- Orijentirani element površine

$$\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S$$

npr. $\int_S \mathrm{d}S = S$

$\int_S \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \vec{n}\,\mathrm{d}S = 0 \quad \rightarrow$ Lako se dokaže primjenom Gaussove formule:

$$\int_S \vec{n}\,\varphi\,\mathrm{d}S = \int_V \nabla\varphi\,\mathrm{d}V$$

Za $\varphi = 1$

$$\int_S \vec{n}\,\mathrm{d}S = \int_V \underbrace{\nabla 1}_{=0}\mathrm{d}V = 0$$

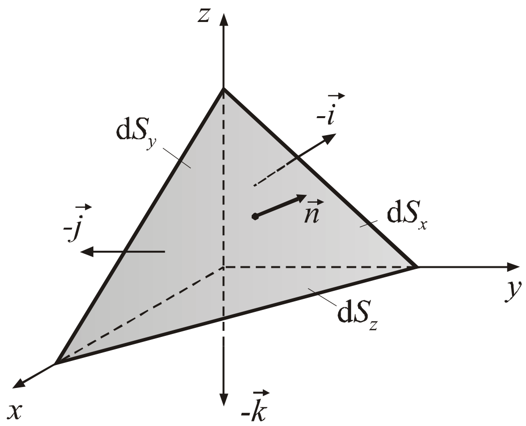
$$\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S$$

$$\mathrm{d}S_x\vec{i} + \mathrm{d}S_y\vec{j} + \mathrm{d}S_z\vec{k} = \left(n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k}\right)\mathrm{d}S$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{d}S_x &= n_x\mathrm{d}S \\ \mathrm{d}S_y &= n_y\mathrm{d}S \\ \mathrm{d}S_z &= n_z\mathrm{d}S \end{aligned}}$$

Površina $\mathrm{d}S$ je uvijek pozitivna, a komponente $\mathrm{d}S_x, \mathrm{d}S_y, \mathrm{d}S_z$ mogu biti i negativne ili jednake nuli, zavisno od normale.

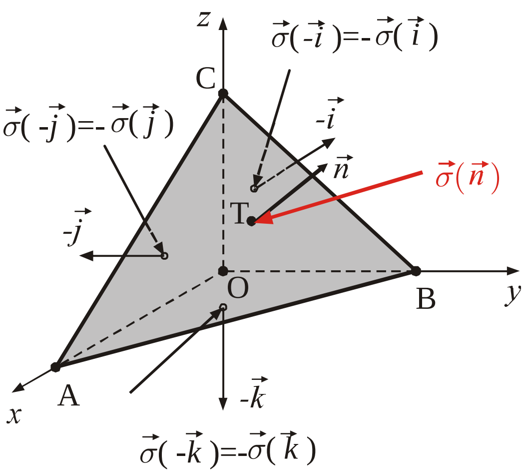
npr. $\mathrm{d}S_x = \mathrm{d}S\,n_x = \underbrace{\cos\left(\vec{n}, x\right)}_{\substack{>0 \\ =0 \\ <0}}\mathrm{d}S$




Komponente površine $\mathrm{d}S$ su projekcije $\mathrm{d}S_x, \mathrm{d}S_y, \mathrm{d}S_z$ koje se dobiju projiciranjem površine $\mathrm{d}S$ gledano iz pozitivnog smjera pripadajuće osi .

U ovom primjeru su sve projekcije pozitivne jer normala sa svim osima čini kut manji od 90 stupnjeva.

- Primjena II. Newtonovog zakona na element fluida oblika tetraedra




ABC $= \Delta S =$ baza tetraedra

OT $= h =$ visina tetraedra

$\Delta V = \frac{1}{3}\Delta S \cdot h =$ volumen tetraedra

$\rho\,\mathrm{d}V = \Delta m =$ masa tetraedra

II. Newtonov zakon $\Delta m\,\vec{a} = \Sigma\Delta\vec{F}$

$$\overbrace{\frac{1}{3}\rho\,\Delta S\,h}^{\Delta m}\,\vec{a} = \underbrace{\overbrace{\frac{1}{3}\rho\,\Delta S\,h}^{\Delta m}\,\vec{f}}_{\text{masene sile}} + \underbrace{\vec{\sigma}(\vec{n})\Delta S - \vec{\sigma}(\vec{i})\overbrace{\Delta S_x}^{\Delta S\,n_x} - \vec{\sigma}(\vec{j})\overbrace{\Delta S_y}^{\Delta S\,n_y} - \vec{\sigma}(\vec{k})\overbrace{\Delta S_z}^{\Delta S\,n_z}}_{\text{površinske sile}}$$

