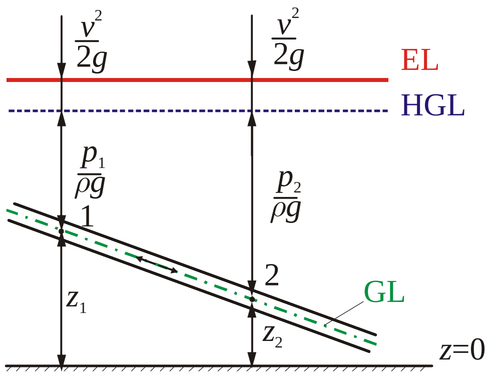
Ilustracija sadržaja Bernoullijeve jednadžbe

$$\underbrace{\underbrace{\frac{v^2}{2g}}_{\text{visina kinetičke energije}} + \underbrace{\underbrace{\frac{p}{\rho g}}_{\text{visina tlaka}} + \underbrace{z}_{\text{geometrijska visina = geodetska linija}}}_{\text{piezometrička visina = hidraulička gradijentna linija}}}_{\text{visina ukupne energije = energetska linija}} = \text{konst.}$$

Visina ukupne energije ostaje konstantna uzduž strujnice.
Za strujanje u cijevima sadržaj Bernoulijeve jednadžbe se prikazuje za strujnicu koja prolazi simetralom cijevi, tako da simetrala označuje geodetsku liniju (GL). Hidrauličku gradijentnu liniju (HGL) se dobije oduzimanjem visine brzine od energetske linije (EL).

a) cijev konstatnog promjera ⇒ v=konst



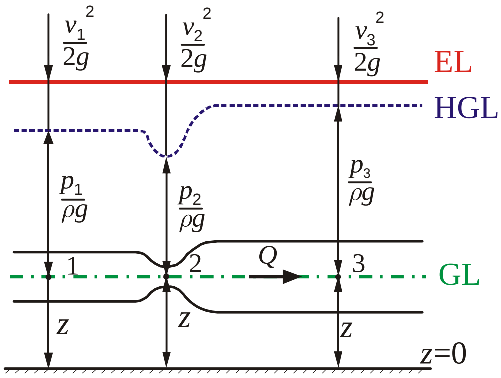
v=konst

$$\frac{p}{\rho g} + z = \text{konst}$$

- Promjer cijevi je konstantan, pa je prema jednadžbi kontinuiteta konstantna i brzina.
- Dolazi do preraspodjele visine tlaka i geodetske visine, a promjena tlaka je ista kao u fluidu u mirovanju.
- Smjer strujanja neodređen (slika je ista za oba smjera strujanja).
- Položaj z=0 se odabire proizvoljno.

Energetska linija se može definirati ili s apsolutnim tlakom ili s manometarskim tlakom (ako je definirana s apsolutnim tlakom, tada visina tlaka ne može biti negativna, tj. HGL ne može biti ispod GL, kao ni EL).

b) horizontalna cijev promjenjivog poprečnog presjeka



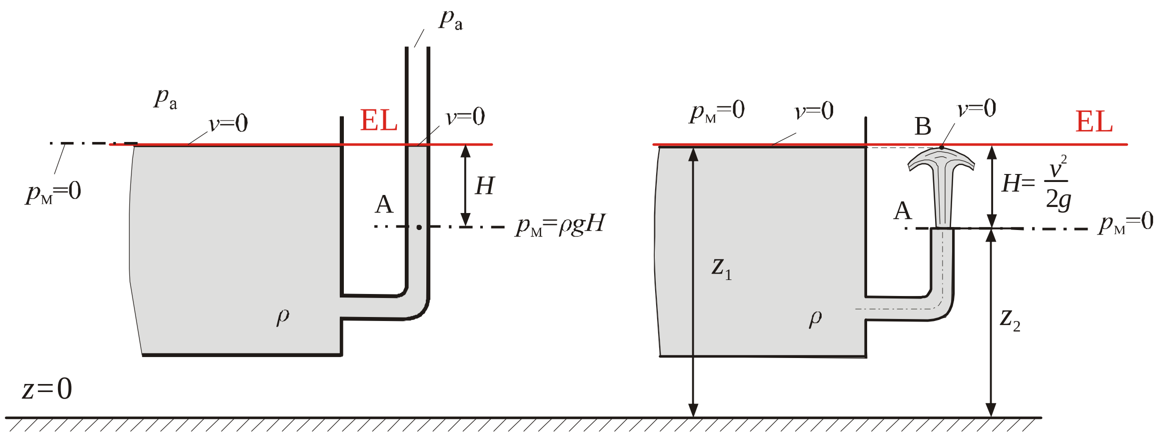
$$Q = Av = \text{konst}$$

z=konst

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{konst}$$

- Visina z je konstantna, pa dolazi do preraspodjele između visine kinetičke energije i visine tlaka.
- Iz jednadžbe kontinuiteta $Q=vA$=konst., slijedi da će u presjeku manje površine A biti veća brzina, a iz Bernoullijeve jednadžbe je jasno da će pri većoj brzini biti niži tlak.
- Minimalna vrijednost tlaka je dakle u najužem presjeku, a ne može biti manja od tlaka isparavanja (tlaka kod kojeg fluid pri zadanoj temperaturi počinje isparavati).

