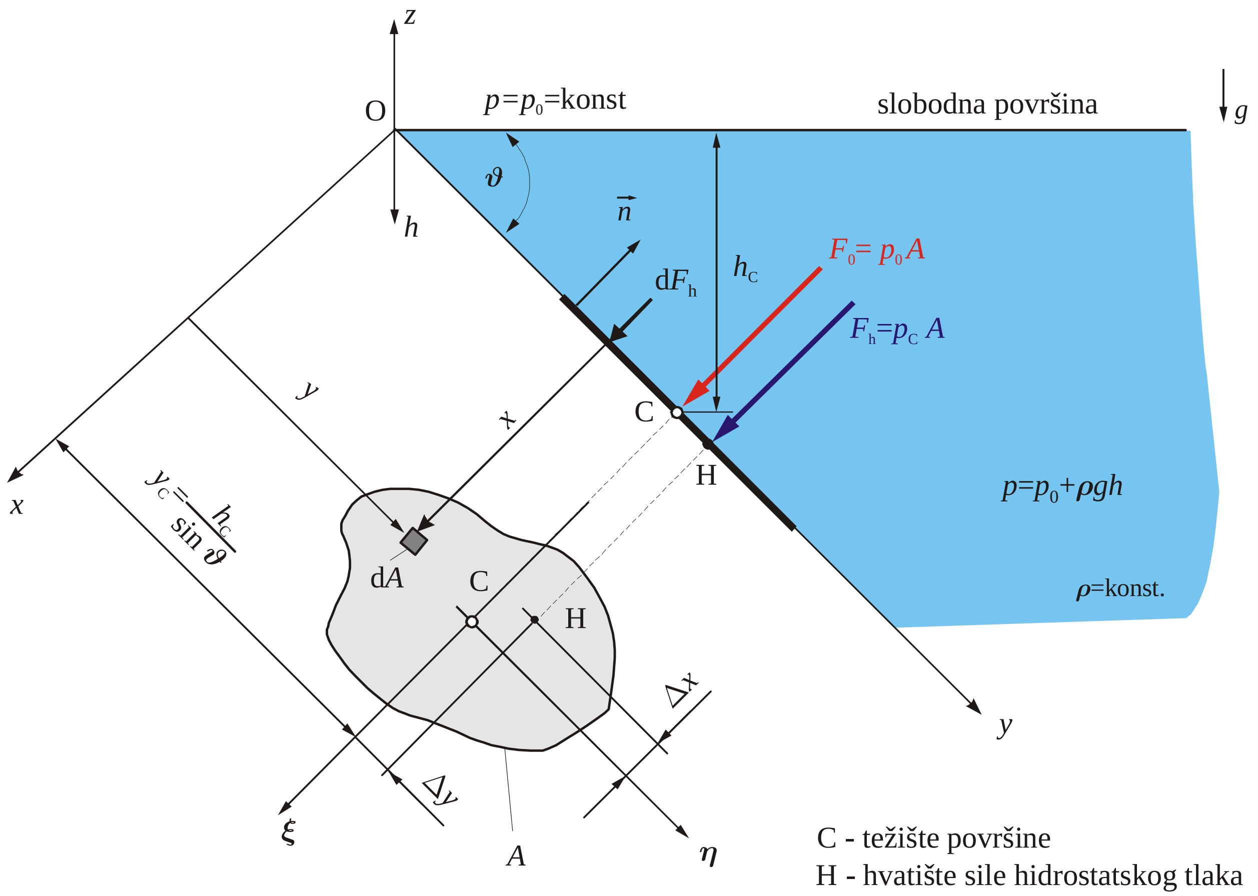
3.4 Sila tlaka na ravne površine

Na ravnoj površini jedinični vektor normale $\vec{n}$ stalan je i po smjeru i po veličini, te se izraz za silu tlaka $\vec{F} = -\int_S p\vec{n}\mathrm{d}S$ na površinu prikazuje integralom $\vec{F} = -\vec{n}\int_A p\mathrm{dA}$.



C - težište površine
H - hvatište sile hidrostatskog tlaka

$$p = \underbrace{p_0}_{\text{konstantni tlak}} + \underbrace{\rho g h}_{\text{hidrostatski tlak}}$$

- Sila $\vec{F}_0$ konstantnog tlaka

$$\vec{F}_0 = -\vec{n}\int_A p_0 \mathrm{d}A\,, \qquad p_0\text{=konst}$$

$$\boxed{\vec{F}_0 = -p_0 A\vec{n}},$$

$F_0 = p_0 A$, iznos sile konstatnog tlaka

Sila $\vec{F}_0$ konstantnog tlaka na ravnu površinu jednaka je umnošku tlaka i njene ploštine, djeluje u težištu C površine, paralelna je s pravcem normale, a suprotno orijentirana u odnosu na normalu.

