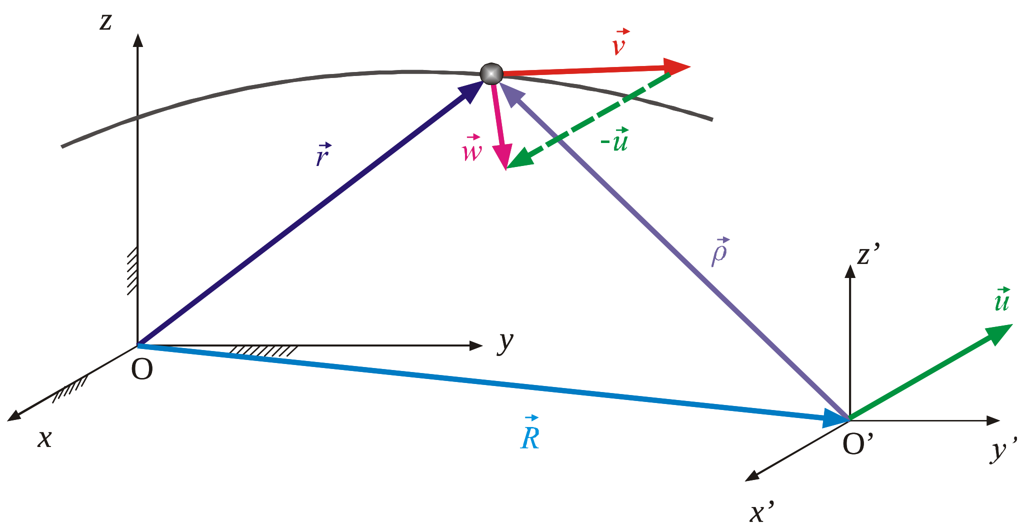
5.7 Osnovni zakoni u koordinatnom sustavu koji se giba pravocrtno konstantnom brzinom



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho} \Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$$

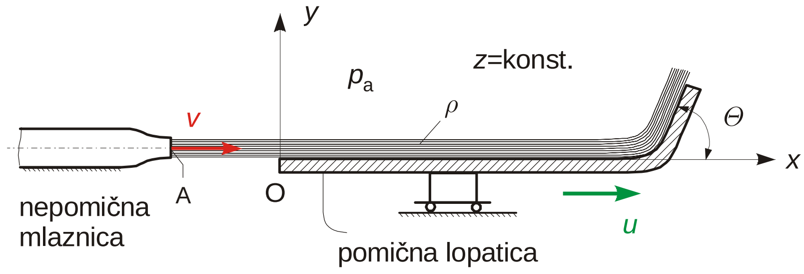
MIRUJUĆI KOORDINATNI SUSTAV (PROMATRAČ IZ MIRUJUĆEG KOORDINATNOG SUSTAVA MJERI APSOLUTNU BRZINU $\vec{v}$)

KOORDINATNI SUSTAV SE GIBA PRAVOCRTNO S $\vec{u} = \text{konst.}$ (PROMATRAČ IZ POMIČNOG KOORDINATNOG SUSTAVA MJERI RELATIVNU BRZINU $\vec{w}$)

$$\boxed{\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}}$$

S obzirom da je za $\vec{u} = \text{konst.}$ ubrzanje koordinatnog sustava $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = 0$ (nema inercijskih sila), svi zakoni za pravocrtno gibajući koordinatni sustav konstantnom brzinom će biti istog oblika kao i za mirujući koordinatni sustav s jedinom razlikom da će se u zakonima umjesto apsolutne brzine pojavljivati relativna brzina.