U graničnom prijelazu $\Delta S \to 0$ i $h \to 0$ (tetraedar sažimamo u točku 0) gornja jednadžba prelazi u

$$\boxed{\vec{\sigma}(\vec{n}) = \vec{\sigma}(\vec{i})\,n_x + \vec{\sigma}(\vec{j})\,n_y + \vec{\sigma}(\vec{k})\,n_z}$$

Zaključak: Vektor naprezanja $\vec{\sigma}(\vec{n})$ na površini orijentiranoj normalom $\vec{n}$ definiran je trima vektorima naprezanja na površinama orijentiranim normalama u smjerovima osi koordinatnog sustava. Vektori $\vec{\sigma}(\vec{i}), \vec{\sigma}(\vec{j})$ i $\vec{\sigma}(\vec{k})$ čine tenzor naprezanja. Svaki od tih vektora može se prikazati komponentama. Komponente vektora naprezanja označujemo s dva slova od kojih se prvo slovo odnosi na površinu, a drugo na smjer.

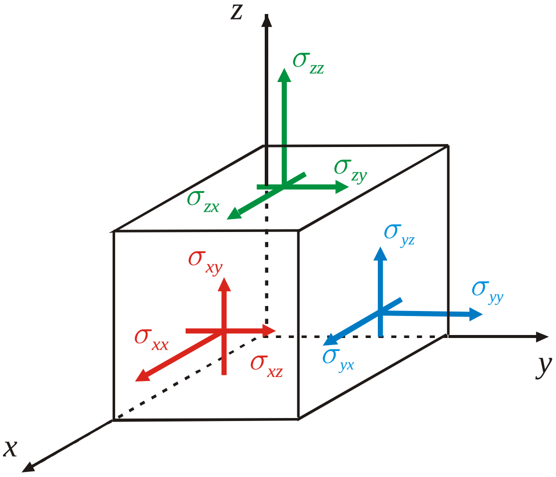
$$\vec{\sigma}(\vec{i}) = \sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{xy}\vec{j} + \sigma_{xz}\vec{k}$$

$\downarrow$

Npr. površina orijentirana normalom $\vec{i}$

prvi indeks označava površinu

drugi indeks označava smjer




Dogovor: Komponente vektora slažemo u tablicu tenzora naprezanja tako da svaki redak tenzora označuje komponente jednog vektora naprezanja.

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \begin{matrix} :\vec{\sigma}(\vec{i}) \\ :\vec{\sigma}(\vec{j}) \\ :\vec{\sigma}(\vec{k}) \end{matrix}$$

Jednom kada poznamo tenzor naprezanja u nekoj točki prostora možemo odrediti vektor naprezanja na bilo kojoj površini (orijentiranoj bilo kojom normalom $\vec{n}$) koja prolazi tom točkom. Prethodno izvedeni izraz prelazi u

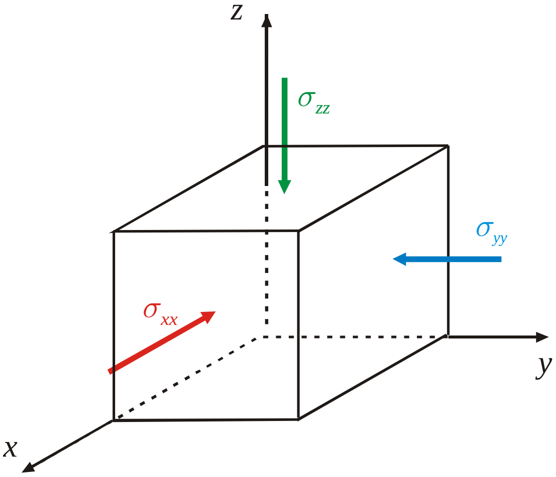
$$\boxed{\vec{\sigma}(\vec{n}) = \vec{n}\cdot\mathbf{T}}$$ veza između vektora i tenzora naprezanja

- Komponente tenzora na glavnoj dijagonali označuju normalna naprezanja. Dogovor: pozitivna normalna naprezanja su vlačna, a negativna su tlačna.
- Komponente tenzora naprezanja izvan glavne dijagonale su smična ili tangencijalna naprezanja. Dogovor: pozitivna smična naprezanja na površinama orijentiranim normalama u pozitivnim smjerovima osi, također gledaju u pozitivnim smjerovima osi i obrnuto. Komponente smičnih naprezanja ponekad se označuju s $\tau$.

