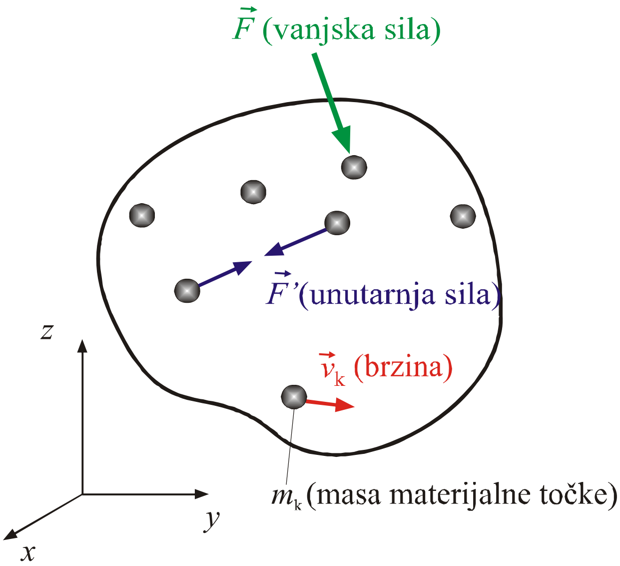
5.2 Osnovni zakoni dinamike fluida

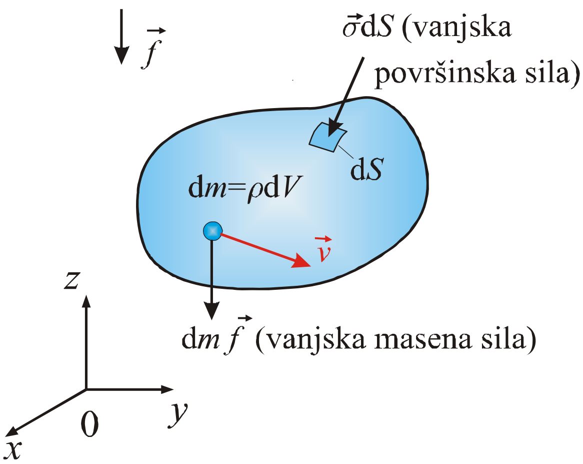
<u>Mehanika</u>

Sustav materijalnih točaka



<u>Mehanika fluida</u>

Materijalni volumen



- Sile dodira između čestica unutar $V_{\mathrm{M}}(t)$ su unutarnje sile.

- Zakon očuvanja mase

$$\sum_{k=1}^{N} m_k = 0 \qquad\qquad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V_M(t)} \rho\,\mathrm{d}V = 0$$

- Zakon očuvanja količine gibanja

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=1}^{N} m_{\mathrm{k}}\vec{v}_{\mathrm{k}} = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{\mathrm{k}} \qquad\qquad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V_{\mathrm{M}}(t)} \rho\vec{v}\,\mathrm{d}V = \int_{V_{\mathrm{M}}(t)} \rho\vec{f}\,\mathrm{d}V + \int_{S_{\mathrm{M}}(t)} \vec{\sigma}\,\mathrm{d}S$$

- Zakon očuvanja momenta količine gibanja

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\mathrm{k}=1}^{N}\left(\vec{r}\times m_{\mathrm{k}}\vec{v}_{\mathrm{k}}\right) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{N}\left(\vec{r}_{\mathrm{k}}\times\vec{F}_{\mathrm{k}}\right) \qquad\qquad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V_M(t)} \vec{r}\times\rho\vec{v}\,\mathrm{d}V = \int_{V_M(t)} \vec{r}\times\rho\vec{v}\,\mathrm{d}V + \int_{S_M(t)} \vec{r}\times\vec{\sigma}\,\mathrm{d}S$$

- Zakon mehaničke energije

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=1}^{N} m_\mathrm{k}\frac{v_\mathrm{k}^2}{2} = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_\mathrm{k}\cdot\vec{v}_\mathrm{k} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N}\vec{F}'_\mathrm{k}\cdot\vec{v}_\mathrm{k}}_{P_\mathrm{F}}$$

snaga unutarnjih sila

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V_\mathrm{M}(t)}\rho\frac{v^2}{2}\mathrm{d}V = \int_{V_\mathrm{M}(t)}\rho\vec{f}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}V + \int_{S_\mathrm{M}(t)}\vec{\sigma}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}S - P_\mathrm{F}$$

