

## HIDRAULIČKI PRORAČUN CJEVOVODA

Hidraulički proračun cjevovoda se temelji na jednadžbi kontinuiteta

$$Q = vA = \text{konst.}$$

i modificiranoj Bernoullijevoj jednadžbi, koja za strujanje od presjeka 1 prema presjeku 2 cijevi glasi

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + h_p - h_T = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_F$$

gdje je  $h_p$  visina dobave pumpe,  $h_T$  pad visine energije u turbini, a  $h_F$  ukupna visina gubitaka između promatranih presjeka.

Visina  $h_F$  gubitaka mehaničke energije (pretvorbe mehaničke energije u unutarnju) se dijeli na linijske gubitke  $h_f$  i lokalne gubitke  $h_{fm}$ , tj. vrijedi

$$h_F = h_f + h_{fm}.$$

### Modeliranje linijskih gubitaka

Linijski gubici  $h_f$  se modeliraju s pomoću izraza Darcy-Weissbacha koji glasi

$$h_f = \frac{\Delta p_f}{\rho g} = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{8LQ^2}{\pi^2 D^5 g}$$

gdje je  $\lambda$  faktor trenja koji je određen eksperimentalno, a u općem je slučaju funkcija Reynoldsova broja

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{4\rho Q}{\pi D \mu} \quad \text{ili} \quad Re = \frac{v D}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D \nu}$$

i relativne visine  $k/D$  hrapavosti stijenke cijevi.

U gornjim su izrazima:  $L$  je duljina cjevovoda;  $D$  je promjer cjevovoda;  $v$  je srednja brzina strujanja fluida;  $Q$  je protok;  $\mu$  je viskoznost fluida, a  $\nu = \mu / \rho$  kinematička viskoznost.

Za strujanje u okruglim cijevima se uzima da je ono laminarno do  $Re=2300$ , a pri višim Reynoldsovim brojevima se uzima da je turbulentno, iako je u području Reynoldsova broja od 2300 do približno 4000 faktor trenja vrlo nepredvidiv, te je pouzdanost proračuna slaba.

- Za laminarno strujanje postoji analitičko rješenje za faktor trenja

$$\lambda = \frac{64}{Re}, \text{ za } Re < 2300$$

iz kojeg je jasno da faktor trenja u laminarnom strujanju ne zavisi od hrapavosti stijenke cijevi.

- U području turbulentnog strujanja najtočnijom se smatra formula Colebrooka koja glasi

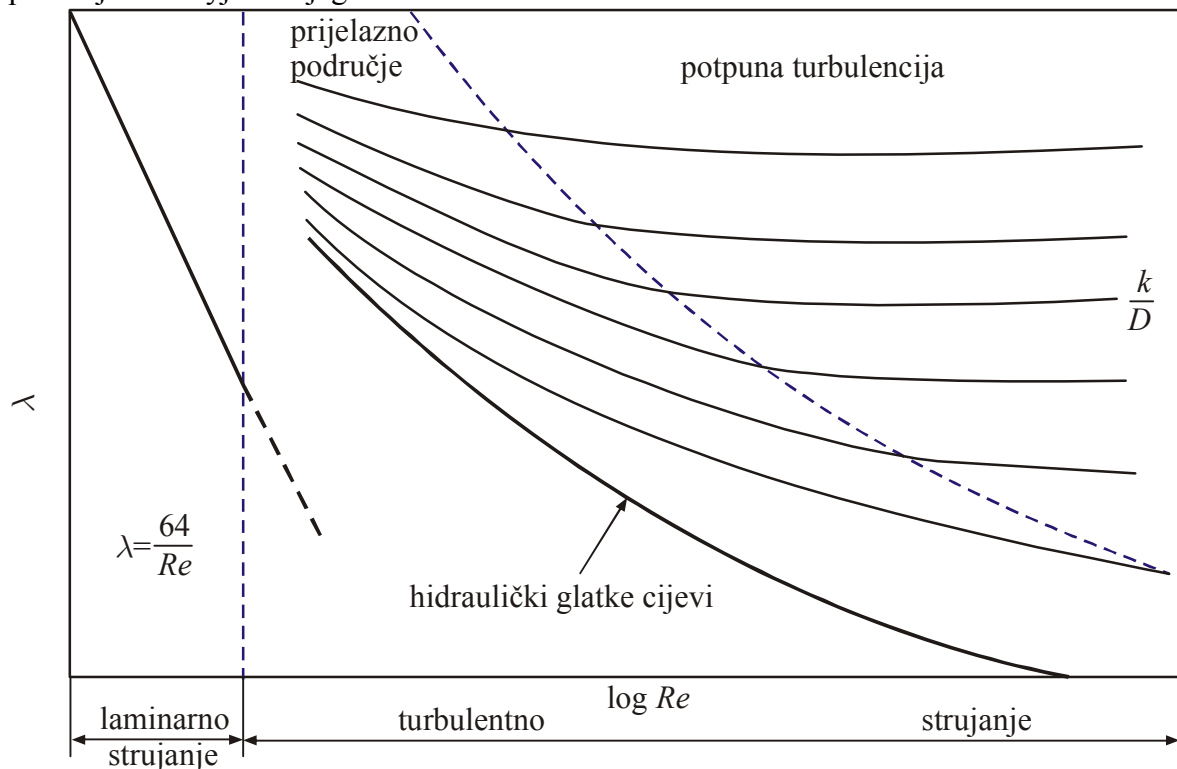
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0,86859 \ln \left( 0,2698 \frac{k}{D} + \frac{2,5119}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$$