Minimalnim tlakom je definirana i maksimalna brzina strujanja, odnosno maksimalni protok Q.

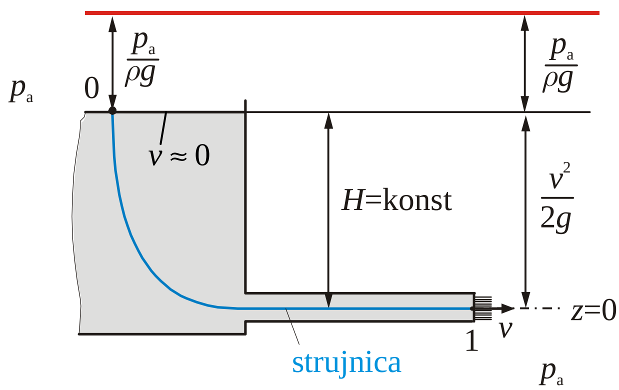


- Geodetska visina izlaznog kraja cijevi je previsoka, pa nema strujanja fluida. Bernoulijeva jednadžba se svodi na osnovnu jednadžbu hidrostatike (princip spojenih posuda).

- Skraćivanjem priključne cijevi, dolazi do strujanja fluida, a visina mlaza jednaka je visini fluida u velikom spremniku. (za slučaj viskoznog strujanja, ta bi visina bila nešto manja zbog pretvorbe mehaničke energije u unutarnju).

Istjecanje iz velikog spremnika

Slika prikazuje zamišljenu strujnicu unutar spremnika. Ako se pretpostavi veliki spremnik, brzina fluida na slobodnoj površini unutar spremnika će biti vrlo mala. Brzina se povećava približavanjem ulazu u cijev. Za potrebe crtanja hidrauličke gradijentne linije će se pretpostaviti da je u svakoj točki spremnika brzina jednaka nuli, pa će visina ukupne energije u spremniku biti jednaka piezometričkoj visini (koja je za slučaj mirovanja jednaka u svim točkama spremnika).



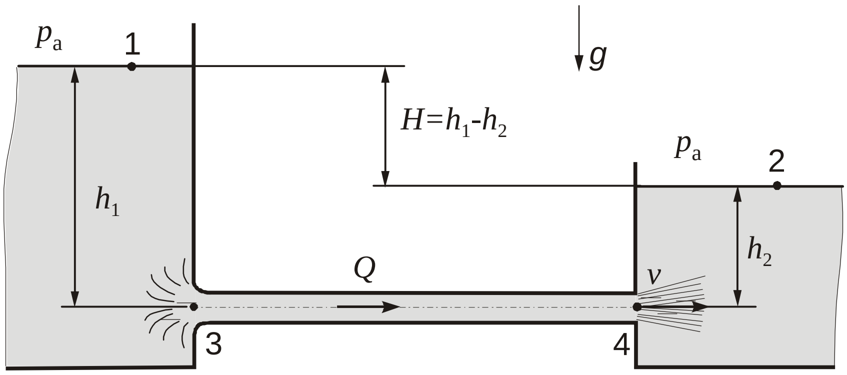
Prema tome Bernoullijevu jednadžbu može se postavljati od bilo koje točke u spremniku, a obično se bira točka na slobodnoj površini. Bernoullijeva jednadžba postavljena od točke 0 na slobodnoj površini do točke 1 na izlazu iz cijevi glasi

$$\frac{p_a}{\rho g} + H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho g} \quad \text{ili} \quad \boxed{v = \sqrt{2gH}}$$

iz koje je jasno da se potencijalna energija fluida u spremniku pretvorila u kinetičku energiju mlaza na izlazu iz cjevovoda, što prikazuje i slika. (Iz mehanike je poznato da bi kuglica u slobodnom padu puštena iz stanja mirovanja na putu H postigla brzinu $v=\sqrt{2gH}$).

