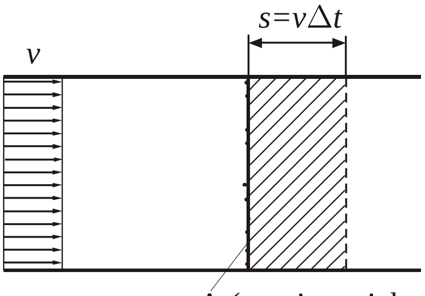
4.6 Volumenski protok

Volumenski protok (ili jednostavno protok) Q označuje obujam fluida koji prođe kroz zadanu površinu u jediničnom vremenu.

$$Q = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}, \qquad [Q] = \mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-1} \qquad [Q]_{\mathrm{SI}} = \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

a) Strujanje (idealnog) fluida konstantnim profilom brzine u cijevi (kanalu)

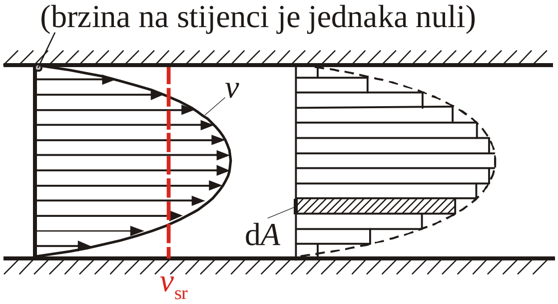


Čestice koje su u nekom trenutku bile u presjeku A će nakon vremena Δt prijeći put $s = v\Delta t$, i time opisati obujam $\Delta V = A \cdot s = Av\Delta t$.
Protok je po definiciji

$$Q = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = A \cdot v$$

$Q = A \cdot v$ - za slučaj ravnog presjeka okomitog na vektor brzine i jednoliki profil brzine

b) Strujanje (viskoznog) fluida nejednolikim profilom brzine u cijevi (kanalu)



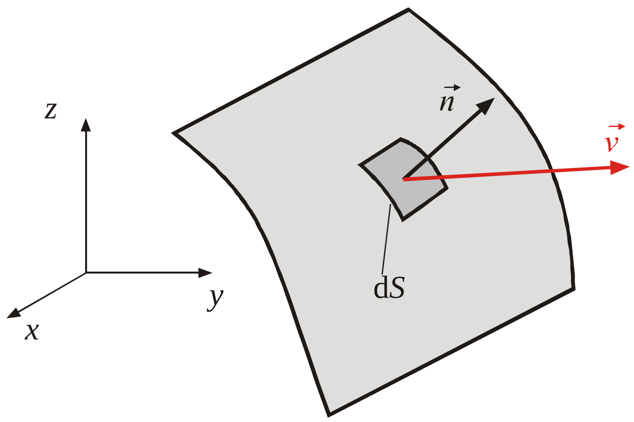
$$\mathrm{d}Q = v\,\mathrm{d}A \quad \Big/ \int_A$$

$$\boxed{Q = \int_A v\,\mathrm{d}A}$$

Srednja brzina je ona koja daje isti protok kao i nejednoliki profil brzine

$$Q = \int_A v\,\mathrm{d}A = v_{\mathrm{sr}} \cdot A \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{\mathrm{sr}} = \frac{1}{A}\int_A v\,\mathrm{d}A = \frac{Q}{A}}$$

c) Opći slučaj protoka kroz mirujuću zakrivljenu površinu

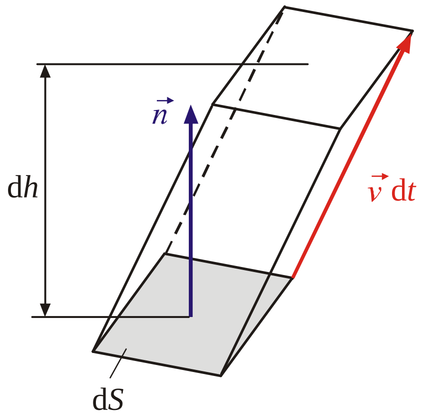


- čestica koja se u nekom trenutku nalazi na površini dS će nakon vremena dt prijeći put $\vec{v}\,\mathrm{d}t$.