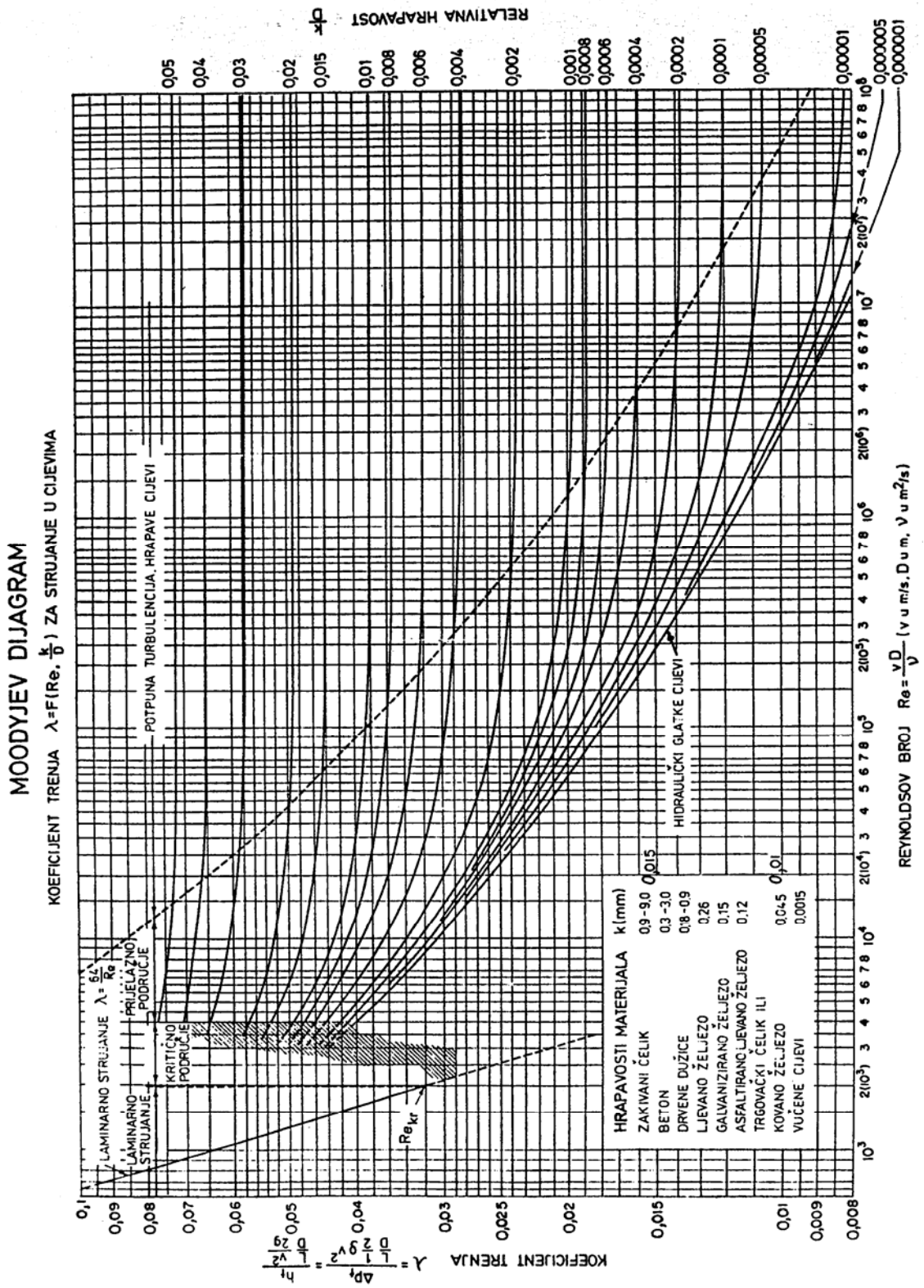
Iz ove formule bi se faktor trenja odredio iterativnim postupkom, što je nepraktično, te se preporuča koristiti eksplicitnu formulu Swamee, Jain, koja je dovoljno točna, a primjenjiva praktički za čitavo područje Moodyjeva dijagrama, a koja glasi