Gubitak utjecanja u veliki spremnik

U prethodnom primjeru je mlaz fluida istjecao u atmosferu, pa je u njemu vladao atmosferski tlak, a ovdje mlaz istječe u mirujući fluid u velikom spremniku, a eksperimenti pokazuju da će u mlazu vladati tlak definiran jednadžbom hidrostatike $p_4=p_a+\rho g h_2$

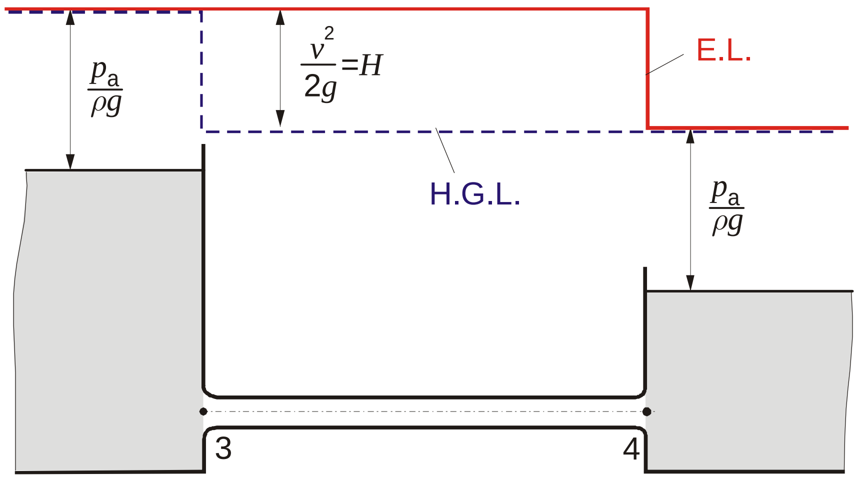


Bernoullijeva jednadžba postavljena uzduž strujnice između točaka 1 i 4 (gdje je z_4=0) glasi

$$\frac{p_a}{\rho g}+h_1=\frac{v^2}{2g}+\underbrace{\frac{p_a}{\rho g}+h_2}_{p_4/\rho g} \quad \text{ili uz } h_1-h_2=H \quad \Rightarrow \quad \boxed{H=\frac{v^2}{2g}}$$

Jasno je da će brzina biti funkcija razlike visina u spremnicima. Ako se za desni spremnik usvoji model mirujućeg fluida onda će energija desnog spremnika biti jednaka piezometričkoj visini i bit će manja od energije lijevog spremnika. Dakle, u cijevi će prema Bernoullijevoj jednadžbi visina ukupne energije biti jednaka energiji lijevog spremnika, a ulaskom u desni spremnik energetska linija skokovito opada za visinu H, odnosno za visinu kinetičke enenrgije, te se govori o gubitku utjecanja (ili istjecanja) u veliki spremnik.
Bernoullijeva jednadžba se formalno postavlja od slobodne površine lijevog spremnika do slobodne površine desnog spremnika, s tim da se pri ulasku u spremnik obračuna gubitak visine ukupne energije koji je jednak visini brzine. Tako bi Bernoullijeva jednadžba između točaka 1 i 2, prema prethodno slici, (uz z_2=0), glasila:

$$\underbrace{\frac{p_a}{\rho g}+H}_{\text{energija u točki 1}}=\underbrace{\frac{p_a}{\rho g}}_{\substack{\text{energija}\\ \text{u točki 2}}}+\underbrace{\frac{v^2}{2g}}_{\text{gubitak}}$$

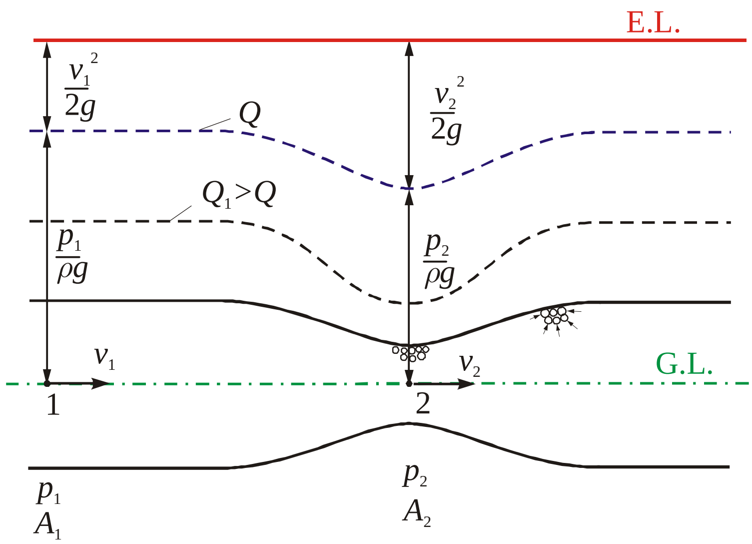


Slika prikazuje energetsku liniju (EL) za strujanje između dva velika spremnika. Oduzimanjem visine kinetičke energije od EL dobije se HGL. Prema prije rečenom pretpostavlja se da su brzine u spremnicima jednake nuli, te se HGL skokovito mijenja pri ulazu u cijev, u kojoj je brzina za slučaj konstantnog promjera cijevi konstantna.