Primjenom jednadžbe momenta količine gibanja na prije definirani elementarni tetraedar dobije se $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ ; $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ ; $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$ ; tj. zaključuje se da je tenzor naprezanja simetričan.

1) Stanje naprezanja u mirujućem fluidu i idealnom fluidu – nema tangencijalnih naprezanja

element fluida




1) Fluid ne trpi vlačna naprezanja.

2) Pri rotaciji elementa ne smiju se pojaviti smična naprezanja, pa mora biti

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$$
$$p = \text{tlak},\quad p > 0$$

- tenzor naprezanja

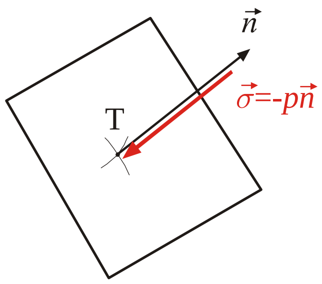
$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix} = -p \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}^{\text{jedinična matrica } \mathbf{I}} = -p\,\mathbf{I}$$

- vektor naprezanja u fluidu u mirovanju

$$\vec{\sigma} = \vec{n} \cdot \mathbf{T} = \left(n_x, n_y, n_z\right) \begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix} = -pn_x\vec{i} - pn_y\vec{j} - pn_z\vec{k}$$

$\boxed{\vec{\sigma} = -p\vec{n}}$

Vektor naprezanja djeluje uvijek okomito na površinu suprotno od vanjske normale.



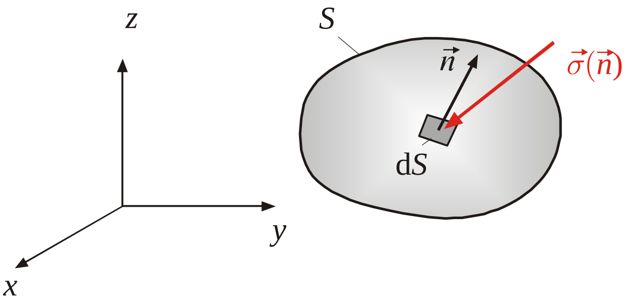

2) Stanje naprezanja u realnom fluidu – postoje tangencijaln naprezanja uslijed viskoznosti fluida. Izdvojit ćemo dio s tlakom

$$\mathbf{T} = -p\,\mathbf{I} + \underbrace{\mathbf{\Sigma}}_{\text{viskozne sile}} = \begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} & \Sigma_{xz} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} & \Sigma_{yz} \\ \Sigma_{zx} & \Sigma_{zy} & \Sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

- Vektor naprezanja

$$\vec{\sigma} = \vec{n} \cdot \mathbf{T} = \underbrace{-p\vec{n}}_{\substack{\text{tlačno} \\ \text{naprezanje}}} + \underbrace{\vec{\sigma}_f}_{\substack{=\vec{n}\cdot\mathbf{\Sigma} \\ \text{viskozno} \\ \text{naprezanje}}}$$

- Površinska sila izražena volumenskim integralom




$$\mathrm{d}\vec{F} = \vec{\sigma}\,dS = \overbrace{\vec{n}\cdot\mathbf{T}}^{\vec{\sigma}}\,\mathrm{d}S \quad \Big/ \int_S$$

$$\vec{F} = \int_S \vec{n}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}S = \int_V \underbrace{\nabla\cdot\mathbf{T}}_{\substack{\text{divergencija}\\ \text{tenzora}\\ \text{naprezanja}}}\,\mathrm{d}V = \text{rezultirajuća površinska sila na površinu S}$$

$$\lim_{\substack{V\to\mathrm{d}V\\ F\to\mathrm{d}F}} \;\rightarrow\; \underbrace{\mathrm{d}\vec{F}}_{\substack{\text{rezultantna}\\ \text{površinska}\\ \text{sila na d}V}} = \nabla\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}V \;\text{ ili }\; \nabla\cdot\mathbf{T} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}V}$$

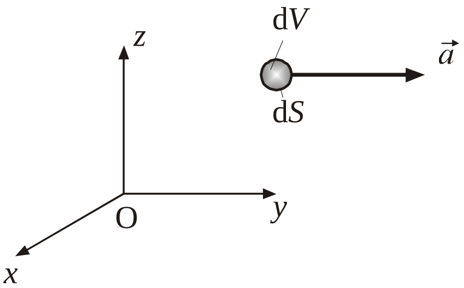
$\nabla\cdot\mathbf{T} =$ površinska sila na d$V$ izražena po jediničnom volumenu (volumenska gustoća površinske sile)

- slučaj $\mathbf{T} = -p\,\mathbf{I} \;\Rightarrow\; \nabla\cdot\mathbf{T} = -\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} = -\mathrm{grad}\,p = -\nabla\,p$

Npr. $p = \text{konst.} \qquad \nabla p = 0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{F} = 0$

Zaključak: Sila konstantnog tlaka na zatvorenu površinu $S$ jednaka je nuli.