Materijalni volumen u mehanici fluida odgovara sustavu materijalnih točaka u mehanici, s razlikom da su mase materijalnih točaka u materijalnom volumenu infinitezimalne $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$, dok materijalne točke u mehanici mogu imati konačnu masu m. Svi zakoni mehanike koji vrijede za sustav materijalnih točaka, vrijedit će i za materijalni volumen, pri čemu suma u zakonima za sustav materijalnih točaka prelazi u integral po materijalnom volumenu, kada se radi o mehanici fluida. Na materijalni volumen djeluju masene i površinske sile. Masene sile su posljedica položaja mase u polju masene sile i jasno je da su to za materijalni volumen vanjske sile. Površinske sile su sile dodira između čestica fluida. Ove sile će biti za materijalni volumen vanjske, ako se radi o silama dodira čestica fluida s materijalne površine (koje su u dodiru s česticama izvan materijalnog volumena), a one će biti unutarnje ako se radi o silama dodira među česticama iz materijalnog volumena. Dakle, vanjske površinske sile su raspodijeljene po materijalnoj površini, a unutarnje površinske sile djeluju među česticama fluida unutar materijalnog volumena. Snaga $-P_F$ unutarnjih sila se odnosi na snagu unutarnjih sila koje možemo podijeliti na sile tlaka i viskozne sile. S obzirom da viskozne sile označuju sile trenja među česticama fluida, jasno je da će viskozne sile uvijek pretvarati mehaničku energiju u (u mehanici krutih tijela su kinetička i potencijalna energija) u unutarnju energiju. Znamo da je ova pretvorba jednosmjerna (nikada se putem sila trenja neće iz unutarnje energije dobiti mehanička energija). S druge strane, znamo iz termodinamike da se izentropskom kompresijom idealnog plina mehanički rad pretvara u unutarnju energiju plina, a pri izentropskoj ekspanziji unutarnja energija plina vraća kroz dobiveni rad. Jasno je da su ekspanzija i kompresija povezani s promjenom volumena termodinamičkog sustava, odnosno sa stlačivošću fluida. Ako imamo posla s nestlačivim strujanjem, u kojem je gustoća (pa onda i volumen) čestica fluida konstantna, jasno je da sile tlaka neće sudjelovati u pretvorbi mehaničke energije u unutarnju (i obrnuto), pa ostaje samo mehanizam pretvorbe putem viskoznih sila, koji je jednosmjeran. Jednom pretvorena mehanička energija u unutarnju se ne može povratiti, pa govorimo o gubicima mehaničke energije (iako smo svjesni da enegija nije izgubljena nego se pretvorila u unutarnju energiju). S obzirom da se u nestlačivom strujanju (kao i u mehanici krutih tijela) iz unutarnje energije ne može dobiti mehanička energija, unutarnju energiju nećemo niti uzimati u obzir (pri čemu ćemo pretvorbu mehaničke energije u unutarnju smatrati "gubicima"). Dakle, nestlačivo strujanje fluida će biti opisano istim zakonima kao i gibanje krutih tijela.

Nasuprot tome, u stlačivom strujanju (tj. strujanju plinova) iz unutarnje energije će se moći dobivati mehanička energija (ekspanzija), pa će unutarnju energiju (dakle i izmjenu topline) trebati uzeti u obzir. U tom slučaju se zakon mehaničke energije (iz mehanike krutih tijela) zamjenjuje zakonom očuvanja energije iz termodinamike. U tom slučaju se za ocjenu fizikalnosti strujanja koristi i II zakon termodinamike, pa su osnovni zakoni dinamike fluida dani sljedećom tablicom:

<table>
<tr><td>Nestlačivo strujanje
ρ = konst.</td><td>Stlačivo strujanje
$\rho \neq$ konst.</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Zakon očuvanja mase</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Zakon očuvanja količine gibanja</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Zakon očuvanja momenta količine gibanja</td></tr>
<tr><td>4. Zakon mehaničke energije</td><td>4. Zakon očuvanja energije
(I.zakon termodinamike)</td></tr>
<tr><td></td><td>5. II zakon termodinamike</td></tr>
</table>

