Diferenciranje pod znakom integrala

Neka je dat integral koji zavisi od parametra α:

$$I(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$$

Ako su $f(x,\alpha)$, $f'(x,\alpha)$ neprekidne f-je, ako postoje $b'(\alpha)$ i $a'(\alpha)$ tada

$$I'(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_{\alpha}(x,\alpha)\,dx + b'(\alpha)\, f(b(\alpha),\alpha) - a'(\alpha)\cdot f(a(\alpha),\alpha)$$

Ako granice a i b ne zavise od α tada

$$I'(\alpha) = \int_{a}^{b} f'_{\alpha}(x,\alpha)\,dx$$

Polazeći od integrala $\int_0^b \frac{dx}{1+\alpha x}$ izračunati

$$\int_0^b \frac{x\,dx}{(1+\alpha x)^2} \quad ; \quad \int_0^b \frac{x^2\,dx}{(1+\alpha x)^3}.$$

Rj.

$$I(\alpha)=\int_0^b \frac{dx}{1+\alpha x} = \left| \begin{array}{ll} 1+\alpha x = t & x=0 \Rightarrow t=1 \\ \alpha dx = dt & x=b \Rightarrow t=1+\alpha b \\ dx = \frac{1}{\alpha}dt & \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_1^{1+\alpha b} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\alpha}\ln|t|\Big|_1^{1+\alpha b} = \frac{1}{\alpha}\ln|1+\alpha b|$$

$$f'_\alpha(x,\alpha) = \left(\frac{1}{1+\alpha x}\right)'_\alpha = (-1)(1+\alpha x)^{-2}\cdot x = \frac{-x}{(1+\alpha x)^2}$$

$$I'(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx \Rightarrow \qquad I'(\alpha) = \int_0^b \frac{-x}{(1+\alpha x)^2}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \int_0^b \frac{x\,dx}{(1+\alpha x)^2} = -I'(\alpha)$$

Kako je $I(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\ln|1+\alpha b|$ to je $I'_\alpha = -\frac{1}{\alpha^2}\ln|1+\alpha b| + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+\alpha b}\cdot b$

Prema tome

$$\int_0^b \frac{x\,dx}{(1+\alpha x)^2} = \frac{1}{\alpha^2}\ln|1+\alpha b| - \frac{b}{\alpha(1+\alpha b)}$$

Slično bi imali $\quad I''(\alpha) = \int_0^b \left(\frac{-x}{(1+\alpha x)^2}\right)'_\alpha dx = \int_0^b \frac{2x^2}{(1+\alpha x)^3}\,dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^b \frac{x^2}{(1+\alpha x)^3}\,dx = \frac{1}{2}I''(\alpha), \qquad I''_\alpha = (I'_\alpha)' = \frac{2}{\alpha^3}\ln|1+\alpha b| + \left(-\frac{1}{\alpha^2}\right)\frac{b}{1+\alpha b}$$

$$-\frac{b}{\alpha^2(1+\alpha b)} + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{-b}{(1+\alpha b)^2}\cdot b \quad \Rightarrow \int_0^b \frac{x^2}{(1+\alpha x)^3}\,dx = \frac{1}{\alpha^3}\ln|1+\alpha b| - \frac{b}{\alpha^2(1+\alpha b)}$$

$$-\frac{b^2}{\alpha(1+\alpha b)^2}$$ traženo rješenje

(#) Izračunati $I(\alpha)=\int\limits_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}dx$ ako je $\alpha>-1$.

Rj.

$$I'(\alpha)=\int\limits_a^b f'_\alpha(\alpha,x)\,dx$$

$$f(\alpha,x)=\frac{1-e^{-\alpha x}}{x\,e^x}\ ,\quad f'_\alpha=\frac{-e^{-\alpha x}\cdot(-x)}{xe^x}$$

$$I'(\alpha)=\int\limits_0^\infty \frac{x\,e^{-\alpha x}}{xe^x}dx=\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x-x}dx=\int\limits_0^\infty e^{-(\alpha+1)x}dx=\left|\begin{array}{l}-(\alpha+1)x=s\\ -(\alpha+1)dx=ds\\ dx=-\frac{ds}{\alpha+1}\\ x=0\Rightarrow s=0\\ x=\infty\Rightarrow s=-\infty\end{array}\right|=-\frac{1}{\alpha+1}\int\limits_0^{-\infty}e^s ds=\frac{-1}{\alpha+1}\,e^s\Big|_0^{-\infty}=0-\frac{(-1)}{\alpha+1}=\frac{1}{\alpha+1}$$

$$I'_\alpha=\frac{1}{\alpha+1}\quad\Rightarrow\quad I(\alpha)=\int\frac{1}{\alpha+1}d\alpha=\ln|\alpha+1|+C$$

Kako je $I(0)=\int\limits_0^\infty\frac{1-e^0}{xe^x}dx=0$ to je $I(0)=\ln 1+C=0$

$\Rightarrow C=0$

$I(\alpha)=\ln|\alpha+1|$ traženo rješenje

(#) za vježbu

Izračunati $I(\alpha)=\int\limits_0^\infty\frac{1-e^{-\alpha x^2}}{xe^{x^2}}dx$, ako je $\alpha>-1$.

(#) za vježbu

Izračunati $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(\alpha\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}dx$

rješenje: $I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\ln|1+\alpha|$.

(#) Izračunati
$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx .$$

Rj:
$$I'(\alpha)=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx , \qquad I(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$$

$$f(\alpha,x)=e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x} , \qquad f'_\alpha=\frac{e^{-x}}{x}\cdot x\cos\alpha x = e^{-x}\cos\alpha x$$

$$I'(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}\cos\alpha x\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x}\cos\alpha x\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=e^{-x} & dv=\cos\alpha x\,dx \\ du=-e^{-x}dx & v=\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x\end{matrix}\right| = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha}e^{-x}\sin\alpha x\Big|_0^R+\frac{1}{\alpha}\int_0^R e^{-x}\sin\alpha x\,dx\right)$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha}e^{-R}\sin\alpha R+\frac{1}{\alpha}\int_0^R e^{-x}\sin\alpha x\,dx\right)=\left|\begin{matrix} u=e^{-x} & dv=\sin\alpha x\,dx \\ du=-e^{-x}dx & v=-\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha}e^{-R}\sin\alpha R+\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{1}{\alpha}\underbrace{e^{-x}\cos\alpha x\Big|_0^R}_{(e^{-R}\cos\alpha R-e^{0}\cdot 1)}-\frac{1}{\alpha}\int_0^R e^{-x}\cos\alpha x\,dx\right)\right)=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha}e^{-R}\sin\alpha R-\frac{1}{\alpha^2}e^{-R}\cos\alpha R+\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}\int_0^R e^{-x}\cos\alpha x\,dx\right)=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha}e^{-R}\underbrace{\sin\alpha R}_{\text{ovo je između } -1 \text{ i } 1}-\frac{1}{\alpha^2}e^{-R}\underbrace{\cos\alpha R}_{\text{uzima vrijednosti između } -1 \text{ i } 1}+\frac{1}{\alpha^2}\right)-\frac{1}{\alpha^2}\underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x}\cos\alpha x\,dx}_{I'(\alpha)}$$

Sad imamo
$$\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)\int_0^\infty e^{-x}\cos\alpha x\,dx=\frac{1}{\alpha^2} \Rightarrow \int_0^\infty e^{-x}\cos\alpha x\,dx=\frac{\frac{1}{\cancel{\alpha^2}}}{\frac{\alpha^2+1}{\cancel{\alpha^2}}}=\frac{1}{\alpha^2+1}$$

Kako je $I'(\alpha)=\frac{1}{\alpha^2+1}$ to je $I(\alpha)=\int\frac{1}{\alpha^2+1}\,d\alpha=\operatorname{arctg}\alpha+C$

$I(0)=0=\operatorname{arctg}0+C \Rightarrow C=0$

Prema tome $\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx=\operatorname{arctg}\alpha$ traženo rješenje

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА.

§ 13. Собственные интегралы, зависящие от параметра

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Если при каждом значении $\alpha \in E \subset R$ функция $f(x;\alpha)$ интегрируема по Риману как функция от x на отрезке $[a;b]$, то интеграл

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x;\alpha)\,dx \tag{1}$$

называют *собственным интегралом, зависящим от параметра* α. Наряду с интегралами вида (1) рассматривают интегралы более общего вида

$$\Phi(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x;\alpha)\,dx, \tag{2}$$

зависящие от параметра.

1. Непрерывность интеграла по параметру. Если функция $f(x;\alpha)$ непрерывна в прямоугольнике

$$K = \{(x;\alpha):\ a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2\}, \tag{3}$$

то интеграл (1) есть непрерывная функция параметра α на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$.

В частности, если функция $f(x;\alpha)$ непрерывна в прямоугольнике K и $\alpha_0 \in [\alpha_1;\alpha_2]$, то

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_a^b f(x;\alpha)\,dx = \int_a^b \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x;\alpha)\,dx, \tag{4}$$

т. е. возможен предельный переход под знаком интеграла (1).

2. Интегрирование интегралов, зависящих от параметра. Если функция $f(x;\alpha)$ непрерывна в прямоугольнике (3), то интеграл (1) есть функция, интегрируемая на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$, и справедливо равенство

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Big(\int_a^b f(x;\alpha)\,dx \Big)\,d\alpha = \int_a^b \Big(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x;\alpha)\,d\alpha \Big)\,dx. \tag{5}$$

3. Дифференцирование интегралов, зависящих от параметра. Если функции $f(x;\alpha)$ и $\dfrac{\partial f(x;\alpha)}{\partial\alpha}$ непрерывны в прямоугольнике (3), то интеграл (1) — непрерывно дифференцируемая на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$ функция, производную которой можно вычислить по *правилу Лейбница*

$$I'(\alpha) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x;\alpha)}{\partial\alpha}\,dx. \tag{6}$$

Если функции $f(x;\alpha)$ и $\dfrac{\partial f(x;\alpha)}{\partial\alpha}$ непрерывны в прямоугольнике (3), функции $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ дифференцируемы на отрезке $[\alpha;\alpha_2]$, а их значения принадлежат отрезку $[a;b]$, то интеграл (2) — функция, дифференцируемая на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$, причем

$$\Phi'(\alpha) = f(\psi(\alpha);\alpha)\psi'(\alpha) - f(\varphi(\alpha);\alpha)\varphi'(\alpha) + \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} \frac{\partial f(x;\alpha)}{\partial\alpha}\,dx. \tag{7}$$

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найти $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(x+\cos\alpha x)\,e^{x\sin\alpha}\,dx$.