- Jednadžba gibanja čestice idealnog fluida




$$m\,\vec{a} = \Sigma\,\vec{F}$$

$$\rho\,\mathrm{d}V\,\vec{a} = \rho\,\mathrm{d}V\,\vec{f} - \nabla p\,\mathrm{d}V \quad /:\mathrm{d}V$$

$$\boxed{\rho\,\vec{a} = \rho\,\vec{f} - \mathrm{grad}\,p} \qquad \text{Jednadžba gibanja idealnog fluida}$$

Jednadžba vrijedi i za slučaj apsolutnog mirovanja $(\vec{a} \neq 0)$. U slučaju relativnog mirovanja fluid se giba zajedno s posudom, ali miruje u odnosu na posudu.

# 3. STATIKA FLUIDA

Proučava fluid u mirovanju ili relativnom mirovanju. Osnovna jednadžba statike za apsolutno mirujući fluid

## 3.1 Osnovna jednadžba statike

$$\boxed{\mathrm{grad}\, p = \rho \vec{f}} \quad \text{ili} \quad \boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z \end{array}}$$

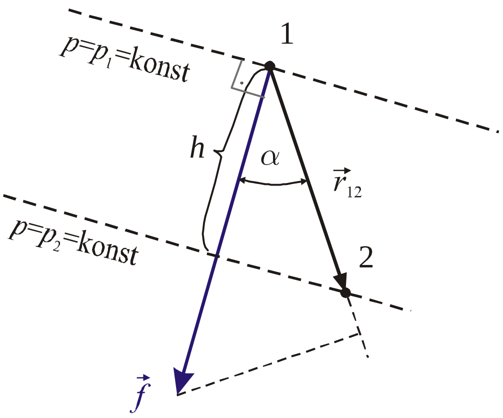
- jednadžba govori o ravnoteži površinskih i masenih sila, pri čemu je sila tlaka jedina površinska sila

Za slučaj relativnog mirovanja:

$$\mathrm{grad}\, p = \rho \underbrace{\left(\vec{f} - \vec{a}\right)}_{\vec{f}'} = \rho \vec{f}'$$

- prirast tlaka

$\mathrm{d}p = \rho \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ ili za $\vec{f} = \text{konst.}$ $p_2 - p_1 = \rho \vec{f} \cdot \vec{r}_{12}$




$$p_2 = p_1 + \rho \vec{f} \cdot \vec{r}_{12}$$

$$p_2 = p_1 + \rho f \underbrace{r_{12} \cos\alpha}_{\substack{h=\text{projekcija } r_{12} \\ \text{na smjer sile}}}$$

$$p_2 = p_1 + \rho \underbrace{f \cos\alpha}_{\substack{\text{projekcija} \\ \text{masene} \\ \text{sile na put}}} r_{12}$$

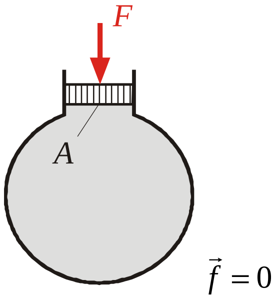
1) Ako je $\vec{f} \perp \vec{r}_{12} \Rightarrow \Delta p = 0 \Rightarrow p = \text{konst. (IZOBARA)}$.
Vektor masene sile je okomit na izobaru.

2.) Ako je $\vec{f} \uparrow\uparrow \vec{r}_{12}$ $\Delta p$ je maksimalno.
Tlak najbrže raste u smjeru masene sile.

3.) Ako je $\vec{f} \uparrow\downarrow \vec{r}_{12}$ $\Delta p$ je $< 0$ i minimalno.
Tlak najbrže opada u smjeru suprotnom od masene sile.

4.) Za $\vec{f}=0 \quad \Rightarrow \quad \Delta p=0 \quad = \quad p=\text{konst.}$ u čitavom području

Pascalov zakon: Tlak narinut izvana na fluid u mirovanju širi se jednoliko po čitavom području.