➢ Sila $\vec{F}_h$ linearno promjenjivog hidrostatskog tlaka $p = \rho g h$

Sila dF_h na element površine dA

$$\mathrm{d}\vec{F}_h = -p_h \vec{n}\,\mathrm{d}A = -\rho g h \vec{n}\,\mathrm{d}A = -\vec{n}\,\rho g\, y \sin\vartheta \mathrm{d}A$$

$$\vec{F}_h = -\vec{n}\,\rho g \sin\vartheta \underbrace{\int_A y \mathrm{d}A}_{y_\mathrm{C} A} = -\vec{n}\,\rho g \sin\vartheta y_\mathrm{C} A = -\vec{n}\,\underbrace{\rho g h_\mathrm{C}}_{p_\mathrm{C}} A;$$

$$\boxed{\vec{F}_h = -p_\mathrm{C}\,\vec{n}\,A};$$

$p_\mathrm{C} = \rho g h_\mathrm{C}$ hidrostatski tlak u težištu C površine

$\int_A y \mathrm{d}A = y_\mathrm{C} A$ statički moment povšine A,

$y_\mathrm{C} = h_\mathrm{C} / \sin\vartheta$ udaljenost težišta C od slobodne površine, mjereno u ravnini u kojoj se nalazi površina (udaljenost $\overline{\mathrm{OC}}$ prema slici).

$\underline{F_h = p_\mathrm{C}\, A = \rho g h_\mathrm{C} A}$, h_C - dubina na kojoj se nalazi težište C površine A.

- Sila $\vec{F}_h$ na ravnu površinu će po iznosu biti jednaka umnošku tlaka p_C, koji vlada u težištu C površine i ploštine površine.
Položaj hvatišta sile $\vec{F}_h$ određujemo iz uvjeta da je moment rezultante jednak sumi momenata komponenti. Ovdje to znači da moment sile $\vec{F}_h$ mora biti jednak sumi momenata elementarnih sila d$\vec{F}_h$ koje čine silu $\vec{F}_h$. Suma momenata elementarnih sila s obzirom na os Ox

$$M = \int_A y\,\mathrm{d}F_h = \int_A y \rho g \sin\vartheta y\,\mathrm{d}A = \rho g \sin\vartheta \underbrace{\int_A y^2\,\mathrm{d}A}_{I_{xx}} = \rho g \sin\vartheta \cdot I_{xx}$$

mora biti jednak momentu rezultantne sile F_h s obzirom na os Ox

$$M = y_\mathrm{H} \cdot F_h = y_\mathrm{H} \cdot \rho g \sin\vartheta\, y_\mathrm{C} A$$

Iz jednakosti momenata slijedi: $y_\mathrm{H} = \dfrac{I_{xx}}{y_\mathrm{C} A}$

$I_{xx} = \int_A y^2 \mathrm{d}A$ - moment tromosti površine A s obziom na os Ox

Primjenom Steinerovog pravila $I_{xx} = y_\mathrm{C}^2 A + I_{\xi\xi}$ dobiva se

$y_\mathrm{H} = y_\mathrm{C} + \dfrac{I_{\xi\xi}}{y_\mathrm{C} A}$, $I_{\xi\xi}$ - moment tromosti površine A s obziom na os Cξ

Pomak Δy točke H u odnosu na težište C površine

$$\boxed{\Delta y = \frac{I_{\xi\xi}}{y_\mathrm{C} A}}$$

Analogno se dobije i položaj hvatišta s obzirom na os Oy.

Suma momentata elementarnih sila $\mathrm{d}\vec{F}_h$ s obzirom na os Oy

$$M=\int_A x\,\mathrm{d}F_h=\int_A x\rho g\sin\vartheta\, y\,\mathrm{d}A=\rho g\sin\vartheta\underbrace{\int_A xy\,\mathrm{d}A}_{I_{xy}}=\rho g\sin\vartheta\cdot I_{xy}$$

jednaka je momentu rezultantne sile F_h s obzirom na os Oy

$$M=x_\mathrm{H}\cdot F_h=x_\mathrm{H}\cdot\rho g\sin\vartheta\, y_\mathrm{C}A$$

Iz jednakosti momenata slijedi: $x_\mathrm{H}=\dfrac{I_{xy}}{y_\mathrm{C}A}$

$I_{xy}=\int_A xy\mathrm{d}A$ - centrifugalni moment tromosti površine A s obziom na os Oy

Primjenom Steinerovog pravila $I_{xy}=x_\mathrm{C}y_\mathrm{C}A+I_{\xi\eta}$ dobiva se

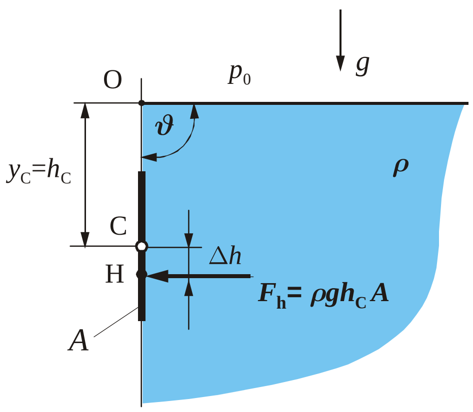
$x_\mathrm{H}=x_\mathrm{C}+\dfrac{I_{\xi\eta}}{y_\mathrm{C}A}$, $I_{\xi\eta}$ - centrifugalni moment tromosti površine A s obziom na os Cη