▲ Так как подынтегральная функция непрерывна в прямоугольнике

$$K = \{(x;\alpha):\ -\pi \leqslant x \leqslant \pi,\ -1 \leqslant \alpha \leqslant 1\},$$

то искомый предел A равен $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x;0)\,dx$, где

$$f(x;0) = \lim_{\alpha\to 0}(x+\cos\alpha x)\,e^{x\sin\alpha} = x+1.$$

Следовательно,

$$A = \int\limits_{-\pi}^{\pi}(x+1)\,dx = 2\pi. \ ▲$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^1 \frac{x^{\alpha_2} - x^{\alpha_1}}{\ln x}\,dx, \quad 0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2.$$

▲ Рассмотрим функцию $f(x;\alpha) = x^\alpha$. Эта функция непрерывна в прямоугольнике $K = \{(x;\alpha):\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2\}$, где $\alpha_1 > 0$. Применяя формулу (5), получаем

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\Bigl(\int\limits_0^1 x^\alpha\,dx\Bigr)\,d\alpha = \int\limits_0^1\Bigl(\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^\alpha d\alpha\Bigr)\,dx. \tag{8}$$

Так как $\int\limits_0^1 x^\alpha\,dx = \dfrac{1}{\alpha+1}$, то левая часть формулы (8) равна $\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\dfrac{d\alpha}{\alpha+1} =$ $= \ln\dfrac{1+\alpha_2}{1+\alpha_1}$. Правая часть формулы (8) равна I, так как

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^\alpha\,d\alpha = \frac{x^{\alpha_2}-x^{\alpha_1}}{\ln x}.$$

Следовательно,

$$I = \ln\frac{1+\alpha_2}{1+\alpha_1}. \ \blacktriangle$$

П р и м е р 3. Найти $I'(\alpha)$, если $I(\alpha) = \int\limits_1^2 e^{\alpha x^2}\,\dfrac{dx}{x}$.

▲ Применяя формулу (6), получаем

$$I'(\alpha) = \int\limits_1^2 e^{\alpha x^2} x\,dx = \frac{e^{\alpha x^2}}{2\alpha}\Big|_1^2 = \frac{e^{4\alpha}-e^{\alpha}}{2\alpha}. \ \blacktriangle$$

П р и м е р 4. Вычислить интеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin^2 x + \alpha^2\cos^2 x)\,dx, \quad \alpha \neq 0.$$

▲ Пусть $\alpha > 0$ и $\alpha \neq 1$. Так как функция

$$f(x;\alpha) = \ln(\sin^2 x + \alpha^2\cos^2 x)$$

непрерывна и имеет непрерывную производную $\dfrac{\partial f(x;\alpha)}{\partial\alpha}$ в прямоугольнике

$$K = \{(x;\alpha)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,\ \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2\},$$

где $\alpha_1 > 0$, то по формуле (6) получаем

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{2\alpha\cos^2 x}{\sin^2 x + \alpha^2\cos^2 x}\,dx.$$

Используя подстановку $t = \operatorname{tg} x$, находим

$$I'(\alpha) = 2\alpha\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{(t^2+1)(t^2+\alpha^2)} = \frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+\alpha^2}\right)dt =$$

$$= \frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left(\operatorname{arctg} t - \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{t}{\alpha}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\alpha+1},$$

откуда

$$I(\alpha) = \pi\ln(\alpha+1) + C.$$

Так как $I(\alpha)$ — функция, непрерывная при $\alpha > 0$, и $I(1) = 0$, то $C =$ $= -\pi\ln 2$. Следовательно, $I(\alpha) = \pi\ln((\alpha+1)/2)$ при $\alpha > 0$. Учитывая, что $I(\alpha)$ — четная функция, отсюда получаем $I(\alpha) = \pi\ln((|\alpha|+1)/2)$, если $\alpha \neq 0$. ▲

Пример 5. Найти $\Phi'(\alpha)$, если $\Phi(\alpha) = \int\limits_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} \operatorname{sh}\alpha x^2\,dx$.

▲ По формуле (7) находим

$$\Phi'(\alpha) = \cos\alpha\cdot\operatorname{sh}(\alpha\sin^2\alpha) + \sin\alpha\cdot\operatorname{sh}(\alpha\cos^2\alpha) + \int\limits_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} x^2\operatorname{ch}\alpha x^2\,dx. \ ▲$$

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что функция $I(\alpha)$ непрерывна на R, если:

1) $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \sin^2\alpha x^2\,dx$; 2) $I(\alpha) = \int\limits_{-1}^2 \dfrac{x^2}{1+x^2+\alpha^2x^4}\,dx$.

2. Найти предел:

1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_0^1 \sqrt{1+\alpha^2x^4}\,dx$; 2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{-1}^1 \sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$;

3) $\lim\limits_{\alpha\to 1}\int\limits_2^4 \dfrac{x\,dx}{1+x^2+\alpha^6}$; 4) $\lim\limits_{\alpha\to 1}\int\limits_0^1 x^2e^{\alpha x^3}\,dx$;

5) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_0^\pi x\cos(1+\alpha)x\,dx$.

3. Доказать, что функция $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \operatorname{sign}(x-\alpha)\,dx$ непрерывна на R.

4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и принимает положительные значения на отрезке $[0;1]$. Доказать, что функция

$$I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}\,f(x)\,dx$$

разрывна при $\alpha = 0$.

5. Выяснить, справедливо ли равенство

$$\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_0^1 f(x;\alpha)\,dx = \int\limits_0^1 \lim_{\alpha\to 0} f(x;\alpha)\,dx,$$

если:

1) $f(x;\alpha) = \dfrac{x}{\alpha^2}\,e^{-x^2/a^2}$; 2) $f(x;\alpha) = \dfrac{2xa^2}{(\alpha^2+x^2)^2}$.

6. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $a < a_0 < x < b$. Доказать, что

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\alpha_0}^{x} [f(t+\alpha) - f(t)]\,dt = f(x) - f(a_0).$$

7. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — последовательность функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a;b]$ и принимающих на этом отрезке неотрицательные значения, равномерно сходится к нулю на множестве $E=\{x\colon\ 0<\delta\leqslant|x|\leqslant 1\}$ при любом $\delta>0$, причем

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-1}^{1}\varphi_n(x)\,dx=1.$$

Доказать, что для любой непрерывной на отрезке $[-1;1]$ функции $f(x)$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-1}^{1}f(x)\varphi_n(x)\,dx=f(0).$$

8. Выяснить, равны ли интегралы

$$\int\limits_0^1\Bigl(\int\limits_0^1 f(x;\alpha)\,d\alpha\Bigr)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_0^1\Bigl(\int\limits_0^1 f(x;\alpha)\,dx\Bigr)\,d\alpha,$$

если:

1) $f(x;\alpha)=\dfrac{\alpha^2-x^2}{(\alpha^2+x^2)^2}$; 2) $f(x;\alpha)=\dfrac{\alpha-x}{(\alpha+x)^3}$;

3) $f(x;\alpha)=\Bigl(\dfrac{x^5}{\alpha^4}-\dfrac{2x^3}{\alpha^3}\Bigr)e^{-x^2/\alpha}$.

9. Пусть функция $f(x;\alpha)$ при каждом $\alpha\in[\alpha_1;\alpha_2]$ интегрируема по x на отрезке $[a;b]$, и пусть на этом отрезке существует функция $\varphi(x)$ такая, что $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}f(x;\alpha)=\varphi(x)$, где $\alpha_0\in[\alpha_1;\alpha_2]$, равномерно относительно $x\in[a;b]$. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\int\limits_a^b f(x;\alpha)\,dx=\int\limits_a^b\varphi(x)\,dx$;

2) $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\int\limits_a^b f(x;\alpha)g(x)\,dx=\int\limits_a^b\varphi(x)g(x)\,dx$, где $g(x)$ — функция, интегрируемая на отрезке $[a;b]$.

10. Пользуясь формулой $\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=\int\limits_0^1\dfrac{d\alpha}{1+x^2\alpha^2}$, вычислить инрал

$$\int\limits_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

11. Пользуясь формулой

$$\frac{1}{\sin x}\ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}=2ab\int\limits_0^1\frac{dt}{a^2-b^2t^2\sin^2 x},$$

где $a > b > 0$, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln \frac{a + b\sin x}{a - b\sin x}\ \frac{dx}{\sin x}.$$

12. Пусть $a > 0$, $b > 0$. Вычислить интеграл:

1) $\displaystyle\int\limits_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx$.

13. Найти $I'(\alpha)$, если:

1) $\displaystyle I(\alpha) = \int\limits_0^1 \sin(\alpha x)\,dx$; 2) $\displaystyle I(\alpha) = \int\limits_1^3 \frac{\cos(\alpha x^3)}{x}\,dx$;

3) $\displaystyle I(\alpha) = \int\limits_1^2 e^{\alpha x^2}\frac{dx}{x}$; 4) $\displaystyle I(\alpha) = \int\limits_2^3 \operatorname{ch}(\alpha^4 x^2)\frac{dx}{x}$.

14. Найти $\Phi'(\alpha)$, если:

1) $\displaystyle\Phi(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,dx$; 2) $\displaystyle\Phi(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{2\alpha} \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$;

3) $\displaystyle\Phi(\alpha) = \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 4) $\displaystyle\Phi(\alpha) = \int\limits_{3\alpha}^{\alpha^2} e^{\alpha x^2}\,dx$;

5) $\displaystyle\Phi(\alpha) = \int\limits_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} e^{\alpha^4 x^2}\,dx$; 6) $\displaystyle\Phi(\alpha) = \int\limits_{e^{-\alpha}}^{e^{\alpha}} \ln(1+\alpha^2 x^2)\,\frac{dx}{x}$;

7) $\displaystyle\Phi(\alpha) = \int\limits_{\alpha e^{-\alpha}}^{\alpha e^{\alpha}} \ln(1+\alpha^2 x^2)\,dx$;

8) $\displaystyle\Phi(\alpha) = \int\limits_{\operatorname{ch}\alpha}^{\operatorname{sh}\alpha} \ln(1+x^2+\alpha^2)\,dx$.