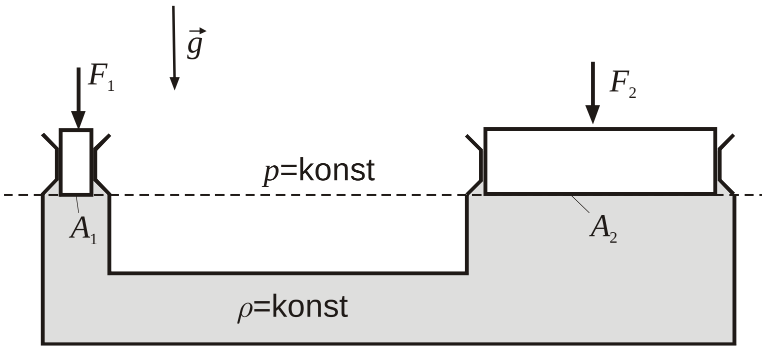

$$p_0=\frac{F_0}{A}= \text{ konst. u svim točkama}$$

$$F \rightarrow F_0+\Delta F$$

$$p=\frac{F_0+\Delta F}{A}=p_0+\Delta p= \text{ konst. u svim točkama}$$

Vrijedi i za $\vec{f}\neq 0$ jer je $\text{grad}\left(p+\Delta p\right)=\text{grad}\, p$ za $\Delta p=\text{konst.}$

Primjena: hidraulička preša

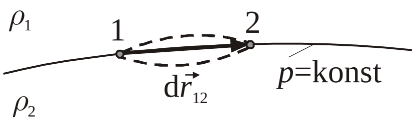



$$p=\frac{F_1}{A_1}=\frac{F_2}{A_2}$$

$$\boxed{F_2=F_1\cdot\frac{A_2}{A_1}} \text{ pojačava se sila}$$

5) Granica dvaju fluida različite gustoće se poklapa s izobarom

Dokaz:

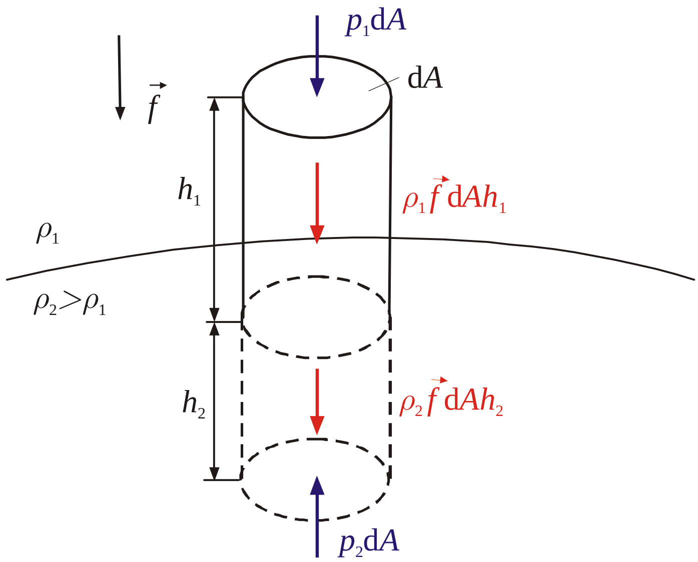



$$\mathrm{d}p=\rho_1\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\rho_2\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\rho_1\neq\rho_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0$$

odnosno $\mathrm{d}p=0 \quad \Rightarrow \quad p=\text{konst.}$

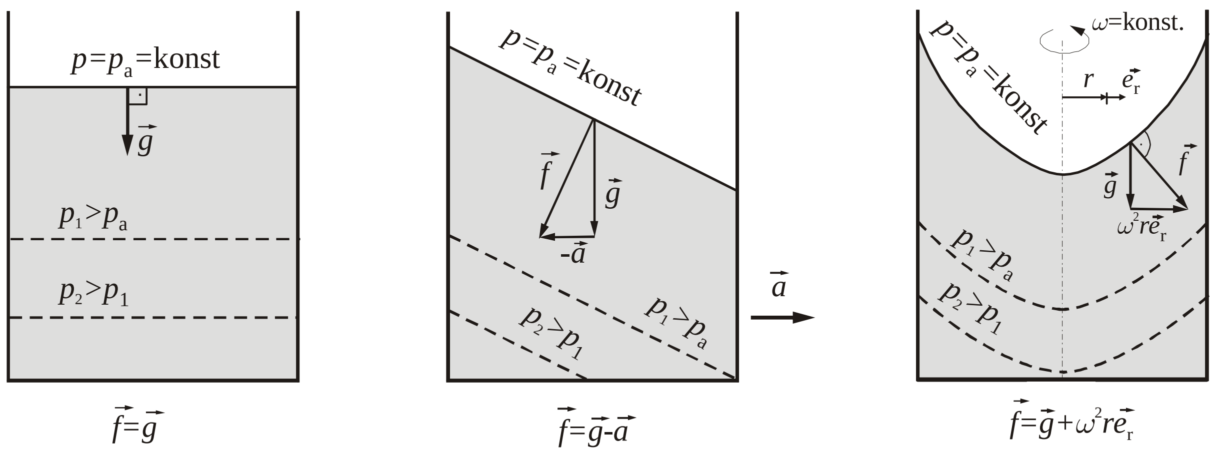
6) Na granici dvaju fluida tlak je neprekidan ako se zanemare učinci površinske napetosti.