U ovom kolegiju ćemo se baviti nestlačivim strujanjem fluida, pa ćemo koristiti samo nabrojane zakone definirane u mehanici krutih tijela (sustava materijalnih točaka). To što smo se ograničili na nestlačivo strujanje ne znači da nećemo moći analizirati i strujanje plinova. Naime, ako plin struji malom brzinom, promjene tlaka i temperature u strujanju su male, pa će prema jednadžbi stanja plina i promjena gustoće biti mala, odnosno strujanje ćemo moći promatrati kao nestlačivo. U praksi se uzima da će strujanje plina biti približno nestlačivo za brzine strujanja koje su do 30 % od brzine širenja zvuka u plinu. Npr.,brzina zvuka u zraku pri normalnim uvjetima je oko 330 m/s, pa će strujanje zraka biti nestlačivo sve do brzine od približno 100 m/s (360 km/h). Prema tome, gibanje automobila, vlakova, pa čak i sportskih zrakoplova u zraku će se moći opisati jednadžbama nestlačivog strujanja. Naravno, strujanje plinova uz intenzivnu izmjenu topline, gdje se unutarnja energija pretvara u mehaničku će se opisivati modelom stlačivog strujanja.

5.3 Zakon kinetičke (mehaničke) energije za kontrolni volumen

$$\overbrace{\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_{\mathrm{KV}}}\rho\frac{v^2}{2}\mathrm{d}V}_{\substack{\text{brzina promjene kinetičke}\\\text{energije unutar KV}\\\text{(brzina akumulacije)}}}+\underbrace{\int_{S_{\mathrm{KV}(S_\mathrm{u}+S_\mathrm{i})}}\rho\frac{v^2}{2}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S}_{\substack{\text{brzina protjecanja kinetičke}\\\text{energije kroz kontrolnu površinu}}}}^{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V_\mathrm{M}(t)}\rho\frac{v^2}{2}\mathrm{d}V}=\underbrace{\int_{V_{\mathrm{KV}}}\rho\vec{f}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}V}_{\text{snaga masenih sila}}+\underbrace{\int_{S_{\mathrm{KV}}}\vec{\sigma}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}S}_{\substack{\text{snaga vanjskih}\\\text{površinskih sila}}}-\underbrace{P_\mathrm{F}}_{\substack{\text{snaga}\\\text{unutarnjih}\\\text{sila}}}$$

- Do protjecanja kinetičke energije dolazi samo kroz dijelove kontrolne površine kroz koje protječe fluid (ulazna i izlazna površina), pa se za područje integracije u drugom integralu gornje jednadžbe može uzeti $S_\mathrm{u}+S_\mathrm{i}$.
- Površinske sile se mogu prikazati zbrojem sila tlaka i viskoznih sila $\vec{\sigma}=-p\vec{n}+\vec{\sigma}_\mathrm{f}$, pa se snaga vanjskih površinskih sila može napisati u obliku

$$\int_{S_{\mathrm{KV}}}\vec{\sigma}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}S=-\int_{S_{\mathrm{KV}}(S_\mathrm{u}+S_\mathrm{i})}p\vec{n}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}S+\underbrace{\int_{S_{\mathrm{KV}}}\vec{\sigma}_\mathrm{f}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}S}_{\approx 0}$$

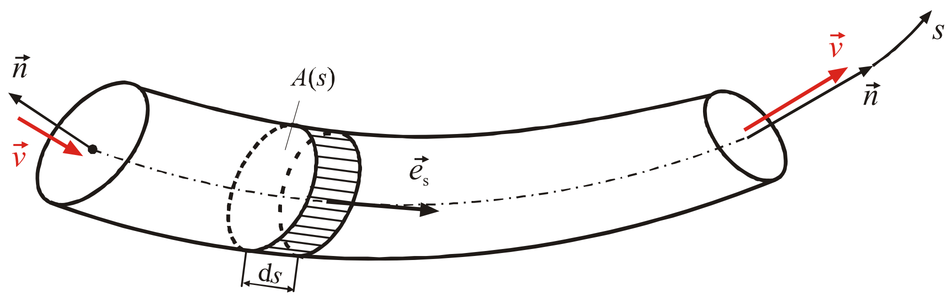
- Snaga vanjskih viskoznih sila je mala u odnosu na snagu tlačnih sila. Na ulaznom i izlaznom presjeku je vektor $\vec{\sigma}_\mathrm{f}$ približno okomit na vektor brzine $\vec{v}$, a na fizičkoj stijenci gdje je $\vec{\sigma}_\mathrm{f}$ najveći, brzina je jednaka nuli.