15. Можно ли вычислить по правилу Лейбница производную функции

$$I(\alpha) = \int\limits_0^1 \ln(x^2+\alpha^2)\,dx \quad \text{при} \quad \alpha = 0?$$

16. Пусть функция f непрерывна на R. Доказать, что функция $\displaystyle F(x) = \frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a} f(x+t)\,dt$, где $a > 0$, имеет непрерывную производную на R, и найти $F'(x)$.

17. С помощью дифференцирования интеграла $\int\limits_0^b \frac{dx}{x^2+\alpha^2}$ по параметру α, где $\alpha > 0$, вычислить интеграл $\int\limits_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}$.

18. Применяя дифференцирование по параметру α, вычислить интеграл $I(\alpha)$, если:

1) $I(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2 - \sin^2\varphi)\,d\varphi, \ \ \alpha > 1;$

2) $I(\alpha) = \int\limits_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx, \ \ |\alpha| < 1;$

3) $I(\alpha) = \int\limits_0^{\pi} \ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\,\frac{dx}{\cos x}, \ \ |\alpha| < 1;$

4) $I(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx.$

19. Пусть функция $f(x;\alpha)$ непрерывна в прямоугольнике
$$K = \{(x;\alpha)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2\},$$
а функция $g(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. Доказать, что:

1) функция $F(\alpha) = \int\limits_a^b f(x;\alpha)g(x)\,dx$ непрерывна на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$;

2) $\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(\alpha)\,d\alpha = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x;\alpha)g(x)\,d\alpha\Big)\,dx;$

3) функция $F(\alpha)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$, причем
$$F'(\alpha) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x;\alpha)}{\partial\alpha}\,g(x)\,dx,$$
при дополнительном условии, что функция $\frac{\partial f(x;\alpha)}{\partial\alpha}$ непрерывна в прямоугольнике K.

20. Пусть $F(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha} (x+\alpha)f(x)\,dx$, где $f(x)$ — дифференцируемая на R функция. Найти $F''(a)$.

21. Пусть $F(a) = \int\limits_a^b f(x)|x-\alpha|\,dx$, где $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция. Найти $F''(\alpha)$.

22. Пусть $F(\alpha) = \dfrac{1}{h^2} \int\limits_0^h \Big(\int\limits_0^h h(\xi + \eta + \alpha)\, d\eta \Big)\, d\xi$, где $h > 0$, f — непрерывная на R функция. Найти $F''(\alpha)$.

23. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, $x_0 \in (a;b)$, $x \in \in (a;b)$, $k \neq 0$. Доказать, что функция

$$y(x) = \frac{1}{k} \int\limits_{x_0}^{x} f(t) \sin k(x - t)\, dt$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' + k^2 y = f(x)$.

24. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, $x_0 \in (a;b)$, $x \in \in (a;b)$. Доказать, что функция

$$F(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{x_0}^{x} (x - t)^{n-1} f(t)\, dt, \quad \text{где} \quad n \in N,$$

удовлетворяет условиям

$$F(x_0) = F'(x_0) = \ldots = F^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad F^{(n)}(x) = f(x).$$

25. Доказать, что функция

$$u(r) = \int\limits_0^{\pi} e^{nr\cos\theta}\, d\theta$$

при любом $n \in Z$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{du}{dr} - n^2 u = 0.$$

26. Доказать, что функция $u(x)$ удовлетворяет *уравнению Бесселя*

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - n^2) u = 0,$$

если:

1) $u(x) = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi$, $n \in N$;

2) $u(x) = x^n \int\limits_0^{\pi} \cos(x\cos\varphi) \sin^{2n}\varphi\, d\varphi$, $n \in N$.

27. Рассмотрим полные эллиптические интегралы

$$E(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi, \quad K(k) \equiv F(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

где $0 < k < 1$. Доказать, что:

1) $E'(k) = \dfrac{E - K}{k}$, $K'(k) = \dfrac{E}{k(1-k^2)} - \dfrac{K}{k}$;

2) $E''(k) + \dfrac{1}{k}\, E'(k) + \dfrac{E(k)}{1-k^2} = 0$;

3) $\int\limits_0^k tK(t)\,dt = E(k) - (1-k^2)K(k);$

4) $\int\limits_0^k tE(t)\,dt = \dfrac{1}{3}\left((1+k^2)E(k) - (1-k^2)K(k)\right).$

28. Пусть $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ при $x \neq 0$, $\varphi(0) = 1$. Показать, что:

1) $x^{n+1}\varphi^{(n)}(x) = \int\limits_0^x t^n \cos\left(t + \dfrac{n\pi}{2}\right) dt$, $n \in N$, $x \in R$;

2) $|\varphi^{(n)}(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, $n \in N$, $x \in R$.

29. Пусть функция $\varphi(x)$ и ее производная $\varphi'(x)$ непрерывны на отрезке $[0;a]$, и пусть

$$F(t) = \int\limits_0^t \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{t-x}}.$$

Доказать, что при $t \in (0;a)$ справедливо равенство

$$F'(t) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{t}} + \int\limits_0^t \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{t-x}}\,dx.$$

30. Пусть $K(x;y) = \begin{cases} x(1-y), & \text{если} \quad x \leqslant y, \\ y(1-x), & \text{если} \quad x > y, \end{cases}$ и пусть $\varphi(y)$ — непрерывная на отрезке $[0;1]$ функция. Показать, что функция

$$u(x) = \int\limits_0^1 K(x;y)\varphi(y)\,dy$$

удовлетворяет на отрезке $[0;1]$ уравнению $u''(x) = -\varphi(x)$.

31. Найти дважды дифференцируемую на R функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую уравнению:

1) $\varphi(x) = x + \int\limits_0^x (y-x)\varphi(y)\,dy;$

2) $\varphi(x) = 1 + \lambda\int\limits_0^x (x-y)\varphi(y)\,dy$, $\lambda > 0;$

3) $\varphi(x) = \lambda\int\limits_0^x (x-y)\varphi(y)\,dy + x^2$, $\lambda > 0.$

32. Найти $F''_{xy}(x;y)$, если $F(x;y) = \int\limits_{x/y}^{xy} (x-yt)f(t)\,dt$, где $f(t)$ — дифференцируемая функция, $y \neq 0$.

33. Пусть f — дважды дифференцируемая, а F — дифференцируемая функция. Доказать, что функция

$$u(x;t) = \frac{1}{2}\left(f(x-at) + f(x+at)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} F(\xi)\,d\xi$$

удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a \neq 0,$$

и следующим начальным условиям:

$$u(x;0) = f(x), \quad u'_t(x;0) = F(x).$$

34. Показать, что если функция f непрерывна на отрезке $[0;a]$, $\xi \in [0;a]$ и $(x-\xi)^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, то функция

$$u(x;y;z) = \int\limits_0^a \frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + z^2}}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

ОТВЕТЫ

2. 1) 1; 2) 1; 3) $(\ln 3)/2$; 4) $(e-1)/3$; 5) -2.
5. 1) Нет; 2) нет. **8.** 1) Нет; 2) нет; 3) нет.
10. $(\pi/2)\ln(1+\sqrt{2})$. **11.** $\pi \arcsin(b/a)$.

12. 1) $\operatorname{arctg}\dfrac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$; 2) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{(b+1)^2+1}{(a+1)^2+1}$.

13. 1) $I'(\alpha) = \dfrac{\alpha\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{\alpha^2}$; 2) $I'(\alpha) = \dfrac{\cos 27\alpha - \cos\alpha}{3\alpha}$;
3) $I'(\alpha) = \dfrac{e^{4\alpha} - e^{\alpha}}{2\alpha}$; 4) $I'(\alpha) = \dfrac{2(\operatorname{ch} 9\alpha^4 - \operatorname{ch} 4\alpha^4)}{\alpha}$.

14. 1) $\Phi'(\alpha) = (2\ln(1+\alpha^2))/\alpha$; 2) $\Phi'(\alpha) = 2(\sin 2\alpha^2 - \sin\alpha^2)/\alpha$;

3) $\Phi'(\alpha) = \displaystyle\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx - \sin\alpha\cdot e^{\alpha|\sin\alpha|} - \cos\alpha\cdot e^{\alpha|\cos\alpha|}$;

4) $\Phi'(\alpha) = \displaystyle\int\limits_{3\alpha}^{\alpha} x^2 e^{\alpha x^2}\,dx + 2\alpha e^{\alpha^2} - 3e^{9\alpha^3}$;

5) $\Phi'(\alpha) = 4\alpha^3 \displaystyle\int\limits_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} x^2 e^{\alpha^4 x^2}\,dx + \cos\alpha\cdot e^{\alpha^4\sin^2\alpha} + \sin\alpha\cdot e^{\alpha^4\cos^2\alpha}$;

6) $\Phi'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}\ln\dfrac{1+\alpha^2 e^{2\alpha}}{1+\alpha^2 e^{-2\alpha}} + \ln(1 + 2\alpha^2\operatorname{ch}2\alpha + \alpha^4)$;

7) $\Phi'(\alpha) = 4\operatorname{sh}\alpha + \dfrac{2}{\alpha^2}\left(\operatorname{arctg}(\alpha^2 e^{-\alpha}) - \operatorname{arctg}(\alpha^2 e^{\alpha})\right) +$
$+ (\alpha+1)e^{\alpha}\ln(1+\alpha^4 e^{2\alpha}) - (\alpha-1)e^{-\alpha}\ln(1+\alpha^4 e^{-2\alpha})$;

8) $\Phi'(\alpha) = \dfrac{2\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{sh}\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} - \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{ch}\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right) +$

$+ \operatorname{ch}\alpha\ln(\operatorname{ch}^2\alpha+\alpha^2) - \operatorname{sh}\alpha\ln(\operatorname{ch}^2\alpha+\alpha^2+1).$

15. Нет. **16.** $F'(x) = (f(x+a) - f(x-a))/2a$.