$$\lambda = \frac{1,325}{\left[ \ln \left( \frac{k}{3,7D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2} \quad \text{za } Re > 5000$$

Ovaj izraz vrijedi i za hidraulički glatke cijevi ( $k/D=0$ ) i za područje potpuno izražene turbulencije ( $Re \rightarrow \infty$ ).

Faktor trenja je definiran i grafički Moodyevim dijagramom, prema slici na sljedećoj stranici. Uz dijagram su dane neke tipične visine hrapavosti stijenke. Donja slika prikazuje područja Moodyjeva dijagrama.





Moodyjev dijagram

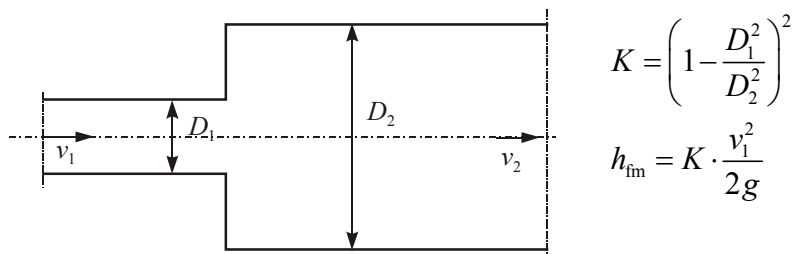
Treba imati na umu da prikazani model linijskih gubitaka vrijedi za strujanje ustaljenim (izobraženim) profilom brzine, gdje je pad tlaka uslijed trenja linearno razmjernan duljini cjevovoda. U određenim dionicama cjevovoda, npr. ulazni dio cjevovoda priključen na veliki spremnik, strujanje iza koljena, ventila, naglog proširenja i slično, strujanje neće biti ustaljenim profilom. U realnim cjevovodima je duljina dionica u kojima je strujanje ustaljenim profilom brzine obično puno veća od duljine dionica s neustaljenim profilom te se prikazani model s dovoljnom točnošću može primijeniti na čitavu duljinu cjevovoda.

### Modeliranje lokalnih gubitaka

Lokalni gubici strujanja nastaju pri strujanju kroz koljena, ventile, zasune, filtre, nagla proširenja i slično. Gledajući lokalno u svim nabrojanim situacijama, strujanje je trodimenzijsko, ali se pretpostavlja da su dimenzije prostora u kojem se to strujanje događa zanemarivo male u odnosu na ukupnu duljinu cjevovoda pa se takav prostor može smatrati točkom cjevovodnog sustava, a nastali gubitak lokalnim ili mjesnim. Jasno je da je gubitak mehaničke energije vezan uz strujanje pa će i visina lokalnih gubitaka biti razmjerna visini kinetičke energije u obliku

$$h_{\text{fm}} = K \frac{v^2}{2g} = K \frac{8Q^2}{\pi^2 D^4 g}$$

gdje je  $K$  koeficijent lokalnog gubitka. Usporedbom Darcy-Weissbachove formule s gornjim izrazom može se reći da se i linijski gubici mogu izraziti koeficijentom gubitka  $K = \lambda L/D$ . U općem je slučaju koeficijent  $K$  funkcija Reynoldsova broja i relativne visine hrapavosti stijenke. Kao što i faktor trenja  $\lambda$  pri visokim vrijednostima Reynoldsova broja postaje konstantnim tako se i koeficijent lokalnog gubitka može smatrati konstantnim pri visokom vrijednostima Reynoldsova broja. Za slučaj da ulazna i izlazna brzina nisu jednake uz koeficijent lokalnog gubitka mora točno stajati na koju visinu kinetičke energije se on odnosi, iako se najčešće koristi najveća visina kinetičke energije. Tako je na sljedećoj slici definiran koeficijent lokalnog gubitka naglog proširenja (koji se može dobiti teorijskim razmatranjima), a s obzirom da ulazna i izlazna brzina nisu jednake definiran je i izraz za visinu lokalnih gubitaka da se zna uz koju visinu kinetičke energije se gubici računaju.