5.7.1 Sila na pomičnu lopaticu, primjena jednadžbe količine gibanja (J.K.G.) na Pelton turbinu



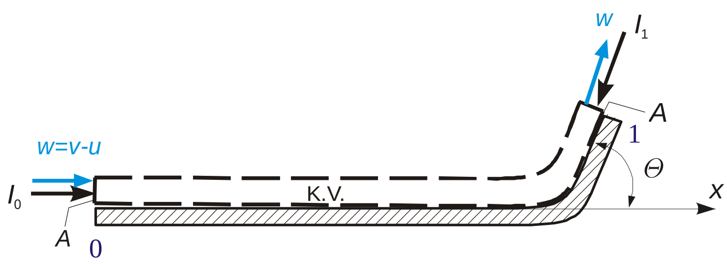
- Neviskozno, nestlačivo strujanje

$v =$ apsolutna brzina

$u =$ brzina gibanja lopatice

$w = v - u =$ relativna brzina nailaska mlaza na lopaticu (općenito $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$)

- Rješenje u koordinatnom sustavu $0xy$ vezanom za lopaticu



J.K.G.

$I_0 = \rho w^2 A \quad ; \quad I_1 = \rho w^2 A$

$F_x = \rho w^2 A(1 - \cos\Theta)$

Kada se lopaticu ne bi kočilo, ona bi se ubrzavala. Sila kočenja jednaka je po veličini F_x, a snaga odvedena kočenjem

$$P_\mathrm{T} = F_x \cdot u = \rho w^2 u A(1 - \cos\Theta)$$

B.J. $\dfrac{w^2}{2g} + \dfrac{p}{\rho g} + z = \text{konst.}$

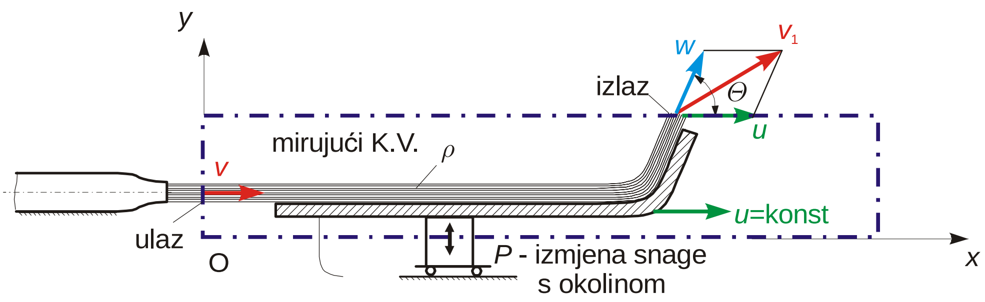
J.K. $Q_\mathrm{rel} = wA = \text{konst.}$

$p = p_\mathrm{a} = \text{konst.}$, $z = \text{konst.}$,
te je i $w = \text{konst.}$

iz J.K. za $w = \text{konst.}$ slijedi
$A = \text{konst.}$

PAŽNJA:
Q_rel je različit od $Q = vA$, jer se lopatica udaljava od mlaza, te se dio protoka gubi na popunjavanje prostora.

- Bernoullijeva jednadžba u apsolutnom koordinatnom sustavu



$0xy =$ mirujući koordinatni sustav

$$\left.\begin{aligned} v_{1x} &= u + w\cos\Theta \\ v_{1y} &= w\sin\Theta \end{aligned}\right\} \quad v_1^2 = u^2 + 2uw\cos\beta + \underbrace{w^2\cos^2\Theta + w^2\sin^2\Theta}_{w^2}$$

- B.J. ulaz-izlaz

$$\frac{v^2}{2g}+\underbrace{\frac{P}{\rho g Q_{\mathrm{rel}}}}_{\substack{\text{visina dobave pumpe računa}\\ \text{se s } Q_{\mathrm{rel}}\text{, jer je to protok koji}\\ \text{prođe preko lopatice}}}=\frac{v_1^2}{2g}$$

pretpostavimo da se snaga dovodi

$$P=\frac{1}{2}\rho Q_{\mathrm{rel}}\left(v_1^2-v^2\right)$$

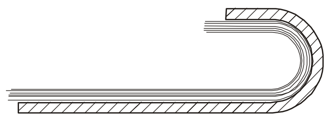
$$P=\frac{1}{2}\rho w A\left[\cancel{u^2}+2uw\cos\Theta+\cancel{w^2}-\left(\cancel{u^2}+2uw+\cancel{w^2}\right)\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned}P&=-\rho Q_{\mathrm{rel}}\,wu\left(1-\cos\Theta\right)\\ P&=\rho w^2 u A\left(1-\cos\Theta\right)\end{aligned}}$$