17. $\dfrac{1}{2\alpha^3}\operatorname{arctg}\dfrac{b}{\alpha} + \dfrac{b}{2\alpha^2(\alpha^2+b^2)}$.

18. 1) $\pi\ln\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{2}$; 2) 0; 3) $2\pi\arcsin\alpha$; 4) $\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha\cdot\ln(1+|\alpha|)$.

20. $F''(\alpha) = 3f(\alpha) + 2\alpha f'(\alpha)$.

21. $F''(\alpha) = \begin{cases} 2f(\alpha), & \text{если} \quad \alpha\in(a;b), \\ 0, & \text{если} \quad \alpha\notin[a;b]. \end{cases}$

22. $F''(\alpha) = \dfrac{f(\alpha+2h) - 2f(\alpha+h) + f(\alpha)}{h^2}$.

31. 1) $\varphi(x) = \sin x$; 2) $\varphi(x) = \operatorname{ch}(x\sqrt{\lambda})$;
3) $\varphi(x) = 2(\operatorname{ch}(x\sqrt{\lambda}) - 1)/\lambda$.

32. $F''_{xy} = x(2-3y^2)f(xy) + \dfrac{x}{y^2}f\left(\dfrac{x}{y}\right) + x^2y(1-y^2)f'(xy)$.

§ 14. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Определение равномерной сходимости интеграла. В этом параграфе определение, признаки сходимости и критерий равномерной сходимости формулируются для несобственных интегралов вида

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx. \tag{1}$$

Соответствующие утверждения аналогично формулируются для других типов несобственных интегралов.

Интеграл (1), сходящийся для каждого $\alpha\in E$, называют *равномерно сходящимся на множестве* E, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число δ_ε, что для всех $\alpha\in E$ и для всех $\xi \geqslant \delta_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_\xi^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx\right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Если существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta\in[\alpha;+\infty)$ найдутся числа $\alpha_\delta\in E$ и $\xi_\delta\in[\delta;+\infty)$ такие, что

$$\left|\int\limits_{\xi_\delta}^{+\infty} f(x;\alpha_\delta)\,dx\right) \geqslant \varepsilon_0, \tag{3}$$

то интеграл (1), сходящийся для каждого $\alpha \in E$, *сходится неравномерно на множестве* E.

Интеграл (1) сходится равномерно на множестве E тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\sup_{\alpha \in E} \int\limits_{\xi}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to +\infty. \tag{4}$$

2. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости интеграла. Если на промежутке $[a; +\infty)$ существует функция $\varphi(x)$ такая, что $|f(x; \alpha)| \leqslant \varphi(x)$ для всех $x \in [a; +\infty)$ и для всех $\alpha \in E$, и если интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)\, dx$ сходится, то интеграл (1) сходится *абсолютно* и *равномерно* на множество E.

3. Признак Дирихле равномерной сходимости интеграла. Интеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x; \alpha) g(x; \alpha)\, dx$$

сходится равномерно по α на множестве E, если при каждом фиксированном $\alpha \in E$ функции f, g, g'_x непрерывны по x на множестве $[a; +\infty)$ и удовлетворяют следующим условиям:

1) $g(x; \alpha) \to 0$ при $x \to +\infty$ равномерно относительно $\alpha \in E$;

2) функция $g'_x(x; \alpha)$ для каждого фиксированного $\alpha \in E$ не меняет знака при изменении x на промежутке $[a; +\infty)$;

3) функция f для каждого $\alpha \in E$ имеет ограниченную первообразную, т. е. существует число $M > 0$ такое, что

$$\left| \int\limits_{a}^{x} f(t; \alpha)\, dt \right| \leqslant M$$

для всех $x \in [a; +\infty)$ и для всех $\alpha \in E$.

4. Критерий Коши равномерной сходимости интеграла. Интеграл (1) сходится равномерно на множестве E тогда и только тогда, когда выполняется *условие Коши*: для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_\varepsilon \in (a; +\infty)$ такое, что для любых $\xi' \in [\delta_\varepsilon; +\infty)$, $\xi'' \in [\delta_\varepsilon; +\infty)$ и для всех $\alpha \in E$ выполняется неравенство

$$\left| \int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x; \alpha)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Если условие Коши не выполняется, т. е. существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta \in (a; +\infty)$ найдутся числа $\alpha_\delta \in E$, ξ'_δ и ξ''_δ, где $\xi'_\delta \geqslant \delta$, $\xi''_\delta \geqslant \delta$, такие, что

$$\left| \int\limits_{\xi'_\delta}^{\xi''_\delta} f(x;\alpha_\delta)\,dx \right| \geqslant \varepsilon_0, \tag{5}$$

то интеграл (1) не является равномерно сходящимся на множестве E.

5. Непрерывность равномерно сходящегося интеграла по параметру. Если функция $f(x;\alpha)$ непрерывна на множестве

$$D = \{(x;a):\ a \leqslant x < +\infty,\ \alpha \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2\}$$

и если интеграл $I(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx$ сходится равномерно по α на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$, то *функция* $I(\alpha)$ *непрерывна на отрезке* $[\alpha_1;\alpha_2]$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx$:

а) сходится равномерно на множестве $E = [b;+\infty)$, где $b > 0$;

б) сходится неравномерно на множестве $E_1 = (0;+\infty)$.

▲ а) Пусть $\xi > 0$, $\alpha \geqslant b > 0$. Так как

$$\int\limits_\xi^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \frac{e^{-\alpha\xi}}{\alpha}$$

и $\alpha \geqslant b$, то неравенство $0 < \int\limits_\xi^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx \leqslant \dfrac{e^{-\xi b}}{b} < \varepsilon$ для каждого $\varepsilon > 0$ выполняется при всех $\alpha \in E$, если $\xi > (1/b)\ln(1/\varepsilon b)$. Обозначим $\delta_\varepsilon = \max(\sigma_\varepsilon;0)$, где $\sigma_\varepsilon = (2/b)\ln(1/b\varepsilon)$. Тогда неравенство (2) для данного интеграла справедливо при всех $\xi \in [\delta_\varepsilon;+\infty)$ и при всех $\alpha \in E$, т. е. интеграл сходится равномерно.

б) Для произвольного числа $\delta > 0$ выберем $\xi_\delta = 1+\delta$, $\alpha_\delta = 1/(1+\delta)$. Тогда

$$\int\limits_{\xi_\delta}^{+\infty} e^{-x\alpha_\delta}\,dx = \frac{e^{-\xi_\delta\alpha_\delta}}{\alpha_\delta} = (1+\delta)e^{-1} \geqslant e^{-1},$$

т. е. неравенство (3) выполняется при $\varepsilon_0 = e^{-1}$. Следовательно, интеграл сходится неравномерно на множестве $(0;+\infty)$. ▲

Пример 2. Доказать, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ сходится неравномерно на множестве $E = (1;+\infty)$.

▲ Так как $K(\xi) = \sup\limits_{\alpha\in E} \int\limits_\xi^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha} = \sup\limits_{\alpha\in E} \dfrac{\xi^{1-\alpha}}{\alpha-1} = \lim\limits_{\alpha\to 1+0} \dfrac{\xi^{1-\alpha}}{\alpha-1} = +\infty,$

то условие (4) не выполняется, и поэтому интеграл, сходящийся при каждом $\alpha > 1$, сходится неравномерно на множестве E. ▲

Пример 3. Доказать равномерную сходимость интеграла $I(\alpha)$ на множестве E, если:

$$1)\ I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{1+x^2}\, dx,\ E = R;\ 2)\ I(\alpha) = \int_3^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^{5/4}}\, dx,\ E = [0;2].$$

▲ 1) Так как $\left|\dfrac{\sin \alpha x}{1+x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$, для всех $\alpha \in R$ интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ сходится, то по признаку Вейерштрасса данный интеграл сходится равномерно на множестве R.

2) Если $\alpha \in [0;2]$, $x \in [3;+\infty)$, то $0 \leqslant \ln^\alpha x \leqslant \ln^2 x$, и поэтому

$$0 \leqslant \frac{\ln^\alpha x}{x^{5/4}} \leqslant \frac{\ln^2 x}{x^{5/4}}.$$

Из сходимости интеграла $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^{5/4}}\, dx$ следует равномерная сходимость данного интеграла на множестве E. ▲

Пример 4. Доказать, что интеграл $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$ сходится равномерно по α на множестве $E = [b;+\infty)$, где $b > 0$.

▲ Пусть $F(x;\alpha) = \displaystyle\int_0^x \sin \alpha t\, dt$; тогда

$$F(x;\alpha) = \frac{\cos \alpha x - 1}{\alpha}$$

и $|F(x;\alpha)| \leqslant 2/b$ для всех $x \in [0;+\infty)$ и для всех $\alpha \geqslant b$. Кроме того, $1/x \to 0$ при $x \to +\infty$, причем функция $1/x$ не зависит от α. По признаку Дирихле данный интеграл сходится равномерно по α на множестве $[b;+\infty)$, где $b > 0$. ▲

Пример 5. Доказать, что интеграл $I(\alpha)$ сходится неравномерно на множестве E, если:

$$1)\ I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx,\ E = (0;+\infty);$$

$$2)\ I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx,\ E = [0;1].$$

▲ 1) Для любого $\delta > 0$ выберем $\alpha_\delta = 1/(1+\delta)^2$, $\xi'_\delta = \delta$, $\xi''_\delta = \delta + 1$. Тогда

$$\int\limits_{\xi'_\delta}^{\xi''_\delta} e^{-\alpha_\delta x^2}\,dx \geqslant e^{-\alpha_\delta(\xi''_\delta)^2}(\xi''_\delta - \xi'_\delta) = e^{-1} = \varepsilon_0,$$

т. е. выполняется условие (5). Следовательно, данный интеграл, сходящийся при каждом $\alpha \in E$, сходится неравномерно на множестве E.