$\vec{n}$ = jedinični vektor normale

$\vec{v}$ = brzina strujanja fluida

Čestice koje u vremenu dt prođu kroz dS opisat će kosu prizmu s bazom dS i bridom $\vec{v}\,\mathrm{d}t$. Obujam prizme je $\mathrm{d}V = \mathrm{d}S \cdot \mathrm{d}h$, gdje je d$h$ visina prizme, a dobije se kao projekcija vektora brida na smjer normale, što se matematički zapisuje skalarnim produktom $\mathrm{d}h = \vec{n} \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t$.



- obujam prizme je $\mathrm{d}V = \mathrm{d}S\,\vec{v} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}t$

- elementarni protok kroz površinu dS je

$$\mathrm{d}Q = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$$

- Protok kroz ukupnu površinu S jednak je zbroju (integralu) protoka kroz elementarne površine dS

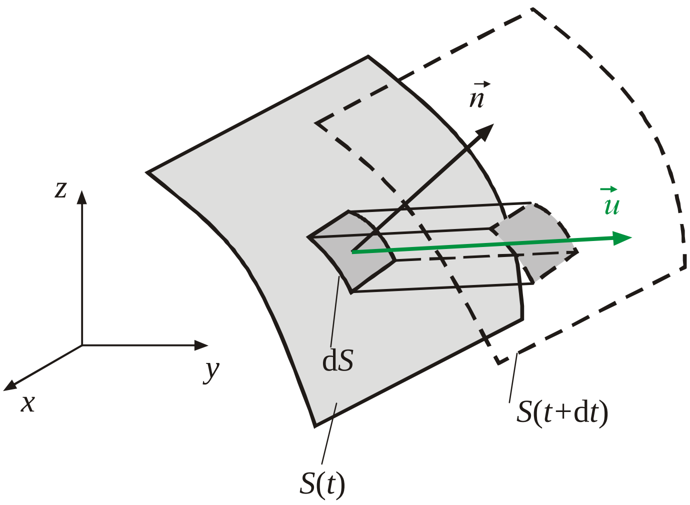
$$\boxed{Q = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S}$$

Protok je pozitivan ako je $\vec{v} \cdot \vec{n} > 0$, tj. čestice fluida prolaze kroz površinu u smjeru vanjske normale.

$$\boxed{Q = \int_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

gdje je $\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S$ usmjereni element površine.

d) Protok kroz gibajuću površinu S u mirujućem fluidu $\left(\vec{v}=0\right)$



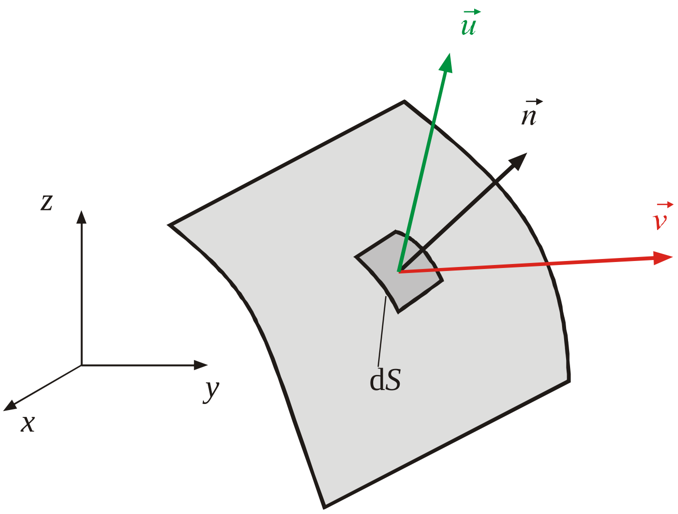
$\vec{u}=$ brzina gibanja površine S

Čestice fluida relativno prolaze kroz površinu dS u smjeru suprotnom od normale, pa je obujam negativan.