- Glavni doprinos viskoznih sila, očituje se kroz član koji označuje snagu unutarnjih sila. U nestlačivom strujanju viskozne sile su jedini mehanizam pretvorbe mehaničke energije u unutarnju i uvijek označuju smanjenje kinetičke energije, pa je član uzet s negativnim predznakom ($-P_F$), gdje P_F označuje pozitivnu veličinu.

Zakon kinetičke energije bi se mogao zapisati u obliku:

$$\underbrace{\int_{S_i} \rho \frac{v^2}{2} \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS}_{\text{Protok K.E. kroz izlaznu površinu}} = \overbrace{-\int_{S_u} \rho \frac{v^2}{2} \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS}^{\text{Protok K.E. kroz } S_u} - \overbrace{\frac{d}{dt}\int_{V_{KV}} \rho \frac{v^2}{2}\,dV}^{\text{akumulirana K.E.}} - \overbrace{\int_{S_u+S_i} p\,\vec{n}\cdot\vec{v}\,dS}^{\text{snaga sila tlaka}} + \underbrace{\int_{V_{KV}} \rho \vec{f}\cdot\vec{v}\,dS}_{\text{snaga masenih sila}} - \underbrace{P_F}_{\text{snaga unutarnjih (viskoznih) sila}}$$

5.3.1 Primjena zakona kinetičke energije na strujanje u cjevovodima za slučaj $\rho=$ konst. **i** $\vec{f}=-g\vec{k}$.



$$dV = A\cdot ds$$

$$\vec{v} = v\vec{e}_s \quad \text{(brzina okomita na presjek)}$$

$$d\vec{s} = ds\,\vec{e}_s$$

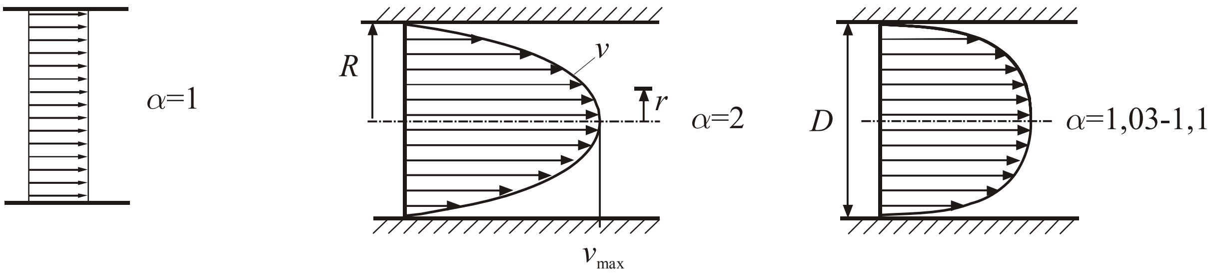
- Jednadžba kontinuiteta $Q = vA =$ konst.

$$\frac{d}{dt}\int_{V_{KV}} \rho \frac{v^2}{2} \underbrace{dV}_{A\cdot dS} = \rho\int \underbrace{Av}_{Q}\frac{\partial v}{\partial t}\cdot ds = \rho Q \int_{s_u}^{s_i} \frac{\partial v}{\partial s} ds = \text{brzina promjene K.E. unutar KV.}$$

$$\int_{A_i} \rho \frac{v^2}{2} \underbrace{\vec{v}\cdot\vec{n}}_{v}\,dS = \frac{1}{2}\rho \underbrace{\int_{A_i} v^3 dS}_{\alpha_i v_{sr}^3 A_i} = \alpha_i \frac{1}{2}\rho Q v_i^2$$

$$\alpha = \frac{1}{v_{sr}^3 A}\int_A v^3 dS = \text{koeficijent ispravka kinetičke energije}$$