2) Для любого $\delta > 0$ выберем $\alpha_\delta = \delta$, $\xi'_\delta = \pi/(3\delta)$, $\xi''_\delta = \pi/(2\delta)$. Тогда

$$\Bigl|\int\limits_{\xi'_\delta}^{\xi''_\delta} \frac{\sin \alpha_\delta x}{x}\,dx\Bigr| = \Bigl|\int\limits_{\pi/(3\delta)}^{\pi/(2\delta)} \frac{\sin \delta x}{x}\,dx\Bigr| = \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}\,dt = \varepsilon_0.$$

ЗАДАЧИ

Доказать, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве E (1–5).

1. 1) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$, $E = [\alpha_0; +\infty)$, $\alpha_0 > 1$;

2) $I(\alpha) = \int\limits_0^{1} \dfrac{dx}{x^\alpha}$, $E = (0; \alpha_0)$, $\alpha_0 < 1$;

3) $I(\alpha) = \int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x \ln^\alpha x}$, $E = [\alpha_0; +\infty)$, $\alpha_0 > 1$;

4) $I(\alpha) = \int\limits_0^{1/2} \dfrac{dx}{x|\ln x|^\alpha}$, $E = [\alpha_0; +\infty)$, $\alpha_0 > 1$;

5) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^4}\,dx$, $E = [\alpha_0; +\infty)$, $\alpha_0 > 0$;

6) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} x^\alpha e^{-2x}\,dx$, $E = [1; 3]$.

2. 1) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos 2x\,dx$, $E = [\alpha_0; +\infty)$, $\alpha_0 > 0$;

2) $I(\alpha) = \int\limits_2^{+\infty} \dfrac{\ln^2 x \cdot \sin 3x}{(x-1)^\alpha}\,dx$, $E = [\alpha_0; +\infty)$, $\alpha_0 > 1$;

3) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\ln^3 x}{x^2 + \alpha^4}\,dx$, $E = \mathsf{R}$;

4) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{1 + (x - \alpha)^4}, \quad E = (-\infty; a), \quad a > 0;$

5) $I(\alpha) = \int\limits_0^1 x^{\alpha - 1} \ln^3 x\,dx, \quad E = [\alpha_0; +\infty), \quad \alpha_0 > 0;$

6) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x) \cdot \operatorname{arctg} \alpha x}{x^2}\,dx, \quad E = [-a; a], \quad a > 0.$

3. 1) $I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{4 + x^2}\,dx, \quad E = R;$

2) $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x - 1)^2(2 - x)}}\,dx, \quad E = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right);$

3) $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{x^\alpha \operatorname{arctg} \alpha x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx, \quad E = [0; 2];$

4) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx, \quad E = [a_0; +\infty), \quad \alpha_0 > 0;$

5) $I(\alpha) = \int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos \alpha x \cdot \ln x}{\sqrt{x}}\,dx, \quad E = [\alpha_0; +\infty), \quad \alpha_0 > 0;$

6) $I(\alpha) = \int\limits_2^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{(x + 1) \ln^2 x}\,dx, \quad E = [a_0; +\infty), \quad \alpha_0 > 0.$

4. 1) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-\alpha x}\,dx, \quad E = [0; +\infty);$

2) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}\, e^{-\alpha x}\,dx, \quad E = [0; +\infty);$

3) $I(\alpha) = \int\limits_2^{+\infty} \frac{a^2 - x^2}{(\alpha^2 + x^2)^2}\,dx, \quad E = R;$

4) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x^5)}{x}\,dx, \quad E = [\alpha_0; +\infty), \quad \alpha_0 > 0;$

5) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \cos(\alpha x^2)\,dx, \quad E = [1; +\infty);$

6) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \sin(\alpha \operatorname{sh} x)\,dx, \quad E = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right).$

5. 1) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \cos x^\alpha \, dx, \;\; E = [\alpha_0; +\infty), \;\; \alpha_0 > 1;$

2) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha \cos(\alpha^2 x)}{\alpha + x^\alpha} \, dx, \;\; E = [3; 5];$

3) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \sin 2x \cdot \sin \frac{\alpha}{x} \, dx, \;\; E = \left[0; \frac{1}{2}\right];$

4) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha^4 x)}{x + \alpha^2} \, dx, \;\; E = [1; +\infty);$

5) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} (\alpha^5 + x^3) \, e^{-\alpha x^4} \, dx, \;\; E = [1; 4];$

6) $I(\alpha) = \int\limits_2^{+\infty} x^\alpha e^{-2x^\alpha} dx, \;\; E = [1; 2].$

6. Доказать, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве E_1 и сходится неравномерно на множестве E_2.

1) $I(\alpha) = \int\limits_1^{2} \frac{dx}{(x-1)^\alpha}, \;\; E_1 = \left[-1; \frac{2}{3}\right], \;\; E_2 = [-1; 1);$

2) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^\alpha}, \;\; E_1 = [3; +\infty), \;\; E_2 = (1; +\infty);$

3) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{4 + (x-\alpha)^6}, \;\; E_1 = (-\infty; 0], \;\; E_2 = [0; +\infty);$

4) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx, \;\; E_1 = [0; 2], \;\; E_2 = [0; +\infty);$

5) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^4} dx, \;\; E_1 = [\alpha_0; +\infty), \;\; \alpha_0 > 0; \;\; E_2 = (0; +\infty);$

6) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x} \sin x \, dx, \;\; E_1 = [0; 1], \;\; E_2 = [1; +\infty).$

Исследовать интеграл $I(\alpha)$ на равномерную сходимость на множестве E (7, 8).

7. 1) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^\alpha}, \;\; E = (1; +\infty);$

2) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, dx, \;\; E = [0; 1]$;

3) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2}\, dx, \;\; E = (0; +\infty)$;

4) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1 + x^\alpha}\, dx, \;\; E = [0; +\infty)$;

5) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \sin\alpha \cdot e^{-\alpha^2(1+x^2)}\, dx, \;\; E = R$;

6) $I(\alpha) = \int\limits_0^{1} \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^\alpha}, \;\; E = (0; 2)$.

8. 1) $I(\alpha) = \int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{(1 - x^2)^\alpha}\, dx, \;\; E = \left[0; \frac{1}{2}\right]$;

2) $I(\alpha) = \int\limits_0^{1} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x - \alpha|}}\, dx, \;\; E = [0; 1]$;

3) $I(\alpha) = \int\limits_1^{2} \frac{dx}{|\ln(\alpha x)|^\alpha}\, dx, \;\; E = \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{8}\right]$;

4) $I(\alpha) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}\, dx, \;\; E = [0; 1)$;

5) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin e^x}{1 + x^\alpha}\, dx, \;\; E = (0; +\infty)$;

6) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\alpha}{x^3}\, e^{-\alpha/(2x^2)}\, dx, \;\; E = [1; +\infty)$.

9. Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится. Доказать, что на множестве $[0; +\infty)$ равномерно сходятся интегралы

$$\int\limits_a^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\, dx \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} f(x)\, dx.$$

10. Доказать, что если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится, а функция $g(x, \alpha)$ монотонна по x на множестве $D = [a; +\infty)$ для каждого $\alpha \in E$ и равномерно ограничена на множестве

$$G = \{(x;\alpha):\ x \in D,\ \alpha \in E\},$$

т. е. существует число $M > 0$ такое, что $|g(x;\alpha)| \leqslant M$ для всех $(x;\alpha) \in$ $\in G$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x;\alpha)\,dx$ сходится равномерно по α на множестве E.

11. Доказать, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x;\alpha)g(x;\alpha)\,dx$ сходится равномерно по α на множестве E, если функция $f(x;\alpha)$ интегрируема по x на отрезке $[a;A]$ для любого $A > a$ и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx$ сходится равномерно относительно α на множестве E, а функция $g(x;\alpha)$ равномерно ограничена на множестве

$$G = \{(x;\alpha):\ a \leqslant x < +\infty,\ \alpha \in E\}.$$

12. Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[0;a]$ для любого $a > 0$, и пусть существует число α_0 такое, что функция $F(A) = \int\limits_0^A e^{-\alpha_0 x} f(x)\,dx$ ограничена на множестве $[0;+\infty)$.

Доказать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\,dx$ сходится равномерно на множестве $[\alpha_0 + \delta;+\infty)$, где $\delta > 0$.

13. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[0;+\infty)$, интегрируема по Риману на отрезке $[0;A]$ для любого $A > 0$, и пусть существует число α_0 такое, что сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x} f(x)\,dx$.

Доказать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\,dx$ сходится равномерно на множестве $[\alpha_0;+\infty)$.

14. Исследовать на равномерную сходимость на множестве E интеграл $I(\alpha)$:

1) $I(\alpha) = \displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(\alpha^2 x)}{\sqrt[3]{x^2}}\ \mathrm{arctg}\,(\alpha x)\,dx,\quad E = \{\alpha:\ |\alpha| \geqslant 1\}$;

2) $I(\alpha) = \displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}\,\frac{dx}{4 + \alpha^2 x^2},\quad E = R$;

3) $I(\alpha) = \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(e^x - x)}{x^\alpha}\,dx,\quad E = (2;3)$;

4) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\, dx, \ \ E = \left\{\alpha\colon\ -\infty < \alpha < -\dfrac{1}{2}\right\};$

5) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 \cdot \operatorname{arctg}(\alpha x)\, dx, \ \ E = R;$

6) $I(\alpha) = \int\limits_0^{1} \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x} \cdot 2^{\alpha x}\, dx, \ \ E = (-\infty; 1].$

15. Доказать равенство:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x^n+1} = 1;$ 2) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} \dfrac{dx}{1+\alpha^2x^2} = 0;$

3) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^\alpha} dx = 1;$ 4) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \alpha^2 \sin x\, e^{-\alpha^2x^2} dx = \dfrac{1}{2};$

5) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\, dx = \dfrac{\pi}{2};$ 6) $\lim\limits_{\alpha\to+0} \int\limits_0^{+\infty} \alpha^2 \sin x\, e^{-\alpha^2x^2} dx = 0.$

16. Доказать, что функция $F(\alpha)$ непрерывна на множестве E, если:

1) $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx, \ \ E = R;$

2) $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx, \ \ E = R;$

3) $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \sin(\alpha x^2)\, dx, \ \ E = [1; +\infty);$

4) $F(\alpha) = \int\limits_0^{1} \dfrac{\sin x}{x^\alpha}\, dx, \ \ E = [0; 1);$

5) $F(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \sin \dfrac{\alpha}{x^2} \sqrt{\ln x}\, dx, \ \ E = R.$

Исследовать функцию $F(\alpha)$ на непрерывность на множестве E $(17, 18)$.