Analogno prethodnom izrazu

$$\boxed{Q=-\int_S \vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S}$$

e) Protok kroz gibajuću površinu u polju gibajućeg fluida



$\vec{v}-\vec{u}=$ relativna brzina prolaska čestica fluida kroz površinu dS

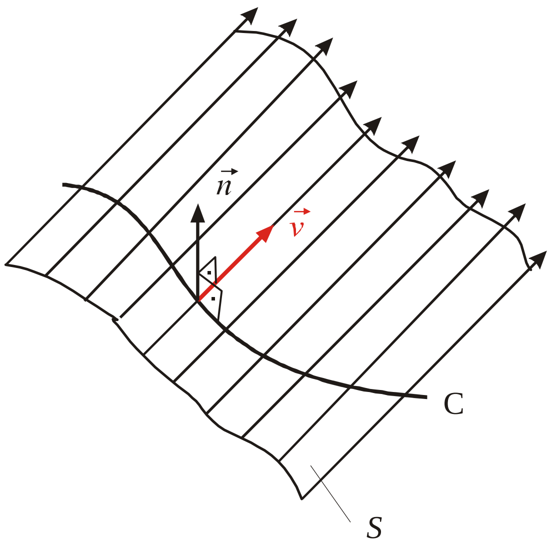
$$Q=Q^{(c)}+Q^{(d)}$$

$$\boxed{Q=\int_S\left(\vec{v}-\vec{u}\right)\vec{n}\,\mathrm{d}S}$$

Poseban slučaj je materijalna površina $S_{\mathrm{M}}\left(t\right)$, koja se giba brzinom $\vec{u}=\vec{v}$, u polju brzine fluida $\vec{v}$, pa je protok kroz materijalnu površinu $Q=0$, što je jasno jer se materijalna površina sastoji stalno od jednih te istih čestica fluida (nema prolaska čestica kroz S_{M})

4.7 Strujna površina i strujna cijev

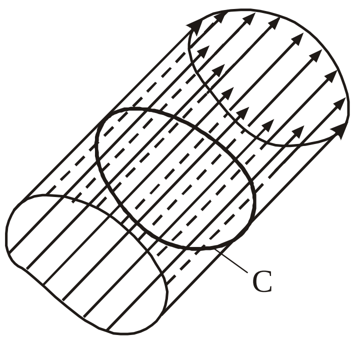
Ako se kroz svaku točku neke krivulje C povuče strujnica, dobije se strujna površina.



Osnovno svojstvo strujne površine je da kroz nju nema protoka fluida.

$$Q = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S = 0$$

- Ako je krivulja C zatvorena, dobije se strujna cijev



Kroz plašt strujne cijevi nema protoka, kao i kod fizičke cijevi!

-Ako je površina poprečnog presjeka cijevi infinitezimalna, govori se o elementarnoj strujnoj cijevi.

4.8 Protok fizikalnog svojstva

Čestice fluida su nositelji fizikalnih svojstava (poput volumena, mase, težine, energije, količine gibanja itd.), pa prolaskom čestica kroz površinu one pronose i fizikalna svojstva. Ako s F općenito označimo fizikalno svojstvo, a sa Φ volumensku gustoću fizikalnog svojstva definiranu kao

$$\Phi = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}V}$$

onda je količina fizikalnog svojstva koja je prošla kroz elementarnu površinu $\mathrm{d}S$ s elementarnim volumenom $\mathrm{d}V$ jednaka $\mathrm{d}F = \Phi \, \mathrm{d}V$, a elementarni protok fizikalnog svojstva kroz elementarnu površinu $\mathrm{d}S$ je po definiciji $\mathrm{d}Q_F = \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\Phi \mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$. U općem slučaju kada se giba i površina S i fluid, izraz za elementarni volumen $\mathrm{d}V$ koji prijeđe kroz $\mathrm{d}S$ je $\mathrm{d}V = (\vec{v} - \vec{u}) \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S\, \mathrm{d}t$, pa se nakon integracije po čitavoj površini S dobije izraz za protok fizikalnog svojstva F kroz gibajuću površinu S u obliku

$$\boxed{Q_F = \int_S \Phi (\vec{v} - \vec{u}) \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S}$$

Za mirujuću površinu $(\vec{u} = 0)$ izraz za protok Q_F je

$$\boxed{Q_F = \int_S \Phi\, \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S}$$

<u>Primjeri:</u>

a) Protok volumena kroz mirujuću površinu

$$F = V \qquad \Phi = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}V} = 1$$

$$Q_V = Q = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S$$

b) Protok mase (maseni protok) kroz mirujuću površinu

$$F = m \qquad \Phi = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}V} = \rho$$

$$\boxed{Q_m = \dot{m} = \int_S \rho\, \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S}$$