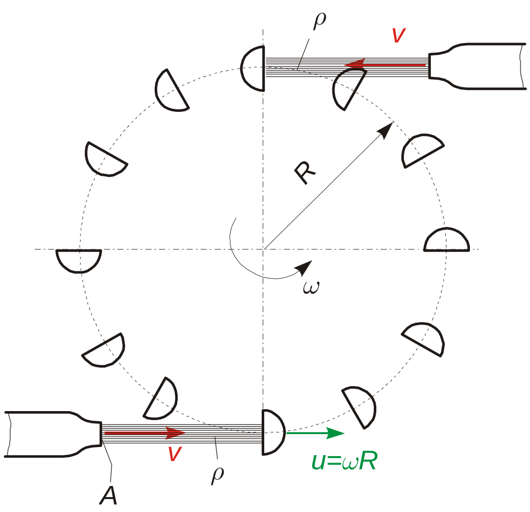
Negativni predznak ukazuje da se snaga odvodi, a rješenje je isto kao i u prethodnom slučaju.

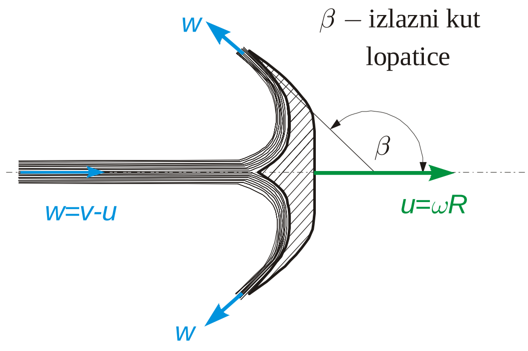
$$h_{\mathrm{T}}=\frac{P}{\rho g Q_{\mathrm{rel}}}=\frac{wu}{g}\left(1-\cos\Theta\right)\ \Rightarrow\ \text{pad visine energije na lopatici}$$

- Največi pad za $\cos\Theta=-1$, odnosno $\Theta=180^0$



- Pelton turbina





- U ovom slučaju može biti više lopatica u zahvatu s mlazom, a budući je razmak između lopatica i mlaznice stalan, sav protok prijeđe preko lopatica. Pad visine energije je isti kao u prethodnom slučaju

$h_\mathrm{T} = \frac{wu}{g}(1-\cos\beta)$, a snaga se računa s ukupnim protokom $Q = v \cdot A$, pa vrijedi

$$\boxed{P_\mathrm{T} = \rho\, g\, Q\, h_\mathrm{T} = \underbrace{n}_{\substack{\text{broj}\\ \text{mlazova}}} \rho\, v\, A \overbrace{(v-\omega R)}^{w} \overbrace{\omega R}^{u} (1-\cos\beta)}$$

- Maksimalna snaga Pelton- turbine

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[n\,\rho\, v\, A(v-u)u(1-\cos\beta)\right]$$

$$= v - u - u = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = \frac{v}{2}}$$

