**Prof. dr. sc. Vedrana Kozulić**

# TEHNIČKA MEHANIKA 2

**Predavanja**

**Akad. god. 2008/09**

# OTPORNOST MATERIJALA

Otpornost materijala je grana tehničke mehanike koja proučava probleme čvrstoće, krutosti i stabilnosti pojedinih dijelova nosivih konstrukcija od čvrstog deformabilnog materijala.

**Čvrstoća** - sposobnost prenošenja opterećenja bez pojave loma

**Krutost** - otpornost na deformiranje (promjenu oblika i volumena)

**Stabilnost** - sposobnost zadržavanja prvobitnog oblika prilikom djelovanja opterećenja

Proračun čvrstoće - određivanje najmanjih dimenzija pojedinih dijelova konstrukcija a da pod djelovanjem zadanog opterećenja ne dođe do pojave loma.

Proračun krutosti - određivanje deformacija konstrukcija pod djelovanjem zadanog opterećenja koje moraju ostati u dopuštenim granicama.

Proračun stabilnosti - određivanje opterećenja pod kojim konstrukcija i njezini elementi još zadržavaju prvobitni oblik elastične ravnoteže.

Skup proračuna čvrstoće, krutosti i stabilnosti naziva se **dimenzioniranje** elemenata konstrukcije.

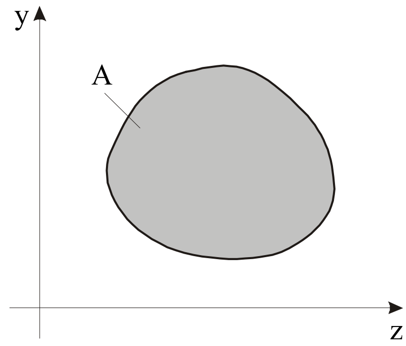
Zadaća otpornosti materijala:

- odabiranje vrste materijala za konstrukciju i njene elemente,
- određivanje minimalnih dimenzija koje će zadovoljiti uvjete čvrstoće, krutosti i stabilnosti,
- uz uvjete sigurnosti moraju biti zadovoljeni i uvjeti ekonomičnosti konstrukcije.

# GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE POPREČNOG PRESJEKA ŠTAPA

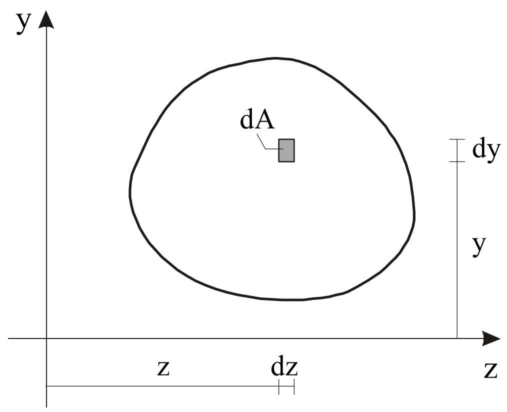
Poprečni presjek štapa definiran je zatvorenom krivuljom u ravnini okomitoj na uzdužnu os štapa.

Karakteristike poprečnog presjeka:




- površina $A$
- težište $T$
- statički moment površine na os z ili os y $S_z$ ; $S_y$
- momenti tromosti (momenti inercije) $I_z$ ; $I_y$ ; $I_{zy}$

## Površina poprečnog presjeka



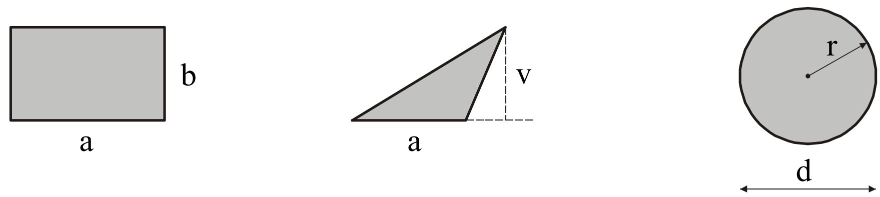

Element površine:

$$dA = dy\, dz$$

Površina presjeka:

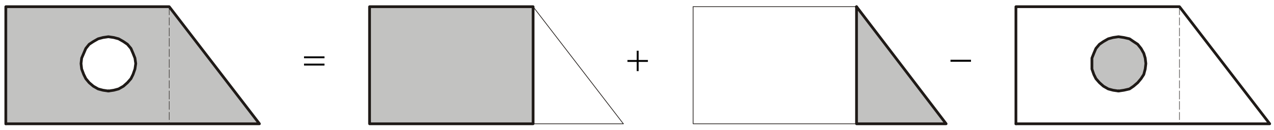
$$\Rightarrow \quad A = \int_A dA \quad (m^2)$$

Površine poprečnih presjeka nekih jednostavnih oblika:




$$A = a \cdot b \qquad A = \frac{1}{2} a \cdot v \qquad A = r^2 \pi = \frac{d^2 \pi}{4}$$

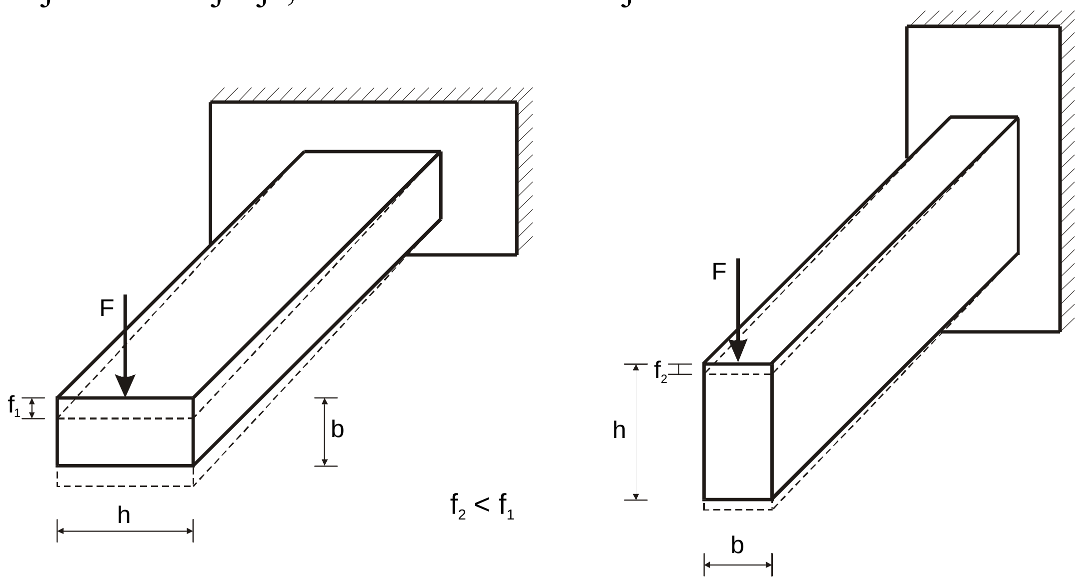
Površina složenog poprečnog presjeka:




$$A \quad = \quad A_1 \quad + \quad A_2 \quad - \quad A_3$$

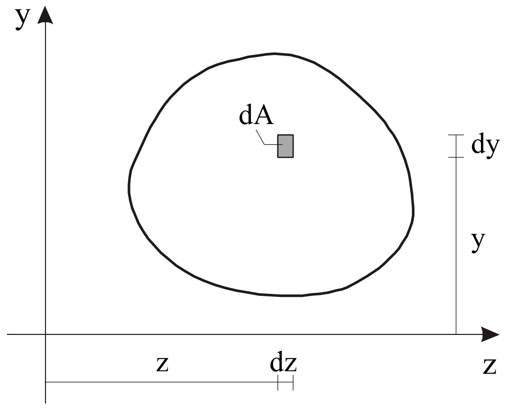
Općenito: $A = \sum A_i$

Dva štapa jednakih površina poprečnog presjeka $A = b \cdot h$, opterećena jednakim opterećenjem na savijanje, različito se deformiraju:




Zbog toga se koriste složenije geometrijske karakteristike ravnih presjeka, i to: statički momenti površine, momenti tromosti i momenti otpora ravnih presjeka.

## Statički momenti površine presjeka




Statički momenti površine s obzirom na osi y i z definirani su izrazima:

$$dS_y = dA \cdot z \quad \Rightarrow \quad S_y = \int_A z\, dA$$

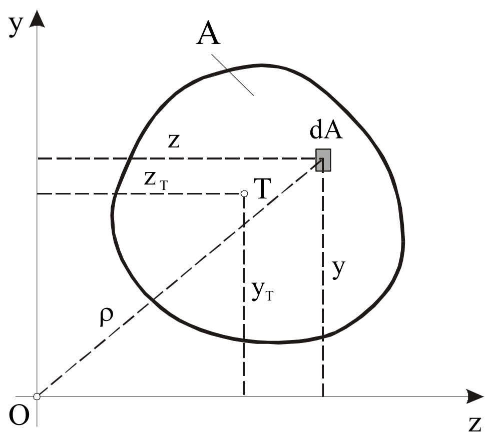
$$dS_z = dA \cdot y \quad \Rightarrow \quad S_z = \int_A y\, dA$$

Dimenzija statičkog momenta je $(m^3)$.

## Težište poprečnog presjeka

To je točka za koju je statički moment površine jednak nuli obzirom na bilo koju os koja prolazi kroz tu točku.

Na osnovi teorema o jednakosti momenta sile i momenata njezinih komponenenata mogu se dobiti izrazi za koordinate težišta presjeka $y_T$ i $z_T$:

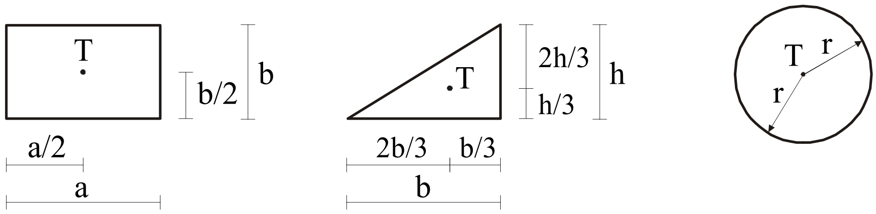



$$S_y = \int_A z\, dA = A \cdot z_T \quad \Rightarrow \quad z_T = \frac{\int_A z\, dA}{A}$$

$$S_z = \int_A y\, dA = A \cdot y_T \quad \Rightarrow \quad y_T = \frac{\int_A y\, dA}{A}$$

Statički moment presjeka s obzirom na bilo koju os jednak je **produktu površine presjeka i pripadajuće koordinate težišta**. Za bilo koju težišnu os (os koja prolazi težištem presjeka) statički moment presjeka jednak je nuli.