Za kapljevine $\rho = \text{konst.}$ $\boxed{\dot{m} = \rho Q}$; $[\dot{m}] = \mathrm{MT}^{-1}$; $[\dot{m}]_{\mathrm{SI}} = \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$

b) Protok težine (težinski protok) kroz mirujuću površinu

$$F = G = m\, g \qquad \Phi = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}V} = \rho\, g$$

$$\boxed{Q_G = \dot{G} = \int_S \rho\, g\, \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S} \qquad \text{za} \quad g = \text{konst.} \quad \boxed{\dot{G} = \dot{m}\, g}\ ;$$

$$[\dot{G}] = \mathrm{MLT}^{-3};\ [\dot{G}]_{\mathrm{SI}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}}$$

Za kapljevine $\rho = \text{konst.}$; $\boxed{\dot{G} = \dot{m}\,g = \rho\,g\,Q}$

d) Protok kinetičke enegije kroz gibajuću površinu

$$F = m \cdot \frac{v^2}{2} \qquad \Phi = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}V} = \rho \cdot \frac{v^2}{2}$$

$$\boxed{Q_{\frac{mv^2}{2}} = \int_S \rho \frac{v^2}{2} \left(\vec{v} - \vec{u}\right) \vec{n}\,\mathrm{d}S}$$

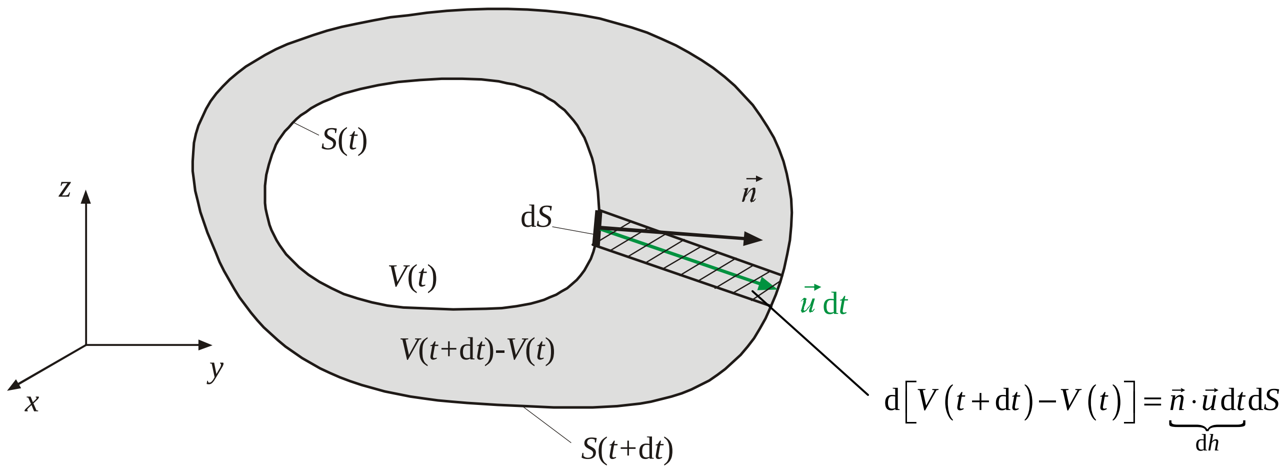
e) Protok količine gibanja kroz mirujuću površinu

$F = m\vec{v} \qquad \Phi = \rho\,\vec{v} \qquad$ (! vektorsko svojstvo pa će i protok biti vektor)

$$\boxed{\vec{Q}_{m\vec{v}} = \int_S \rho\,\vec{v}\left(\vec{v} \cdot \vec{n}\right) \mathrm{d}S}$$

Zapamtimo: Materijalni volumen i materijalna površina se sastoje stalno od jednih te istih čestica fluida pa nema prolaska čestica fluida kroz materijalnu površinu i nema pronosa fizikalnih svojstava kroz materijalnu površinu.