za $u = \frac{v}{2}$ i $\beta = 180°$

$$P_\mathrm{max} = n\,\rho \frac{v^3}{2} A = n\,\rho\, Q \frac{v^2}{2}$$

- Snaga mlazova

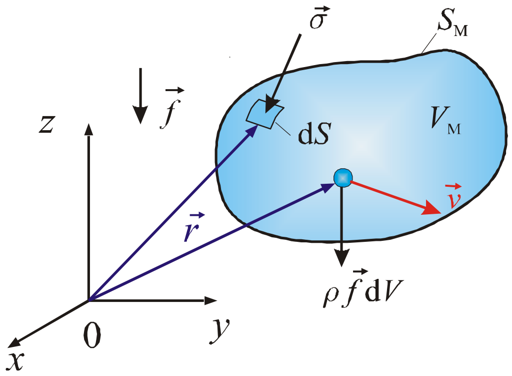
$$P_\mathrm{mlaz} = n \underbrace{\left(\rho \frac{v^2}{2}\right)}_{\substack{\text{kinetička}\\ \text{energija}\\ \text{mlaza}}} Q$$

- Teorijski stupanj korisnosti

$$\eta_\mathrm{teor} = \frac{P_\mathrm{max}}{P_\mathrm{ulaz}} = 1$$

5.8 Zakon očuvanja momenta količine gibanja

- formulacija za materijalni volumen



Brzina promjene momenta količine gibanja materijalnog volumena jednaka je sumi momenata vanjskih masenih i površinskih sila.

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V_M(t)} \vec r\times\rho\vec v\,\mathrm{d}V = \int_{V_M(t)} \vec r\times\rho\vec f\,\mathrm{d}V + \int_{S_M(t)} \vec r\times\vec\sigma\,\mathrm{d}S$$

- formulacija za kontrolni volumen

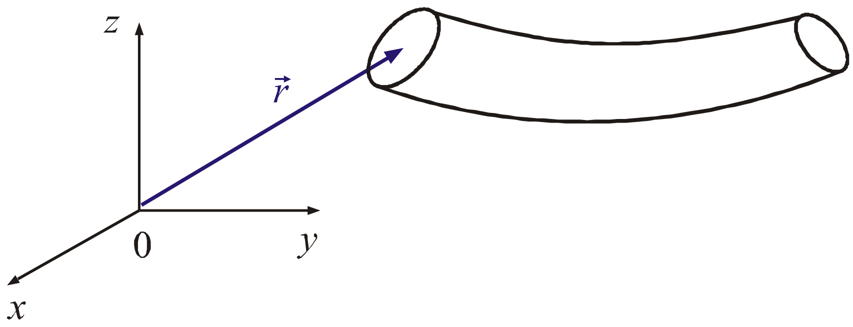
$$\overbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_{KV}} \vec r\times\rho\vec v\,\mathrm{d}V}^{\mathrm{I}} + \overbrace{\int_{S_{KV}=S_u+S_i} \vec r\times\rho\vec v\,\overbrace{(\vec v\cdot\vec n)}^{v_n}\,\mathrm{d}S}^{\mathrm{II}} = \overbrace{\underbrace{\int_{V_{KV}} \vec r\times\rho\vec f\,\mathrm{d}V}_{M(\vec G)}}^{\mathrm{III}} + \overbrace{\int_{S_{KV}=S_u+S_i\underbrace{+S_w}_{-\vec M(\vec F_w)}} \vec r\times\rho\vec\sigma\,\mathrm{d}S}^{\mathrm{IV}}$$

Pretpostavke:

1) stacionarno strujanje, $\mathrm{I}=0$
2) $\vec f=\vec g \qquad \mathrm{III}=\vec r_T\times G=\vec M\left(\vec G\right)=$ moment sile težine
3) $\vec\sigma=-p\vec n+\vec\sigma_f$

$$\boxed{\underbrace{\vec M\left(\vec F_w\right)}_{\text{moment sile na stijenku}} = \underbrace{\vec M\left(\vec G\right)}_{\text{moment sile težine}} - \underbrace{\int_{S_u+S_i} \vec r\times\left(\rho\vec v\,v_n + p\vec n\ \overbrace{-\vec\sigma_f}^{\text{obično se zanemaruju}}\right)\mathrm{d}S}_{\text{momenti impulsnih sila na ulaznim i izlaznim presjecima}}}$$