a) Idealni fluid b) Laminarno strujanje c) Turbulentno strujanje



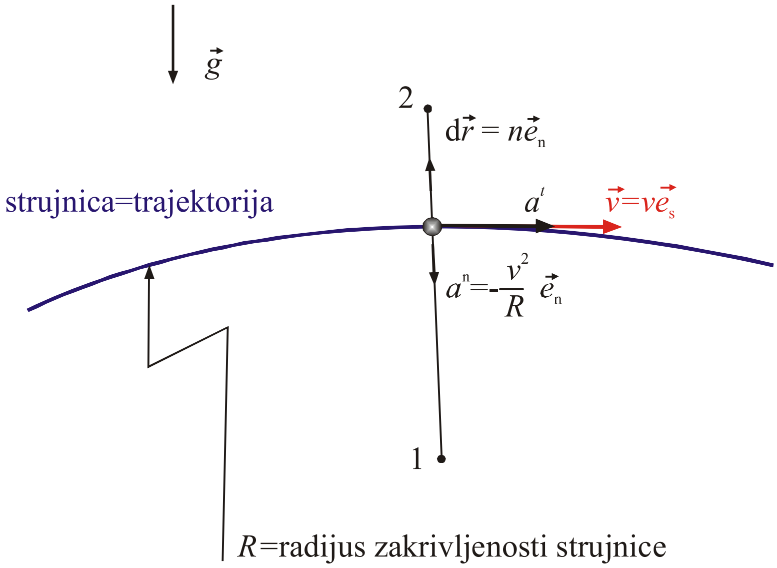
$$v = v_{\max}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

$$Re = \frac{v_{\mathrm{sr}}\cdot D}{\nu}$$

$$-\int_{A_\mathrm{u}} \rho \frac{v^2}{2} \underbrace{\vec{v}\cdot\vec{n}}_{-v} \,\mathrm{d}S = \alpha_\mathrm{u} \frac{1}{2}\rho Q v_\mathrm{u}^2$$

$$-\int_{A_\mathrm{u}+A_\mathrm{i}} p \overbrace{\vec{n}\cdot\vec{v}}^{\pm v} \,\mathrm{d}S = \int_{A_\mathrm{u}} p \overbrace{v\,\mathrm{d}S}^{\mathrm{d}Q} - \int_{A_\mathrm{i}} p \overbrace{v\,\mathrm{d}S}^{\mathrm{d}Q} = \left(p_\mathrm{u} - p_\mathrm{i}\right) Q$$

Napomena: promjena tlaka po presjeku je zanemariva u odnosu na promjenu tlaka u smjeru strujanja. Promjena tlaka u stacionarnom strujanju idealnog fluida se može izračunati integracijom jednadžbe količine gibanja okomito na strujnice



$$\rho\vec{a} = -\rho g\vec{k} - \text{grad}\, p \quad \Big/ \cdot \int_1^2 \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}n\,\vec{e}_n$$

$$\int_1^2 \rho \underbrace{\vec{a}\cdot\vec{n}}_{-\frac{v^2}{R}} \mathrm{d}n = \underbrace{-\int_1^2 \rho g \underbrace{\vec{k}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}_{dz}}_{-\rho g(z_2 - z_1)} - \underbrace{\int_1^2 \mathrm{d}p}_{-p_2 + p_1}$$

$$\boxed{p_2 = p_1 - \rho g\left(z_2 - z_1\right) + \int_1^2 \rho \frac{v^2}{R}\mathrm{d}n}$$

1) Ravne strujnice: $R \to \infty$

$p_2 = p_1 - \rho g\left(z_2 - z_1\right)$ → raspodjela tlaka okomito na strujnice ista je kao u fluidu u mirovanju

2) $z = \text{konst.}$

$p_2 = p_1 + \int_1^2 \rho \frac{v^2}{R}\mathrm{d}n \to$ tlak raste od središta zakrivljenosti

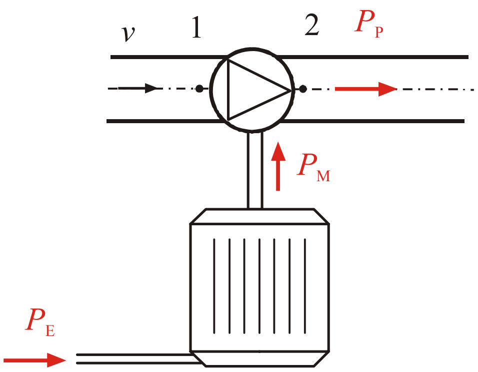
$$\int_{V_{\mathrm{KV}}} \rho \overbrace{\vec{f}}^{-g\vec{k}} \cdot \underbrace{\vec{v}}_{v\vec{e}_s} \underbrace{\mathrm{d}V}_{A\mathrm{d}s} = -\int_{z_\mathrm{u}}^{z_\mathrm{i}} \rho g \underbrace{vA}_{Q} \vec{k}\cdot \overbrace{\mathrm{d}s\vec{e}_s}^{\mathrm{d}\vec{s}} = -\rho g Q\left(z_\mathrm{i} - z_\mathrm{u}\right)$$