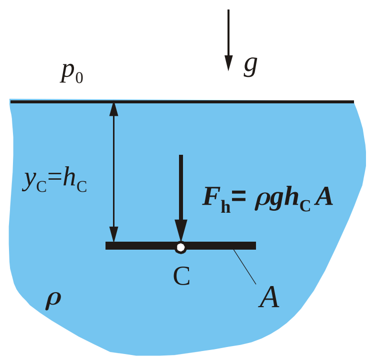
Pomak Δx hvatišta H sile F_h u odnosu na težište C površine

$$\boxed{\Delta x=\frac{I_{\xi\eta}}{y_\mathrm{C}A}}$$

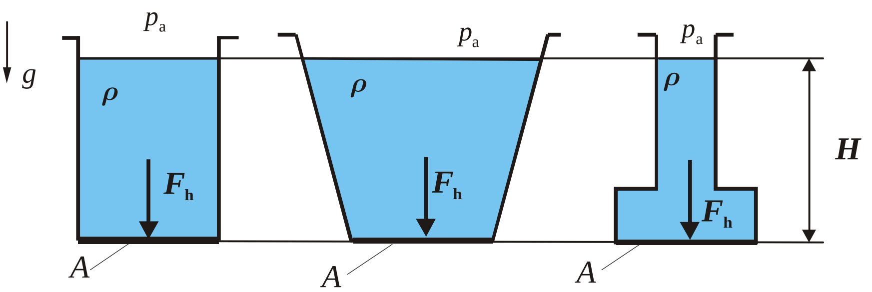
Sila hidrostatskog tlaka F_h djeluje okomito na ravnu površinu u točki H (x_H, y_H), a usmjerena je suprotno od vektora normale.

Za vertikalno uronjenu površinu prema slici vrijedi $y_\mathrm{C}=h_\mathrm{C}$. Za horizontalno uronjenu površinu ($\vartheta=0$) $y_\mathrm{C}\to\infty$ pa su prema gornjim izrazima $\Delta x=\Delta y=0$, te će sila F_h djelovati u težištu površine, kao i za slučaj konstantnog tlaka p_0.

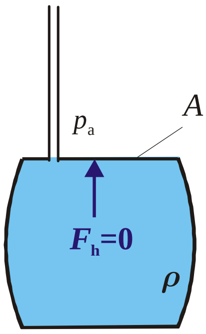




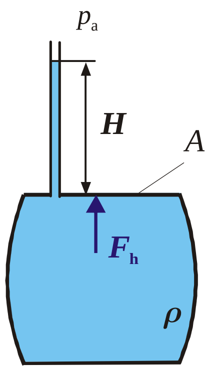
Hidrostatski paradoks: Sila tlaka na horizontalno dno posude zavisi od dubine fluida u posudi i ploštine dna posude, a ne zavisi o oblika posude



Sile hidrostatskog tlaka $F_h = \rho g H A$ na dna svih posuda, prema slici, su jednake. Zapamtimo: u svim je slučajevima sila tlaka na dno posude jednaka težini fluida koji bi se nalazio u volumenu *AH* od dna posude do slobodne površine (bez obzira što u trećem slučaju toliko fluida niti nema u posudi).



$F_h = 0$



$F_h = \rho g H A$

Npr:

$\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$

$g = 10\ \mathrm{m/s^2}$

$H = 1\ \mathrm{m}$

$A = 0{,}5\ \mathrm{m^2}$

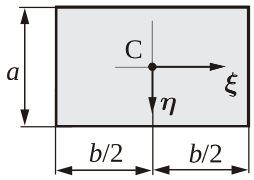
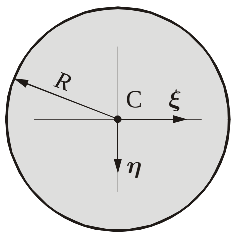
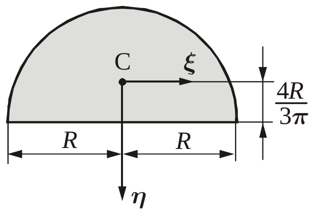
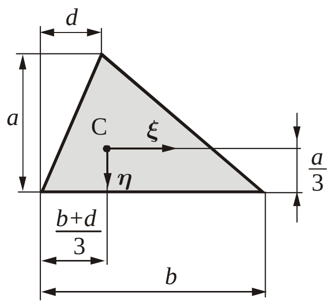
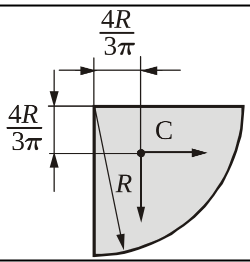
$F_h = 5000\ \mathrm{N}$

Momenti M_x i M_y sile hidrostatskog tlaka u odnosu na težište C površine ne zavise od dubine na kojoj se težište nalazi

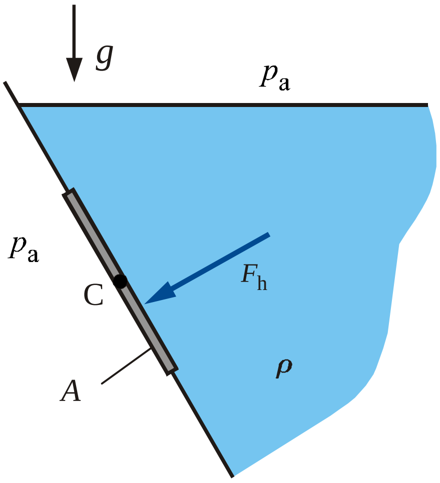
$$M_x = F_h \cdot \Delta y = \rho g h_C A \cdot \frac{I_{\xi\xi}}{y_C \cdot A} = \rho g I_{\xi\xi} \sin\vartheta$$