5.8.1 Primjena jednadžbe momenta količine gibanja na cjevovode



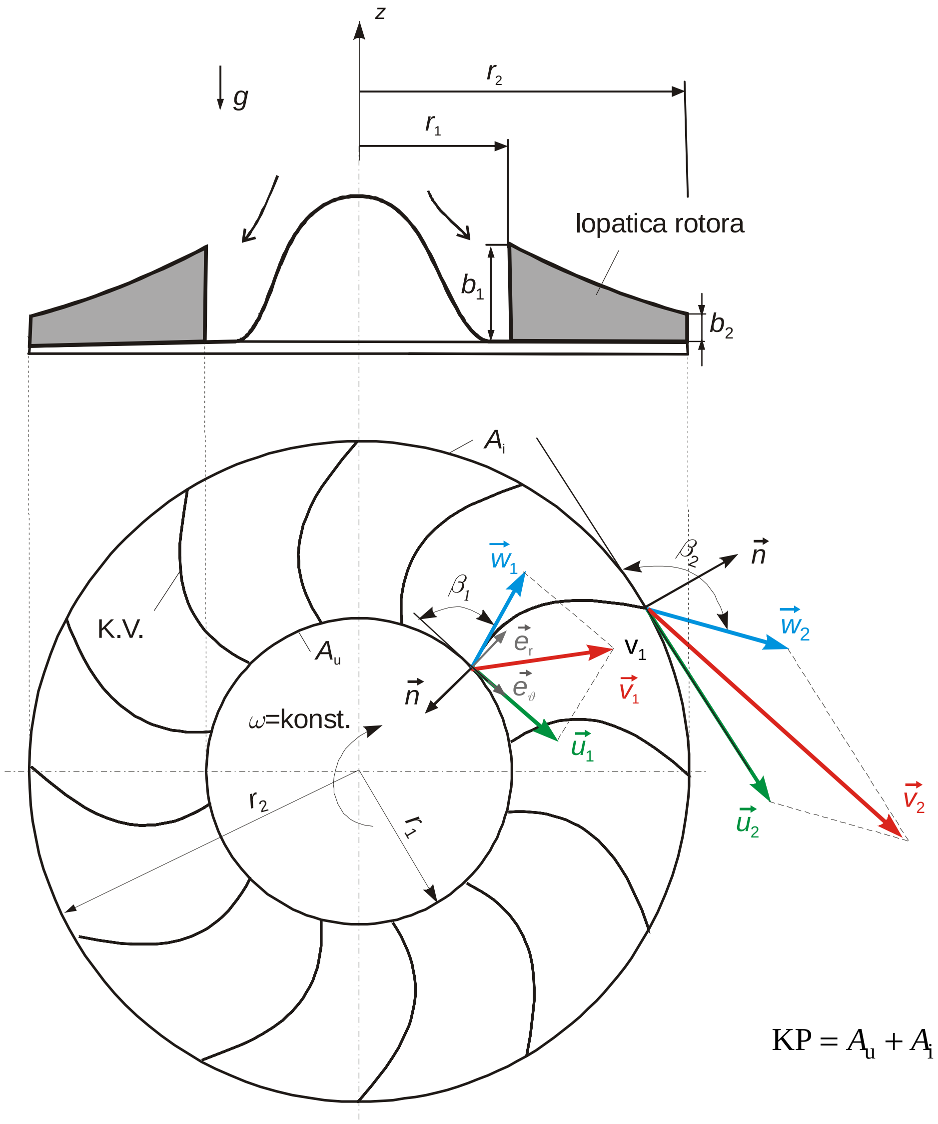
1) Zanemarimo viskozne sile po ulaznom i izlaznom presjeku
2) Pretpostavljamo da je $\vec{r}$ veliko u odnosu na dimenzije ulaznog i izlaznog presjeka, tako da su promjene $\vec{r}$ po površini male, pa $\vec{r} = \text{konst.}$

$$\int_{S_u} \vec{r} \times \left(\rho \vec{v} v_n + p \vec{n}\right) \mathrm{d}S = \vec{r} \times \underbrace{\int_{S_i} \left(\rho \vec{v} v_n + p \vec{n}\right) \mathrm{d}S}_{\substack{-I\vec{n} \\ \text{impulsna sila} \\ \text{definirana u J.K.G.}}}$$

