = \pi \cdot \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) \cdot h$, $R =$ const. Tražimo maksimum funkcije $V(h)$ na intervalu [0,R]. U rubnim točkama intervala volumen je jednak nuli. Derivacija je $V'(h) = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot \frac{3}{4} h^2$, pa dobivamo stacionarnu točku iz $R^2 - \frac{3}{4} h^2 = 0 \Rightarrow$ $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Budući je $V''(h) = -\pi \cdot \frac{3}{2} h < 0$ za svaki $h > 0$, to funkcija ima maksimum

u stacionarnoj točki. Dakle, traženi valjak ima visinu $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Isti rezultat bismo dobili da smo volumen izrazili kao funkciju polumjera r valjka. Zaista, imamo $h^2 = 4(R^2 - r^2)$, pa je $V(r) = 2\pi \cdot r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}$, $R = \text{const}$. Tražimo maksimum funkcije $V(r)$ na intervalu [0,R]. U rubnim točkama intervala volumen je jednak nuli. Derivacija je $V'(r) = 2\pi \cdot \left(2r\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right)$, pa dobivamo stacionarnu točku $r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R$. Budući $V'(r)$ ima pozitivnu vrijednost lijevo od stacionarne točke, a negativnu desno od nje, to funkcija ima maksimum u stacionarnoj točki. Dakle, traženi valjak ima polumjer $r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R$.

Očito je tada visina $h = 2\sqrt{R^2 - r^2} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Primjer 25. Jačina svjetla u nekoj točki obrnuto je proporcionalna kvadratu udaljenosti od izvora, a proporcionalna sinusu kuta pod kojim svjetlo pada na površinu. Ako se na visini *h* iznad središta okruglog stola polumjera *r* nalazi izvor svjetla, onda je jačina svjetlosti na rubu toga stola jednaka:



$$I = k \cdot \frac{\sin\alpha}{r^2 + h^2},$$

gdje je *k* konstanta koja ovisi o jakosti izvora. Kolika mora biti visina h da bi rub stola bio najjače osvijetljen (a time i čitav stol bio najbolje osvijetljen)?

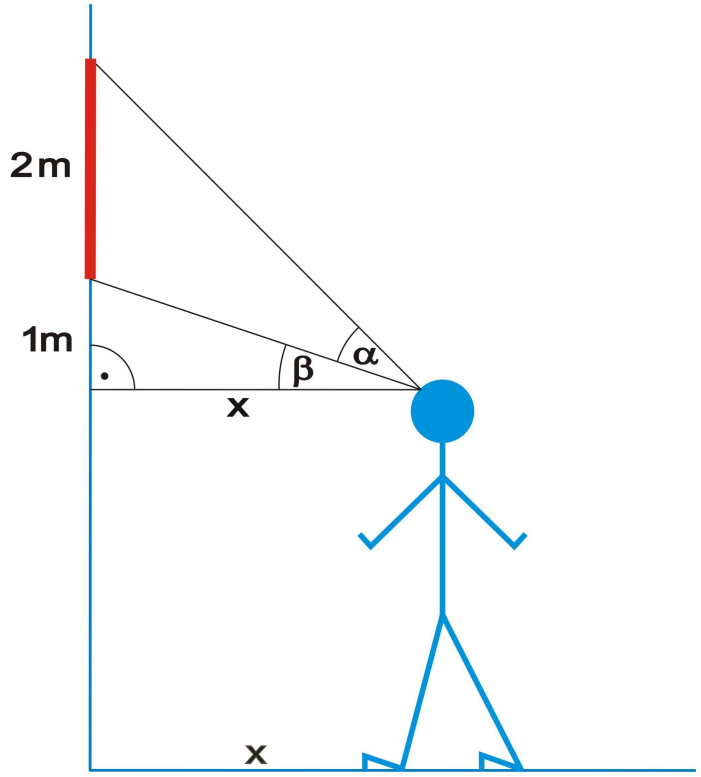
Rješenje: Treba biti $h = r \cdot \mathrm{tg}\alpha$. Tada je $I(\alpha) = k \cdot \dfrac{\sin\alpha}{r^2 + r^2\mathrm{tg}\alpha} = \dfrac{k}{r^2}\sin\alpha\cos^2\alpha$.

Uvedimo supstituciju $x = \sin\alpha$. Tada tražimo maksimum funkcije $I(x) = \dfrac{k}{r^2}x(1 - x^2)$. Vrijedi $I'(x) = \dfrac{k}{r^2}(1 - 3x^2) = 0 \Rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. U obzir dolazi samo

$x = \frac{\sqrt{3}}{3} = \sin\alpha$ i u toj točki se postiže maksimum (što se lako provjerava recimo pomoću druge derivacije). Tako dobivamo traženu visinu

$$h = r \cdot \mathrm{tg}\alpha = r \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Primjer 26. Dno slike koja je visoka 2 m nalazi se 1 m iznad promatračevih očiju. Koliko se promatrač mora odmaknuti od zida da bi imao najbolji pogled na sliku?



Rješenje: **Udaljenost x tražimo pod uvjetom da je maksimalan kut α pod kojim se vidi slika. U skladu s oznakama na slici vrijedi:** $\frac{3}{x} = \mathrm{tg}(\alpha + \beta)$**. Kako vrijedi** $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}$, $\mathrm{tg}\beta = \frac{1}{x}$, **slijedi:** $\frac{3}{x} = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x} \cdot \mathrm{tg}\alpha}$**. Odavde dobivamo** $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x^2}} = \frac{2x}{x^2 + 3}$**. Kako za svaki x vrijedi** $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$**, a funkcija** $f(\alpha) = \mathrm{tg}\alpha$ **je rastuća na intervalu** $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$**, to će za traženi maksimalan kut α, biti maksimalna i vrijednost** $\mathrm{tg}\alpha$**. Slijedi kako tražimo maksimum funkcije** $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$**. Tražimo stacionarnu točku:** $g'(x) = 2\frac{\left(x^2 + 3\right) - x \cdot 2x}{\left(x^2 + 3\right)^2} = 0 \quad \Rightarrow$ $x = \sqrt{3}$**. Iz predznaka prve derivacije slijedi da se radi o maksimumu.**