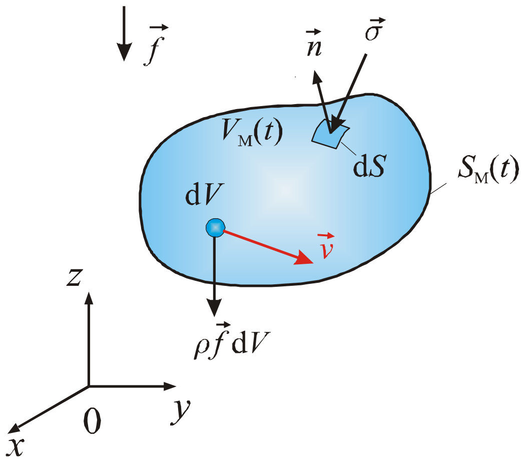
5.4. Jednadžba količine gibanja

-formulacija za materijalni volumen,



$$\underbrace{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V_\mathrm{M}}\rho\vec v\,\mathrm{d}V}_{\text{brzina promjene količine gibanja}} = \underbrace{\int_{V_\mathrm{M}}\rho\vec f\,\mathrm{d}V}_{\text{masene sile}} + \underbrace{\int_{S_\mathrm{M}}\vec\sigma\,\mathrm{d}S}_{\text{površinske sile}}$$

$$\vec\sigma = \underbrace{-p\vec n}_{\text{sile tlaka}} + \underbrace{\vec\sigma_\mathrm{f}}_{\text{viskozne sile}}$$

-formulacija za kontrolni volumen (primjena Reynoldsovog transportnog teorema na lijevu stranu gornje jednadžbe, $\varphi = \vec v$)

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_\mathrm{KV}}\rho\vec v\,\mathrm{d}V}_{\text{brzina promjene količine gibanja unutar kontrolnog volumena}} + \underbrace{\int_{S_\mathrm{KP}=S_\mathrm{u}+S_\mathrm{i}}\rho\vec v\left(\overbrace{\vec v\cdot\vec n}^{v_\mathrm{n}}\right)\mathrm{d}S}_{\text{protok količine gibanja kroz kontrolnu površinu}} = \underbrace{\int_{V_\mathrm{KV}}\rho\vec f\,\mathrm{d}V}_{\text{ukupna masena sila na kontrolni volumen}} + \underbrace{\int_{S_\mathrm{KP}=S_\mathrm{u}+S_\mathrm{i}+S_\mathrm{w}}\left(-p\vec n+\vec\sigma_\mathrm{f}\right)\mathrm{d}S}_{\text{ukupna površinska sila na kontrolni volumen}}$$

Pretpostavimo:

- stacionarno strujanje: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{V_\mathrm{KV}}\rho\vec v\,\mathrm{d}V = 0$

- $\vec f = -g\vec k$: $\displaystyle\int_{V_\mathrm{KV}}\rho\vec f\,\mathrm{d}V = -\rho g\vec k\int_{V_\mathrm{KV}}\mathrm{d}V = -G\,\vec k = -\vec G$

$$\int_{S_\mathrm{w}}\left(-p\vec n+\vec\sigma_\mathrm{f}\right)\mathrm{d}S = \text{sila okoline na fluid} = -\underbrace{\text{sila fluida na okolinu}}_{-\vec F_\mathrm{w}}$$

F_w - sila fluida na stijenku

$$\boxed{\vec F_\mathrm{w} = \vec G - \int_{S_\mathrm{u}}\left(\rho\vec v v_\mathrm{n} + p\vec n - \vec\sigma_\mathrm{f}\right)\mathrm{d}S - \int_{S_\mathrm{i}}\left(\rho\vec v v_\mathrm{n} + p\vec n - \vec\sigma_\mathrm{f}\right)\mathrm{d}S}$$

Izraz za određivanje sile fluida na nepromočivu površinu S_w.