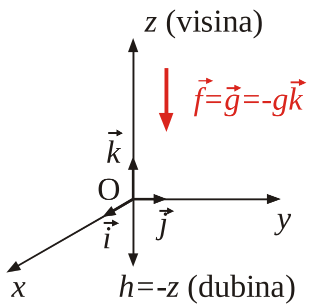

Ravnoteža sila: $\lim\limits_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \left[ p_2 \mathrm{d}A = p_1 \mathrm{d}A + \rho_1 f \mathrm{d}A h_1 + \rho_2 f \mathrm{d}A h_2 \right] = 0$

$$\underline{p_1 = p_2}$$

Primjeri:



## 3.2 Ravnoteža kapljevine u polju sile teže




$$dp = \rho\,\vec{f}\cdot d\vec{r}$$
$$dp = \rho\left(-g\vec{k}\right)\cdot\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right)$$
$$dp = -\rho g\,dz \quad /\int$$
$$p = -\rho g z + C$$

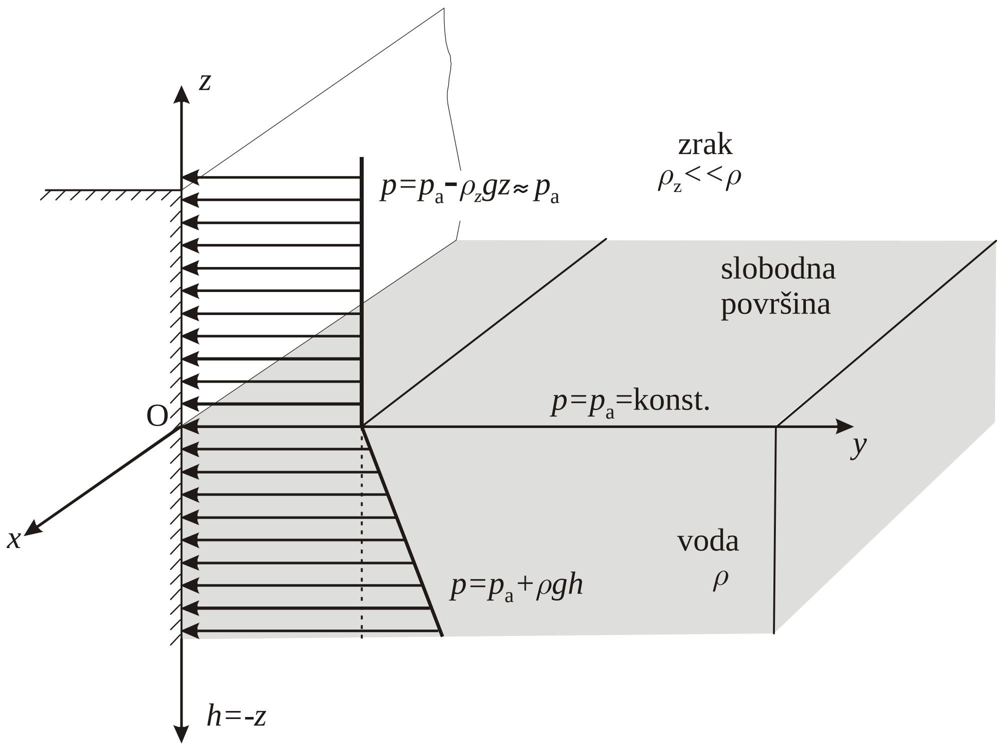
Dogovor: Ishodište koordinatnog sustava se stavlja u točku s poznatim tlakom $p_0$ pa vrijedi za $z=0$ $\quad p = p_0$, što daje $C = p_0$

$\boxed{p = p_0 - \rho g z = p_0 + \rho g h}$ osnovna jednadžba hidrostatike

Tlak opada linearno s visinom, a raste linearno s dubinom.