Pojave i principi rada nekih uređaja koji se mogu objasniti Bernoullijevom jednadžbom

Kavitacija

Povećanjem protoka uz istu ukupnu energiju strujanja dolazi do smanjenja tlaka u najužem presjeku (na slici je prikazan pomak HGL kada se protok poveća od Q na Q_1)



J.K.

$$Q = v_1 A_1 = v_2 A_2 = \text{konst.}$$

B.J. 1-2

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$Q_{kav} = Q_{max} = \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_1 - p_v\right)}$$

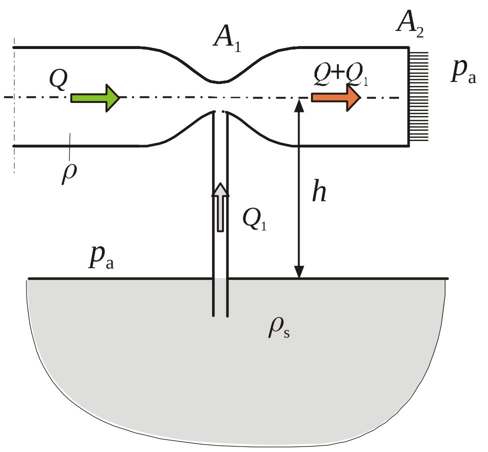
$v_2 > v_1$, $p_2 < p_1$

Kada se tlak u najužem presjeku snizi na vrijednost tlaka isparavanja pojavljuju se mjehurići pare (kavitacija), čime se smanjuje poprečni presjek te dolazi do zagušivanja strujanja. Protok pri kojem se pojavljuje kavitacija je maksimalno mogući protok za zadanu visinu energije. Mjehurići pare bivaju nošeni u područje višeg tlaka, gdje implodiraju (ponovo se pretvaraju u kapljevitu fazu). Pojava kavitacije je popraćena vibracijama i bukom, a pri imploziji mjehurića pare u blizini stijenke dolazi i do njena oštećenja.

Ejektor

Strujanje primarnog fluida protokom Q u suženom presjeku izaziva smanjenje tlaka, koje ima za posljedicu usisavanje sekundarnog fluida, protokom Q_1, tako da je na izlazu iz ejektora protok $Q+Q_1$.
Ovaj se princip koristi npr. u uređajima za bojanje, u kojima se u struju zraka uvlači boja.

Da bi ejektor počeo usisavati fluid kroz vertikalnu cjevčicu, tlak p_1 u presjeku A_1 mora biti manji od hidrostatskog tlaka koji vlada pri mirovanju fluida u vertikalnoj cjevčici $p_1 < p_a - \rho g h$, a to će se ostvariti pri protoku Q_{min} koji zadovoljava Bernoulijevu jednadžbu od presjeka A_1 do presjeka A_2



B.J. 1- 2

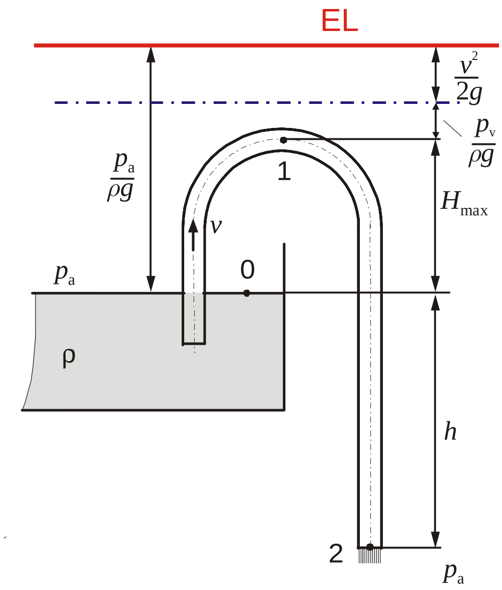
$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_a}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

J.K. $v_1 A_1 = v_2 A_2 = Q_{min}$

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{Q_{min}^2}{2gA_1^2} = \frac{p_a}{\rho g} + \frac{Q_{min}^2}{2gA_2^2}$$

$$Q_{min} = \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_2^2 - A_1^2}} \sqrt{2gh}$$

Sifon



Strujanje kroz sifon će se ostvariti ako je cijev u početnom trenutku bila ispunjena fluidom ili je potrebno stvoriti podtlak na izlaznom kraju cijevi (točka 2) tako da se fluid podigne preko točke 1. Iz Bernoullijeve jednadžbe od 0 do 2 je