Grupiranjem pojedinih članova dobije se Bernoullijeva jednadžba:

$$\underbrace{Q\left[\underbrace{\frac{1}{2}\alpha_\mathrm{i}\rho\frac{v_\mathrm{i}^2}{2}}_{\substack{\text{kinetička energija}\\ \text{po jedinici volumena}}} + \underbrace{p_\mathrm{i}}_{\substack{\text{rad sile tlaka}\\ \text{po jedinici}\\ \text{volumena}}} + \underbrace{\rho g z_\mathrm{i}}_{\substack{\text{potencijalna}\\ \text{energija po}\\ \text{jedinici}\\ \text{volumena}}}\right]}_{P_\mathrm{i}=\text{snaga fluida na izlazu iz KV}} = \underbrace{Q\left[\frac{1}{2}\alpha_\mathrm{u}\rho\frac{v_\mathrm{u}^2}{2} + p_\mathrm{u} + \rho g z_\mathrm{u}\right]}_{P_\mathrm{u}=\text{snaga fluida na ulazu u KV}} - \underbrace{\rho Q \int_{s_u}^{s_i} \frac{\partial v}{\partial t}\mathrm{d}s}_{\text{akumulirana snaga}} \underbrace{-P_\mathrm{F}}_{\text{"izgubljena" snaga}}$$

- U tehničkoj praksi u cjevovod može biti ugrađena pumpa ili turbina.

Pumpa je uređaj pogonjen motorom, koji predaje energiju fluidu.



P_P = snaga koju pumpa predaje fluidu

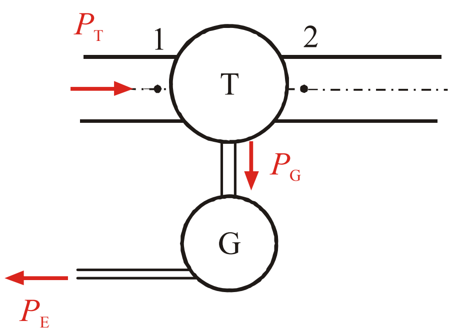
P_M = snaga koju motor predaje pumpi

P_E = električna snaga predana motoru

$$\eta_P = \frac{P_P}{P_M} = \text{stupanj korisnosti pumpe} < 1$$

$$\eta_M = \frac{P_M}{P_E} = \text{stupanj korisnosti motora} < 1$$

-Turbina je uređaj koji pretvara energiju fluida u mehaničku energiju, kojom najčešće pogoni generator koji daje električnu energiju.



P_T = snaga koju fluid predaje turbini

P_G = snaga koju turbina predaje generatoru

P_E = električna snaga koju daje generator

$$\eta_T = \frac{P_G}{P_T} = \text{stupanj korisnosti turbine} < 1$$

$$\eta_G = \frac{P_E}{P_G} = \text{stupanj korisnosti generatora} < 1$$

Modificirana Bernoullijeva jednadžba kada u cjevovodu postoje pumpa i turbina

$$\underbrace{Q\left[\alpha\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g z\right]_{\mathrm{i}}}_{P_{\mathrm{i}}} = \underbrace{Q\left[\alpha\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g z\right]_{\mathrm{u}}}_{P_{\mathrm{u}}} \underbrace{-\rho Q\int_{s_u}^{s_i}\frac{\partial v}{\partial t}\mathrm{d}s}_{\substack{\text{akumulacija}\\ \text{snaga } P_{\mathrm{A}}}} \overbrace{-P_{\mathrm{F}}}^{\substack{\text{snaga}\\ \text{gubitaka}}} \overbrace{+P_{\mathrm{P}}}^{\substack{\text{snaga}\\ \text{pumpe}}} \overbrace{-P_{\mathrm{T}}}^{\substack{\text{snaga}\\ \text{turbine}}}$$