17. 1) $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x\, dx}{2+x^\alpha}, \ \ E = (2; +\infty);$

2) $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}\, e^{-\alpha x}\, dx, \ \ E = [0; +\infty);$

3) $F(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\ln x}{(x-\alpha)^2 + 4}\, dx$, $E = R$;

4) $F(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\, dx$, $E = (0; +\infty)$;

5) $F(\alpha) = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^\alpha x}$, $E = [0; 1)$;

6) $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(1-\alpha^2)x}{x}\, dx$, $E = R$.

18. 1) $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2 x}\, dx$, $E = R$;

2) $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos x^2\, dx$, $E = [0; +\infty)$;

3) $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}\, dx$, $E = (0; 1)$;

4) $F(\alpha) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha (\pi - x)^\alpha}\, dx$, $E = (0; 2)$.

19. Доказать, что $\lim\limits_{\alpha \to +0} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\, dx = \int\limits_0^{+\infty} f(x)\, dx$, если функция f интегрируема на промежутке $(0; +\infty)$.

20. Доказать, что если функция f абсолютно интегрируема на промежутке $(0; +\infty)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} f(x) \sin nx\, dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} f(x) \cos nx\, dx = 0.$$

21. Доказать, что если функция f непрерывна и ограничена на промежутке $[0; +\infty)$, то

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha f(x)}{x^2 + \alpha^2}\, dx = f(0).$$

22. Законен ли переход к пределу при $\alpha \to +0$ под знаком интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, dx?$$

23. Доказать, что если функция f непрерывна и ограничена на промежутке $[0; \infty)$ и $f(0) = 0$, а функция g абсолютно интегрируема на $[0;+\infty)$, то

$$\lim_{\alpha\to+0}\int\limits_0^{+\infty} f\left(\frac{\alpha}{x}\right)g(x)\,dx = 0.$$

24. Пусть функция $f(x;\alpha)$ при $\alpha\in E$ интегрируема по x (в собственном смысле) на отрезке $[a;A]$ при любом $A>a$ и на каждом таком отрезке при $\alpha\to\alpha_0$, $\alpha_0\in E$, стремится равномерно относительно x к предельной функции $\varphi(x)$, и пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx$ сходится равномерно на множестве E. Доказать, что

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int\limits_0^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

25. Доказать, что

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int\limits_a^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx = \int\limits_a^{+\infty}\lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x;\alpha)\,dx,$$

если $f(x;\alpha)\rightrightarrows f(x;\alpha_0)$ в каждом конечном интервале $(a;A)$, где $a<A<+\infty$, $\alpha\in[\alpha_1;\alpha_2]$, $\alpha_0\in[\alpha_1;\alpha_2]$, и если существует функция $F(x)$ такая, что при $|f(x;\alpha)|\leqslant F(x)$ для всех $\alpha\in[\alpha_1;\alpha_2]$ и для всех $x\in[a,+\infty)$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} F(x)\,dx$ сходится.

ОТВЕТЫ

7. 1) Сходится неравномерно; 2) сходится неравномерно; 3) сходится неравномерно; 4) сходится равномерно; 5) сходится неравномерно; 6) сходится неравномерно.
8. 1) Сходится равномерно; 2) сходится равномерно; 3) сходится равномерно; 4) сходится неравномерно; 5) сходится равномерно; 6) сходится неравномерно.
14. 1) Сходится равномерно; 2) сходится равномерно; 3) сходится неравномерно; 4) сходится неравномерно; 5) сходится равномерно; 6) сходится равномерно.
17. 1) Непрерывна; 2) непрерывна; 3) непрерывна; 4) непрерывна; 5) непрерывна; 6) непрерывна при $\alpha\neq\pm1$; $\alpha=-1$ и $\alpha=1$ — точки разрыва.
18. 1) Непрерывна при $\alpha\neq0$; $\alpha=0$ — точка разрыва; 2) непрерывна; 3) непрерывна; 4) непрерывна.
22. Нет.

§ 15. Дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Дифференцирование несобственного интеграла по параметру. Если функции $f(x;\alpha)$ и $f'_\alpha(x;\alpha)$ непрерывны на множестве

$$G = \{(x;\alpha)\colon\ a \leqslant x < +\infty, \quad \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2\},$$

интеграл $I(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx$ сходится при каждом $\alpha \in [\alpha_1;\alpha_2]$, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f'_\alpha(x;\alpha)\,dx$ сходится равномерно по α на отрезке $[\alpha_1;\alpha]$, то

$$I'(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f'_\alpha(x;\alpha)\,dx \tag{1}$$

при $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$ (*правило Лейбница*).

2. Интегрирование несобственного интеграла по параметру. Если функция $f(x;\alpha)$ непрерывна на множестве

$$G = \{(x;\alpha)\colon\ a \leqslant x < +\infty, \quad \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2\}$$

и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx$ равномерно сходится по α на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$, то справедлива формула

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int\limits_a^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x;\alpha)\,d\alpha. \tag{2}$$

Если $f(x;\alpha) \geqslant 0$ на множестве G, то равенство (2) остается в силе также и для бесконечного промежутка $(\alpha_1;\alpha_2)$ в предположении, что внутренние интегралы в равенстве (2) являются непрерывными функциями и хотя бы одна из частей равенства (2) имеет смысл.

Если функция $f(x;\alpha)$ непрерывна на множестве

$$\widetilde{G} = \{(x;\alpha)\colon\ a \leqslant x < +\infty,\ c \leqslant \alpha < +\infty\},$$

интегралы

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_c^{+\infty} f(x;\alpha)\,d\alpha$$

сходятся равномерно соответственно по α и x на отрезках $[c;\xi]$ и $[a;\eta]$ при каждом фиксированном $\xi \in (c;+\infty)$ и $\eta \in (a;+\infty)$ и если, кроме того, хотя бы один из повторных интегралов

$$\int\limits_c^{+\infty} d\alpha \int\limits_a^{+\infty} |f(x;\alpha)|\,dx, \qquad \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} |f(x;\alpha)|\,d\alpha$$

сходится, то сходятся и равны между собой оба повторных интеграла от функции f, т. е.

$$\int_c^{+\infty} d\alpha \int_a^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x;\alpha)\,d\alpha. \tag{3}$$

При вычислении несобственных интегралов часто используются указанные ниже интегралы (4)–(7).

Если $\alpha > 0$, то для любого $\beta \in R$ справедливы формулы

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos\beta x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \tag{4}$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin\beta x\,dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}. \tag{5}$$

Формулы (4), (5) можно получить, используя метод интегрирования по частям.

Если функция f непрерывна на промежутке $[0;+\infty)$ и для каждого $A > 0$ сходится интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$, то при любых $a>0$, $b>0$ справедлива *формула Фруллани*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a}. \tag{6}$$

Если интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$, где f — непрерывная на промежутке $[a;+\infty)$ функция, расходится, но существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$ и, кроме того, сходится интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)-f(+\infty)}{x}\,dx$, то, применив формулу (6) к функции $\widetilde{f}(x) = f(x) - f(+\infty)$, получим равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = (f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}. \tag{7}$$

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Вычислить *интеграл Дирихле*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx. \tag{8}$$

▲ Пусть $\alpha > 0$. Рассмотрим интеграл

$$\Phi(\alpha;\beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\,\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx, \quad \beta > 0. \tag{9}$$

При фиксированном $\beta > 0$ интеграл (9) сходится для каждого $\alpha \neq 0$ по признаку Дирихле сходимости несобственных интегралов, так как функция $\dfrac{1}{x}\,e^{-\beta x}$ убывает на промежутке $(0;+\infty)$, а функция $\sin\alpha x$ имеет при $\alpha \neq 0$ ограниченную первообразную $\left(\int\limits_0^x \sin\alpha t\,dt = \dfrac{1-\cos\alpha x}{\alpha}\right)$. При $\alpha = 0$ интеграл (9) равен нулю. Кроме того, интеграл

$$K(\alpha;\beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos\alpha x\,dx,$$

полученный из (9) дифференцированием по α подынтегральной функции, сходится равномерно по α на R по признаку Вейерштрасса. Используя правило Лейбница (1) и формулу (4), получаем

$$\Phi'_\alpha(\alpha;\beta) = K(\alpha;\beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos\alpha x\,dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}. \tag{10}$$

Интегрируя на отрезке $[0;\alpha]$ равенство (10), находим

$$\Phi(\alpha;\beta) - \Phi(0;\beta) = \beta\int\limits_0^\alpha \frac{dt}{t^2+\beta^2} = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}.$$

Так как $\Phi(0;\beta)=0$, то отсюда следует, что при любом $\beta>0$ справедлива формула

$$\Phi(\alpha;\beta) = \operatorname{arctg}(\alpha/\beta),$$

т. е.

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\,\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}. \tag{11}$$

Вычислим интеграл (8), считая, что $\alpha>0$. Заметим, что при каждом фиксированном $\alpha>0$ интеграл (9) сходится равномерно по β на отрезке $[0;1]$, так как функция $\sin\alpha x$ имеет ограниченную первообразную ($\alpha > 0$ фиксировано), а функция $g = e^{-\beta x}/x$ монотонно убывает ($g'_x<0$ при $x>0$, $\beta\geqslant 0$) и $g(x;\beta) \rightrightarrows 0$ при $x\to+\infty$ на отрезке $[0;1]$. По признаку Дирихле интеграл (11) сходится равномерно по β на отрезке $[0;1]$. Из равномерной сходимости интеграла (11) и непрерывности функции $e^{-\beta x}\dfrac{\sin\alpha x}{x}$ на множестве

$$G = \{(x;\beta)\colon\ 0\leqslant x<+\infty,\ 0\leqslant\beta\leqslant 1\}$$

следует непрерывность по β функций $\Phi(\alpha;\beta)$ на отрезке $[0;1]$ и, в частности, непрерывность по β этой функции справа в точке $\beta=0$.