U gornjem izrazu sila $\vec{F}_{\mathrm{w}}$ označuje silu kojom fluid djeluje na površinu S_{w} sa strane kontrolnog volumena. Obično s druge strane stijenke također djeluje neki tlak (najčešće atmosferski) pa će rezultantna sila $\vec{F}_{\mathrm{R}}$ na površinu S_{w} biti jednaka zbroju površinskih sila s obje strane površine. Za slučaj atmosferskog tlaka s vanjske strane vrijedi:

$$\vec{F}_{\mathrm{R}} = \vec{F}_{\mathrm{w}} - \int_{S_{\mathrm{w}}} p_{\mathrm{a}} \vec{n}\, \mathrm{d}S$$

Ako se ovaj izraz uvrsti u gornju jednadžbu količine gibanja uz prikaz tlaka, slijedi:

$$\vec{F}_{\mathrm{R}} + \int_{S_{\mathrm{w}}} p_{\mathrm{a}} \vec{n}\, \mathrm{d}S = \vec{G} - \int_{S_{\mathrm{u}}} \left(\rho \vec{v} v_{\mathrm{n}} + p_{\mathrm{M}} \vec{n} - \vec{\sigma}_{\mathrm{f}}\right) \mathrm{d}S - \int_{S_{\mathrm{u}}} p_{\mathrm{a}} \vec{n}\, \mathrm{d}S - \int_{S_{\mathrm{i}}} \left(\rho \vec{v} v_{\mathrm{n}} + p_{\mathrm{M}} \vec{n} - \vec{\sigma}_{\mathrm{f}}\right) \mathrm{d}S - \int_{S_{\mathrm{i}}} p_{\mathrm{a}} \vec{n}\, \mathrm{d}S$$

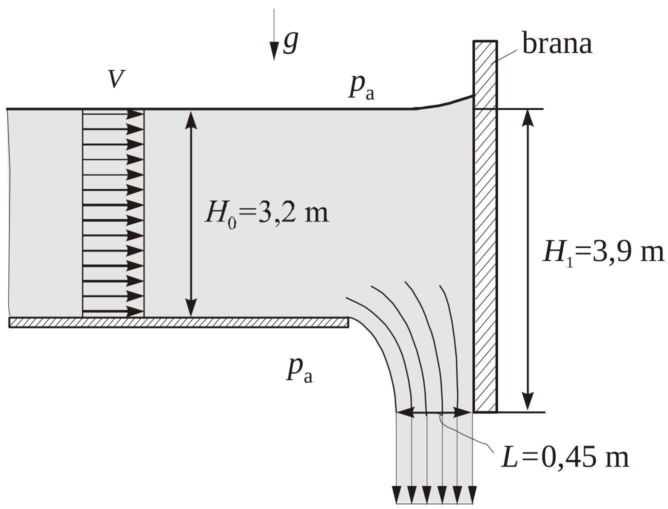
Iz statike fluida znamo da je integral konstantnog tlaka po zatvorenoj površini jednak nuli, što znači da će se integrali atmosferskog tlaka po povšinama $S_{\mathrm{w}}+S_{\mathrm{u}}+S_{\mathrm{i}}$ poništiti pa ostaje

$$\vec{F}_{\mathrm{R}} = \vec{G} - \int_{S_{\mathrm{u}}} \left(\rho \vec{v} v_{\mathrm{n}} + p_{\mathrm{M}} \vec{n} - \vec{\sigma}_{\mathrm{f}}\right) \mathrm{d}S - \int_{S_{\mathrm{i}}} \left(\rho \vec{v} v_{\mathrm{n}} + p_{\mathrm{M}} \vec{n} - \vec{\sigma}_{\mathrm{f}}\right) \mathrm{d}S$$

Dakle, ako želimo naći silu fluida s jedne strane površine uvrštavamo apsolutni tlak, a ako želimo obračunati i silu atmosferskog tlaka izvana, onda radimo s pretlakom.

Primjer:

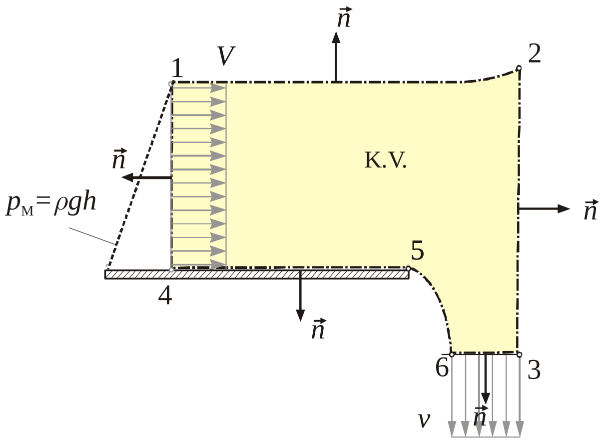
1. Idealni fluid gustoće ρ=1000 kg/m^3 nastrujava na vertikalnu branu, prema slici, jednoliki profilom brzine. Za podatke sa slike odredite silu F na branu (po jedinici širine).