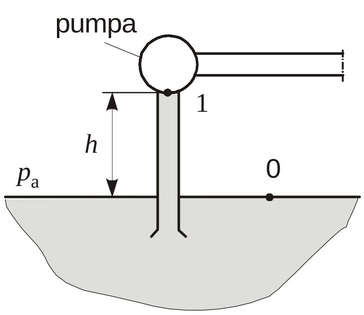
$$h = \frac{v^2}{2g} \text{ ili } v = \sqrt{2gh}$$

Iz Bernoullijeve jednadžbe od 0 do 1

$$\frac{p_a}{\rho g} = \frac{p_v}{\rho g} + H_{max} + \underbrace{\frac{v^2}{2g}}_{h}$$

Spuštanjem izlaznog kraja cijevi dolazi do povećanja brzine i smanjivanja tlaka u točki 1. Ako tlak padne na tlak isparavanja dolazi do kavitacije i prekida strujanja. Slično se dobije podizanjem točke 1 na veću visinu od H_{max} .

Maksimalna visina usisavanja pumpe

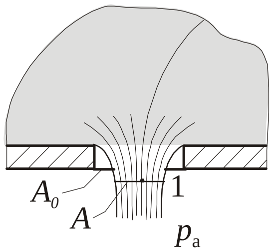


Da bi se uključivanjem pumpe uspostavilo strujanje, usisna cijev mora biti ispunjena fluidom.
Radi izbjegavanja pojave kavitacije tlak u točki 1 mora biti viši od tlaka isparavanja.
Iz Bernoullijeve jednadžbe od 0 do 1 je

$$\frac{p_a}{\rho g} = h + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g}$$

Uz pretpostavku da su visine $\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g}$ zanemarive, teorijski maksimalna visina usisavanja je jednaka visini atmosferskog tlaka (≈10 m), a stvarno je to i manje.

Korekcije brzine i protoka pri istjecanju kroz otvore

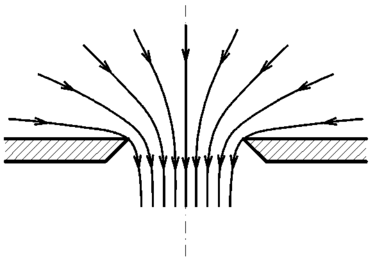


Strujnica ne može biti slomljena crta, jer bi u točki loma radijus zakrivljenosti strujnice bio jednak nuli, te bi derivacija tlaka okomito na strujnicu bila beskonačna, što ne bi bilo fizikalno. Zbog toga pri istjecanju fluida kroz otvor površine A_0 s oštrim rubom dolazi do suženja mlaza. Slika prikazuje presjek 1 u kojemu su strujnice paralelne, a tlak konstantan. U tom presjeku se mjeri površina A poprečnog presjeka mlaza.
Faktor kontrakcije mlaza je $C_c = A / A_0$.

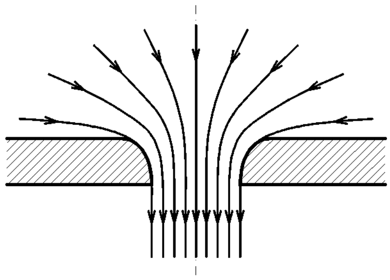
Realni fluidi su viskozni te će se dio mehaničke energije na putu od točke 0 do točke 1 uslijed djelovanja viskoznih sila pretvoriti u unutarnju energiju, što znači da će mehanička energija (odnosno brzina) za slučaj realnog fluida biti manja. To se uzima u obzir iskustvenim faktorom korekcije brzine C_v (koji se određuje eksperimentalno) prema formuli $v = C_v v_{id} = C_v \sqrt{2gH}$. Jasno je da je faktor brzine uvijek manji od jedan.

Protok Q fluida kroz otvor će biti jednak umnošku stvarne brzine i stvarne površine mlaza: $Q = vA = \underbrace{C_v C_c}_{C_d} \underbrace{v_{id} A_0}_{Q_{id}} = C_d Q_{id}$, gdje je $C_d = C_v C_c$ faktor korekcije protoka (često se označuje i s C_Q)

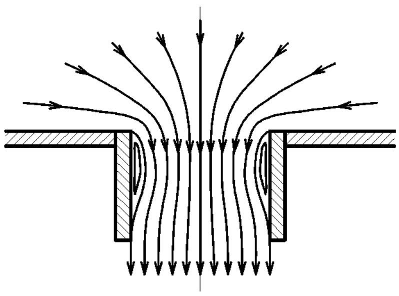
Primjeri faktora brzine i faktora kontrakcije za neke tipične slučajeve:



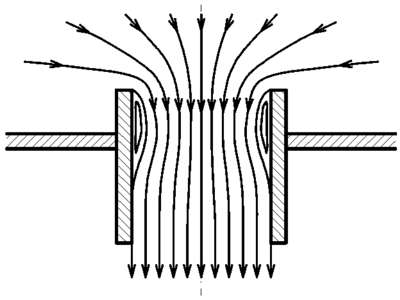
Tanka stijenka-oštri rub: C_c=0.62 C_v=0.98