Položaj težišta jednostavnih presjeka:

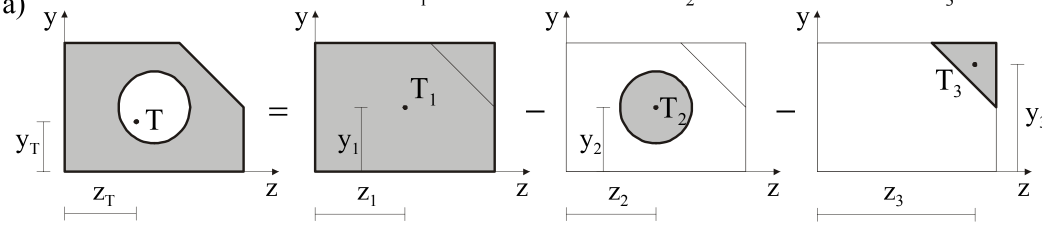



Položaj težišta složenog presjeka:

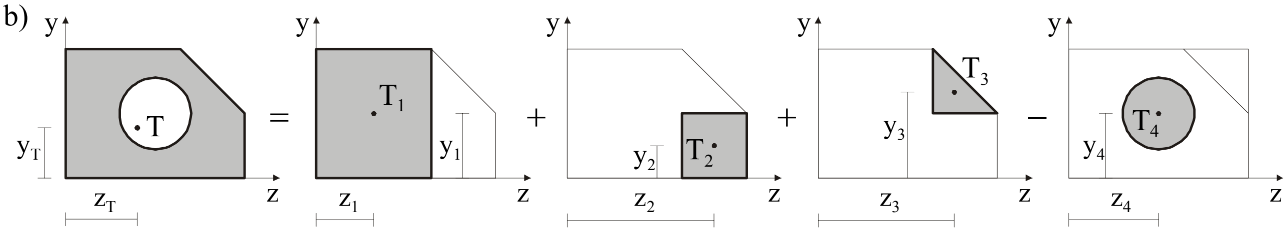
$$y_T = \frac{\int_A y\,dA}{A} = \frac{\sum_i A_i\, y_{T_i}}{\sum_i A_i} \qquad z_T = \frac{\int_A z\,dA}{A} = \frac{\sum_i A_i\, z_{T_i}}{\sum_i A_i}$$

$A \quad = \quad A_1 \quad - \quad A_2 \quad - \quad A_3$

a)




b)




$A \quad = \quad A_1 \quad + \quad A_2 \quad + \quad A_3 \quad - \quad A_4$

a) $$y_T = \frac{A_1\, y_1 - A_2\, y_2 - A_3\, y_3}{A}$$

$$z_T = \frac{A_1\, z_1 - A_2\, z_2 - A_3\, z_3}{A}$$

b) $$y_T = \frac{A_1\, y_1 + A_2\, y_2 + A_3\, y_3 - A_4\, y_4}{A}$$

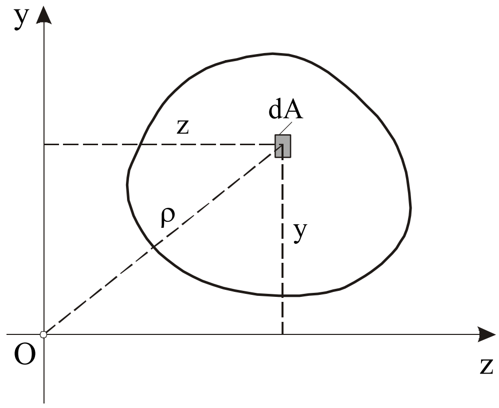
$$z_T = \frac{A_1\, z_1 + A_2\, z_2 + A_3\, z_3 - A_4 z_4}{A}$$

# Momenti tromosti (inercije) poprečnog presjeka

**Aksijalni momenti tromosti (inercije) presjeka** s obzirom na osi y i z su integrali:

$$I_y = \int_A z^2 \, dA$$

$$I_z = \int_A y^2 \, dA$$




**Centrifugalni moment tromosti (inercije) presjeka** s obzirom na osi z i y:

$$I_{zy} = \int_A z\, y \, dA$$

**Polarni moment tromosti (inercije) presjeka** s obzirom na pol O:

$$I_p = \int_A \rho^2 \, dA$$

Momenti tromosti imaju dimenziju ($m^4$).

Budući je $\rho^2 = z^2 + y^2$, slijedi:

$$I_p = I_O = \int_A (z^2 + y^2) \, dA = \int_A z^2 \, dA + \int_A y^2 \, dA \quad \rightarrow \quad I_p = I_y + I_z$$

*Zbroj aksijalnih momenata tromosti presjeka s obzirom na dvije međusobno okomite osi jednak je polarnom momentu tromosti s obzirom na pol u sjecištu tih osi.*

Aksijalni i polarni momenti tromosti uvijek su pozitivne veličine:

$$I_y > 0, \; I_z > 0, \; I_p > 0$$

Centrifugalni moment tromosti može biti pozitivan, negativan ili jednak nuli, ovisno o položaju promatranog presjeka u odnosu na koordinatni sustav.

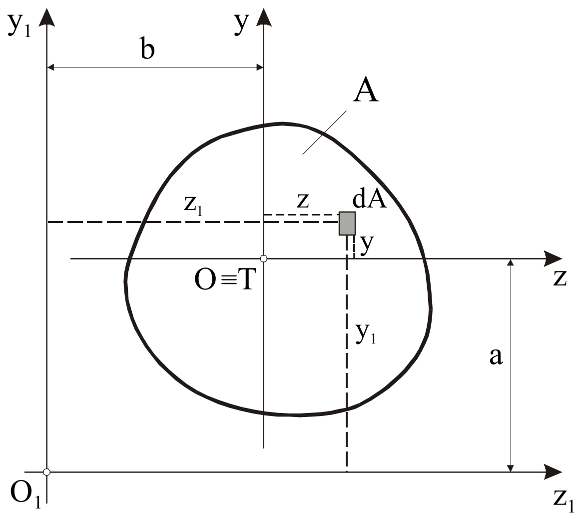
## Promjena momenata tromosti pri translaciji koordinatnog sustava

Poznati su momenti tromosti presjeka s obzirom na koordinatne osi z i y koje prolaze težištem presjeka T:

$$I_z = \int_A y^2 \, dA \,, \quad I_y = \int_A z^2 \, dA \,, \quad I_{zy} = \int_A z\, y \, dA$$

Treba odrediti momente tromosti s obzirom na koordinatne osi $z_1$ i $y_1$ koje su paralelne s težišnim osima z i y:

$$I_{z_1} = \int_A {y_1}^2 \, dA \,, \quad I_{y_1} = \int_A {z_1}^2 \, dA \,, \quad I_{z_1 y_1} = \int_A z_1\, y_1 \, dA$$




$$z_1 = z + b$$

$$y_1 = y + a$$

$$I_{z_1} = \int_A {y_1}^2 \, dA = \int_A (y+a)^2 \, dA = \int_A y^2 \, dA + a^2 \int_A dA + 2a \int_A y \, dA = I_z + a^2 A$$

$$I_{y_1} = \int_A {z_1}^2 \, dA = \int_A (z+b)^2 \, dA = \int_A z^2 \, dA + b^2 \int_A dA + 2b \int_A z \, dA = I_y + b^2 A$$

$$I_{z_1 y_1} = \int_A z_1\, y_1 \, dA = \int_A (z+b)\,(y+a)\, dA = \int_A z\, y \, dA + a\,b \int_A dA + a \int_A z \, dA + b \int_A y \, dA = I_{zy} + a\,b\, A$$

$\int_A y \, dA = 0$ i $\int_A z \, dA = 0$ (jer su to statički momenti presjeka u odnosu na težišne osi)

**Steinerovo pravilo** za momente tromosti s obzirom na paralelne osi:

$$I_{z_1} = I_z + a^2 A \quad ; \quad I_{y_1} = I_y + b^2 A \quad ; \quad I_{z_1 y_1} = I_{zy} + a\,b\,A$$

Steinerovo pravilo za aksijalne momente tromosti glasi:

*Aksijalni moment tromosti presjeka s obzirom na zadanu os jednak je zbroju momenta tromosti s obzirom na paralelnu težišnu os i produkta površine presjeka s kvadratom udaljenosti zadane i težišne osi.*

Steinerovo pravilo za centrifugalni moment tromosti glasi:

*Centrifugalni moment tromosti presjeka s obzirom na zadani pravokutni koordinatni sustav jednak je zbroju centrifugalnog momenta tromosti s obzirom na paralelni težišni koordinatni sustav i produkta površine presjeka s koordinatama težišta presjeka u zadanome pravokutnom koordinatnom sustavu.*

**Napomene:**

- Koordinate težišta a i b u gornjim izrazima ulaze sa svojim predznacima tako da pri translaciji koordinatnog sustava može doći do uvećanja ili smanjenja centrifugalnog momenta tromosti.
- Od svih momenata tromosti s obzirom na skup paralelnih osi, najmanju vrijednost ima moment tromosti s obzirom na os koja prolazi težištem poprečnog presjeka.

