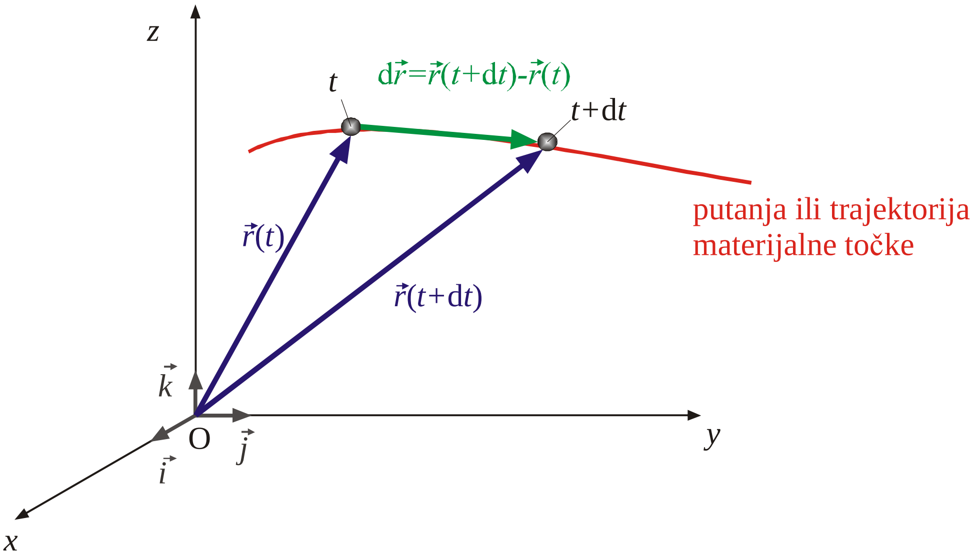
4. KINEMATIKA FLUIDA

4.1 Podsjetnik iz kinematike materijalne točke

Ako dimenzije tijela nisu bitne za analizu njegova gibanja, onda se može promatrati samo gibanje težišta tijela. Težištu tijela pridružujemo ukupnu masu tijela i govorimo o materijalnoj točki.

- opis gibanja materijalne točke u prostoru



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}\left(t+\mathrm{d}t\right) - \vec{r}\left(t\right) = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}$$

$\mathrm{d}\vec{r}$ - put koji prevali materijalna točka u vremenu dt

- jednadžbe gibanja

$$\vec{r} = \vec{r}\left(t\right) \qquad \boxed{\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}}$$

Jednadžbe gibanja označuju parametarski oblik jednadžbe trajektorije (vrijeme t je parametar).

- brzina materijalne točke (= brzina promjene položaja)

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}} \qquad \text{ili} \qquad \boxed{\begin{aligned} v_x &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} \\ v_y &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y} \\ v_z &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dot{z} \end{aligned}}$$

Iz definicije brzine je jasno da za prevaljeni put $\mathrm{d}\vec{r}$ u vremenu $\mathrm{d}t$ vrijedi

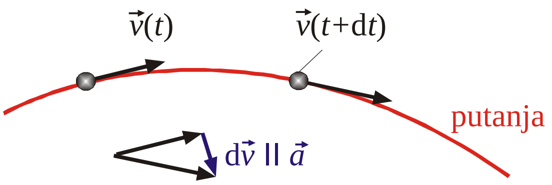
$$\boxed{\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\,\mathrm{d}t} \qquad \text{ili} \qquad \boxed{\begin{aligned} \mathrm{d}x &= v_x\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y &= v_y\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}z &= v_z\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

Prevaljeni put i vektor brzine su kolinearni vektori, što znači da je vektor brzine uvijek tangencijalan na putanju.

- ubrzanje materijalne točke (= brzina promjene brzine)

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\vec{t}}} \qquad \text{ili} \qquad \boxed{\begin{aligned} a_x &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x} \\ a_y &= \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_y = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{y} \\ a_z &= \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_z = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{z} \end{aligned}}$$

Ubrzanje $\vec{a}$ je tangencijalno na krivulju koju opisuju vrhovi vektora brzine $\vec{v}$.