Lijepo zaobljeni rub: C_c=1 C_v=0.98

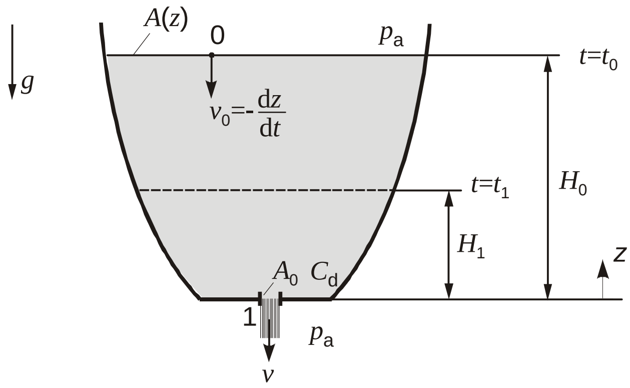


Ispust: C_c=1 C_v=0.82



Ispust: C_c=1 C_v=0.74

Vrijeme pražnjenja spremnika



Pretpostavke:

1. Posuda je otvorena prema atmosferi.
2. Visina z se mjeri od presjeka mlaza u kojem su strujnice paralelne (vena contracta).
3. Površina poprečnog presjeka posude $A(z)$, je puno veća od površine A_0 otvora na dnu (kvazistacionarno strujanje)

$$\underbrace{-\frac{1}{g}\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t}\mathrm{d}s}_{\approx 0}+\underbrace{\frac{v_0^2}{2g}}_{\approx 0}+z=\frac{v_{\mathrm{id}}^2}{2g}\,, \qquad v_{\mathrm{id}}=\sqrt{2gz}\,, \quad v=C_{\mathrm{v}}\sqrt{2gz}$$

$Q=C_{\mathrm{d}}A_0\sqrt{2gz}$, protok kroz otvor na dnu

Za diferencijal vremena dt iz posude će isteći obujam fluida $\mathrm{d}V=Q\cdot\mathrm{d}t$, te će se zbog toga slobodna površina spustiti za diferencijal visine dz, tako da smanjenje volumena fluida u posudi iznosi $\mathrm{d}V=-A(z)\cdot\mathrm{d}z$.

Jednadžba kontinuiteta $\mathrm{d}V=Q\cdot\mathrm{d}t=-A(z)\cdot\mathrm{d}z$

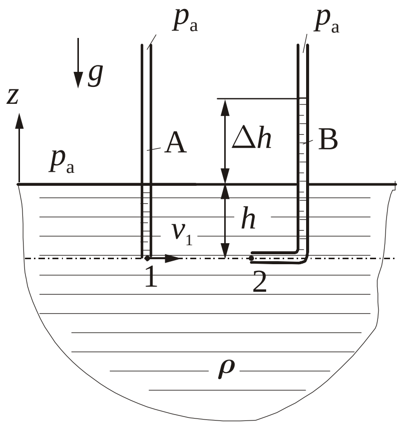
$$C_{\mathrm{d}}A_0\sqrt{2gz}\cdot\mathrm{d}t=-A(z)\cdot\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}t=-\frac{1}{C_{\mathrm{d}}A_0\sqrt{2g}}\frac{A(z)}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z$$

Vrijeme Δt potrebno da se razina fluida spusti s visine $z=H_0$ na $z=H_1$

$$t_1-t_0=\Delta t=-\frac{1}{C_{\mathrm{d}}A_0\sqrt{2g}}\int_{H_0}^{H_1}\frac{A(z)}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z$$

Mjerenje brzine



Slučaj otvorenog strujanja s ravnim strujnicama

Cjevčica A (piezometrička cijev) mjeri visinu tlaka u točki 1. Promjena tlaka okomito na ravne strujnice ista je kao u fluidu u mirovanju, pa će razina fluida u cjevčici biti u slobodnoj površini.
Cjevčica B (Pitotova cijev) mjeri visinu tlaka u točki 2, u kojoj je brzina jednaka nuli (točka zastoja).

B.J. 1-2 $\dfrac{p_1}{\rho g}+\dfrac{v_1^2}{2g}=\dfrac{p_2}{\rho g}$,

$$p_1 = p_a + \rho g h; \quad p_2 = p_a + \rho g h + \rho g \Delta h$$

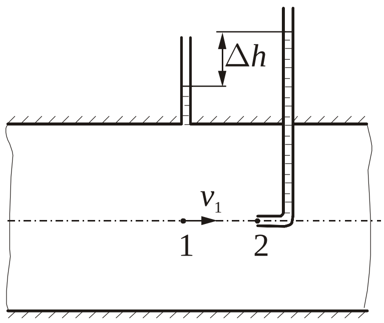
$$\Delta h = \frac{v_1^2}{2g}$$

Prema Bernoullijevoj jednadžbi visina zaustavnog tlaka $p_2 / \rho g$ je veća od visine tlaka $p_1 / \rho g$ u točki 1 za visinu brzine $\Delta h = v_1^2 / 2g$.