## Promjena momenata tromosti pri rotaciji koordinatnog sustava

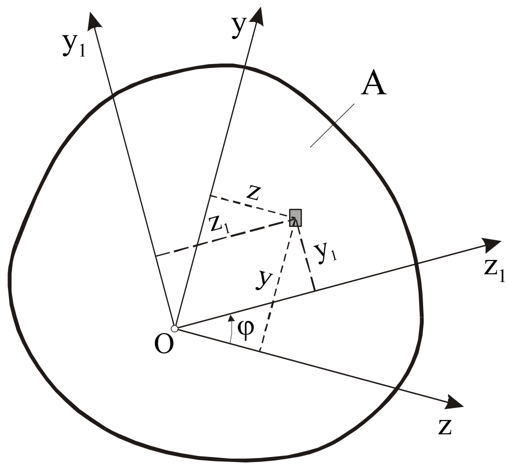
Za presjek površine A i koordinatni sustav Ozy poznate su vrijednosti momenata tromosti:

$$I_z = \int_A y^2 \, dA \,, \quad I_y = \int_A z^2 \, dA \,, \quad I_{zy} = \int_A z\, y \, dA$$

Treba odrediti momente tromosti presjeka s obzirom na novi koordinatni sustav $Oz_1y_1$ koji nastaje rotacijom koordinatnih osi z,y oko ishodišta O za kut φ:

$$I_{z_1} = \int_A {y_1}^2 \, dA \,, \quad I_{y_1} = \int_A {z_1}^2 \, dA \,, \quad I_{z_1y_1} = \int_A z_1\, y_1 \, dA$$

Uzima se da je pozitivan smjer rotacije suprotno od smjera gibanja kazaljke na satu.




$$z_1 = z \cos\varphi + y \sin\varphi$$

$$y_1 = y \cos\varphi - z \sin\varphi$$

$$I_{z_1y_1} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\varphi + I_{zy} \cos 2\varphi$$

$$I_{z_1} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\varphi - I_{zy} \sin 2\varphi$$

$$I_{y_1} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\varphi + I_{zy} \sin 2\varphi$$

**Napomena**: $I_{z_1} + I_{y_1} = I_z + I_y$

*Pri rotaciji koordinatnog sustava zbroj momenata tromosti je stalna veličina.*

## Glavne osi i glavni momenti tromosti

Kod rotacije koordinatnoga sustava postoji takav kut $\varphi$ pri kojemu jedan od aksijalnih momenata tromosti ima maksimum, a drugi minimum.

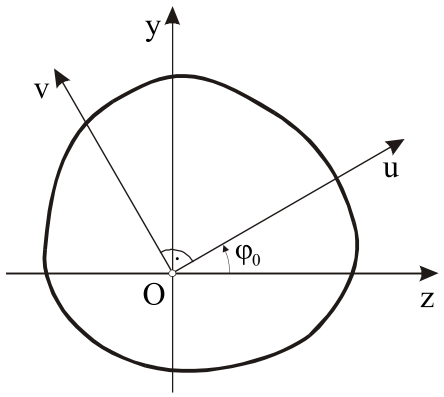
Ekstremne vrijednosti aksijalnih momenata tromosti zovu se **glavni momenti tromosti presjeka**, a pripadne osi **glavne osi tromosti presjeka**.

Glavne osi tromosti označavaju se s *u* i *v*, a pripadajući kut koji određuje njihov položaj s $\varphi_0$.

Centrifugalni moment tromosti u odnosu na glavne osi tromosti jednak je nuli:

$$I_{uv} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\varphi_0 + I_{zy} \cos 2\varphi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg} 2\varphi_0 = -\frac{2\, I_{zy}}{I_z - I_y}$$

Odavde se dobivaju dvije vrijednosti za kut $\varphi_0$ koje se razlikuju za $\frac{\pi}{2}$:




$|\varphi_0| \le \frac{\pi}{4}$ - određuje položaj glavne osi tromosti *u*

$|\varphi_0| + \frac{\pi}{2}$ - određuje položaj glavne osi tromosti *v*

Veličine glavnih momenata tromosti:

$$I_{max} = \frac{1}{2}(I_z + I_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4\, I_{zy}^2}$$

$$I_{min} = \frac{1}{2}(I_z + I_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4\, I_{zy}^2}$$

Ako je $I_z > I_y \quad \rightarrow \quad I_u = I_{max},\ I_v = I_{min}$

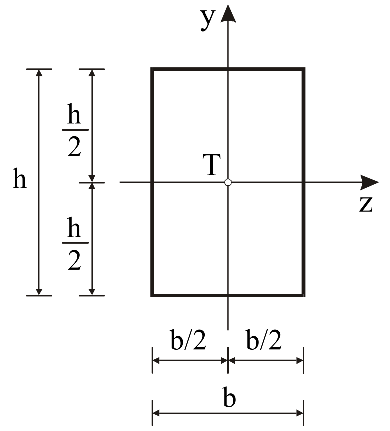
Ako je $I_z < I_y \quad \rightarrow \quad I_u = I_{min},\ I_v = I_{max}$

**Napomena:** Za simetričan poprečni presjek je centrifugalni moment tromosti jednak nuli iz čega slijedi da su osi simetrije ujedno i glavne osi tromosti tog presjeka.

## Momenti tromosti jednostavnih presjeka

### *Pravokutni presjek:*

Osi z i y su osi simetrije presjeka - to su glavne središnje osi tromosti presjeka.

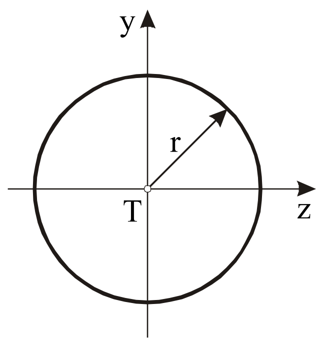



$$I_z = \frac{b\,h^3}{12}$$

$$I_y = \frac{h\,b^3}{12}$$

$$I_{zy} = 0$$

### *Kružni presjek:*

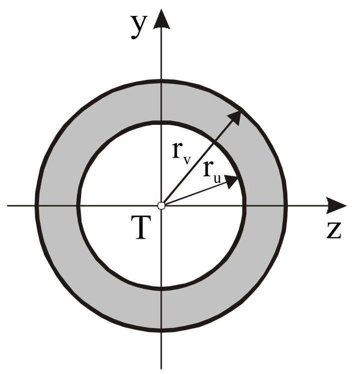



Radi simetrije presjeka:

$$I_z = I_y \ , \quad I_{zy} = 0$$

$$I_z = I_y = \frac{\pi\,r^4}{4} = \frac{\pi\,d^4}{64}$$

### *Presjek oblika kružnog prstena:*

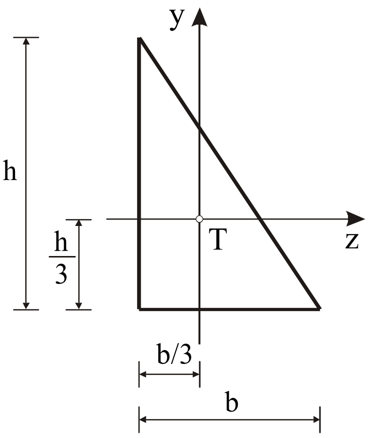



$$I_z = I_y = \frac{\pi\,r_v^4}{4} - \frac{\pi\,r_u^4}{4} = \frac{\pi}{4}\,(r_v^4 - r_u^4) = \frac{\pi}{64}\,(d_v^4 - d_u^4) =$$

$$= \frac{\pi\,d_v^4}{64}\left[1 - \left(\frac{d_u}{d_v}\right)^4\right]$$

$$I_{zy} = 0$$

***Trokutni presjek:***




$$I_z = \frac{b\,h^3}{36}$$

$$I_y = \frac{h\,b^3}{36}$$

$$I_{zy} = -\frac{b^2\,h^2}{72}$$

## Momenti tromosti za složeni presjek

Za složeni presjek površine $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ momenti tromosti dobivaju se zbrajanjem:

$$I_z = \int_A y^2\,dA = \int_{A_1} y^2\,dA + \int_{A_2} y^2\,dA + \ldots + \int_{A_n} y^2\,dA = I_{z(1)} + I_{z(2)} + \ldots + I_{z(n)} = \sum_{i=1}^{n} I_{z(i)}$$

$$I_y = \int_A z^2\,dA = \int_{A_1} z^2\,dA + \int_{A_2} z^2\,dA + \ldots + \int_{A_n} z^2\,dA = I_{y(1)} + I_{y(2)} + \ldots + I_{y(n)} = \sum_{i=1}^{n} I_{y(i)}$$

$$I_{zy} = \int_A z\,y\,dA = \int_{A_1} z\,y\,dA + \int_{A_2} z\,y\,dA + \ldots + \int_{A_n} z\,y\,dA = I_{zy(1)} + I_{zy(2)} + \ldots + I_{zy(n)} = \sum_{i=1}^{n} I_{zy(i)}$$

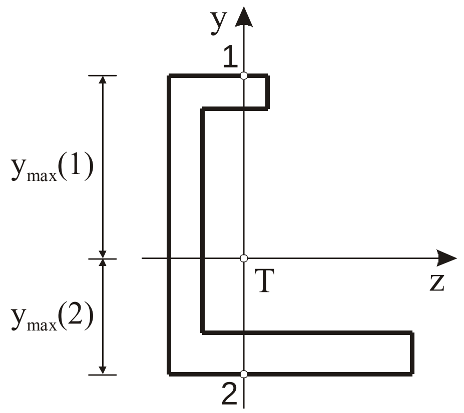
*Moment tromosti složenog presjeka u odnosu na neku os jednak je algebarskom zbroju momenata tromosti pojedinih njegovih dijelova u odnosu na tu istu os.*

# Momenti otpora poprečnog presjeka

Aksijalni moment otpora presjeka s obzirom na zadanu glavnu središnju os je kvocijent:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$$

$y_{max}$ - najveća udaljenost točke konture presjeka od zadane osi




Ako zadana glavna središnja os nije os simetrije presjeka, postoje dva momenta otpora presjeka:

$$W_{z_1} = \frac{I_z}{y_{max\,(1)}}$$

$$W_{z_2} = \frac{I_z}{y_{max\,(2)}}$$

Moment otpora presjeka ima dimenziju ($m^3$).

a) Pravokutni presjek

$$W_z = \frac{I_z}{\frac{h}{2}} = \frac{b\,h^2}{6} \quad ; \quad W_y = \frac{I_y}{\frac{b}{2}} = \frac{h\,b^2}{6}$$

b) Kružni presjek

$$W_z = W_y = \frac{I_z}{r} = \frac{\pi\,r^3}{4} = \frac{\pi\,d^3}{32}$$

c) Presjek oblika kružnog prstena

$$W_z = W_y = \frac{I_z}{\frac{d_v}{2}} = \frac{\pi}{32\,d_v}(d_v^4 - d_u^4) = \frac{\pi\,d_v^3}{32}\left[1 - \left(\frac{d_u}{d_v}\right)^4\right]$$