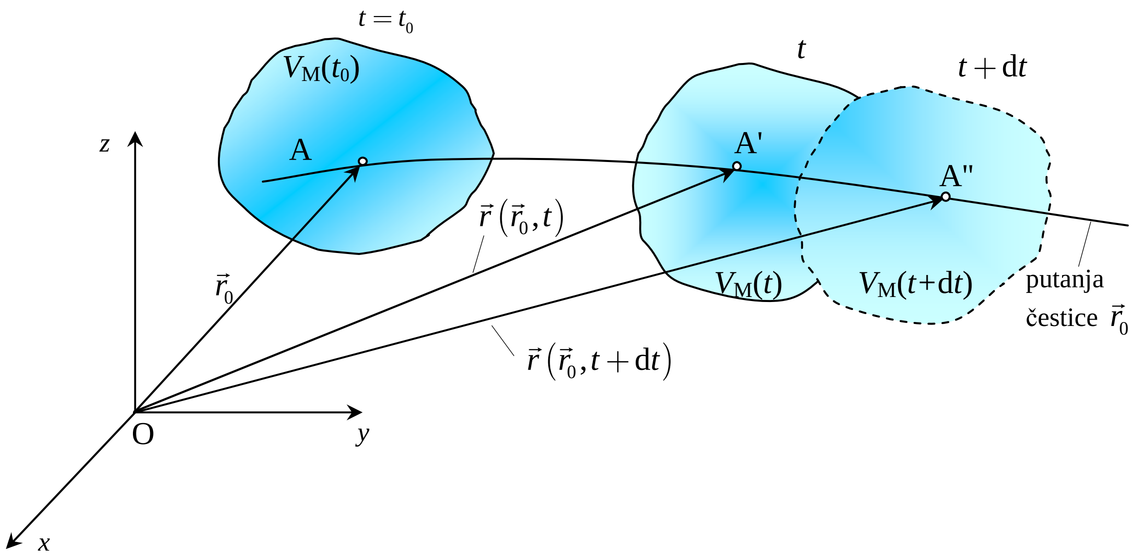


- Ubrzanje $\vec{a}$ uvijek ima komponentu koja gleda prema središtu zakrivljenosti putanje

4.2 Lagrangeov opis strujanja fluida

Prema hipotezi kontinuuma svaki konačan volumen ispunjen materijom sastoji se od beskonačno puno beskonačno malih čestica. Čestica kontinuuma ima volumen $\mathrm{d}V$ i masu $\mathrm{d}m = \rho \cdot \mathrm{d}V$. Može se tvrditi da svaka čestica kontinuuma zauzima jednu točku prostora i obrnuto da se u jednoj točki prostora može naliziti samo jedna čestica kontinuuma. U krutom tijelu međusobni položaj čestica fluida je stalan, što omogućuje jednostavniji opis gibanja tijela, tj. gibanje se može razložiti na translatorno gibanje jedne točke tijela i sferno gibanje oko te točke, kao što se uči u mehanici. U fluidu koji se pri gibanju neprekidno deformira, dolazi do promjene relativnog položaja čestica, te je gibanje fluida jednoznačno opisano tek ako se opiše gibanje svake njegove čestice. Gibanje svake čestice fluida može se opisati jednadžbama gibanja, analogno opisu gibanja materijalne točke u mehanici. Jedini je problem što u fluidu imamo beskonačno puno čestica, te ih treba na neki način razlikovati (identificirati). Budući smo čestice kontinuuma jednoznačno vezali s točkama prostora, najlakše je čestice razlikovati po položaju kojeg zauzimaju u odabranom vremenskom trenutku.

- Pretpostavimo prostor potpuno ispunjen fluidom i uočimo u početnom trenutku t_0 jedan volumen $V_M\left(t_0\right)$. Položaj svih čestica tog volumena je definiran vektorom položaja $\vec{r}_0 = \vec{r}\left(t_0\right)$. Komponente vektora $\vec{r}_0 : x_0, y_0, z_0$ se nazivaju Lagrangeove koordinate i one nam služe za razlikovanje čestica fluida u početnom trenutku.



- Pratimo gibanje svih čestica unutar volumena $V_M\left(t_0\right)$, a čestice razlikujemo po $\vec{r}_0$. U trenutku t volumen $V_M\left(t_0\right)$ je poprimio oblik i položaj označen s $V_M\left(t\right)$. Volumen $V_M\left(t\right)$ se sastoji od istih čestica kao i volumen $V_M\left(t_0\right)$, što znači da svaka čestica iz volumena $V_M\left(t_0\right)$ ima svoju sliku u volumenu $V_M\left(t\right)$. Volumen koji se tijekom gibanja stalno sastoji od jednih te istih čestica fluida se naziva <u>materijalni volumen</u>, a površina koja ga dijeli od okolnog fluida <u>materijalna površina</u> $S_M\left(t\right)$. Jasno je da se materijalna površina također sastoji stalno od jednih te istih čestica. Također je jasno da se materijalna površina giba brzinom čestica fluida koje tvore tu materijalnu površinu.