Это означает, что в интеграле (11) можно перейти к пределу при $\beta \to +0$ под знаком интеграла. Следовательно,

$$\lim_{\beta\to+0} \int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\, \frac{\sin\alpha x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\, dx = \lim_{\beta\to+0} \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2}.$$

Учитывая, что $\dfrac{\sin\alpha x}{x}$ — нечетная по α функция, получаем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha, \quad \alpha\in R. \ \blacktriangle \tag{12}$$

Пример 2. Вычислить *интегралы Лапласа*

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\, dx \quad \text{и} \quad K(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\, dx.$$

▲ Пусть $\alpha>0$. Так как функция $\dfrac{\cos\alpha x}{1+x^2}$ непрерывна при любых α и x, а интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right) dx = -\int_0^{+\infty} \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\, dx$$

сходится равномерно по α на отрезке $[\alpha_0; +\infty)$, где $\alpha_0>0$, то, применяя правило Лейбница (1), получаем

$$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\, dx. \tag{13}$$

Складывая почленно равенство (13) с равенством

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\, dx, \quad \text{где} \quad \alpha>0,$$

находим

$$I'(\alpha) + \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin\alpha x}{x} - \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x(1+x^2)}\, dx.$$

Дифференцируя полученное равенство почленно, имеем

$$I''(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\, dx.$$

Таким образом, функция $I(\alpha)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $I''(\alpha) - I(\alpha) = 0$, общее решение которого имеет вид

$$I(\alpha) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha}. \tag{14}$$

Заметим, что

$$|I(\alpha)| \leqslant I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Кроме того $e^{-a} \to 0$ при $\alpha \to +\infty$, а $e^{\alpha} \to +\infty$ при $\alpha \to +\infty$. Отсюда следует, что в формуле (14) $C_1 = 0$, и поэтому $I(\alpha) = C_2 e^{-a}$. Полагая $\alpha = 0$ и учитывая, что $I(0) = \dfrac{\pi}{2}$, получаем $I(\alpha) = \dfrac{\pi}{2}\, e^{-\alpha}$ при $\alpha > 0$. Так как $I(\alpha)$ — четная функция, то

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\, e^{-|\alpha|}, \quad \alpha \in R. \tag{15}$$

Из равенства (13) следует, что $I'(\alpha) = -K(\alpha)$. Следовательно,

$$K(\alpha) = -\left(\frac{\pi}{2}\, e^{-\alpha}\right)' = \frac{\pi}{2}\, e^{-\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

т. е.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

откуда в силу нечетности функции $K(\alpha)$ следует, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha \cdot e^{-|\alpha|}, \quad \alpha \in R. \ \blacktriangle \tag{16}$$

Пример 3. Вычислить интеграл *Эйлера–Пуассона* $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

▲ Положим $x = yt$, где $t > 0$ (t — фиксированное число). Тогда $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^7 t^2}\, t\, dy$, откуда

$$I \cdot e^{-t^2} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(y^2+1)t^2}\, t\, dy. \tag{17}$$

Интегрируя обе части равенства (17) по t на промежутке $[0; +\infty)$, получаем

$$I \cdot \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2(1+y^2)}\, t\, dy. \tag{18}$$

Левая часть (18) равна I^2. Вычислим правую часть K равенства (18), изменив порядок интегрирования:

$$K = \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2(1+y^2)}\, t\, dt.$$

Так как

$$\int\limits_0^{+\infty} t e^{-t^2(1+y^2)}\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2(1+y^2)}\, \frac{d((1+y^2)t^2)}{1+y^2} =$$

$$= -\frac{e^{-t^2(1+y^2)}}{2(1+y^2)}\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{2(1+y^2)},$$

то

$$K = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, $I^2 = K = \pi/4$, откуда $I = \sqrt{\pi}/2$, т. е.

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{19}$$

Перестановка порядка интегрирования в равенстве (18) законна, так как подынтегральная функция $g = te^{-t^2(1+y^2)}$ неотрицательна при $t \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ и непрерывна, интегралы от функции g, взятые по t и y, сходятся равномерно по y и t соответственно на отрезках $[0;\xi]$ и $[0;\eta]$ при любых $\xi > 0$ и $\eta > 0$ (признак Вейерштрасса), а один из повторных интегралов сходится и равен $\pi/4$. ▲

Пример 4. Вычислить *интеграл Лапласа*

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x \, dx.$$

▲ Дифференцируя интеграл $I(\alpha)$ по α, получаем

$$I'(\alpha) = -2\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2} \sin 2\alpha x \, dx. \tag{20}$$

Применение правила Лейбница законно, так как функция $e^{-x^2}\cos 2\alpha x$ непрерывна при $x \geqslant 0$, $\alpha \in R$, интеграл $I(\alpha)$ сходится при каждом $\alpha \in \in R$, а интеграл в правой части (20) сходится равномерно по α на R (признак Вейерштрасса). Преобразуем равенство (20), применяя метод интегрирования по частям:

$$I'(\alpha) = e^{-x^2} \sin 2\alpha x\Big|_0^{+\infty} - 2\alpha\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x \, dx. \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует, что $I'(\alpha) = -2\alpha I(\alpha)$ или $\dfrac{dI(\alpha)}{I(\alpha)} = -2\alpha d\alpha$, откуда

$$I(\alpha) = Ce^{-\alpha^2}.$$

Полагая $\alpha = 0$ и учитывая, что $I(0) = \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (пример 3), получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-\alpha^2}. \ ▲ \tag{22}$$

Пример 5. Вычислить *интегралы Френеля*

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 \, dx \quad \text{и} \quad I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 \, dx.$$

▲ Полагая $x^2 = t$, запишем интеграл I в следующем виде:

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt. \tag{23}$$

Пусть $t > 0$; тогда справедливо равенство

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}\,du, \tag{24}$$

для получения которого достаточно в интеграле $\int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}\,du$ сделать замену переменной по формуле $\sqrt{t}u = x$ и воспользоваться интегралом (19). Из (23) и (24) следует, что

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} \sin t\,dt \int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}\,du. \tag{25}$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} du \int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}\sin t\,dt.$$

Используя формулу (5), находим

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4}. \tag{26}$$

Вычислим интеграл (26). Заметим, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{(1/x^2)\,dx}{1+(1/x)^4} = -\int\limits_{+\infty}^{0} \frac{dt}{1+t^4} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Поэтому

$$2\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{(1+1/x^2)\,dx}{x^2+1/x^2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1/x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

откуда $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Для обоснования законности перестановки порядка интегрирования в формуле (25) можно воспользоваться (см. (23)) при $\alpha \neq 0$ равенством

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t}\sin t\,dt \int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} du \int\limits_0^{+\infty} e^{-t(u^2+\alpha^2)} \sin t\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{du}{1+(u^2+\alpha^2)^2}.$$

Переходя здесь к пределу при $\alpha \to 0$ (законность перехода к пределу следует из равномерной сходимости интегралов), получим равенство (26), из которого следует, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \qquad (27)$$

Аналогично можно доказать, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \ \blacktriangle \qquad (28)$$

ЗАДАЧИ

1. Пусть $a > 0$, $b > 0$. Применяя формулу Фруллани (6), вычислить интеграл:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos^2 ax - \cos^2 bx}{x}\, dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 ax - \sin^2 bx}{x}\, dx$;

3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\, dx$; 4) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{x^a - x^b}{\ln x}\, dx$.

Используя интеграл Дирихле (12), вычислить интеграл (2–4).

2. 1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x^2}\, dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$; 3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x}\, dx$;

4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x}\, dx$; 5) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\, dx$; 6) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3}\, dx$.

3. 1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x}\, dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x\cos^2 x}{x}\, dx$; 3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3 dx$;

4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x}\, dx$; 5) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x\cos^4 x}{x}\, dx$; 6) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^7 x}{x}\, dx$.

4. 1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x\cos^6 x}{x}\, dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{2\sin\alpha x - \sin 2\alpha x}{x^3}\, dx$;

3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x}{x^2}\, dx$; 4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}\, dx$;

5) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x + \cos\beta x - 2}{x^2}\,dx$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$; 6) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x\cos\alpha x}{x^2}\,dx$.

5. Используя интеграл Дирихле (12) или интеграл Фруллани (6), вычислить интеграл:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}\,dx$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \neq \beta$;

2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha\sin x - \sin\alpha x}{x^2}\,dx$, $\alpha > 0$;

3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4\alpha x - \sin^4\beta x}{x}\,dx$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$;

4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha x\cos x - \sin\alpha x}{x^2}\,dx$, $\alpha > 0$; 5) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x^2}\,dx$;

6) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x\cos\alpha x}{x^3}\,dx$, $\alpha > 3$.

6. С помощью дифференцирования по параметру вычислить интеграл:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x}\,e^{-\beta x}\,dx$, $\beta > 0$; 2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,e^{-\beta x}\,dx$, $\beta > 0$;

3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,\sin\lambda x\,dx$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\lambda \neq 0$;

4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,\cos\lambda x\,dx$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$;

5) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 6) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{x^2(x^2+\beta^2)}\,dx$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

7. Доказать, что если $\alpha > 0$, то $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x(1+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\ln(1+\alpha)$.

8. Используя результат примера 7, доказать, что:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\ln 2$; 2) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\,\ln 2$.

9. Пользуясь тем, что $\displaystyle\int\limits_0^{1} x^{\alpha-1}\,dx = \frac{1}{\alpha}$ при $\alpha > 0$, вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}\ln^m x\,dx$, где $m\in N$.

10. Пользуясь формулой $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}$ $(a>0)$, вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$, где $n\in N$.

11. Пользуясь тем, что $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$ при $\alpha>0$, доказать, что

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\,dx=\frac{\pi(b-a)}{2}.$$

12. Пользуясь тем, что $\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\,dx=\frac{1}{\alpha}$ при $\alpha>0$, доказать, что

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx=\ln\frac{b}{a},\quad a>0,\ b>0.$$

13. Используя интеграл Эйлера–Пуассона (19), доказать, что:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\alpha x^2+2\beta x)}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{\beta^2/\alpha}$, $\alpha>0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(ax^2+2bx)\,e^{-(\alpha x^2+2\beta x)}\,dx=\frac{(\alpha+2\beta^2)a-4\alpha\beta b}{2\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{\beta^2/\alpha}$, $\alpha>0$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx=2\sqrt{\pi}\,(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})$, $\alpha>0$, $\beta>0$;

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}\operatorname{ch}\beta x\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{\beta^2/(4\alpha)}$, $\alpha>0$;

5) $\int\limits_0^{+\infty}e^{-(x^2+\alpha^2/x^2)}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-2\alpha}$, $\alpha>0$.