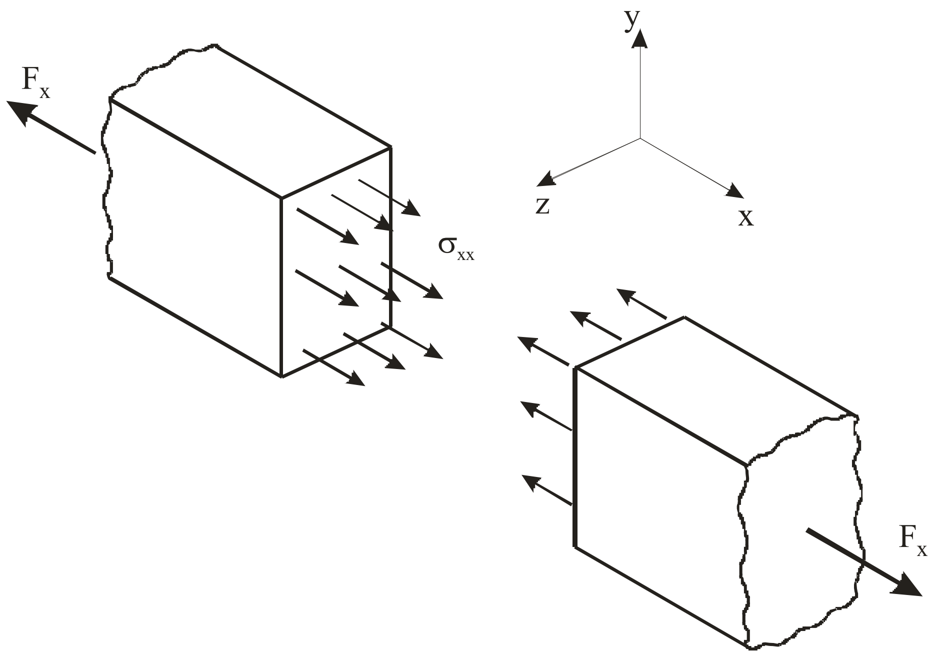
# NAPREZANJA

Naprezanje se može definirati kao sila koja djeluje na element konstrukcije podijeljena s površinom na koju djeluje.

Dimenzija naprezanja: sila/površina, jedinica mjere je Paskal (Pa), ($1\text{Pa} = 1\ \text{N}/\text{m}^2$)
Naprezanje se obično mjeri u megapaskalima:

$$1\ \text{MPa} = 10^6\ \text{Pa} = 10^6\ \text{N}/\text{m}^2 = 1\ \text{N}/\text{mm}^2$$

**Jednoosno stanje naprezanja:** djeluje samo aksijalna sila $F_x$




**Normalna naprezanja (σ)** - djeluju okomito na plohu.

$$\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A}$$

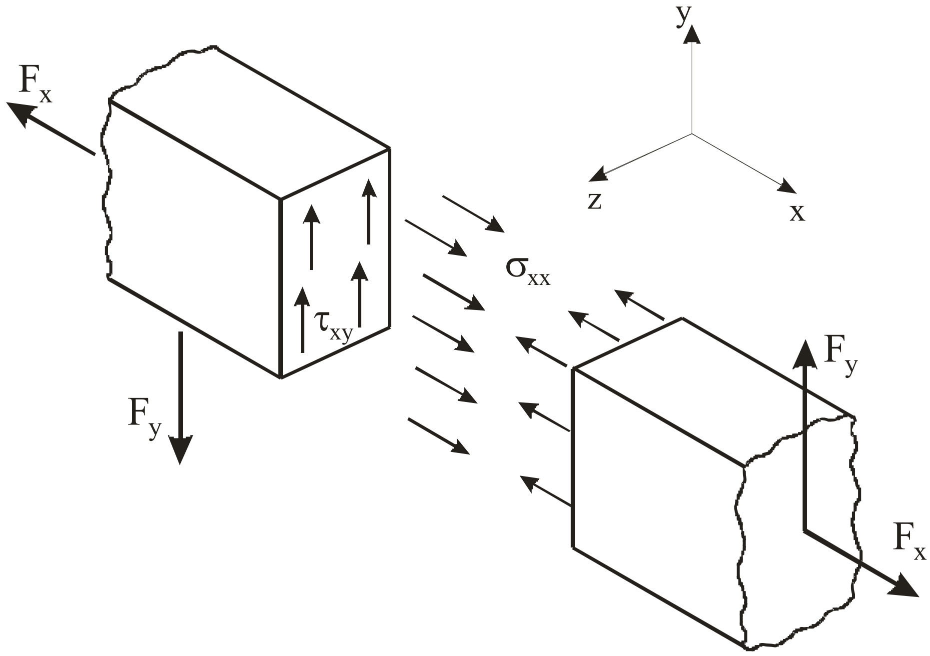
Komponente naprezanja imaju dva indeksa:

prvi indeks - smjer vanjske normale ravnine na koju naprezanje djeluje

drugi indeks - smjer naprezanja

**Posmična naprezanja ($\tau$)** - djeluju u ravnini plohe.

- djeluje i sila $F_y$ u ravnini poprečnog presjeka



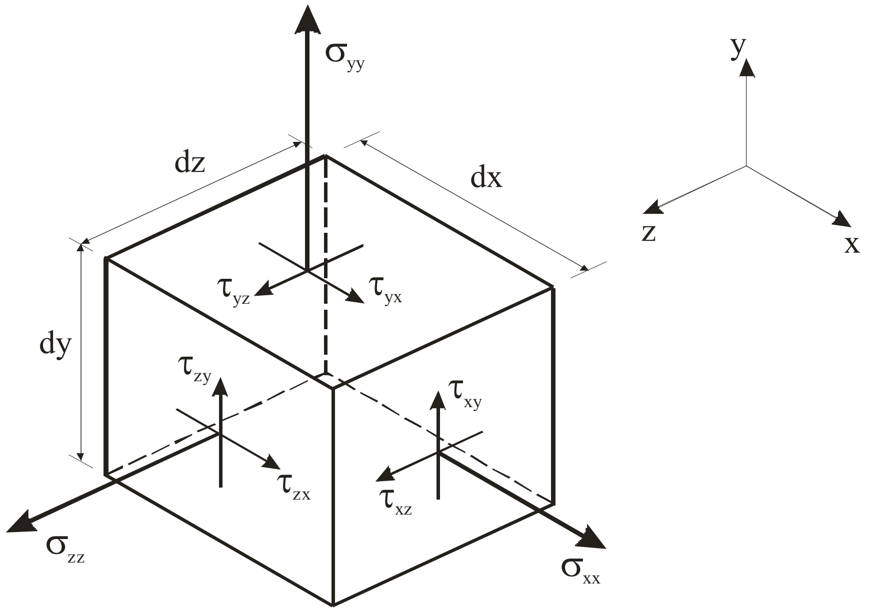

$$\tau_{xy} = \frac{F_y}{A}$$

$\tau_{xy}$ - posmično naprezanje u smjeru *y* koje djeluje u ravnini s normalom *x*
(ravnina poprečnog presjeka štapa)

Komponenta unutrašnje sile u presjeku $F_z$ prouzrokovat će posmično naprezanje:

$$\tau_{xz} = \frac{F_z}{A}$$

**Prostorno stanje naprezanja**:

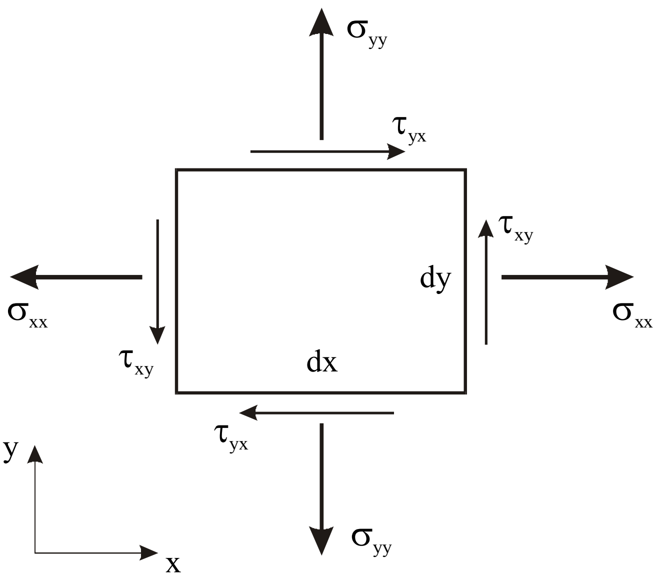



Ukupno ima 9 komponenata naprezanja: 3 normalne
6 posmičnih

Oznake normalnih naprezanja: $\sigma_{xx} = \sigma_x$, $\sigma_{yy} = \sigma_y$, $\sigma_{zz} = \sigma_z$

Oznake posmičnih naprezanja: $\tau_{xy}$, $\tau_{yx}$, $\tau_{yz}$, $\tau_{zy}$, $\tau_{zx}$, $\tau_{xz}$

**Ravninsko stanje naprezanja**:




Iz uvjeta ravnoteže momenata s obzirom na os z kroz težište elementa slijedi:

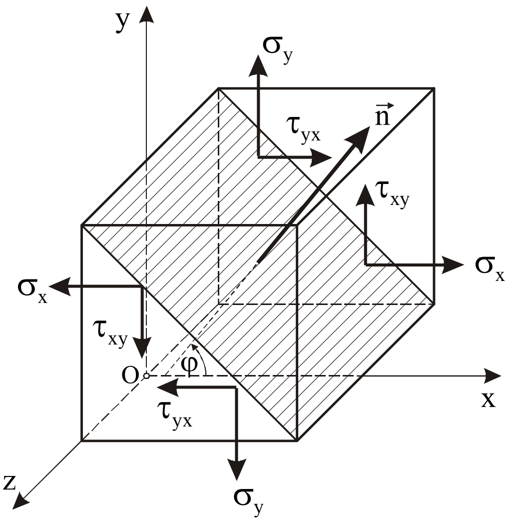
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Također, vrijedi: $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ , $\tau_{xz} = \tau_{zx}$