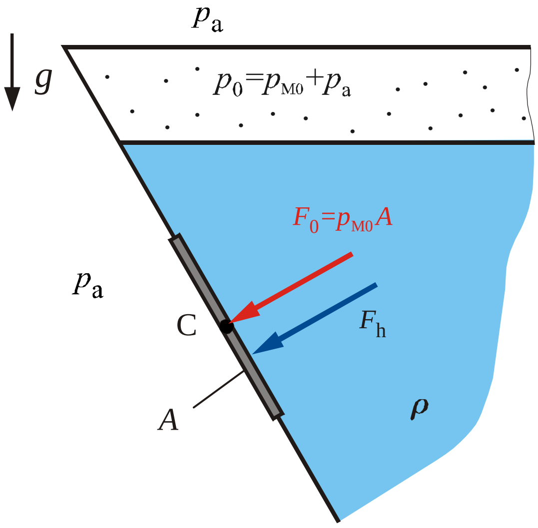
$$M_y = F_h \cdot \Delta x = \rho g h_C A \cdot \frac{I_{\xi\eta}}{y_C \cdot A} = \rho g I_{\xi\eta} \sin\vartheta$$

Izrazi za izračunavanje položaja težišta i momenta inercije za uobičajene površine su dani u sljedećoj tablici

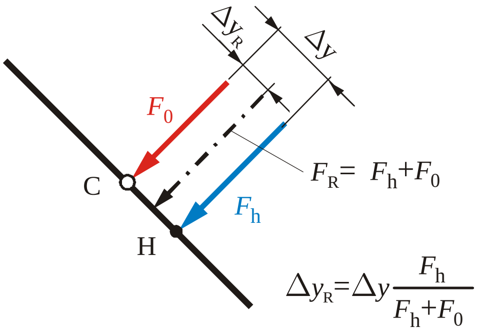
Geometrijski lik	Površina	$I_{\xi\xi}$	$I_{\eta\eta}$	$I_{\xi\eta}$
	$A = ab$	$\frac{ba^3}{12}$	$\frac{ab^3}{12}$	0
	$A = R^2\pi$	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	0
	$A = \frac{1}{2}R^2\pi$	$0{,}1098R^4$	$0{,}3927R^4$	0
	$A = \frac{ab}{2}$	$\frac{ba^3}{36}$		$\frac{ba^2}{72}\left(b-2d\right)$
	$A = \frac{1}{4}R^2\pi$	$0{,}05488R^4$	$0{,}05488R^4$	$-0{,}01647R^4$

-Ako je tlak s obje strane površine isti (slučaj otvorenog spremnika), sile konstantnog tlaka se poništavaju.
-Za slučaj zatvorenog spremnika rezultantna sila konstantnog tlaka se računa s manometarskim tlakom p_{M0} u spremniku (čime je obračunata i vanjska sila atmosferskog tlaka).

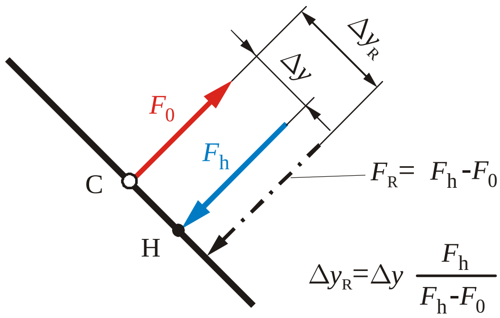




Položaj rezultantne sile F_R=F_h+F_0 za slučaj istosmjernih i mimosmjernih sila F_0 i F_h.