- Na slici je s A označena čestica fluida čiji je položaj u početnom trenutku definiran vektorom položaja $\vec{r}_0$ (koji je ujedno i njeno ime). S A′ je označen položaj te iste čestice (čestice A ili $\vec{r}_0$) u trenutku t, a s A″ u trenutku $t + \mathrm{d}t$. Uvođenjem vektora $\vec{r}_0$ u jednadžbu gibanja, moguće je istovremeno opisati gibanje svih čestica volumena $V_M\left(t_0\right)$, u obliku

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}\left(\vec{r}_0, t\right)} \qquad \text{ili} \qquad \left|\begin{array}{l} x = x\left(x_{0,} y_0, z_0, t\right) \\ y = y\left(x_{0,} y_0, z_0, t\right) \\ z = z\left(x_{0,} y_0, z_0, t\right) \end{array}\right| \qquad (1)$$

- Jednadžbe gibanja (1) daju položaj $\vec{r} = \left(x, y, z\right)$ čestice $\vec{r}_0$ [čestice koja se u početnom trenutku nalazila u točki prostora zadanoj koordinatama (x_0, y_0, z_0)] u trenutku t. Uvrštavanjem različitih vektora $\vec{r}_0$ u jednadžbe gibanja (1) dobijemo jednadžbe gibanja različitih čestica fluida.

- Brzina i ubrzanje čestice $\vec{r}_0$ fluida je definirana analogno brzini gibanja materijalne točke

$$\vec{v}\left(\vec{r}_0, t\right) = \left.\frac{\partial \vec{r}\left(\vec{r}_0, t\right)}{\partial t}\right|_{\vec{r}_0 = \text{konst.}}$$

$$\vec{a}\left(\vec{r}_0, t\right) = \left.\frac{\partial \vec{v}\left(\vec{r}_0, t\right)}{\partial t}\right|_{\vec{r}_0 = \text{konst.}} = \left.\frac{\partial^2 \vec{r}\left(\vec{r}_0, t\right)}{\partial t^2}\right|_{\vec{r}_0 = \text{konst.}}$$

Promjenom vektora $\vec{r}_0$ (Lagrangeovih koordinata), dobivaju se brzine i ubrzanja različitih čestica fluida. Analogno se može zapisati i svako drugo fizikalno svojstvo, općenito označeno s Φ:

$$\Phi = \Phi^L\left(\vec{r}_0, t\right)$$

gdje za Φ može stajati vektor položaja $\vec{r}$, brzina $\vec{v}$, ubrzanje $\vec{a}$, gustoća ρ, temperatura T itd. Ovaj način zapisa fizikalnih veličina se naziva Lagrangeovim zapisom. Brzinu promjene fizikalnog svojstva čestice fluida, definira se vremenskom derivacijom koja se u mehanici fluida naziva materijalnom derivacijom i označuje velikim slovom $\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$.

$$\frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t} = \left.\frac{\partial \Phi^L\left(\vec{r}_0, t\right)}{\partial t}\right|_{\vec{r}_0 = \text{konst.}}$$

Materijalna derivacija, dakle, označuje vremensku promjenu fizikalnog svojstva Φ čestice fluida koju bi registrirao instrument koji se giba zajedno s česticom fluida (čitavo vrijeme mjeri Φ čestice fluida).

Primjeri:

$\vec{v} = \dfrac{\mathrm{D}\vec{r}}{\mathrm{D}t}$ (brzina čestice fluida je materijalna derivacija njena položaja)

$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$ (ubrzanje čestice fluida je materijalna derivacija brzine)

4.3 Eulerov opis strujanja fluida

Iako mehanika fluida proučava mehaničko ponašanje fluida, glavno pitanje nije što se događa s fluidom, nego kakve efekte izaziva strujanje fluida u dodiru sa stijenkom konstrukcije s kojom ili oko koje fluid struji. U tom smislu će nas npr. zanimati kolika je sila dodira između fluida i stijenke, a manje će biti zanimljivo koja je čestica fluida u dodiru sa stijenkom. Prema tome, neće biti značajna ni identifikacija čestica koja je uvedena u Lagrangeovom opisu strujanja fluida. U tom smislu se koristi Eulerov opis strujanja fluida, koji se temelji na poljima fizikalnih veličina, a koje se dobije primjenom inverznih jednadžbi gibanja.