Članovi Bernoullijeve jednadžbe se mogu tumačiti i na sljedeći način

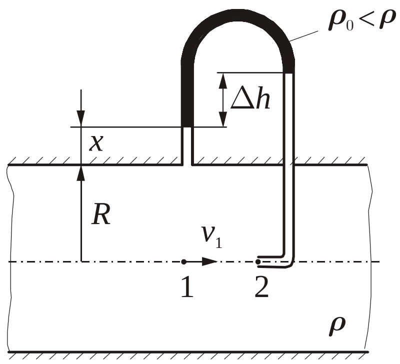
$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{p}_{\text{statički tlak}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{\text{dinamički tlak}}}_{\text{zaustavni tlak}} + \underbrace{\rho g z}_{\text{hidrostatski tlak}}}_{\text{totalni tlak}} = \text{konst.}$$

Bernoullijeva jednadžba kaže da totalni tlak ostaje konstantan uzduž strujnice.



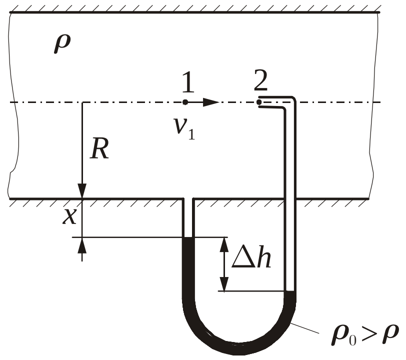
Mjerenje brzine strujanja fluida u cijevima

Lijeva cjevčica mjeri statički tlak u točki 1, a Pitotova cijev zaustavni tlak u točki 2. Razlika ta dva tlaka je visina brzine, pa vrijedi $v_1 = \sqrt{2g\Delta h}$. Očito je da se brzina računa iz mjerene razlike tlakova, koja se obično mjeri diferencijalnim manometrom.



Slučaj kada je diferencijalni manometar ispunjen fluidom manje gustoće od fluida koji struji u cijevi

$$v_1 = \sqrt{2g\Delta h\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)}$$

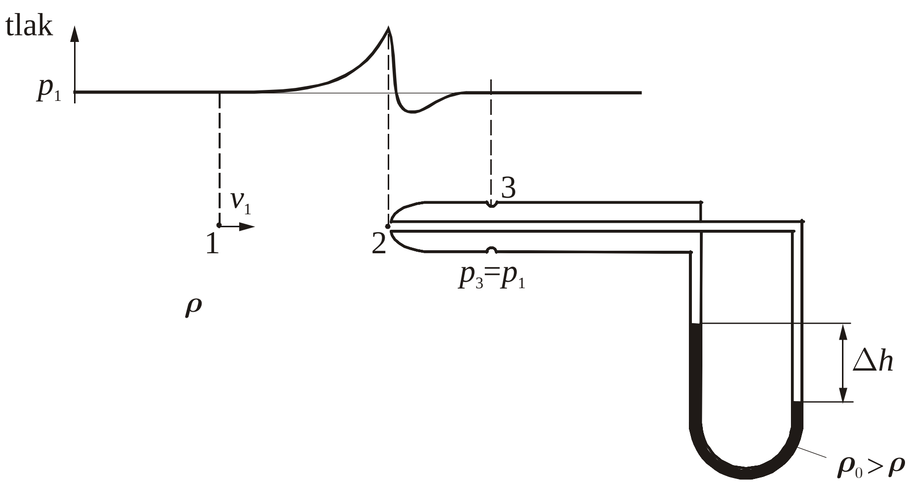


Slučaj kada je diferencijalni manometar ispunjen fluidom veće gustoće od fluida koji struji u cijevi

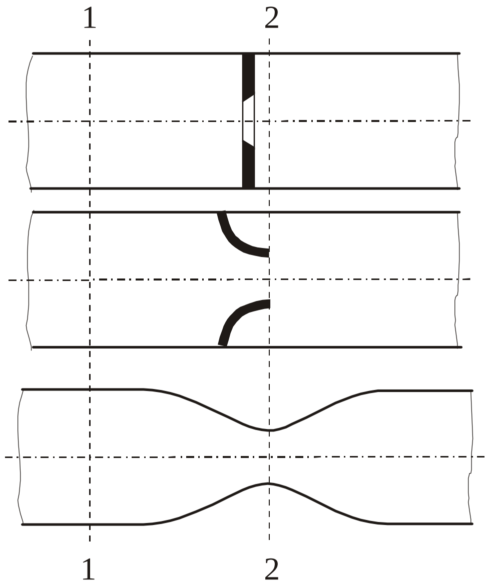
$$v_1 = \sqrt{2g\Delta h\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)}$$