Ilustracija:

Ako se radi o malim visinskim razlikama tlak u zraku se smatra konstantnim!




Alternativni oblik osnovne jednadžbe hidrostatike

$$\boxed{\frac{p}{\rho g} + z = \frac{p_0}{\rho g} = \text{konst.}}$$

$z$ = geometrijska ili geodetska visina

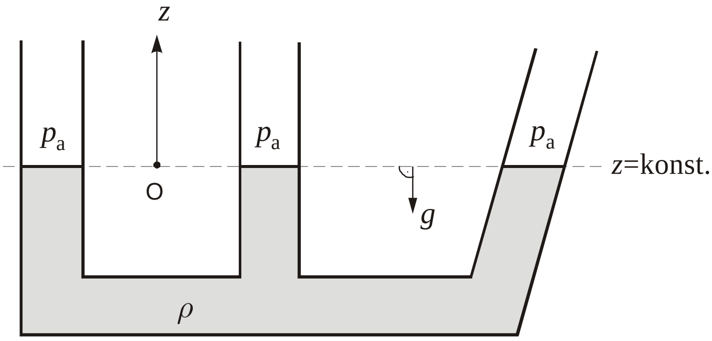
$\dfrac{p}{\rho g}$ = visina tlaka; $\left[\dfrac{p}{\rho g}\right] = \mathrm{L}$ $\left[\dfrac{p}{\rho g}\right]_{\mathrm{SI}}$ = m stupca fluida

$\dfrac{p}{\rho g} + z$ = piezometrička visina

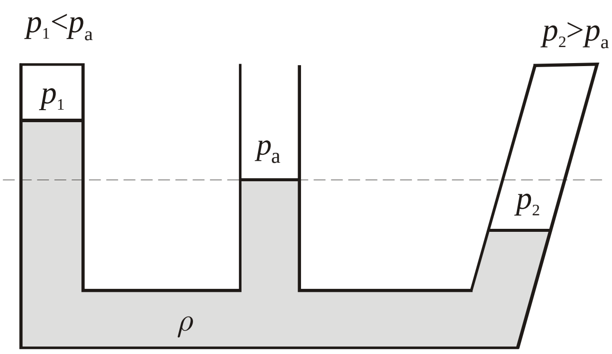
U nestlačivom fluidu u mirovanju piezometrička visina ostaje konstantna u svim točkama fluida.

<u>Princip spojenih posuda</u>:

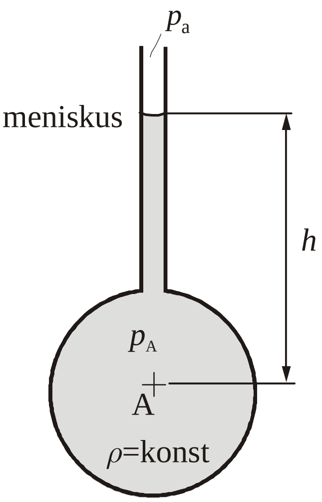
Slobodne površine homogene kapljevine otvorene prema istom tlaku leže u istoj horizontalnoj ravnini u svim spojenim posudama.




Primjer zatvorenih posuda, kada slobodne površine nisu pod istim tlakom



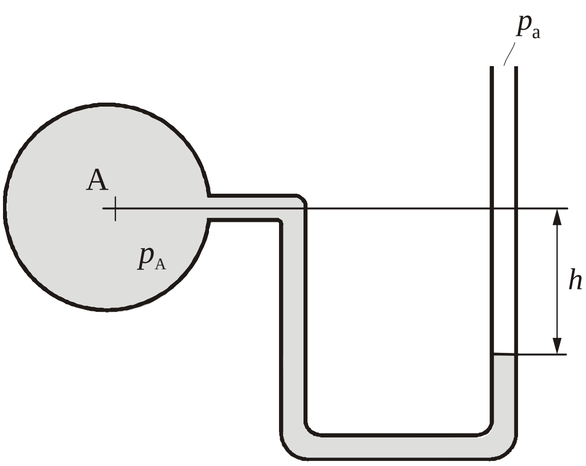
## 3.3 Hidrostatski (fluidni ili tekućinski) manometri




$$p_A = p_a + \rho g h$$

$$p_{MA} = \underbrace{p_A - p_a}_{\text{MANOMETARSKI TLAK}} = \rho g h > 0 \quad \text{(PRETLAK)}$$