- J.K.G. se svodi na uvjete ravnoteže sila, tj.:
sila fluida na stijenku jednaka je zbroju sile težine i impulsnih funkcija

- J.M.K.G. se svodi na uvjet ravnoteže momenata, tj. moment sile fluida na stijenku u odnosu na odabranu točku jednak je sumi momenata težine fluida u K.V. i momenata impulsnih sila na ulaznim i izlaznim presjecima

5.8.2 Primjena jednadžbe momenta količine gibanja (J.M.K.G.) na turbostrojeve, osnovna Eulerova jednadžba za turbostrojeve i Bernoullijeva jednadžba za rotirajuću strujnicu



$\mathrm{KP} = A_\mathrm{u} + A_\mathrm{i} + S_\mathrm{w}$

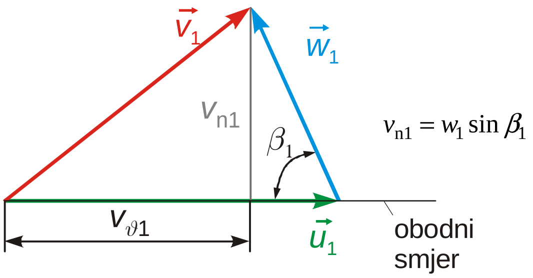
Pretpostavke:

- beskonačno puno beskonačno tankih lopatica (strujnice se poklapaju s oblikom lopatice)
- neviskozno strujanje
- utjecaj sile težine se zanemaruje

- obodna brzina $u = \omega r$
- relativna brzina fluida w tangencijalna na konturu lopatice
- apsolutna brzina $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$

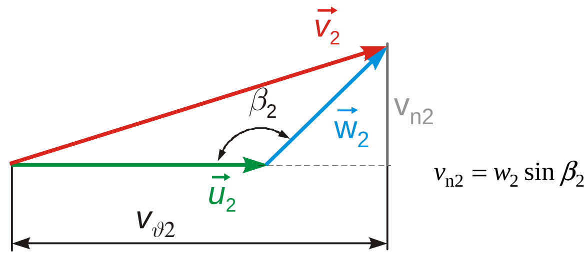
Trokuti brzina

Ulazna strana $A_u = A_1$ Izlazna strana $A_i = A_2$



$$v_{\vartheta 1} = u_1 - w_1 \cos\beta_1$$

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{w}_1 = v_{\vartheta 1}\vec{e}_\vartheta + v_{n1}\vec{e}_r$$



$$v_{\vartheta 2} = u_2 - w_2 \cos\beta_2$$

$$\vec{v}_2 = v_{\vartheta 2}\vec{e}_\vartheta + v_{n2}\vec{e}_r$$

- Ulazna površina - Izlazna površina

$$A_u = 2 r_1 \pi b_1 \qquad A_i = 2 r_2 \pi b_2$$

- Jednadžba kontinuiteta

$$\int_{A_u} v_n \mathrm{d}S + \int_{A_i} v_n \mathrm{d}S = 0$$

- brzina $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$
- brzine v_{n1} i v_{n2} su konstantne po pripadajućim površinama

$$\boxed{v_{n1} 2 r_1 \pi b_1 = v_{n2} 2 r_2 \pi b_2}$$

- Jednadžba momenta količine gibanja

$$\vec{M}\left(\vec{F}_w\right) = \vec{M}\left(\vec{G}\right) - \int_{A_u + A_i} \vec{r} \times \left(\rho \vec{v}\, v_n + p\,\vec{n} - \underbrace{\cancel{\vec{\sigma}_f}}_{=0} \right) \mathrm{d}S$$