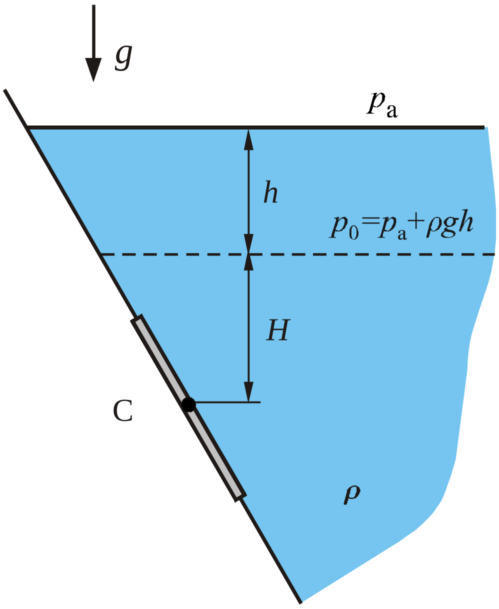


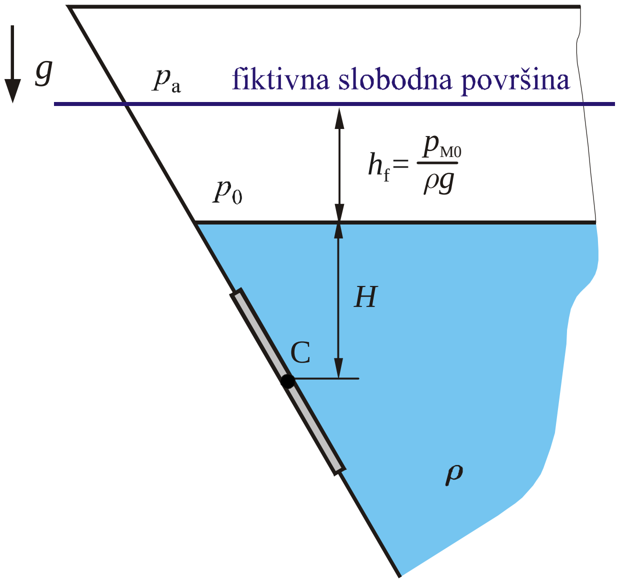
a) istosmjerne sile



b) mimosmjerne sile

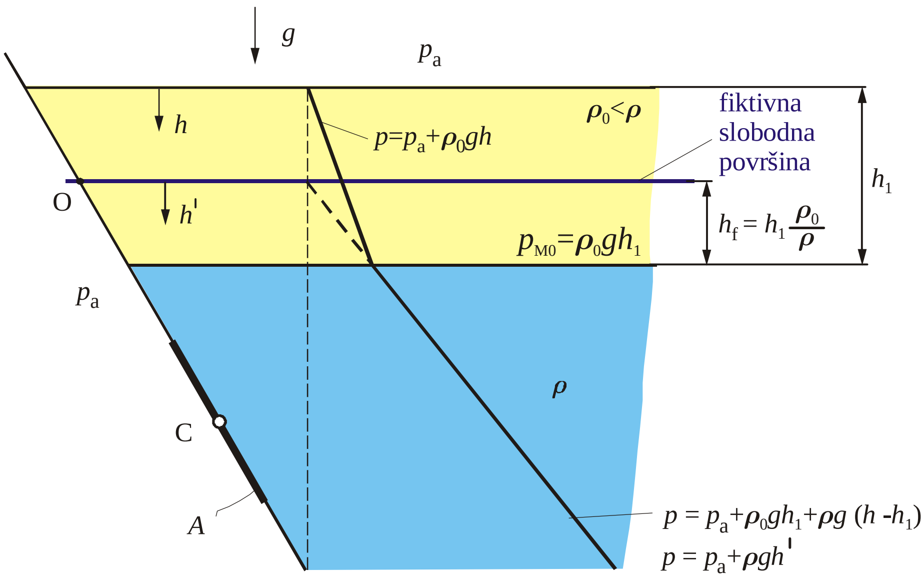
Računanje sile konstantnog tlaka (u slučaju da je površina potpuno uronjena u fluid) može se izbjeći uvođenjem fiktivne slobodne površine. Fiktivna slobodna površina je udaljena od stvarne slobodne površine za visinu manometarskog tlaka $h_f = p_{M0}/\rho g$ (za slučaj pretlaka je iznad, a za slučaj podtlaka ispod stvarne slobodne površine). Iznad fitktivne slobodne površine vlada atmosferski tlak. Ako fiktivna slobodna površina padne ispod težišta C površine, dubina h postaje negativna, a svi izrazi i dalje vrijede. U slučaju da fiktivna slobodna površina prolazi težištem površine, sila hidrostatskog tlaka jednaka je nuli, ali moment sile hidrostatskog tlaka nije nula (ostaje spreg sila).



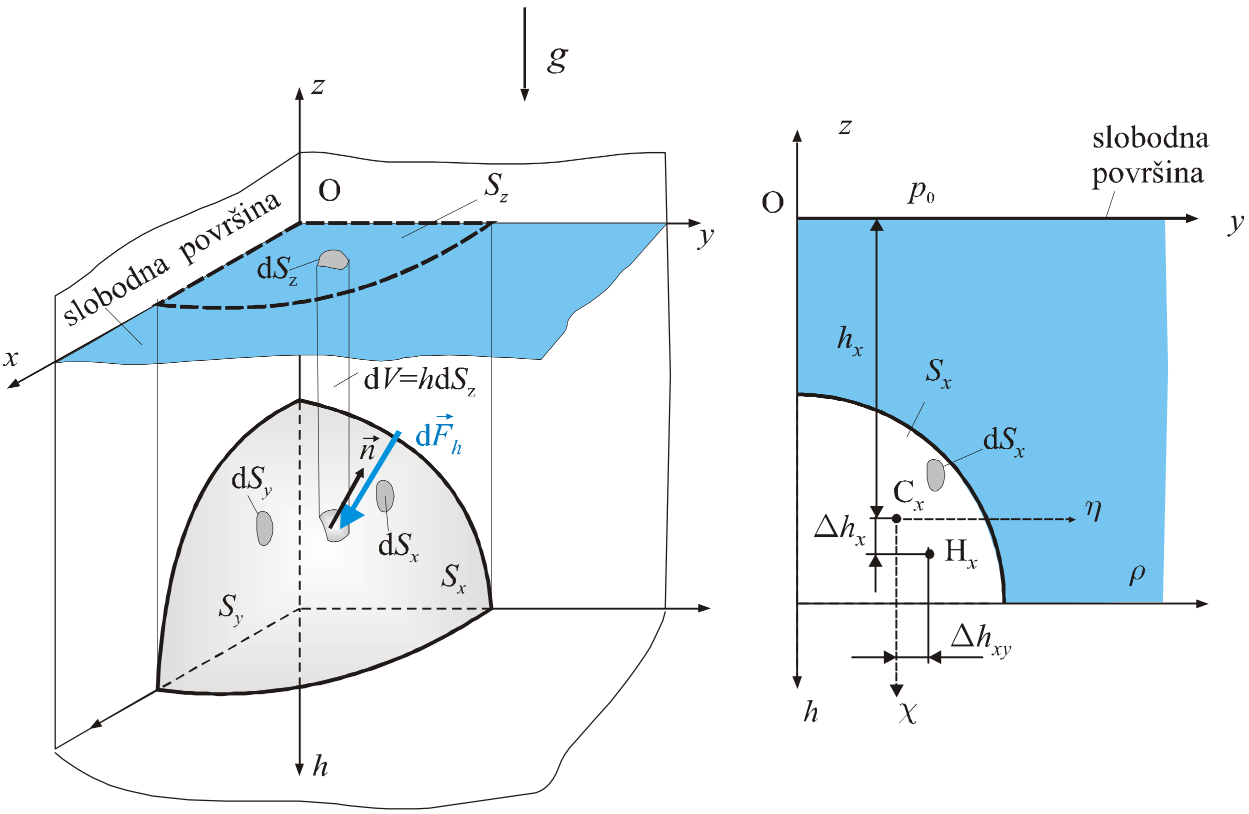


$$F_h=\rho g\left(h_f+H\right)A$$

Fiktivna slobodna površina se može uvesti i za slučaj mirovanja dvaju fluida različitih gustoća prema slici.