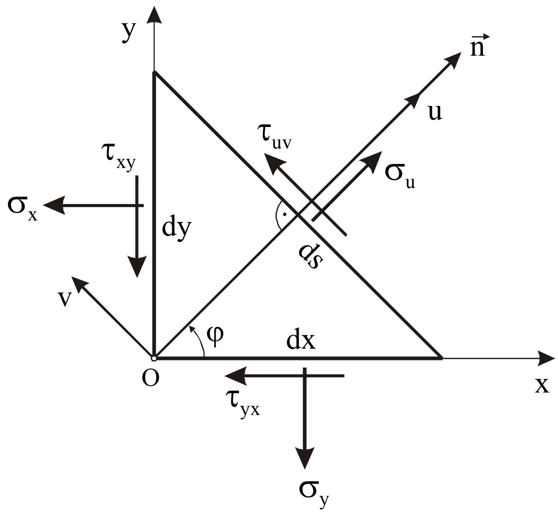
# Ravninsko stanje naprezanja

- sva naprezanja djeluju u ravnini (*x*-*y* ravnina)
- RSN je određeno s tri komponente naprezanja ($\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$)
- najčešća primjena – u analizi tankih ploča

Mogu se odrediti komponente naprezanja u bilo kojoj ravnini čija normala $\vec{n}$ zatvara s osi *x* kut $\varphi$.



a)



b)

Korištenjem uvjeta ravnoteže sila (crtež b) dobivaju se **jednadžbe transformacija naprezanja**:

$$\tau_{uv} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi$$

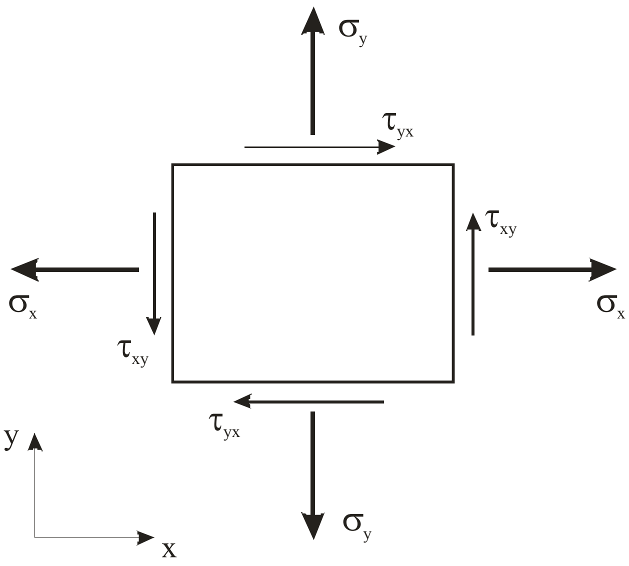
$$\sigma_u = \sigma_x \cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi$$

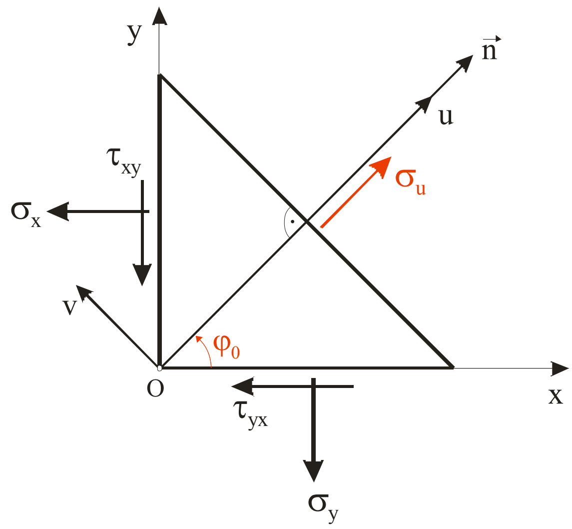
$\rightarrow$ normalno naprezanje $\sigma$ i posmično naprezanje $\tau$ u bilo kojem smjeru u odnosu na originalna naprezanja

U ravnini presjeka s normalom $\vec{n}$ koja se poklapa s osi v (kut $\beta = 90^0 + \varphi$) dobio bi se sljedeći izraz za normalno naprezanje:

$$\sigma_v = \sigma_x \sin^2\varphi + \sigma_y \cos^2\varphi - \tau_{xy}\sin 2\varphi$$

Moguće je naći smjerove u kojima normalna naprezanja imaju ekstremne vrijednosti (maksimalno odnosno minimalno normalno naprezanje).




Ekstremne vrijednosti normalnih naprezanja dobit će se iz uvjeta: $\frac{\partial \sigma_u}{\partial \varphi} = 0$

$$\Rightarrow \quad \tau_{uv} = 0 \quad \rightarrow \quad tg2\varphi_0 = \frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Ravnine u kojima ne djeluje posmično naprezanje nazivaju se **glavne ravnine**.

Normalna naprezanja koja djeluju na tim ravninama imaju ekstremne vrijednosti i nazivaju se **glavna naprezanja**.

Pravci glavnih naprezanja nazivaju se **glavne osi naprezanja** (1,2), a određene su kutovima $\varphi_0$ i $\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$.

Veličine glavnih naprezanja:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\,\tau_{xy}^{\;2}}$$

Oznake: $\sigma_1$ - maksimalno glavno naprezanje

$\sigma_2$ - minimalno glavno naprezanje ($\sigma_1 \geq \sigma_2$)

MAKSIMALNA POSMIČNA NAPREZANJA

$$\tau_{uv} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi$$

Smjer normale na ravninu na kojoj djeluje maksimalno posmično naprezanje dobiva se iz uvjeta:

$$\frac{\partial \tau_{uv}}{\partial \varphi} = 0: \qquad (\sigma_y - \sigma_x)\cos 2\varphi - 2\,\tau_{xy}\sin 2\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi = \varphi_1$$

$$\rightarrow \qquad \mathrm{tg}2\varphi_1 = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\,\tau_{xy}} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\,\tau_{xy}}$$

$$\mathrm{tg}2\varphi_1 \cdot \mathrm{tg}2\varphi_0 = -1 \quad \rightarrow \quad 2\varphi_1 = 2\varphi_0 + \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \varphi_1 = \varphi_0 + \frac{\pi}{4}$$

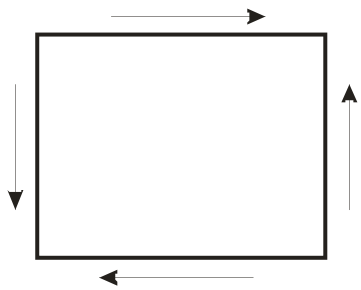
Ako su osi *x,y* glavne osi naprezanja 1,2: $\varphi_0 = 0\,, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$

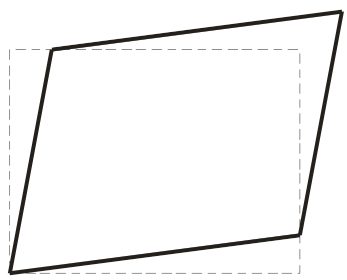
$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\varphi_1 + \tau_{xy}\cos 2\varphi_1\ ; \quad \sin 2\varphi_1 = 1,\ \ \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)$$

## Čisti posmik:

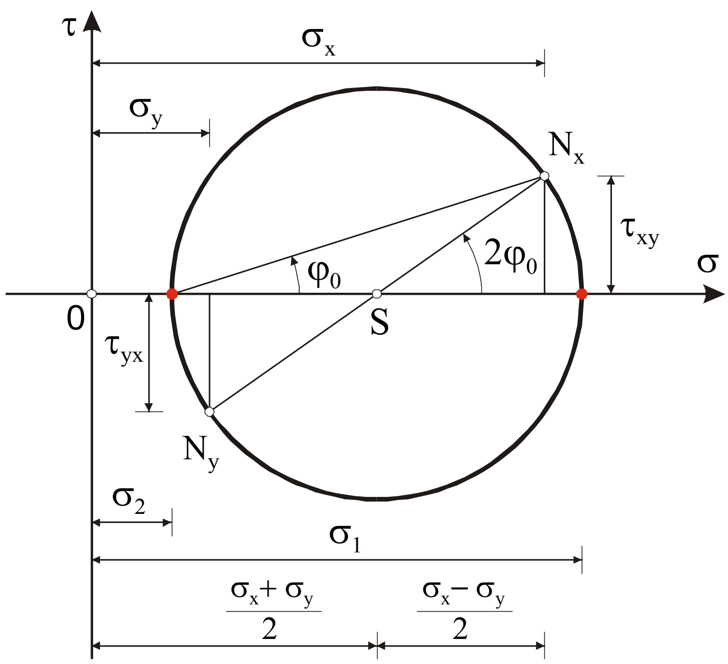
stanje naprezanja kod kojega na stranicama elementa postoje samo posmična naprezanja, a normalna naprezanja su jednaka nuli.





## MOHROVA KRUŽNICA NAPREZANJA

1. U promatranoj točki napregnutog tijela zadane su komponente naprezanja $\sigma_x, \sigma_y$ i $\tau_{xy}$. Vrijedi: $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$
2. U koordinatnom sustavu $\sigma$, $\tau$ odredi se točka $N_x$ s koordinatama $(\sigma_x, \tau_{xy})$ i točka $N_y$ s koordinatama $(\sigma_y, \tau_{yx})$.
3. Dužina $\overline{N_x N_y}$ je promjer na kojemu se konstruira Mohrova kružnica naprezanja.
4. Konstrukcijom Mohrove kružnice naprezanja određena je veličina i smjer glavnih naprezanja. Sjecišta Mohrove kružnice s apscisom $\sigma$ određuju veličine $\sigma_1$ i $\sigma_2$ tj. glavna naprezanja.

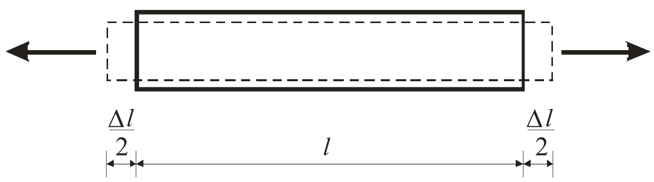


# DEFORMACIJE

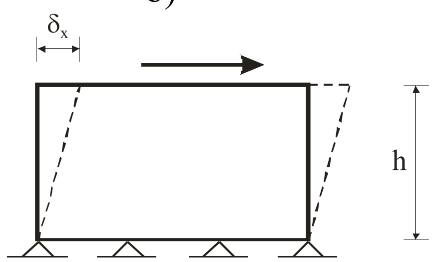
Pod djelovanjem vanjskih sila tijela se deformiraju: mijenjaju svoj oblik i dimenzije, pojedine točke mijenjaju svoj položaj u prostoru.