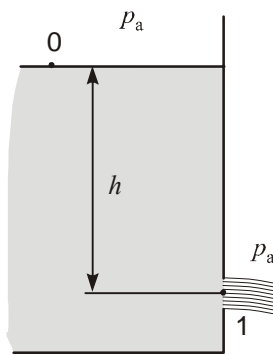


Posebni slučaj naglog proširenja je utjecanje u veliki spremnik gdje se može uzeti da je  $D_2 \gg D_1$  te vrijedi da je  $K=1$ , kao što je i prije prikazano. Sljedeća tablica daje pregled nekih tipičnih lokalnih gubitaka.

Lokalni gubitak	Koeficijent lokalnog gubitka $K$
Ulaz iz spremnika u cijev: oštri rubovi	0.5
lijepo zaobljeni rubovi	0.04
Koljeno 90° - veliki radijus luka	0.2
- mali radijus luka	0.7
Kuglasti ventil: potpuno otvoren	0.05
1/3 zatvoren	5.50
Ventil s pladnjem – potpuno otvoren	10.0

### Veza između faktora brzine i koeficijenta lokalnog gubitka

Pri analizi istjecanja kroz otvore uveden je pojam faktora brzine  $C_v$  kojim se uzima u obzir gubitak mehaničke energije uslijed trenja. Isti se ti gubici mogu obuhvatiti koeficijentom lokalnog gubitka  $K$ .



Gledajući sliku može se pisati izraz za brzinu istjecanja  $v = C_v \sqrt{2gh}$ , a modificirana Bernoullijeva jednadžba od točke 0 to točke 1 uz postojanje lokalnih gubitaka glasi

$$h = \frac{v^2}{2g} + K \cdot \frac{v^2}{2g}$$

Usporedbom tih izraza slijedi veza između koeficijenta brzine  $C_v$  i koeficijenta lokalnog gubitka  $K$ , oblika  $K = \frac{1}{C_v^2} - 1$

Očito je da za  $C_v=1$  (strujanje bez gubitaka), slijedi  $K=0$ .

### Ekvivalentna duljina cjevovoda

Kod strujanja kroz cijev konstantnog promjera lokalni gubici se mogu zamijeniti ekvivalentnom duljinom cjevovoda. Jasno je da vrijedi

$$K \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{L_e}{D} \frac{v^2}{2g} \Rightarrow L_e = D \frac{K}{\lambda}$$

### **Postupci proračuna jednostavnih cjevovoda**

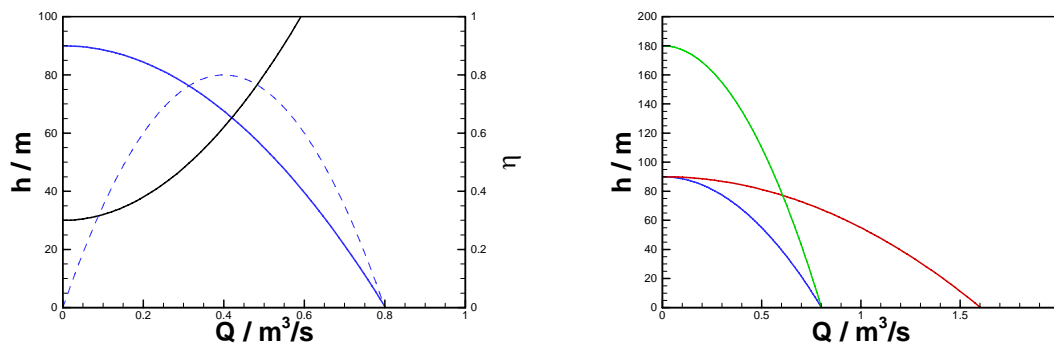
Kategoriji hidraulički jednostavnih cjevovoda pripadaju svi cjevovodi jednostavne topološke strukture kod kojih se problem proračuna svodi na postavljanje jedne modificirane Bernoullijeve jednadžbe, a koja se može svesti na oblik Darcy-Weissbachova izraza

$$h_f = \lambda \frac{8LQ^2}{\pi^2 gD^5}$$

Hidraulički proračun cjevovoda uključuje tri različite zadaće.