<u>Prandtl-Pitotova cijev</u>

Sastoji se od dvije koaksijalne cijevi, pri čemu je unutarnja cjevčica svojim otvorom suprostavljena strujanju i mjeri zaustavni tlak (točka 2 na slici). Vanjska cijev ima po obodu rupice s otvorima preko kojih čestice fluida prolaze tangencijalno kojima se mjeri statički tlak (točka 3 na slici). Donja slika kvalitativno prikazuje promjenu tlaka duž strujnice 1-2-3. U točki zastoja je brzina jednaka nuli, a tlak je maksimalan. Od točke zastoja fluid se ponovo ubrzava, a tlak opada. U području između točaka 2 i 3 brzina na nekim mjestima premašuje brzinu v_1, te tlak opada ispod tlaka p_1, ali se na određenoj udaljenosti od točke 2 tlak ponovo vraća na vrijednost tlaka p_1. Ako se zanemari učinak viskoznih sila u neograničenom strujanju fluida tlak p_3 će biti jednak tlaku p_1, pa će se iz mjerene visine Δh moći izračunati brzina v_1, pri čemu vrijedi izraz $v_1 = \sqrt{2g\Delta h\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)}$.

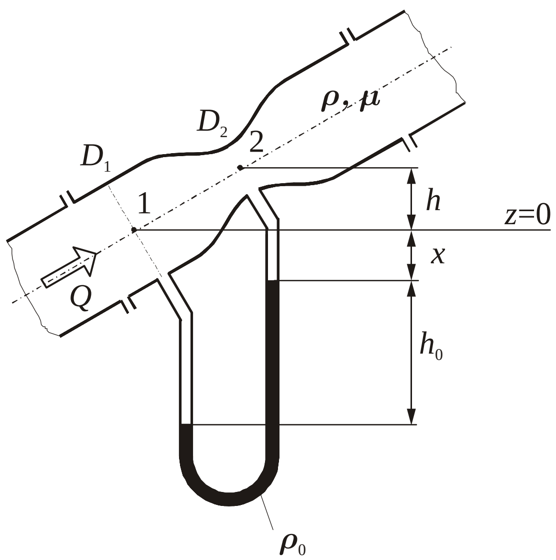


Mjerenje protoka u strujanju kroz cijevi



Slika shematski prikazuje tri različita mjerna uređaja za mjerenje protoka u strujanju kroz cijevi, redom mjerna blenda, mjerna sapnica i Venturijeva cijev. U svim uređajima je princip mjerenja isti: u suženom presjeku tlak je zbog povećanja brzine niži. Razlika tlaka u presjecima 1 i 2 raste s porastom protoka, te se iz mjerene razlike tlaka može zaključiti o protoku kroz cijev. Primjenom Bernoullijeve jednadžbe se dolazi do protoka idealnog fluida, a uvođenjem faktora korekcije brzine i kontrakcije mlaza se dolazi do protoka realnog fluida.

Venturijeva cijev



Slika shematski prikazuje Venturijevu cijev postavljenu u kosom cjevovodu, u kojoj se diferencijalnim manometrom mjeri razlika tlaka u dva presjeka.

J.K. $Q = v_1 \cdot \frac{D_1^2 \pi}{4} = v_2 \cdot \frac{D_2^2 \pi}{4}$

B.J. 1-2

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{8Q_{\mathrm{id}}^2}{\mathrm{g} D_1^4 \pi^2} = h + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{8Q_{\mathrm{id}}^2}{\mathrm{g} D_2^4 \pi^2}$$

J.M.

$$p_1 + \rho g \left(x + h_0 \right) - \rho_0 g h_0 - \rho g \left(x + h \right) = p_2$$

Protok idealnog fluida

$$Q_{\mathrm{id}} = \frac{D_2^2 \pi}{4} \sqrt{\frac{2gh_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right)}{1 - \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^4}}$$

Protok realnog fluida viskoznosti μ je

$$Q = C_{\mathrm{c}} C_v Q_{\mathrm{id}} \,.$$

Venturijeva cijev se izvodi tako da je faktor kontrakcije mlaza $C_c = 1$, a faktor korekcije brzine C_v je funkcija Reynoldsova broja $Re = \frac{\rho v_1 D_1}{\mu}$. Primjer zavisnosti faktora C_v o Reynoldsovu broju *Re* je dan na sljedećoj slici.