Deformacija se može definirati kao promjena dimenzije elementa uzrokovana opterećenjem podijeljena s izvornom dimenzijom.

a)




b)




a) Štap pod djelovanjem aksijalne vlačne sile

Normalna deformacija – mijenja se duljina štapa, osnovni oblik štapa ostaje **nepromijenjen**

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l}$$

Normalna deformacija je bezdimenzionalna veličina najčešće izražena u %.
Pozitivna vrijednost označuje produljenje, a negativna skraćenje dužine.

b) Tanka pravokutna ploča oslonjena na donjem rubu i opterećena posmičnom silom na suprotnom rubu

Posmična deformacija – mijenja se oblik elementa, dimenzija elementa ostaje **nepromijenjena**

Promjena pravog kuta između dvije linije (između rubova ploče):

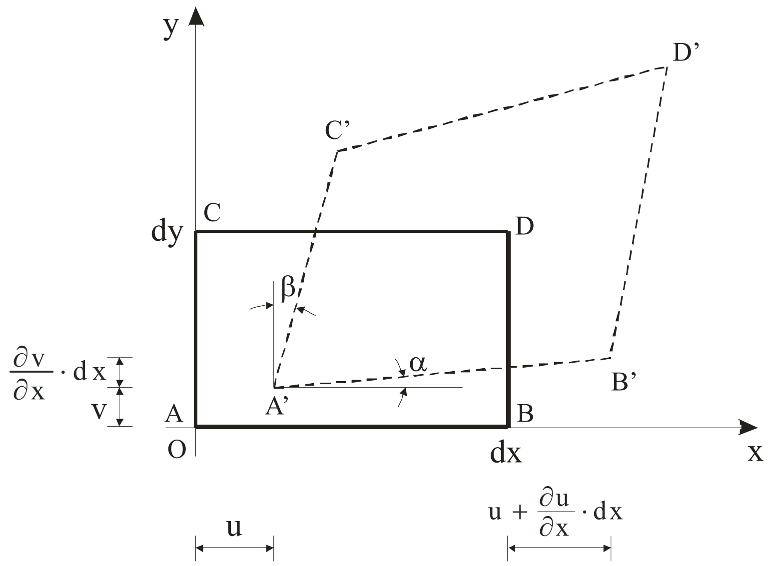
$$\gamma_{xy} \approx \tan\gamma_{xy} = \frac{\delta_x}{h} \quad \text{(radi se o maloj promjeni kuta)}$$

Posmična deformacija izražava se u radijanima.
Pozitivnoj vrijednosti odgovara smanjenje pravog kuta, a negativnoj povećanje.

Komponente pomaka točke u prostoru (pomaci u smjeru koordinatnih osi x,y,z):

$$u = u\,(x, y, z)\,, \quad v = v\,(x, y, z)\,, \quad w = w\,(x, y, z)$$

Veze između komponenata deformacija i komponenata pomaka u ravnini:




Normalne deformacije:
$$\varepsilon_{xx} = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Posmična deformacija:
$$\gamma_{xy} \approx \tan\alpha + \tan\beta$$

$$\tan\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \varepsilon_{xx}} \approx \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{xx} << 1 \quad ; \qquad \tan\beta = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

**Matematički izrazi za deformacije u prostoru**:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}\,, \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}\,,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\,, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\,, \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

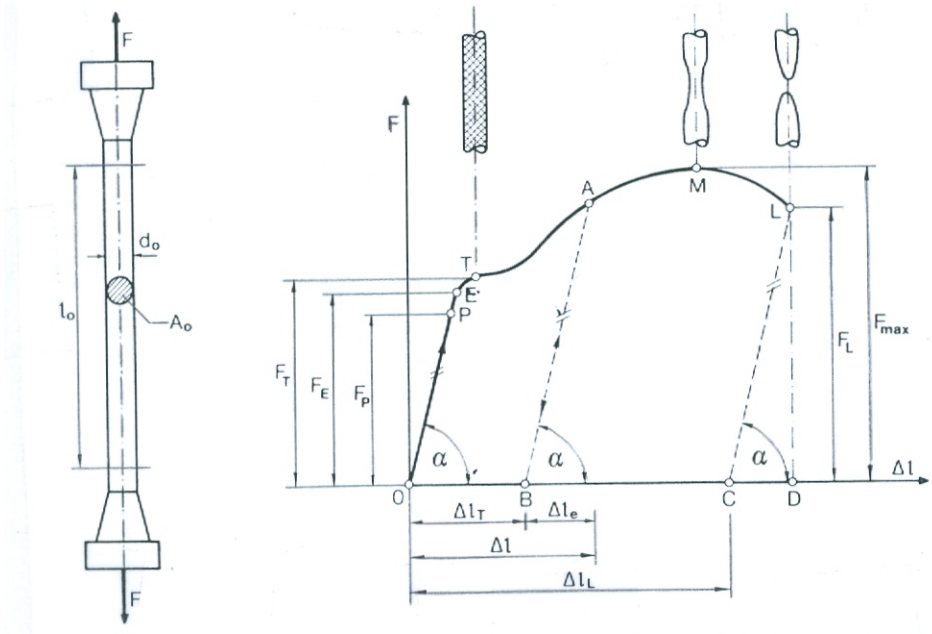
# VEZE IZMEĐU NAPREZANJA I DEFORMACIJA

## Eksperimentalni podaci o vezi između naprezanja i deformacija

Naprezanja se javljaju kao unutarnje sile uzajamnosti među česticama tijela nastale zbog promjene razmaka između tih čestica.
Naprezanja i deformacije vezani su funkcionalnom vezom:

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}) \; ; \qquad \varepsilon_{ij} = f_1(\sigma_{ij})$$

Ova veza ovisi o vrsti materijala a određuje se eksperimentalno (uzorak materijala određenih dimenzija i oblika rasteže se uzdužnom silom F i pri tome prati produljenje $\Delta l$ na mjernoj dužini uzorka $l_0$).
Dijagram rastezanja $F - \Delta l$ za građevinski čelik:




- između točaka O i P: dijagram je pravac (sila F i produljenje $\Delta l$ linearno su ovisni)
- do točke E: deformacije su elastične (potpuno iščezavaju nakon rasterećenja)
- nakon točke E: u uzorku se, osim elastičnih, javljaju i **trajne** ili **plastične** deformacije
- u točki T: nastaje **tečenje** (**popuštanje**) materijala - deformacije rastu bez povećavanja opterećenja
- nakon točke T: nakon stanja tečenja dolazi do **ojačanja** materijala (materijal ponovno dobiva sposobnost da se opire djelovanju opterećenja)
- do točke M: sila se povećava sve do točke M, povećava se deformacija uzorka. U točki M sila prima maksimalnu vrijednost $F_{max}$
- nakon točke M: nastaje iscrpljenost materijala, produljenje uzorka raste uz smanjenje sile F
- u točki L: raskid uzorka. Trajno produljenje uzorka nakon raskida $\Delta l_L$ naziva se **apsolutno produljenje pri raskidu**

Uzorak se u uzdužnom smjeru produlji za $\Delta l = l - l_0$, a u poprečnom smjeru suzi za $\Delta d = d - d_0$.

Da bi se dobio dijagram koji karakterizira mehanička svojstva materijala neovisno o apsolutnim dimenzijama uzorka, dijagram rastezanja $F-\Delta l$ transformira se u koordinatni sustav $\sigma-\varepsilon$ .

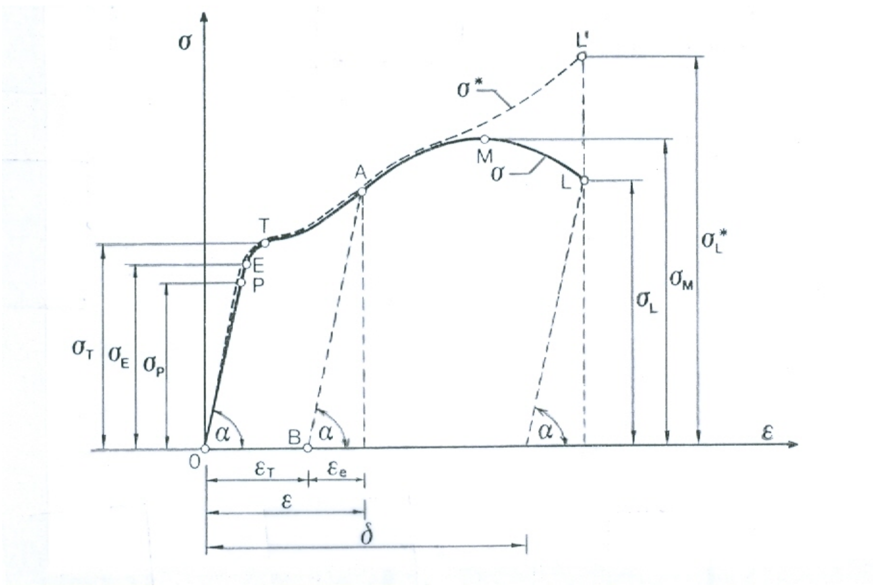
Stvarno naprezanje je $\sigma^* = \frac{F}{A}$ (A je površina poprečnog presjeka uzorka koja odgovara sili F).

Računsko ili nominalno naprezanje:

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad (A_0 \text{ je početna površina poprečnog presjeka uzorka})$$

Relativna dužinska deformacija: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

Dijagram naprezanja $\sigma = f(\varepsilon)$ ima isti oblik kao i dijagram rastezanja:




$\sigma_P$ - **granica proporcionalnosti**

$\sigma_E$ - **granica elastičnosti**

$\sigma_T$ - **granica tečenja** ili **granica popuštanja** (granica razvlačenja ili velikih izduženja)

$\sigma_M$ - **vlačna** ili **rastezna čvrstoća** materijala

$\sigma_L$ - prijelomno naprezanje

$\sigma_L^*$ - **čvrstoća pri raskidu**

Ukupna deformacija je: $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_T$

$\varepsilon_e$ - **elastična** ili povratna deformacija

$\varepsilon_T$ - **trajna** ili **plastična** deformacija

$\delta$ - **relativno produljenje pri raskidu** uzorka (karakterizira plastičnost materijala):

$$\delta = \frac{l_L - l_0}{l_0} 100\ \%$$

$\delta > 5\%$ - duktilni (rastezljivi, žilavi) materijali: meki čelik, bakar itd.