- U prvoj se na temelju zadane geometrije cjevovoda i željenog protoka fluida treba odrediti visinu gubitaka, odnosno potrebnu snagu pumpe kojom će se ostvariti željeno strujanje.
- U drugoj se zadaći za zadanu geometriju cjevovoda i raspoloživu snagu za svladavanje gubitaka trenja traži protok  $Q$  koji će se ustaliti u sustavu.
- U trećoj se zadaći na temelju zadanog protoka i raspoložive snage za svladavanje gubitaka trenja, treba odrediti promjer  $D$  cjevovoda.

-Ukoliko su zadani protok  $Q$  i promjer  $D$  cjevovoda proračun se svodi na određivanje faktora trenja  $\lambda$  nakon čega se direktno izračuna tražena visina gubitaka mehaničke energije, te snaga pumpe. U otvorenim cjevovodnim sustavima visinom dobave pumpe se svladava razliku energija  $\Delta h_{21}$  na kraju u odnosu na početak cjevovoda (razlika geodetskih visina, razlika visina tlakova i razlika visina brzina), te gubici trenja, dok u zatvorenim (cirkulacijskim) sustavima pumpa svladava samo gubitke trenja. Uz pretpostavku da su gubici razmjerni kvadratu protoka, potreba za visinom dobave pumpe može se općenito prikazati funkcijom  $h = \Delta h_{21} + rQ^2$  što označuje parabolu koja se naziva karakteristikom cjevovoda. Sljedeća slika lijevo prikazuje primjer dijagrama koji označuje karakteristiku pumpe (plava krivulja) s ucrtanom karakteristike cjevovoda (crna krivulja). Crtkana plava krivulja označuje faktor korisnosti pumpe. Visina dobave pumpe je maksimalna kod nultog protoka, a maksimalni je protok pri nultoj visini dobave pumpe. Radna točka pumpe definirana je presjekom karakteristike pumpe i karakteristike cjevovoda. Pumpu treba izabrati tako da radna točka padne u područje maksimalnog faktora iskoristivosti pumpe.



Često se u praksi radi s paralelno ili serijski spojenim pumpama. U paralelnom radu jednakih pumpi visina dobave je zajednička za sve pumpe, a protok se povećava razmjeno broju pumpi. U serijskom radu jednakih pumpi protok je kroz svaku pumpu jednak, a nakon svake pumpe tlak raste za visinu dobave pumpe, tako da je ukupna visina dobave razmjerna broju pumpi. Slika gore desno prikazuje karakteristiku jedne pumpe (plava krivulja), te karakteristike serijskog (zeleno krivulja) i paralelnog rada (crvena krivulja) takvih dviju pumpi.

U drugoj zadaći je poznata geometrija cjevovoda i raspoloživa visina gubitaka mehaničke energije, te se za potrebe određivanja protoka Darcy-Weisbachov izraz piše u obliku

$$Q = \sqrt{\frac{h_f \pi^2 g D^5}{8L\lambda}} = \frac{K_1}{\sqrt{\lambda}} \quad (\text{a})$$

gdje konstanta  $K_1$  obuhvaća sve zadane veličine. Jednako tako se i Reynoldsov broj može izraziti kao

$$Re = \frac{4Q}{D\pi v} = K_2 Q \quad (b)$$

gdje se konstanta  $K_2 = 4/D\pi v$  može izračunati iz zadanih podataka. Iterativni postupak započinje pretpostavkom o faktora trenja. Obično se pretpostavlja turbulentno strujanje u režimu potpuno izražene hrapavosti (vrijednost koeficijenta se očitava iz Moodyjeva dijagrama ili iz izračuna formule Swamee-Jaina uz  $Re = \infty$ ). S tom vrijednošću  $\lambda$  se ulazi u izraz (a) te se izračunava protok. S tako izračunatim protokom se računa Reynoldsov broj iz izraza (b), te se ponovo računa nova vrijednost faktora trenja  $\lambda$ . Nakon toga se postupak ponavlja. Iterativni postupak se smatra završenim kada se protok  $Q$  prestane mijenjati u prve tri signifikantne znamenke, a najčešće su potrebne svega dvije ili tri iteracije. Iterativni postupak se najlakše realizira kroz sljedeću tablicu, koja se popunjava redak po redak

Broj iteracije	$\lambda$	$Q$	$Re$
0			
1			
...			