- Zanima nas moment oko osi z (u smjeru gibanja, odnosno u smjeru vektora $\vec{\omega}$). Sila težine ne daje moment u smjeru osi z. Sile tlaka prolaze kroz os rotacije, te ne doprinose momentu M_z, u smjeru osi z, te uz zanemarenje viskoznih sila ostaje

$$\vec{M} = -\int_{A_u + A_i} \vec{r} \times \left(\rho \vec{v}\, v_n \right) \mathrm{d}S$$

- $\vec{r}, \vec{v}$ i v_n su konstantni po površinama A_u i A_i, te se mogu izlučiti ispred integrala, tj. vrijedi

$$\vec{M} = -\left[\vec{r}\times\rho\vec{v}\underbrace{v_{\mathrm{n}}A}_{-Q}\right]_{\mathrm{u}} - \left[\vec{r}\times\rho\vec{v}\underbrace{v_{\mathrm{n}}A}_{Q}\right]_{\mathrm{i}}$$

$$\vec{r}\times\vec{v} = r\,\vec{e}_r\times\left(v_\vartheta\vec{e}_\vartheta + v_n\vec{e}_r\right) = r\,v_\vartheta\,\vec{e}_z$$

$M_{\mathrm{T}} = -\rho Q\left(r_2 v_{\vartheta 2} - r_1 v_{\vartheta 1}\right)$ = moment fluida na stroj = moment turbine

- Moment pumpe → moment stroja na fluid

$$M_{\mathrm{P}} = \rho Q\left(r_2 v_{\vartheta 2} - r_1 v_{\vartheta 1}\right)$$

- Snaga pumpe

$$P_{\mathrm{P}} = M_{\mathrm{P}}\cdot\omega = \rho Q\left(u_2 v_{\vartheta 2} - u_1 v_{\vartheta 1}\right)$$

- Visina dobave pumpe

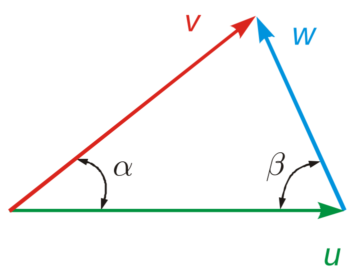
$h_{\mathrm{P}} = \dfrac{P_{\mathrm{P}}}{\rho g Q} = \dfrac{1}{g}\left(u_2 v_{\vartheta 2} - u_1 v_{\vartheta 1}\right)$ osnovna Eulerova jednadžba za turbostrojeve

za pumpu za $h_{\mathrm{P\,max}}$ $v_{\vartheta 1} = 0$ $\left(\alpha_1 = 90^0\right)$
za turbinu za $h_{\mathrm{T\,max}}$ $v_{\vartheta 2} = 0$ $\left(\alpha_2 = 90^0\right)$

- Dogovor: uvijek ćemo raditi s izrazima za pumpu, pa će nam negativni predznak govoriti da se radi o turbini.

- Bernoullijeva jednadžba od ulaza do izlaza

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 + h_{\mathrm{P}} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2$$