- S obzirom da nema sila trenja (postoje samo sile tlaka) na branu će djelovati sila u smjeru osi x, a na horizontalnu podlogu sila u smjeru osi y.

- Na branu djeluje sila atmosferskog tlaka p_a s desne strane i sila tlaka (usljed dodira fluida i brane) s lijeve strane. Rezultantna sila se dobije tako da se s lijeve strane računa sila pretlaka.

- donja slika definira kontrolni volumen



$$S_{KV} = \underbrace{S_{12} + S_{23}}_{S_w} + \underbrace{S_{36}}_{S_i} + \underbrace{S_{56} + S_{45}}_{S_w} + \underbrace{S_{14}}_{S_u}$$

-Na ulaznoj površini S_{14}, strujnice su ravne, horizontalne pa je promjena tlaka okomito na strujnice ista kao u fluidu u mirovanju. To znači da je od točke 1 do točke 4 promjena tlaka linearna tj. vrijedi $p_4 = p_1 + \rho g H$, odnosno $p_{M4} = \rho g H$. Profil brzine je zadana kao jednolik.

-Na izlaznom presjeku S_{36} su strujnice paralelne i pretpostavimo ravne, pa će tlak okomito na strujnice biti konstantan i jednak atmosferskom tlaku. Strujanje u tom presjeku je brzinom v.

-Površine S_{12} i S_{56} su nepromočive (v_n=0), a na njima je pretlak p_M=0, pa su integrali $\int\left(\rho\vec{v}v_n + p\vec{n}\right)\mathrm{d}S$ po tim površinama jednaki nuli.

Ako nas zanima sila na branu, gledat ćemo samo x-komponentu jednadžbe količine gibanja, tj. pomnožit ćemo je s jediničnim vektorom $\vec{i}$.

$$\vec{F}_{R23} = \vec{G} - \int\limits_{S_{14}+S_{36}} \left(\rho\vec{v}v_n + p_M\vec{n}\right)\mathrm{d}S - \underbrace{\int\limits_{S_{45}} p_M\vec{n}\,\mathrm{d}S}_{\vec{F}_{R45}} \qquad /\cdot\vec{i}$$

Sila težine $\vec{G}$ je vertikalna, pa nema komponente u smjeru osi x, kao i integral označen s $\vec{F}_{R45}$ (rezultantna sila na horizontalnu podlogu S_{45}). Integral po površini S_{36} otpada jer i brzina i normala nemaju komponente u smjeru $\vec{i}$, te ostaje

$$F_{R23} = F = -\int\limits_{S_{14}} \left(\rho v_x v_n + p n_x\right)\mathrm{d}S$$

Na površini S_{14} $v_x=V$, $v_n=-V$; $n_x=-1$ pa se uz V=konst i poznate činjenice iz hidrostatike da je integral hidrostatskog tlaka po vertikalnoj površini jednak umnošku tlaka u težištu i ploštine površine.

$$F = \rho V^2 H_0 \cdot 1 + \underbrace{\rho g \frac{H_0}{2}}_{\substack{\text{pretlak} \\ \text{u težištu}}} H_0 \cdot 1$$

Da bismo odredili silu moramo znati brzinu V, koju ćemo odrediti primjenom jednadžbe kontinuiteta i Bernoullijeve jednadžbe. S obzirom da se radi o nestlačivom strujanju protok na ulazu u kontrolni volumen jednak je protoku na izlazu, tj. vrijedi

$$V \cdot H_0 \cdot 1 = v \cdot L \cdot 1 \tag{1}$$

Bernoulijeva jednadžba vrijedi uzduž strujnice. U prikazanomm strujanju možemo uočiti strujnicu 1-2-3 i strujnicu 4-5-6. Bernoulijeva jednadžba za strujnicu od točke 1 do 3 glasi

$$\frac{V^2}{2\mathrm{g}} + h = \frac{v^2}{2\mathrm{g}} \tag{2}$$

a za strujnicu od točke 4 do točke 6 (uzimajući da je pretlak u točki 4 $p_{\mathrm{M}4} = \rho g H$)

$$\frac{V^2}{2g} + \underbrace{\frac{p_{\mathrm{M}4}}{\rho g}}_{H} + h - H = \frac{v^2}{2g}$$

Očito obje Bernoulijeve jednadžbe daju isti rezultat.