- Specifični oblici modificirane Bernoullijeve jednadžbe

1) po jedinici volumenskog protoka Q

$$\left(\overbrace{\underbrace{\alpha\frac{1}{2}\rho v^2}_{\text{dinamički tlak}} + \underbrace{p}_{\text{statički tlak}} + \underbrace{\rho g z}_{\substack{\text{hidrostatski}\\ \text{tlak}}}}^{\text{totalni tlak}}\right)_{\mathrm{i}} = \left(\alpha\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g z\right)_{\mathrm{u}} - \rho\int_{s_u}^{s_i}\frac{\partial v}{\partial t}\mathrm{d}s - \overbrace{\frac{P_{\mathrm{F}}}{Q}}^{\Delta p_{\mathrm{F}}} + \overbrace{\frac{P_{\mathrm{P}}}{Q}}^{\Delta p_{\mathrm{P}}} - \overbrace{\frac{P_{\mathrm{T}}}{Q}}^{\Delta p_{\mathrm{T}}}$$

Svaki član jednadžbe ima dimenziju $\dfrac{\text{snaga}}{\text{volumenski protok}} = \dfrac{\text{energija}}{\text{volumen}} = \text{tlak}$

$\Delta p_{\mathrm{F}} = \dfrac{P_{\mathrm{F}}}{Q}$ pad tlaka uslijed trenja

$\Delta p_{\mathrm{P}} = \dfrac{P_{\mathrm{P}}}{Q}$ skok tlaka uslijed pumpe

$\Delta p_{\mathrm{T}} = \dfrac{P_{\mathrm{T}}}{Q}$ pad tlaka kroz turbinu

2) po jedinici masenog protoka $\dot{m} = \rho Q$

$$\left(\overbrace{\underbrace{\alpha \frac{v^2}{2}}_{\substack{\text{visina}\\ \text{kinetičke}\\ \text{energije}}} + \underbrace{\frac{p}{\rho}}_{\substack{\text{visina}\\ \text{tlaka}}} + \underbrace{g z}_{\substack{\text{geometrijska}\\ \text{visina}}}}^{e\,=\,\text{ukupna specifična energije}} \right)_{\mathrm{i}} = \left(\alpha \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right)_{\mathrm{u}} - \int_{s_u}^{s_i} \frac{\partial v}{\partial t} \mathrm{d}s - \overbrace{\frac{P_{\mathrm{F}}}{\rho Q}}^{e_F} + \overbrace{\frac{P_{\mathrm{P}}}{\rho Q}}^{e_P} - \overbrace{\frac{P_{\mathrm{T}}}{\rho Q}}^{e_T}$$

Svaki član ima dimenziju $\dfrac{\text{snaga}}{\text{maseni protok}} = \dfrac{\text{energija}}{\text{masa}} = \text{specifična energija}$

$e_{\mathrm{F}} = \dfrac{P_{\mathrm{F}}}{\rho Q}$ gubitak specifične energije uslijed trenja

$e_{\mathrm{P}} = \dfrac{P_{\mathrm{P}}}{\rho Q}$ porast specifične energije uslijed pumpe

$e_{\mathrm{T}} = \dfrac{P_{\mathrm{T}}}{\rho Q}$ pad specifične energije uslijed turbine

3) po jedinici težinskog protoka $\dot{G} = \rho g Q$

$$\left(\overbrace{\underbrace{\alpha \frac{v^2}{2g}}_{\substack{\text{visina}\\ \text{kinetičke}\\ \text{energije}}} + \underbrace{\frac{p}{\rho g}}_{\substack{\text{visina}\\ \text{tlaka}}} + \underbrace{z}_{\substack{\text{geometrijska}\\ \text{visina}}}}^{h\,=\text{visina ukupne energije}} \right)_{\mathrm{i}} = \left(\alpha \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \right)_{\mathrm{u}} - \frac{1}{g} \int_{s_{\mathrm{u}}}^{s_{\mathrm{i}}} \frac{\partial v}{\partial t} \mathrm{d}s - \overbrace{\frac{P_{\mathrm{F}}}{\rho g Q}}^{h_{\mathrm{F}}} + \overbrace{\frac{P_{\mathrm{P}}}{\rho g Q}}^{h_{\mathrm{P}}} - \overbrace{\frac{P_{\mathrm{T}}}{\rho g Q}}^{h_{\mathrm{T}}}$$