14. Пользуясь тем, что $\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, где $\alpha>0$, доказать, что

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha x^2}x^{2n}\,dx=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}\alpha^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},\quad n\in N.$$

Вычислить интеграл (15–19).

15. 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{1+x^2}\, dx,\ \ \alpha > 0;$ 2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2}\, dx,\ \ \alpha > 0;$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x}{x^4}\, dx;$ 4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2(1+x^2)}\, dx;$ 5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2}\, dx;$

6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{ax^2+2bx+c}\, dx,\ \ a > 0,\ \ ac - b^2 > 0.$

16. 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x}\, dx,\ \ \alpha > 0,\ \ \beta > 0;$

2) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin^2 \beta x\, \frac{dx}{x},\ \ \alpha > 0;$ 3) $\int\limits_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} \sin \beta x\, dx,\ \ \alpha > 0;$

4) $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2\alpha x\, dx,\ \ n \in N;$ 5) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin^2 \beta x\, \frac{dx}{x^2},\ \ \alpha > 0;$

6) $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx,\ \ |\alpha| \leqslant 1.$

17. 1) $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\, dx,\ \ |\alpha| \leqslant 1;$ 2) $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,\ \ \alpha \leqslant 1;$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx,\ \ \ \alpha > 0,\ \ \beta > 0;$ 4) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\, dx;$

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \operatorname{arctg} \beta x}{x^2}\, dx,\ \ \alpha > 0,\ \ \beta > 0;$

6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{\beta^2 + x^2}\, dx,\ \ \alpha > 0,\ \ \beta > 0;$

7) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + \beta^2 x^2)}{(1+x)^2}\, dx,\ \ \alpha > 0,\ \ \beta > 0.$

18. 1) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+\alpha \cos x)}{\cos x}\, dx,\ \ |\alpha| \leqslant 1;$ 2) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\, dx,\ \ \alpha > 0;$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2) \ln(1+\beta^2 x^2)}{x^2}\, dx,\ \ \alpha > 0,\ \ \beta > 0;$

4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\,\mathrm{arctg}\,\beta x}{x^3}\,dx,\ \ \alpha>0,\ \ \beta>0;$

5) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} (e^{-\alpha^2/x^2}-e^{-\beta^2/x^2})\,dx,\ \ \alpha\beta\neq 0;$

6) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}\,dx,\ \ \alpha>0,\ \ \beta>0.$

19. 1) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2+2bx+c)\,dx,\ \ a>0;$

2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x^2}\,e^{-\lambda x}\,dx,\ \ \lambda>0;$ 3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\cos 2ax\,dx;$

4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\cos 2ax\,dx;$

5) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}\cos\alpha x-e^{-bx}\cos\beta x}{x}\,dx,\ a>0,\ b>0.$

20. Доказать, что функция $F(\alpha)=\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{1+(x+\alpha)^2}\,dx$ непрерывна и дифференцируема на R.

21. Доказать, что если $a>0,\ \delta>0$, то $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int\limits_{-\delta}^{\delta}e^{-axt^2}\,dt=$ $=\sqrt{\pi/a}$.

22. Доказать, что *интеграл Дирихле* $I(\alpha)=\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$ имеет при $\alpha\neq 0$ производную, однако ее нельзя найти с помощью правила Лейбница.

23. Выяснить, допустима ли перестановка порядка интегрирования в следующих случаях:

1) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}dy\int\limits_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\,dx;$ 2) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}dx\int\limits_0^{1}\frac{y-x}{(x+y)^3}\,dy.$

24. Используя представление *бесселевой функции нулевого порядка* $I_0(x)$ формулой

$$I_0(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos(x\sin\theta)\,d\theta,$$

доказать, что $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} I_0(x)\,dx = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad a > 0.$

25. *Многочлены Чебышева–Эрмита* определяются формулами

$$H_0(x) \equiv 1, \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}), \quad n \in N.$$

Доказать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{n}, & \text{если} \quad m = n. \end{cases}$$

26. Доказать, что если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на R, то функция

$$u(x;t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-(x-\xi)^2/(4a^2 t)}\,d\xi$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и начальному условию $\lim\limits_{t\to+0} u(x;t) = f(x)$.

27. Доказать тождество:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\,dx = \int\limits_\alpha^{+\infty} \frac{\sin(x-\alpha)}{x}\,dx, \ \ \alpha > 0;$

2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2+a^2}\,dx, \ \ a > 0;$

3) $\displaystyle\int\limits_0^{x} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} \frac{\sin 2tx}{t}\,dt.$

28. Доказать, что $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin 2bx\,dx = e^{-b^2} \int\limits_0^{b} e^{t^2}\,dt.$

29. Доказать, что:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}}, \ \ a > 0;$

2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2} \sin bx^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{a^2+b^2}}, \ \ a > 0;$

3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos\frac{\alpha^2}{x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-|\alpha|\sqrt{2}} \cos|\alpha|\sqrt{2};$

4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin\frac{\alpha^2}{x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-|\alpha|\sqrt{2}} \sin|\alpha|\sqrt{2}.$

ОТВЕТЫ

1. 1) $0{,}5\ln(b/a)$; 2) $0{,}5\ln(a/b)$; 3) $0{,}5\ln(b/a)$; 4) $\ln((a+1)/(b+1))$.
2. 1) $\pi|\alpha|/2$; 2) $\pi/2$; 3) $\pi/4$; 4) $\pi/6$; 5) $\pi/4$; 6) $\pi/4$.
3. 1) $(\pi/4)\operatorname{sign}\alpha$; 2) $\pi/4$; 3) $3\pi\alpha|\alpha|/8$; 4) $3\pi/16$; 5) $3\pi/16$; 6) $5\pi/32$.
4. 1) $5\pi/32$; 2) $\pi\alpha\alpha|/2$; 3) $\pi|\alpha|/4$; 4) $(|\beta|-|\alpha|)\pi/2$; 5) $-\pi(\alpha+\beta)/2$; 6) $(2-\alpha)\pi/4$, если $\alpha<2$; 0, если $\alpha\geqslant 2$.
5. 1) $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\alpha+\beta}{|\alpha-\beta|}\right)$; 2) $\alpha\ln\alpha$; 3) $\dfrac{3}{8}\ln\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$; 4) $\alpha(\ln\alpha-1)$; 5) $\dfrac{(|\alpha+\beta|-|\alpha-\beta|)\pi}{4}$; 6) 0.
6. 1) $\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$; 2) $\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{\beta}$; 3) $\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{\lambda}-\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{\lambda}$; 4) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\beta^2+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2}$; 5) $\dfrac{\pi}{2}\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})$; 6) $\dfrac{\pi}{\beta}(\alpha\beta-\ln(1+\alpha\beta))$.
9. $\dfrac{(-1)^m m!}{\alpha^{m+1}}$. **10.** $\dfrac{\pi(2n-1)!!}{2(2n)!!\,a^{2n+1}}$.
15. 1) $\dfrac{\pi}{4}(1-e^{-2|\alpha|})$; 2) $\dfrac{\pi}{2}|\beta|-\sqrt{\pi\alpha}$; 3) $\dfrac{\pi|\alpha|^3}{3}$; 4) $\dfrac{\pi}{4}(2|\alpha|-1+e^{-2|\alpha|})$; 5) $\dfrac{\pi}{4}(1+|\alpha|)e^{-|\alpha|}$; 6) $\dfrac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}\cos\dfrac{ba}{a}\exp\left\{-\dfrac{|\alpha|}{a}\sqrt{ac-b^2}\right\}$.
16. 1) $\dfrac{\pi}{4}(\operatorname{sign}(\alpha+\beta)+\operatorname{sign}(\alpha-\beta))$; 2) $\dfrac{1}{4}\ln\left(1+\dfrac{4\beta^2}{\alpha^2}\right)$; 3) $\dfrac{\beta}{4\alpha}\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}e^{-\beta^2/(4\alpha)}$; 4) $(-1)^n\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}\dfrac{d^{2n}}{d\alpha^{2n}}(e^{-\alpha^2})$; 5) $\beta\operatorname{arctg}\dfrac{2\beta}{\alpha}-\dfrac{\alpha}{4}\ln\left(1+\dfrac{4\beta^2}{\alpha^2}\right)$; 6) $-(\arcsin\alpha)^2$.
17. 1) $\pi(\sqrt{1-\alpha^2}-1)$; 2) $\pi\ln\dfrac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$; 3) $\ln\dfrac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2(\alpha+\beta)}}$; 4) $\dfrac{\pi}{2}(1+\alpha-\sqrt{1+\alpha^2})$; 5) $\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha\beta^\beta}$; 6) $\dfrac{\pi}{\beta}\ln(\alpha\beta+1)$; 7) $2\ln\beta+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\pi+2\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}\ln\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$.
18. 1) $\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{(\arccos\alpha)^2}{2}$; 2) $\dfrac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$; 3) $2\pi[(\alpha+\beta)\ln(\alpha+\beta)-\alpha\ln\alpha-\beta\ln\beta]$; 4) $\dfrac{\pi}{2}[(\alpha^2-\beta^2)\ln(\alpha+\beta)-\alpha^2\ln\alpha+\beta^2\ln\beta+\alpha\beta]$; 5) $\sqrt{\pi}(|\beta|-|\alpha|)$; 6) $\dfrac{2\pi}{3}[\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha^3\ln\alpha+\beta^3\ln\beta-(\alpha^3+\beta^3)\ln(\alpha+\beta)]$.
19. 1) $\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\sin\left(\dfrac{ac-b^2}{a}+\dfrac{\pi}{4}\right)$; 2) $\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha+\beta}{\lambda}-\dfrac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha-\beta}{\lambda}+\dfrac{\lambda}{4}\ln\dfrac{\lambda^2+(\alpha-\beta)^2}{\lambda^2+(\alpha+\beta)^2}$;