Inverzne jednadžbe jednadžbama (1) su:

$$\boxed{\vec{r}_0=\vec{r}_0(\vec{r},t)} \quad \text{ili} \quad \boxed{\begin{aligned} x_0&=x_0(x,y,z,t)\\ y_0&=y_0(x,y,z,t)\\ z_0&=z_0(x,y,z,t)\end{aligned}} \qquad (2)$$

Jednadžbe (2) kazuju početni položaj čestice fluida koja se u trenutku t nalazi u točki prostora (x,y,z). Npr. ako u jednadžbe (2) uvrstimo koordinate točke A' iz vremenskog trenutka t, dobit ćemo koordinate točke A iz vremenskog trenutka t_0.

Primjenom jednadžbe (2) na fizikalno svojstvo Φ izraženo Lagrangeovim koordinatama, dobije se polje fizikalne veličine

$$\Phi=\Phi^L(\vec{r}_0,t)=\Phi^L\left[\vec{r}_0(\vec{r},t),t\right]=\Phi^E(\vec{r},t)=\Phi^E(x,y,z,t)$$

Fizikalno gledajući do polja fizikalne veličine Φ se dolazi tako da se svakoj točki prostora pridruži fizikalno svojstvo Φ one čestice fluida koja se nalazi u promatranoj točki prostora. Važno je zapamtiti da iako se polje fizikalne veličine izražava prostornim (Eulerovim) koordinatama, da su nositelji fizikalnog svojstva čestice fluida, a ne točke prostora. Ako u točki prostora nema materije, u toj točki neće biti ni definirano fizikalno svojstvo Φ. Tako bi polje temperature bilo skalarno polje oblika $T=T(x,y,z,t)$, polja brzine i ubrzanja su vektorska polja $\vec{v}=\vec{v}(x,y,z,t)$ i $\vec{a}=\vec{a}(x,y,z,t)$. Za fizikalno polje se kaže da je stacionarno ako ne zavisi od vremena t, inače je nestacionarno. Npr., ako se temperatura u točkama nekog prostora ispunjenog fluidom ne mijenja tijekom vremena, a mijenja se od točke do točke prostora, možemo pisati $T=T(x,y,z)$ i kažemo da je polje temperature stacionarno. Jasno je da se u Eulerovom opisu gubi identifikacija čestica fluida jer se iz polja temperature ne vidi koja je čestica fluida definirala temperaturu u pojedinim točkama prostora. Ta je informacija sadržana u inverznim jednadžbama gibanja iz kojih se može, ako je to potrebno, vidjeti o kojim česticama se radi. Međutim, to nas najčešće neće zanimati. Također valja zapamtiti da niti Lagrangeove koordinate (x_0,y_0,z_0) niti Eulerove (prostorne) koordinate (x,y,z) nisu funkcija vremena, za razliku od položaja čestice fluida koji jest funkcija vremena.

4.4 Operator materijalne derivacije

Za definiranje fizikalnih zakona, trebat će nam znati izračunati brzinu promjene fizikalnog svojstva čestice fluida, što se izražava materijalnom derivacijom. U Lagrangeovom opisu, gdje imamo identifikaciju čestica fluida, materijalna derivacija je jasna sama po sebi. Postavlja se pitanje kako definirati materijalnu derivaciju u Eulerovom opisu, u kojem smo ispustili identifikaciju čestica fluida. Zamislimo sitni mjerni instrument koji se giba brzinom $\vec{u}$ i mjeri vrijednosti polja $\Phi(x, y, z, t)$. U vremenu $\mathrm{d}t$ instrument će prijeći put $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{u}\,\mathrm{d}t$, pa će instrument registrirati promjenu polja Φ zbog proteka vremena $\mathrm{d}t$ i zbog promjene položaja $\mathrm{d}\vec{r}$ $\left(\mathrm{d}x = u_x \mathrm{d}t\ ,\ \mathrm{d}y = u_y \mathrm{d}t\ \text{ i }\ \mathrm{d}z = u_z \mathrm{d}t\right)$.