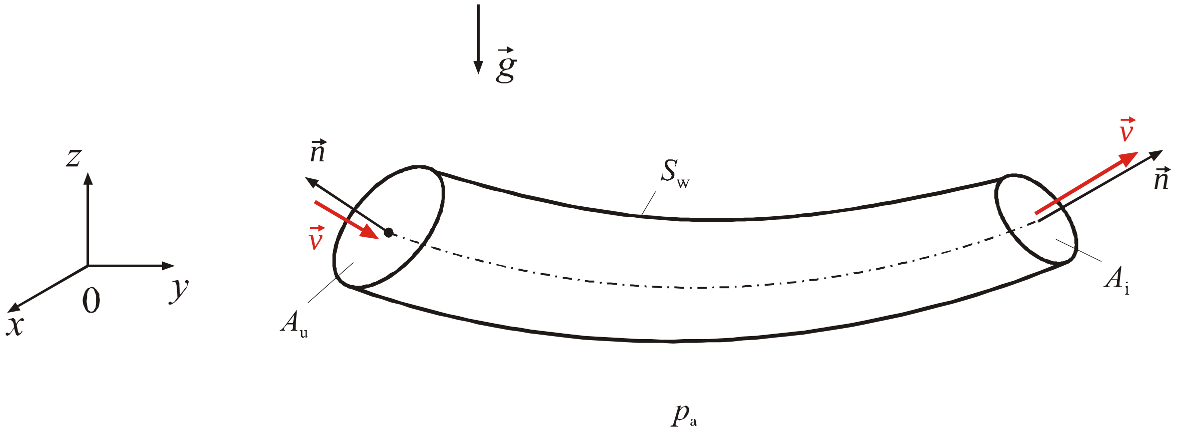
Uvrštavanjem jednadžbe (1) u jednadžbu (2) slijedi

$$\frac{V^2}{2\mathrm{g}} + h = \frac{V^2}{2\mathrm{g}}\left(\frac{H_0}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{2gH}{\left(\frac{H_0}{L}\right)^2 - 1}} = 1{,}24 \text{ m/s}$$

pa je sila

F=55,15 kN/m

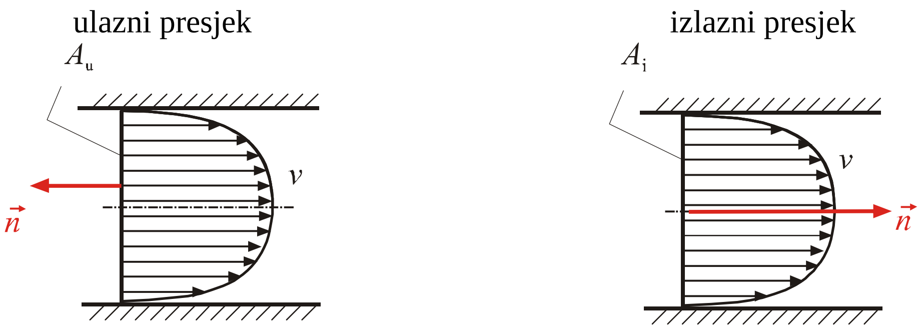
5.5.Primjena jednadžbe količine gibanja za određivanje sile fluida na plašt cijevi



Pretpostavke:

- brzine su okomite na presjeke
- utjecaj viskoznih sila na ulaznom i izlaznom presjeku se zanemaruje

$$F_R = \vec{G} - \int_{A_u} \left(\rho\vec{v}v_n + p_M\vec{n}\right)\mathrm{d}S - \int_{A_i} \left(\rho\vec{v}v_n + p_M\vec{n}\right)\mathrm{d}S$$