3.5 Sila tlaka na zakrivljene površine



Sila tlaka na zakrivljenu površinu potopljenu u nestlačivi fluid u mirovanju je definirana izrazom

$$\vec{F} = -\int_S p\vec{n}\mathrm{d}S$$

Sila tlaka na zakrivljenu površinu se razlaže na komponente u smjerovima osi. U praktičnom postupku proračuna određuju se dvije horizontalne komponente sile tlaka F_x i F_y i vertikalna komponenta F_z.

Na slici je prikazana zakrivljena površina S uronjena u nestlačivi fluid gustoće ρ. Skalarnim množenjem gornje jednadžbe s jediničnim vektorima $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ dobivaju se izrazi za komponente F_x, F_y i F_z sile tlaka na površinu S

$$F_x = -\int_{S_x} p\mathrm{d}S_x$$

$$F_y = -\int_{S_y} p\mathrm{d}S_y$$

$$F_z = -\int_{S_z} p\mathrm{d}S_z$$

gdje su:

$$\mathrm{d}S_x = \mathrm{d}S\cos(n,x)$$

$$\mathrm{d}S_y = \mathrm{d}S\cos(n,y)$$

$$\mathrm{d}S_z = \mathrm{d}S\cos(n,z)$$

Element površine dS je uvijek pozitivna veličina, a projekcije tog elementa dS_x, dS_y i dS_z mogu biti pozitivne, negativne ili jednake nuli što zavisi od kosinusa kutova što ih vektor normale zatvara sa pozitivnim smjerovima koordinatnih osi. Ako je taj kut manji od 90^o projekcija površine je pozitivna, a ako je taj kut veći od 90^o projekcija je negativna; za kut jednak 90^o projekcija bi bila jednaka nuli.
S_x, S_y i S_z su projekcije zakrivljene površine S na koordinatne ravnine, a također mogu biti pozitivne, negativne ili jednake nuli.

- Izrazi za komponente F_x^0, F_y^0, F_z^0 sile $\vec{F}_0$ uslijed konstantnog tlaka p_0

$$F_x^0 = -p_0 S_x; \qquad F_y^0 = -p_0 S_y; \qquad F_z^0 = -p_0 S_z$$

$$S_x, S_y, S_z > 0 \Rightarrow F_x^0, F_y^0, F_z^0 < 0$$

Očito će na negativnim projekcijama površina sile djelovati u pozitivnim smjerovima osi i obrnuto. Hvatišta tih komponenata nalaze se u težištima C_x, C_y i C_z projekcija S_x, S_y i S_z.

- Postupak određivanja komponenti F_x i F_y sile $\vec{F}$ uslijed hidrostatskog tlaka $p_h = \rho g h$ je analogan postupku određivanja sile na ravnu površinu (projekcije S_x i S_y su ravne vertikalne površine)

-Izrazi za horizontalne komponente F_x i F_y sile uslijed promjenjivog hidrostatskog tlaka $p_h = \rho g h$ i za pomake hvatišta tih komponenti u odnosu na težišta projekcija su:

$$F_x = -p_{Cx} \cdot S_x = -\rho g h_x S_x \qquad F_y = -p_{Cy} \cdot S_y = -\rho g h_y S_y$$

$$\Delta h_x = \frac{I_{\eta\eta}}{h_x \cdot |S_x|} \qquad \Delta h_y = \frac{I_{\xi\xi}}{h_y \cdot |S_y|}$$

$$\Delta h_{xy} = \frac{I_{\eta\chi}}{h_x \cdot |S_x|} \qquad \Delta h_{yx} = \frac{I_{\xi\chi}}{h_y \cdot |S_y|}$$