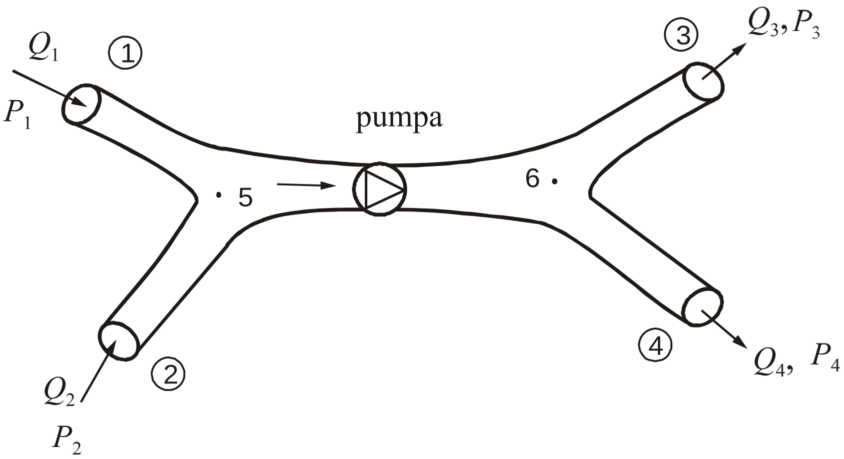
Dimenzija svakog člana $= \dfrac{\text{snaga}}{\text{težinski protok}} = \dfrac{\text{energija}}{\text{težina}} = \text{visina}$

$h_F = \dfrac{P_F}{\rho g Q}$ visina gubitaka energije

$h_P = \dfrac{P_P}{\rho g Q}$ visina dobave pumpe

$h_T = \dfrac{P_T}{\rho g Q}$ pad visine energije u turbini

Primjer primjene zakona kinetičke energije na račvastu cijev (stacionarno strujanje → brzina promjene kinetičke energije = 0)



J.K. $\quad Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4$

M.B.J. $\quad P_3 + P_4 = P_1 + P_2 + P_P - P_{F1-5} - P_{F2-5} - P_{F5-6} - P_{F6-3} - P_{F6-4}$

$$P_i = Q_i\left(\alpha_i \cdot \frac{1}{2}\rho v^2 + p_i + \rho g z_i\right) \quad ; \quad i = 1,2,3,4$$

- jednadžbe po odsječcima

Integralni oblici		Specifični oblici	
$1-5\quad P_5 = P_1 - P_{F1-5} /: \rho g Q_1$	$\Rightarrow$	$h_5 = h_1 - h_{F1-2}$	(1)
$2-5\quad P_5 = P_2 - P_{F2-5}\ /: \rho g Q_2$	$\Rightarrow$	$h_5 = h_2 - h_{F2-5}$	(2)
$5-6\quad P_6 = P_5 - P_{F5-6} + P_P\ /: \rho g Q_2$	$\Rightarrow$	$h_6 = h_5 - h_{F5-6} + \dfrac{P_P}{\rho g (Q_1 + Q_2)}$	(3)
$6-3\quad P_3 = P_6 - P_{F6-3}\ /: \rho g Q_3$	$\Rightarrow$	$h_3 = h_6 - h_{F3-6}$	(4)
$6-4\quad P_4 = P_6 - P_{F6-4}\ /: \rho g Q_4$	$\Rightarrow$	$h_4 = h_6 - h_{F6-4}$	(5)

$$h_i = \alpha_i \cdot \frac{v_i^2}{2g} + \frac{p_i}{\rho g} + z_i \;;\quad i = 1,2,3,4,5,6$$

Zbroj (1) + (3) + (5) → B.J. (1-5) + (5-6) + (6-4) = 1-4

$$h_4 = h_1 - h_{\mathrm{F1-5}} - h_{\mathrm{F5-6}} - h_{\mathrm{F6-4}} + h_{\mathrm{p}}$$

Zbroj (1) + (3) + (4) → M.B.J. 1-3

$$h_3 = h_1 - h_{\mathrm{F1-5}} - h_{\mathrm{F5-6}} - h_{\mathrm{F6-3}} + h_{\mathrm{P}}$$

Bernoullijeva jednadžba vrijedi ne samo za fizičku cijev nego i za strujnu cijev (odnosno strujnicu). Npr. u stacionarnom stanju $\left(P_{\mathrm{A}} = 0\right)$ idealnog fluida $\left(P_{\mathrm{F}} = 0 \;;\; \alpha = 1\right)$ vrijedi:

$$\left(\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z\right)_{\mathrm{i}} = \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z\right)_{\mathrm{u}}$$

ili

$$\boxed{\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{konst. uzduž strujnice}}$$