Totalni prirast funkcije četiriju varijabli je

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\underbrace{\mathrm{d}x}_{u_x \mathrm{d}t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\underbrace{\mathrm{d}y}_{u_y \mathrm{d}t} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\underbrace{\mathrm{d}z}_{u_z \mathrm{d}t} \quad / : \mathrm{d}t$$

Brzina promjene Φ koju mjeri instrument je dakle:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + u_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial t}}_{\substack{\text{lokalna promjena koju} \\ \text{mjeri mirujući instrument}}} + \underbrace{\vec{u} \cdot \nabla \Phi}_{\substack{\text{promjena zbog gibanja} \\ \text{instrumenta}}}$$

Ako želimo da nam instrument mjeri brzinu promjene određene čestice fluida (što je po definiciji materijalna derivacija), on bi se morao gibati zajedno s česticom i cijelo vrijeme mjeriti njeno fizikalno svojstvo Φ. Ako je $\vec{v}$ brzina gibanja čestice, znači da mora vrijediti $\vec{u} = \vec{v}$, pa će u tom slučaju $\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ označavati $\dfrac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t}$; tj.

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t} = \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial t}}_{\substack{\text{lokalna} \\ \text{promjena}}} + \underbrace{v_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}}_{\substack{\text{prijenosna ili konvektivna} \\ \text{promjena}}} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \Phi}$$

Za Φ može stajati bilo koje fizikalno svojstvo, skalarno, vektorsko ili tenzorsko.

Operator materijalne derivacije

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}*}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial *}{\partial t} + v_x \frac{\partial *}{\partial x} + v_y \frac{\partial *}{\partial y} + v_z \frac{\partial *}{\partial z}}$$

- Primjer: Položaj svih čestica fluida je opisan vektorom položaja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, gdje su x , y i z prostorne koordinate. Brzina je materijalna derivacija položaja $\vec{v} = \frac{\mathrm{D}\vec{r}}{\mathrm{Dt}}$, a npr. za v_x komponentu vrijedi

$$v_x = \frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial x}{\partial t} + v_x \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{1} + v_y \frac{\partial x}{\partial y} + v_z \frac{\partial x}{\partial z} = v_x$$

identitet!!

Očito je da iz definicijske jednadžbe za polje brzine dobijemo identitet, što znači da je u Eulerovom pristupu prirodno krenuti od poznatog polja brzine, kao što je u Lagrangeovom pristupu prirodno krenuti od jednadžbi gibanja, čijim se deriviranjem dolazi do brzine i ubrzanja. Naravno da se integriranjem polja brzine u Eulerovom pristupu može doći do jednadžbi gibanja

- Polje ubrzanja je po definiciji $\vec{a} = \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{Dt}}$, ili

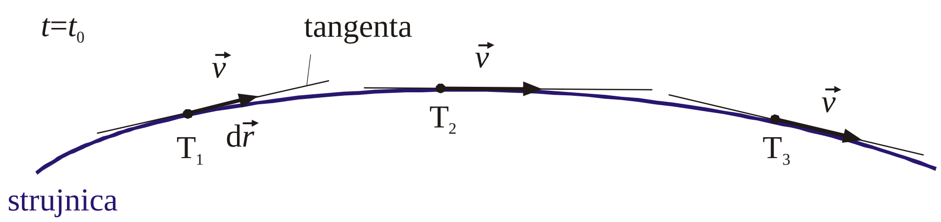
$$a_x = \frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{D}v_y}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\mathrm{D}v_z}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

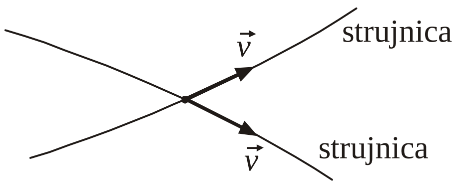
4.5 Strujnica

Strujnice su vektorske krivulje koje služe za vizualizaciju vektorskog polja brzine. To su zamišljene krivulje kojima se u svakoj točki smjer tangente poklapa sa smjerom vektora brzine. Slika strujnica se odnosi na jedan odabrani vremenski trenutak t_0 .