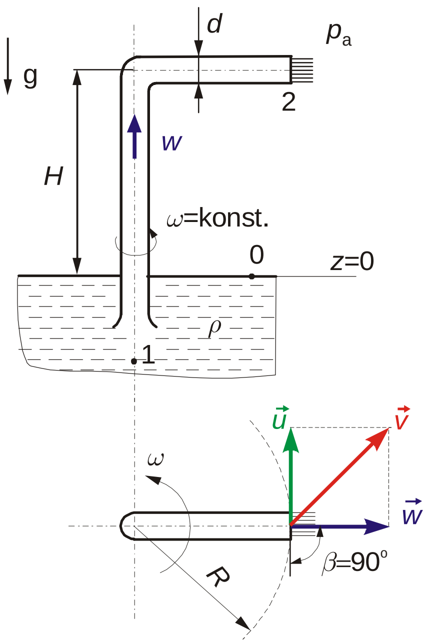
$$v^2 = u^2 + w^2 - 2u\,w\cos\beta$$

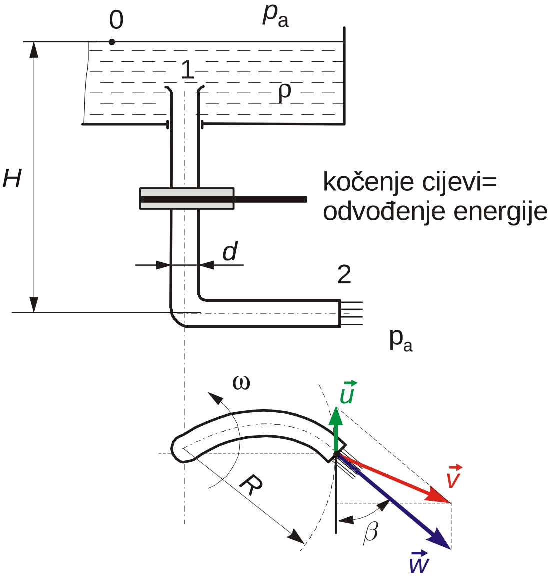
$$h_{\mathrm{P}} = \frac{1}{g}\left[u_2\left(u_2 - w_2\cos\beta_2\right) - u_1\left(u_1 - w_1\cos\beta_1\right)\right]$$

$$\frac{u_1^2 + w_1^2 - 2u_1 w_1\cos\beta_1}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{u_2^2 - u_2 w_2\cos\beta_2 - u_1^2 + u_1 w_1\cos\beta_1}{g} = \frac{u_2^2 + w_2^2 - 2u_2 w_2\cos\beta_2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2$$

$\dfrac{w_1^2 - u_1^2}{2g} + \dfrac{p_1}{\rho g} + z_1 = \dfrac{w_2^2 - u_2^2}{2g} + \dfrac{p_2}{\rho g} + z_2$ Bernoullijeva jednadžba za rotirajuću strujnicu

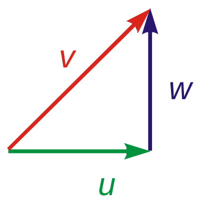
Primjena na rotirajuću cijev





PRIMITIVNA PUMPA

Fluid se podiže na visinu *H*



$$v_\vartheta = u_2 = \omega R$$

$$Q = w\frac{\mathrm{d}^2\pi}{4}$$

$$h_\mathrm{P} = \frac{1}{g}\left(u_2 v_{\vartheta 2} - \cancel{u_1} v_{\vartheta 1}\right)$$

$$h_\mathrm{P} = \frac{1}{g}u_2^2$$

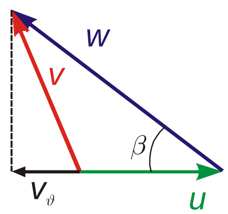
$$P_\mathrm{P} = \rho\, g\, Q\, h_\mathrm{P}$$

$$M_\mathrm{P} = \frac{P_\mathrm{P}}{\omega}$$

R.B.J. 0 – 2

$$0 = H + \frac{w^2 - u_2^2}{2g}$$

PRIMITIVNA TURBINA



$$v_\vartheta = u - w\cos\beta \begin{cases} < 0 & \text{TURBINA} \\ = 0 & \text{slobodno rotirajuća cijev} \\ > 0 & \text{PUMPA} \end{cases}$$

Kod slobodno rotirajuće cijevi, snaga se niti dovodi niti odvodi.

$$\underline{P = 0 \quad \text{i} \quad v_\vartheta = 0}$$

R.B.J. 0 – 2

$$H = \frac{w^2 - u_2^2}{2g}$$