U trećoj zadaći, gdje je potrebno odrediti promjer  $D$  cjevovoda iz Darcy-Weissbachova izraza slijedi

$$D = \left( \frac{8LQ^2}{\pi^2 g h_f} \cdot \lambda \right)^{0,2} = K_1 \lambda^{0,2} \quad (c)$$

a Reynoldsov broj je

$$Re = \frac{4Q}{D\pi v} = \frac{K_2}{D} \quad (d)$$

Ponovo se koeficijenti  $K_1$  i  $K_2$  mogu odrediti numerički. Iterativni postupak određivanja promjera se odvija prema sljedećoj tablici

Broj iteracije	$D$ , iz (c)	$Re$ , iz (d)	$k/D$	$\lambda$
0				
1				
...				

Iterativni postupak započinje pretpostavljanjem promjera  $D$ . Promjer se u principu može pretpostaviti sasvim proizvoljno, jer će iterativni postupak uvijek konvergirati ka rješenju, a što je pretpostavka bliže rješenju iterativni postupak će završiti u manjem broju iteracija. Tako se promjer  $D$  može pretpostaviti na načinu da uz zadani protok brzina strujanja bude u preporučenim granicama. Za vodovodne sustave je to u granicama od 0,5 do 2 m/s. Iterativni postupak se prekida kada se promjer prestane mijenjati u prve tri signifikantne znamenke. Naravno da iterativni postupak može započeti i pretpostavljanjem koeficijenta otpora trenja  $\lambda$ , kao što prikazuje sljedeća tablica

Broj iteracije	$\lambda$	$D$	$Re$	$k/D$
0				
1				
...				

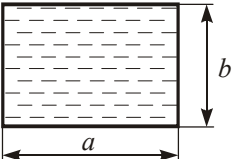
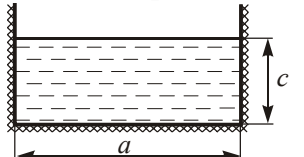
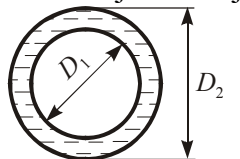
Gledajući Moodyjev dijagram, faktor trenja  $\lambda$  u turbulentnom se strujanju za uobičajene vrijednosti Reynoldsova broja i relativne visine hrapavosti kreće u granicama od 0,008 do 0,04, pa se proračun može započeti s nekom srednjom vrijednošću, npr.  $\lambda=0,02$ .

### Hidraulički proračun cjevovoda nekružnog poprečnog presjeka

Opisani postupak za hidraulički proračun cjevovoda kružnog poprečnog presjeka se može primijeniti i za približni proračun cjevovoda nekružnog poprečnog presjeka. Proračun se temelji na ekvivalentnom promjeru  $D_e$ , a vrijedi uz uvjet da je strujanje turbulentno. Ekvivalentni promjer je definiran kao

$$D_e = 4R_H = 4 \frac{S_T}{O}$$

gdje je  $S_T$  ploština poprečnog presjeka toka, a  $O$  oplakani opseg (duljina linije dodira fluida i stijenke cijevi). Odnos  $S_T/O = R_H$  se naziva hidrauličkim radiusom. Na sljedećoj slici su definirani ekvivalentni promjeri za neke tipične situacije strujanja

Poprečni presjek	Ekvivalentni promjer
Strujanje punim pravokutnim presjekom 	$D_e = \frac{2ab}{a+b}$
Otvoreno strujanje u pravokutnom kanalu 	$D_e = \frac{4ac}{a+2c}$
Strujanje između dvaju koaksijalnih cijevi 	$D_e = D_2 - D_1$

Faktor trenja  $\lambda$  za ustaljeno strujanje kroz cijevi nekružnog presjeka se također očitava iz Moodyjeva dijagrama ili računa iz formule Swamee-Jaina s tim što su Reynoldsov broj i relativna visina hrapavosti definirani na temelju ekvivalentnog promjera, tj.

$$Re = \frac{v \cdot D_e}{\nu}$$



Srednja brzina  $v$  u svim izrazima se definira omjerom protoka i **stvarne** ploštine poprečnog presjeka toka. Izraz za visinu linijskih gubitaka glasi

$$h_f = \lambda \frac{L}{D_e} \frac{v^2}{2g}$$

u kojem  $v$  ponovo označuje stvarnu srednju brzinu strujanja fluida.