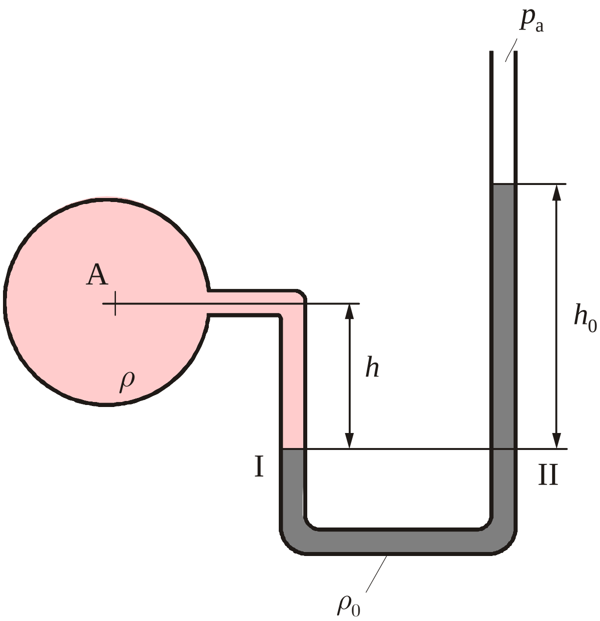
- Mjerenje podtlaka




$$p_A = p_a - \rho g h$$

$$p_{MA} = p_A - p_a = -\rho g h < 0 \quad \text{(PODTLAK)}$$

- Manometar s dva fluida (obično se rabi živa koja ima veliku gustoću da se poveća područje mjerenja)




$$p_I = p_{II}$$

$$p_A + \rho g h = p_a + \rho_0 g h_0$$

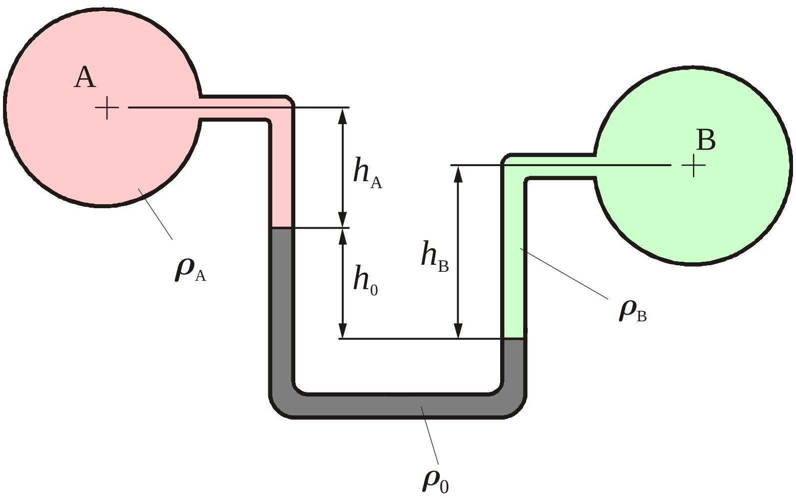
ili

$$p_A = p_a + \rho_0 g h_0 - \rho g h$$

Postupak za postavljanje jednadžbe manometra:

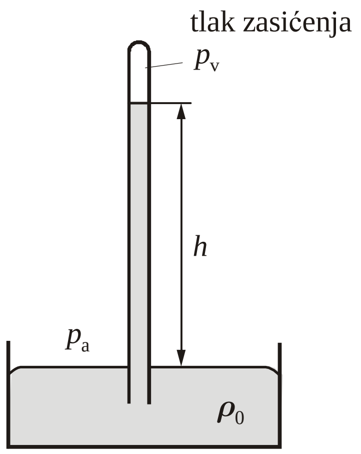
Polazi se s tlakom na jednom kraju manometra, te se tom tlaku dodaje svaka promjena tlaka idući od meniskusa do meniskusa i to s pozitivnim predznakom ako se ide prema nižem meniskusu, a s negativnim ako se ide prema višem. Kada se dođe do drugog kraja manometra, dobiveni izraz se izjednači s tlakom na tom drugom kraju manometra.

Primjer: diferencijalni manometar




$$p_A + \rho_A g h_A + \rho_0 g h_0 - \rho_B g h_B = p_B$$

Barometar je hidrostatski manometar kojim se mjeri apsolutni atmosferski tlak.




$$p_a = p_v + \rho_0 g h$$

Za živu

| Temp / $^0$C | $p_v$ / Pa |
|---|---|
| 0 | 0,0211 |
| 40 | 0,8412 |

Praktički $p_v \approx 0$ pa vrijedi

$$\boxed{p_a = \rho_0 g h}$$

- dogovoreni ili standardni atmosferski tlak

$p_a = 101\,325$ Pa = 760 mm Hg