$$S_x, S_y > 0 \Rightarrow F_x, F_y < 0$$

Vertikalna komponenta F_z sile hidrostatskog tlaka na zakrivljenu površinu S

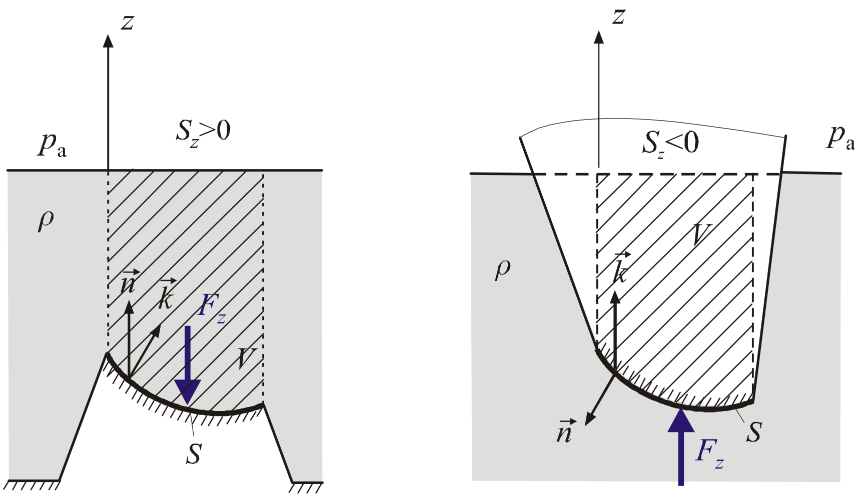
$$F_z = -\int_{S_z} p \mathrm{d}S_z ,$$

$$F_z = -\rho g \underbrace{\int_{S_z} h \mathrm{d}S_z}_{V} ,$$

$$F_z = \mp \rho g V$$

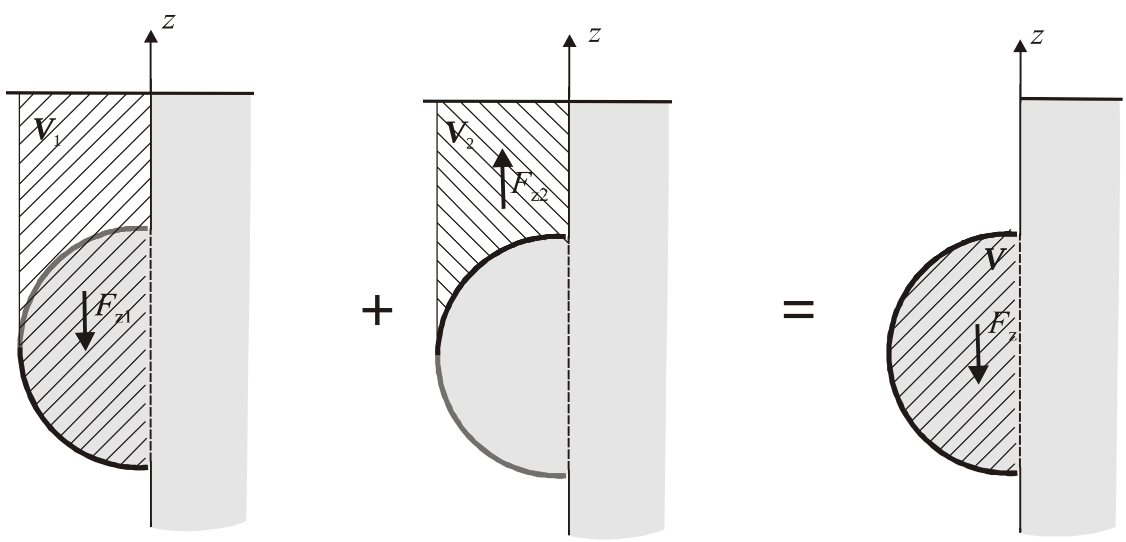
- Vertikalna komponenta F_z je po veličini jednaka težini fluida koji se nalazi u volumenu V između površine S i slobodne površine. Sila F_z prolazi težištem volumena V. Predznak komponente sile F_z ovisi o predznaku projekcije S_z, te se može pisati da je $F_z = -\rho g V$ predznak(S_z)

Negativni predznak se odnosi na slučaj pozitivne projekcije površine S_z (fluid je iznad površine *S*), a pozitivni predznak za slučaj negativne projekcije S_z (fluid je ispod površine *S*).



$$F_z = \rho g V$$

Na dijelu površine *S* na kojem se vertikalna projekcija S_z površine poništava, vertikalne komponente F_z sile hidrostatskog tlaka se samo djelomično poništavaju.



$F_{z1} = -\rho g V_1$ predznak(S_{z1})
$F_{z1} = -\rho g V_1 \cdot (+1)$
$F_{z1} = -\rho g V_1$

$F_{z2} = -\rho g V_2$ predznak(S_{z2})
$F_{z2} = -\rho g V_1 \cdot (-1)$
$F_{z2} = +\rho g V_2$

$F_z = \rho g V$

3.6 Sila uzgona

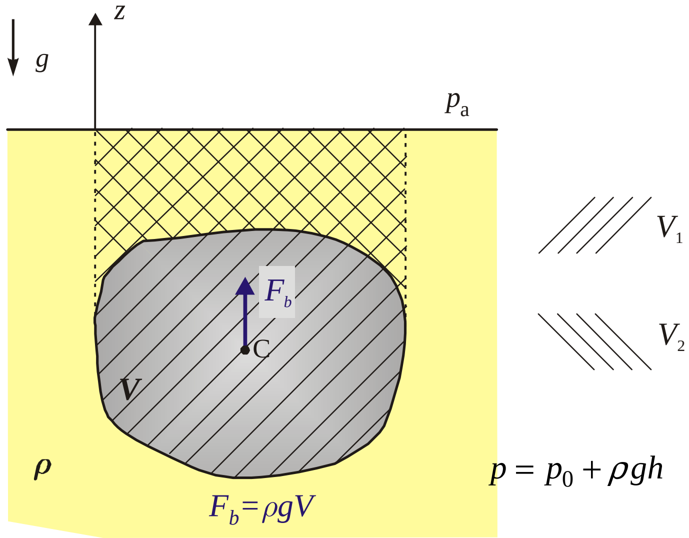
Sila uzgona je rezultat djelovanja sila tlaka po površini tijela uronjenog u fluid.
S- zatvorena površina

$$\vec{F}_b = -\int_S p\vec{n}\mathrm{d}S = -\int_V \mathrm{grad}p\,\mathrm{d}V = \rho g\vec{k}\int \mathrm{d}V = \rho g V\vec{k}\,; \quad \rho \text{ - gustoća fluida, } V \text{ – volumen tijela}$$

Sila uzgona je jednaka težini fluida istisnutog tijelom (težini istisnine), djeluje vertikalno u vis i prolazi težištem istisnine.