4.9 Brzina promjene obujma gibajućeg volumena



$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{V(t+\mathrm{d}t)-V(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\int\limits_{S(t)}\vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}=\int\limits_{S(t)}\vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\int\limits_{V(t)}\nabla\cdot\vec{u}\,\mathrm{d}V}$$

za $V(t)\to \mathrm{d}V$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}V)}{\mathrm{d}t}=\nabla\cdot\vec{u}\,\mathrm{d}V}$$

- Poseban slučaj je materijalni volumen: $\vec{u}=\vec{v}$

$$V(t)\to V_M(t),\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\to\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$$

Gausova formula

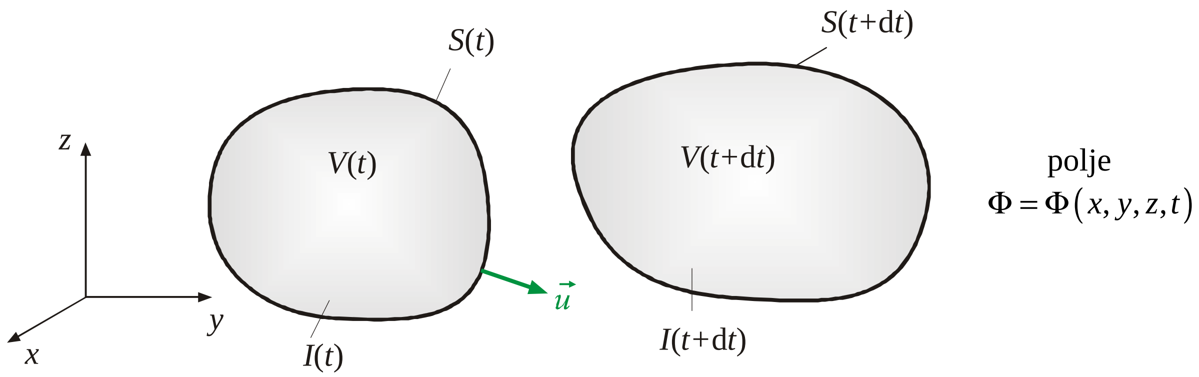
$$\boxed{\frac{\mathrm{D}V_\mathrm{M}}{\mathrm{D}t}=\int\limits_{S_\mathrm{M}(t)}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S_\mathrm{M}=\int\limits_{V_\mathrm{M}(t)}\nabla\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}V_\mathrm{M}}$$

- Za česticu fluida $V_\mathrm{M}\to \mathrm{d}V_\mathrm{M}$ (volumen sažmemo u točku, tj. česticu fluida)

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}(\mathrm{d}V_M)}{\mathrm{D}t}=\nabla\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}V_M}\qquad \text{ili}\qquad \boxed{\nabla\cdot\vec{v}=\frac{1}{\mathrm{d}V_M}\frac{\mathrm{D}(\mathrm{d}V_M)}{\mathrm{D}t}}$$

Divergencija polja brzine strujanja fluida jednaka je brzini relativne promjene volumena čestice fluida.

4.10 Brzina promjene sadržaja fizikalnog svojstva unutar gibajućeg i mirujućeg volumena



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overbrace{\int_{V(t)}\Phi\,\mathrm{d}V}^{\substack{I(t)=\text{sadržaj fizikalnog svojstva}\\ \text{unutar gibajućeg volumena}}} = \frac{I(t+\mathrm{d}t)-I(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)}\Phi\,\mathrm{d}V = \int_{V(t)}\left[\underbrace{\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}}_{\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\Phi}\mathrm{d}V + \Phi\underbrace{\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}V)}{\mathrm{d}t}}_{\nabla\cdot\vec{u}\mathrm{d}V}\right] = \int_{V(t)}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\mathrm{d}V + \nabla\cdot(\vec{u}\Phi)\right]\mathrm{d}V$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)}\Phi\,\mathrm{d}V = \int_{V(t)}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\mathrm{d}V + \int_{S(t)}\Phi\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S}$$

- Za materijalni volumen $\vec{u}=\vec{v}$ $\quad V(t)\to V_M(t) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\to\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V_\mathrm{M}(t)}\Phi\,\mathrm{d}V = \int_{V_\mathrm{M}(t)}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\mathrm{d}V + \int_{S_\mathrm{M}(t)}\Phi\,\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S}$$

- Za mirujući volumen $\vec{u}=0$ $\quad V(t)\to V_{\mathrm{KV}}$ (kontrolni volumen)

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_{\mathrm{KV}}}\Phi\,\mathrm{d}V = \int_{V_{\mathrm{KV}}}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\mathrm{d}V}$$