$\vec{v} = -v\vec{n}$

$v_n = \vec{v}\cdot\vec{n} = -v$

$$-\int_{A_u} \rho\vec{v}v_n\mathrm{d}S = -\int_{A_u} \rho v^2\mathrm{d}S$$

$\vec{v} = v\vec{n}$

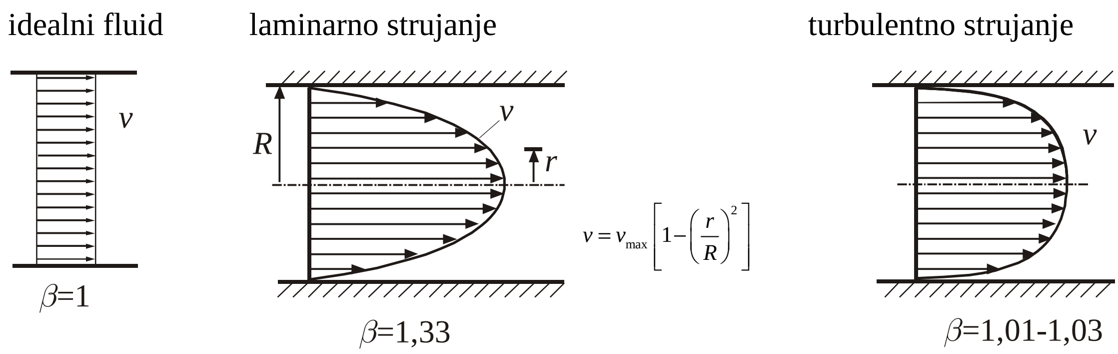
$v_n = \vec{v}\cdot\vec{n} = v$

$$-\int_{A_i} \rho\vec{v}v_n\mathrm{d}S = -\int_{A_i} \rho v^2\mathrm{d}S$$

uvodimo

$$\int_A \rho v^2\mathrm{d}S = \beta\rho v_{sr}^2 A \quad \text{ili} \quad \beta = \frac{1}{Av_{sr}^2}\int_A v^2\mathrm{d}S$$

β - koeficijent ispravka količine gibanja



Zaključak: za turbulentno strujanje (koje je najčešće u praksi) uzimat ćemo β=1.

- tlak okomito na strujnice je jednak tlaku u mirovanju, jer možemo pretpostaviti paralelne, praktički ravne strujnice, pa je $-\int p_M \vec{n}\,\mathrm{d}S = -\vec{n}\,p_M S$ gdje je p_M tlak u težištu površine.

Konačan izraz za silu na plašt cijevi

$$\vec{F}_R = \vec{G} - \vec{n}_u \underbrace{\left(\beta_u \rho v_u^2 + p_u\right) A_u}_{I_u} - \vec{n}_i \underbrace{\left(\beta_i \rho v_i^2 + p_i\right) A_i}_{I_i}$$

I_u – impulsna funkcija (sila)

Za više ulaza ili izlaza

$$\boxed{\vec{F}_R = \vec{G} - \sum \vec{n}\, I}, \qquad \boxed{I = \left(\beta \rho v^2 + p\right) A}$$

Impulsna funkcija (kao vektorska veličina) $\vec{I} = -\vec{n} I$ uvijek gleda u kontrolni volumen.

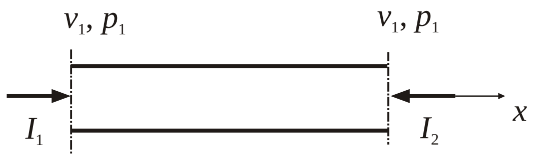
$$\boxed{\vec{F}_R = \vec{G} + \sum \vec{I}}$$

$$\vec{F}_R = \vec{G} + \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 + \vec{I}_4$$

- za izračunavanje impulsnih sila potrebno je poznavati tlakove i brzine u presjecima 1-4, što se dobije iz primjene jednadžbe kontinuiteta i Bernoulijeve jednadžbe.

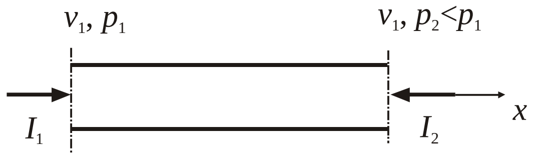
Primjeri:

-idealni fluid



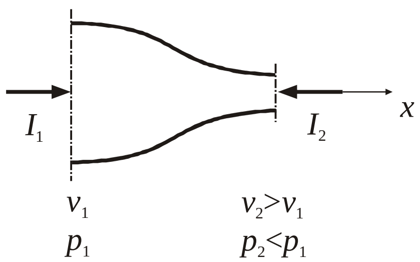
$I_1=I_2$
$F_x=0$

-viskozni fluid



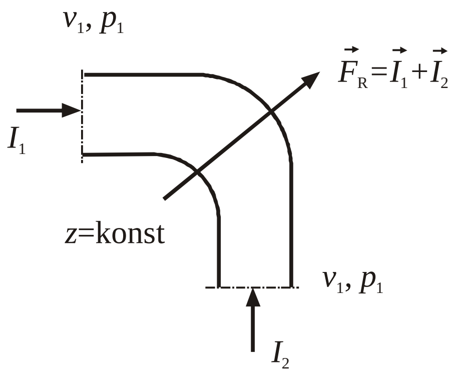
$I_1>I_2$
$F_x>0$

- idealni fluid

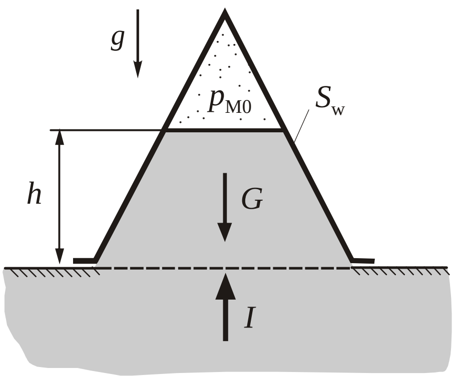


$F_x=I_1-I_2$

-idealni fluid



Jednadžba količine gibanja je primjenjiva i na probleme statike

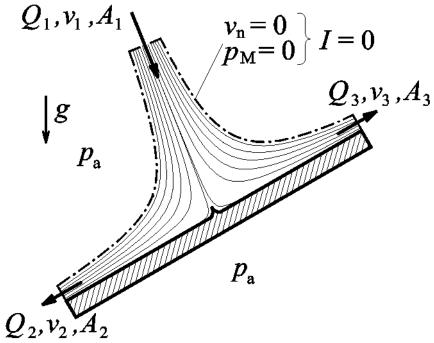


$$I=\left(\rho\cancel{v}^2+\underbrace{p_M}_{p_{M0}+\rho gh}\right)A$$

$$I=\left(p_{M0}+\rho gh\right)A$$

$$F_R=\left(p_{M0}+\rho gh\right)A-G$$

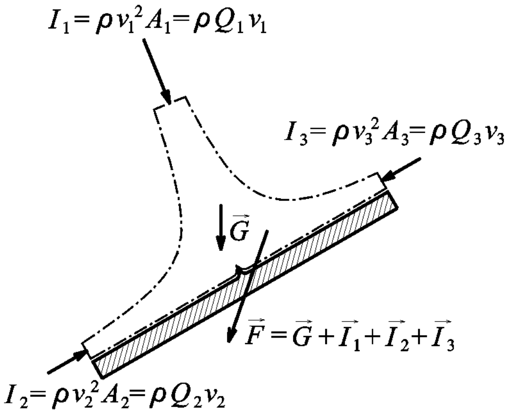
5.6 Primjena jednadžbe količine gibanja za određivanje sile mlaza fluida na lopatice



Slika prikazuje mlaz fluida površine poprečnog presjeka A_1, koji brzinom v_1 i protokom $Q_1 = v_1 A_1$, nailazi na ravnu lopaticu (ploču jedinične širine) koja na sebi ima razdjelnik strujanja (nosić) kojim se mlaz dijeli na dvije grane označene indeksima 2 i 3. Ako je površina mlaza mala u odnosu na površinu lopatice mlaz će tangencijalno napuštati lopaticu. Mlaz struji u atmosferi, a s druge strane lopatice vlada atmosferski tlak.

Na slici je ucrtan odabrani kontrolni volumen (crta-točka linija) na čijoj se kontrolnoj površini može uočiti ulazni presjek mlaza, dva izlazna presjeka, rub mlaza i površina lopatice. Ako se pretpostave jednoliki profili brzine po presjecima i linearnu promjenu tlaka, tada će se impulsne funkcije računati po istim formulama kao i pri određivanju sile fluida na plašt cijevi. Ako se traži rezultantna sila na lopaticu (uzimajući u obzir i silu atmosferskog tlaka s vanjske strane), impulsne funkcije se računaju s manometarskim tlakom, koji je u svim presjecima jednak nuli, te za veličinu impulsne funkcije vrijedi

$$I = \rho v^2 A = \rho Q v$$



Na ulaznim i na izlaznim dijelovima kontrolne površine impulsne funkcije gledaju u kontrolni volumen, a okomite su na površine. Po rubu mlaza također treba izračunati impulsnu funkciju, jer ta površina nije dio površine lopatice na kojoj se želi odrediti silu. Međutim budući da kroz tu površinu nema strujanja, a na njoj je pretlak jednak nuli, zaključuje se da je i impulsna funkcija jednaka nuli, te preostaju samo impulsne funkcije kao prema slici. Tražena sila jednaka je vektorskom zbroju impulsnih funkcija i sile težine.

Ako bi strujanje bilo neviskozno (nema tangencijalnih naprezanja), a ploča bila ravna (nema razdjelnika strujanja) sila fluida bi bila okomita na ploču (jer postoje samo sile tlaka), a protoci Q_2 i Q_3 bi bili upravo takvi da nema tangencijalne komponente sile na ploču.