Sila uzgona je vertikalna komponenta sile hidrostatskog tlaka na tijelo uronjeno u fluid.

- Horizontalne komponente sile hidrostatskog tlaka na tijelo međusobno se poništavaju (S_x=S_y=0)
- Sile uslijed konstantnog tlaka p_0 na tijelo međusobno se poništavaju.



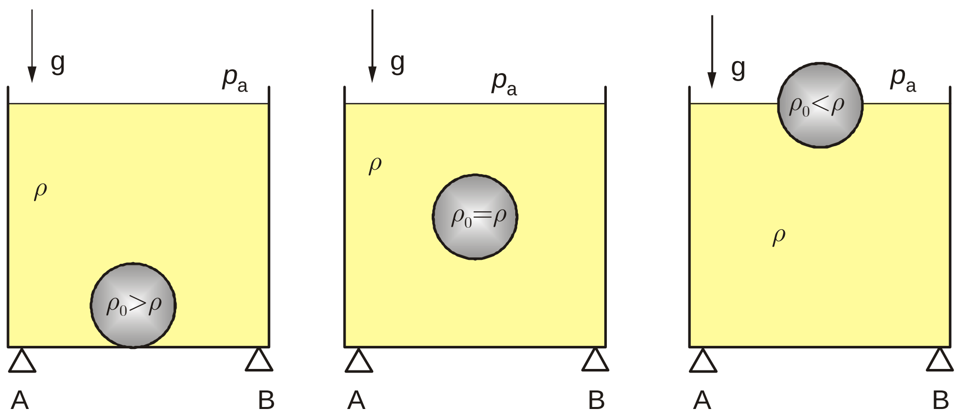
$$F_{z1} = -\rho g V_1 \cdot \mathrm{predznak}(S_{z1})$$
$$F_{z1} = +\rho g V_1$$

$$F_{z2} = -\rho g V_2 \cdot \mathrm{pred}(S_{z2})$$
$$F_{z2} = -\rho g V_2$$

$$F_b = F_{z1} + F_{z2}$$

$$F_b = \rho g V$$

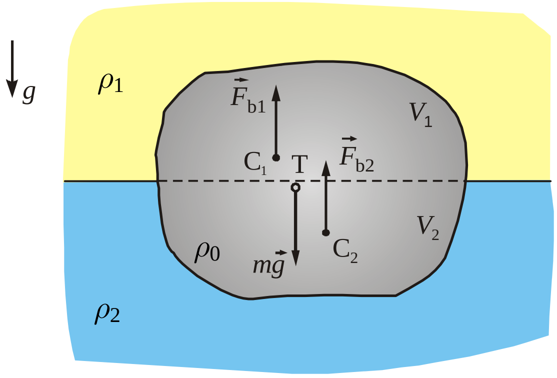
Hvatište sile uzgona je težište volumena tijela.



$G > F_b$ tijelo tone $\qquad$ $G = F_b$ tijelo lebdi $\qquad$ $G < F_b$ tijelo pliva

Sila uzgona na granici dvaju fluida

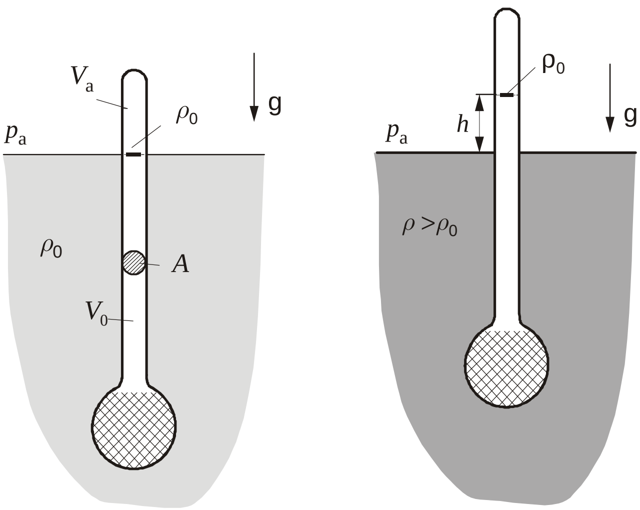
Slika prikazuje slučaj plivanja tijela mase m, gustoće ρ_0 na razdjelnoj površini dvaju fluida gustoća ρ_1 i ρ_2. Točke C_1 i C_2 su težišta volumena istisnine V_1 i V_2, a T je težište tijela.



Sila F_b uzgona je zbroj $F_b = F_{b1} + F_{b2} = \rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2$

Uvjet plivanja (ravnoteže) je da su rezultantna sila (tj. $F_b = mg$) i rezultantni moment na tijelo jednaki nuli (tj. suma momenata sila F_{b1} i F_{b2} u odnosu na težište tijela mora biti jednaka nuli). Jasno je da vrijedi $\rho_2 > \rho_0 > \rho_1$. Za slučaj $\rho_2 >> \rho_1$ sila F_{b2} se zanemaruje.

AREOMETAR – instrument za mjerenje gustoće kapljevine koji radi na principu hidrostatskog uzgona



$$h = \frac{V_0}{A}\frac{\rho - \rho_0}{\rho - \rho_a}$$