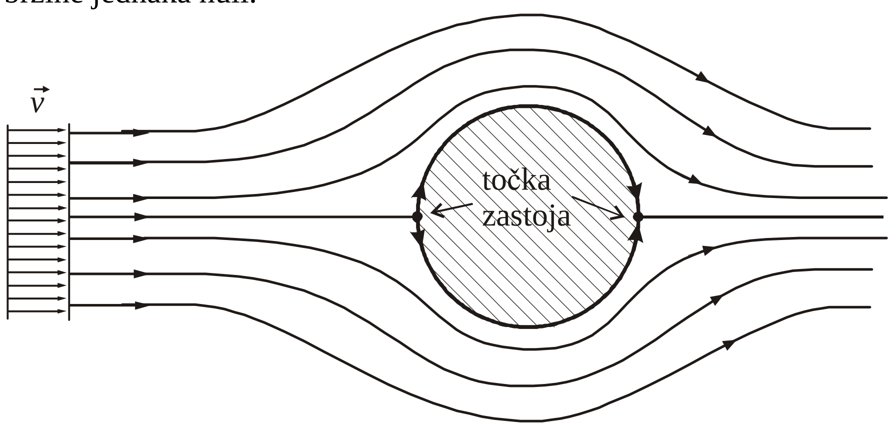
- U stacionarnom strujanju polje brzine nije funkcija vremena, te je slika strujnica vremenski stalna.

- Iz definicije strujnice je jasno da se one ne mogu presijecati jer bi to značilo da čestica fluida ima dva različita vektora brzine.

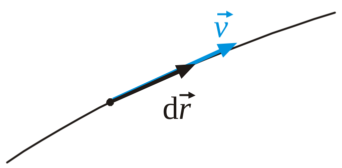


NEFIZIKALNO!

Strujnice se mogu granati i spajati u točkama zastoja, u kojima je apsolutna vrijednost vektora brzine jednaka nuli.



- jednadžba strujnice



$\mathrm{d}\vec{r}$ = usmjereni element strujnice

$\vec{v}$ = vektor brzine

Budući su $\vec{v}$ i $\mathrm{d}\vec{r}$ kolinearni vektori, različitih veličina, može se pisati:

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\lambda\, \vec{v}(\vec{r}, t_0)$$

gdje je λ skalarni parametar, koji zavisi od položaja na strujnici. Oblik strujnice koja prolazi zadanom točkom $T(x_0, y_0, z_0)$ se dobije integriranjem gornje jednadžbe

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda} = v_x(x, y, z, t_0) \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda} = v_y(x, y, z, t_0) \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda} = v_z(x, y, z, t_0) \qquad (3)$$

uz početne uvjete $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$.

- jednadžba trajektorije slijedi iz definicije brzine

$$\frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}t}=v_x\left(x,y,z,t\right) \quad ; \quad \frac{\mathrm{D}y}{\mathrm{D}t}=v_y\left(x,y,z,t\right) \quad ; \quad \frac{\mathrm{D}z}{\mathrm{D}t}=v_z\left(x,y,z,t\right) \qquad (4)$$

gdje je $\mathrm{d}\vec{r}=(\mathrm{D}x,\mathrm{D}y,\mathrm{D}z)$ elementarni pomak čestice fluida, odnosno usmjereni element luka trajektorije. Usporedbom izraza (3) i (4) je jasno da će za slučaj stacionarnog strujanja $\vec{v}=\vec{v}\left(\vec{r}\right)$ rezultat integracije izraza (3) i (4) biti isti ako se krene od iste točke, te se može tvrditi da se u stacionarnom strujanju strujnice i trajektorije poklapaju. Jasno je da se u općem slučaju trajektorije mogu presijecati, jer to znači da su različite čestice prošle istom točkom prostora, a moguće je da i ista čestica fluida u nekom trenutku prođe točkom prostora kojom je već prije prošla. U eksperimentalnoj situaciji strujanje se često vizualizira ispuštanjem obojene tekućine iz određene točke prostora. Krivulja koju opisuju čestice te obojane tekućine u promatranom vremenskom trenutku naziva se krivulja obilježenih čestica. U općem slučaju ove se krivulje razlikuju i od strujnica i od trajektorija, a u stacionarnom strujanju se sve tri krivulje poklapaju. U eksperimentalnoj situaciji bi trajektoriju obilježene čestice mogli dobiti snimanjem s produženom ekspozicijom (npr. svjetla automobila na noćnim razglednicama gradova), a strujnice bi teže odredili. Kada se radi o numeričkim simulacijama strujanja fluida, rezultat su vremenski promjenjiva polja, te se integracijom mogu odrediti sve tri vrste krivulja.