$\delta < 5\%$ - krti materijali: kamen, staklo, lijevano željezo itd.

## Hookeov zakon. Konstante elastičnosti materijala.

Razmatra model **idealnoga elastičnog tijela** u kojega su veze između naprezanja i deformacija **linearne**. Takvo tijelo se naziva **Hookeovo tijelo** (Robert Hooke 1678).

Iz dijagrama $\sigma - \varepsilon$ vidi se da je: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sigma}{\varepsilon} = E$

$$\rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \rightarrow \quad \sigma = E\,\varepsilon$$ - Hookeov zakon za idealno elastično tijelo

E - **modul elastičnosti** ili **Youngov modul** (Pa): koeficijent proporcionalnosti između naprezanja i deformacija

Pri ispitivanju uzorka na rastezanje, promjer se smanjio za $\Delta d = d - d_0$ (kontrakcija presjeka).

Relativna dužinska deformacija: $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$

Relativna poprečna deformacija: $\varepsilon_p = \dfrac{\Delta d}{d_0}$

U području u kojemu vrijedi Hookeov zakon, između relativne poprečne i relativne uzdužne deformacije postoji konstantan odnos:

$$\nu = \left|\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon}\right|$$ - **Poissonov koeficijent**

Uzdužne i poprečne deformacije uvijek su suprotnog predznaka: $\varepsilon_p = -\nu\,\varepsilon$

građevinski materijali: $\nu \approx 0.15 - 0.35$

**Hookeov zakon pri posmiku**: $\tau = G \cdot \gamma$

G - **Coulombov modul** ili **modul posmika** ili **modul klizanja** (Pa)
$0.33\,E \le G \le 0.5\,E$

**Konstante elastičnosti materijala** koje karakteriziraju elastična svojstva materijala su: Poissonov koeficijent $\nu$, modul elastičnosti E i modul posmika G. Određuju se eksperimentalno. Između njih postoji ovisnost:

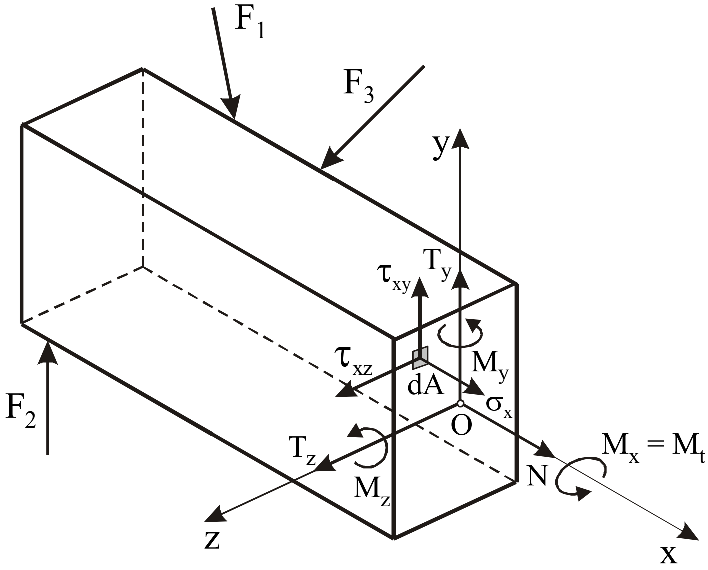
$$G = \frac{E}{2\,(1+\nu)}$$

*Konstante elastičnosti i koeficijent linearnog toplinskog rastezanja*

| MATERIJAL | E | G | ν | α |
|---|---|---|---|---|
| | $10^5$ MPa | $10^5$ MPa | – | $10^{-5}$ / K |
| ugljični čelik | 2.0 – 2.1 | 0.80 – 0.81 | 0.24 – 0.28 | 1.25 |
| legirani čelik | 2.1 – 2.2 | 0.80 – 0.81 | 0.25 – 0.30 | 1.0 – 1.3 |
| aluminij | 0.63 – 0.75 | 0.26 – 0.27 | 0.32 – 0.36 | 2.55 |
| drvo uzduž vlakana | 0.10 – 0.12 | 0.0055 | – | 0.3 – 0.5 |
| drvo poprečno na vlakna | 0.005 – 0.010 | – | – | – |
| staklo | 0.56 | 0.22 | 0.25 | 0.95 |
| beton | 0.15 – 0.45 | – | 0.08 – 0.18 | 1.0 – 1.4 |

# VEZE IZMEĐU UNUTARNJIH SILA I NAPREZANJA

Prikazan je dio napregnutog štapa s komponentama unutarnjih sila.




Komponente sile $d\vec{F}$ koja djeluje na promatrani element površine dA su:

$$\sigma_x \, dA \quad , \quad \tau_{xy} \, dA \quad i \quad \tau_{xz} \, dA$$

Sumiranjem projekcija svih elementarnih sila po površini poprečnog presjeka dobivaju se uzdužna sila N i poprečne sile $T_y$ i $T_z$:

$$N = \int_A \sigma_x \, dA \quad , \quad T_y = \int_A \tau_{xy} \, dA \quad , \quad T_z = \int_A \tau_{xz} \, dA$$

Moment u odnosu na os x daju sile $\tau_{xy} \, dA$ i $\tau_{xz} \, dA$. Elementarni moment u odnosu na os x je:

$$dM_x = \tau_{xz} \, dA \cdot y - \tau_{xy} \, dA \cdot z$$

Sumiranjem po čitavoj površini presjeka dobiva se moment torzije $M_x$:

$$M_x = M_t = \int_A (\tau_{xz} \, y - \tau_{xy} \, z) \, dA$$

Momente s obzirom na osi y i z daju sile $\sigma_x \, dA$. Momenti savijanja su:

$$M_y = \int_A \sigma_x \, z \, dA \quad , \quad M_z = -\int_A \sigma_x \, y \, dA$$

# Aksijalno opterećenje štapa

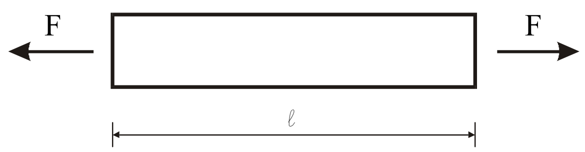
– vanjske sile usmjerene su uzduž osi štapa
– u poprečnom presjeku djeluje samo uzdužna sila N, ostale komponente unutarnjih sila su jednake nuli

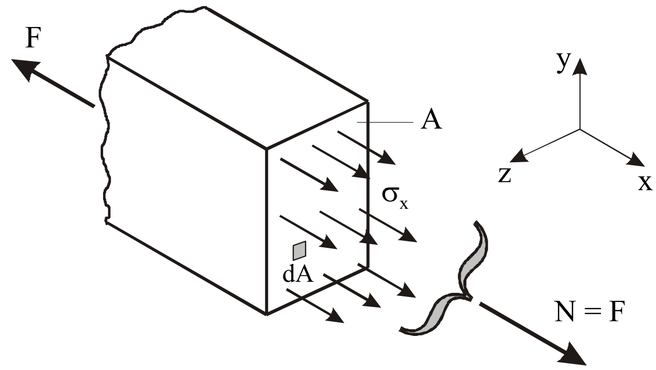
Ako je N>0 (uzdužna sila je u smjeru vanjske normale):

štap opterećen na **rastezanje** ili **vlak**

Ako je N<0 (uzdužna sila je usmjerena suprotno od smjera vanjske normale):

štap opterećen na **pritisak** ili **tlak**

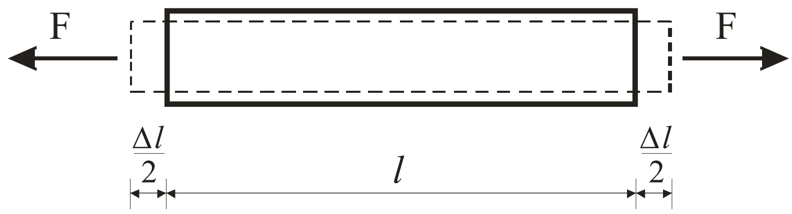



Iz uvjeta ravnoteže $\sum F_x = 0$ dobiva se:

$$\int_A \sigma_x \, dA = N = F$$

Pod djelovanjem zadane sile štap duljine $l$ se deformira.




Pri deformiranju štapa vrijedi hipoteza ravnih poprečnih presjeka:

***poprečni presjeci štapa i nakon deformacije ostaju ravni i okomiti na os štapa***

Slijedi da je relativna uzdužna deformacija $\varepsilon_{xx} = \text{konst.}$

Prema Hookeovu zakonu za jednoosno stanje naprezanja je $\sigma_x = E\,\varepsilon_{xx}$

Slijedi:

$$\int_A \sigma_x \, dA = N \quad \rightarrow \quad \int_A E\,\varepsilon_{xx}\, dA = E\,\varepsilon_{xx} \int_A dA = E\,\varepsilon_{xx}\, A = N \quad \rightarrow \quad \sigma_x A = N$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$ – normalna naprezanja u poprečnom presjeku štapa su raspodijeljena **jednoliko**

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{E\,A}$$

$E\,A$ – **aksijalna krutost štapa**

Relativna uzdužna deformacija štapa: $\varepsilon_{xx} = \dfrac{\Delta l}{l}$

Ukupno produljenje štapa: $\Delta l = \dfrac{N\,l}{E\,A}$

Pri dimenzioniranju štapa moraju biti ispunjeni uvjet čvrstoće:

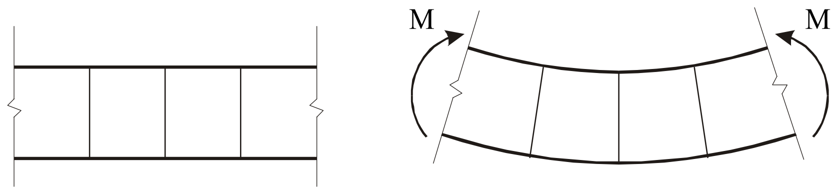
$$\sigma_x = \frac{F}{A} \le \sigma_{dop}$$

i uvjet krutosti:

$$\Delta l = \frac{F\,l}{E\,A} \le \Delta l_{dop}$$

# Savijanje štapa

Savijanje nastaje kada se opterećeni štap deformira u zakrivljeni oblik, jedan rub štapa se skraćuje a drugi se produljuje:

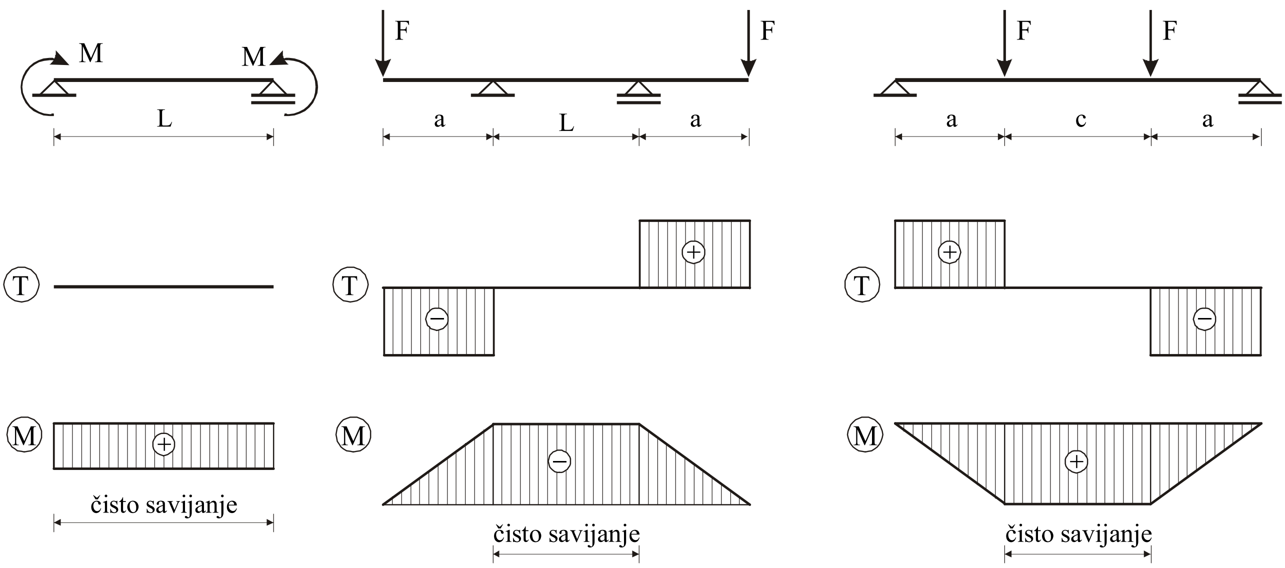



Naprezanja i deformacije više **nisu konstantne** vrijednosti po poprečnom presjeku. Mijenjaju se od **tlačnih** na jednom rubu do **vlačnih** na drugom rubu štapa.

Mogu nastati dva slučaja savijanja štapa:

- **poprečno savijanje ili savijanje silama** - ako se u poprečnom presjeku štapa pojavljuju poprečna sila i moment savijanja
- **čisto savijanje** - ako se u poprečnim presjecima štapa pojavljuje samo moment savijanja

Primjeri čistog savijanja štapa:

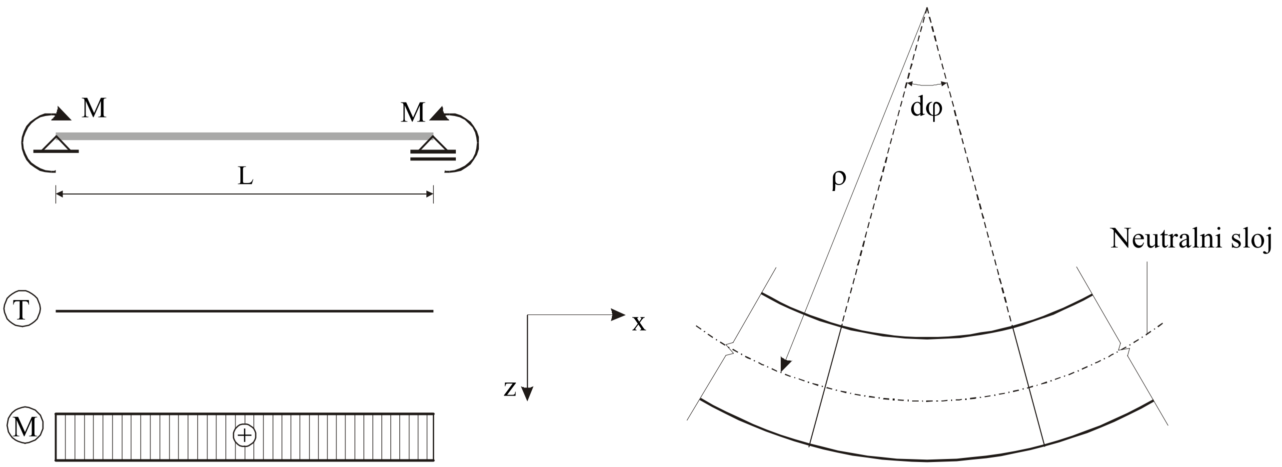



*Kod čistog savijanja, ravnina poprečnog presjeka štapa ostaje ravnina.*

## Čisto savijanje

Vrijedi za elemente izložene savijanju oko *y* i/ili *z* osi kojima je poprečni presjek simetričan s obzirom na barem jednu od tih osi.

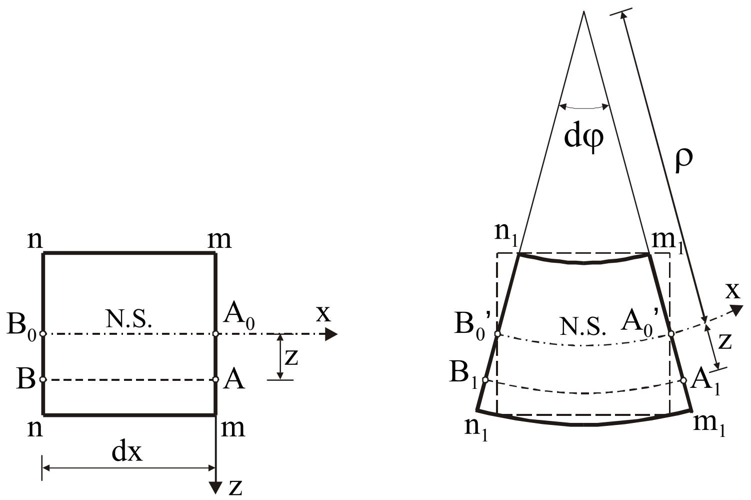
Ravni štap konstantnog poprečnog presjeka savija se oko y osi:




- Uzima se da je deformacija štapa u obliku kružnog luka.
- Gornja vlakanca se skraćuju, donja se produljuju.
- Sloj vlakana koja ne mijenjaju duljinu prilikom savijanja čine **neutralni sloj**.
- Presječnica neutralnog sloja i ravnine poprečnog presjeka naziva se **neutralna os** presjeka.
- Udaljenost od neutralnog sloja do središta kružnog luka zove se **radijus zakrivljenosti (ρ)**.

Posmična naprezanja su u presjeku jednaka nuli. Na element površine presjeka dA djeluje samo unutarnja sila $\sigma_x\, dA$.

Deformacija elementa štapa:



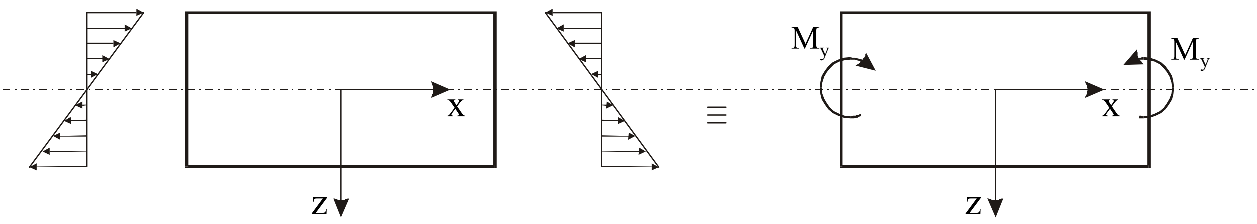

Relativno produljenje vlakna AB na udaljenosti *z* od neutralnog sloja:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\overline{A_1B_1} - \overline{AB}}{\overline{AB}} \quad ; \quad \overline{AB} = \overline{A_0B_0} = dx = \overline{A_0'B_0'} = \rho\, d\varphi \;; \quad \overline{A_1B_1} = (\rho + z)\, d\varphi$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{(\rho + z)\, d\varphi - \rho\, d\varphi}{\rho\, d\varphi} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{xx} = \frac{z}{\rho}$$

Normalna naprezanja: $\sigma_x = E\,\varepsilon_{xx} \quad \rightarrow \quad \sigma_x = \dfrac{E}{\rho}\, z$

| |
|---|
| Pri čistom savijanju su normalna naprezanja konstantna po širini presjeka (za $z = \text{konst.}$), a po visini poprečnog presjeka mijenjaju se razmjerno udaljenosti *z* od neutralne osi (po linearnom zakonu).<br>U točkama presjeka na neutralnoj osi je $\sigma_x = 0$. |




Za dio štapa se mogu postaviti tri uvjeta ravnoteže:

$$1)\ \sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad N = \int_A \sigma_x \, dA = 0$$

$$2)\ \sum M_y = 0 \quad \rightarrow \quad M_y = \int_A \sigma_x \, z \, dA = M$$

$$3)\ \sum M_z = 0 \quad \rightarrow \quad M_z = \int_A \sigma_x \, y \, dA = 0$$

Iz uvjeta ravnoteže 1) slijedi:

$$\int_A \frac{E}{\rho} z \, dA = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{E}{\rho} \int_A z \, dA = 0 \quad \rightarrow \quad \int_A z \, dA = 0$$

$\rightarrow \ S_y = 0 \quad \Rightarrow$ *neutralna os y prolazi težištem presjeka*

Iz uvjeta ravnoteže 3) slijedi:

$$\int_A \sigma_x \, y \, dA = \frac{E}{\rho} \int_A z \, y \, dA = 0 \quad \rightarrow \quad \int_A z \, y \, dA = 0$$

$\rightarrow \ I_{zy} = 0 \quad \Rightarrow$ *osi y i z su glavne središnje osi tromosti poprečnog presjeka*

Iz uvjeta ravnoteže 2) slijedi:

$$\int_A \sigma_x \, z \, dA = \frac{E}{\rho} \int_A z^2 \, dA = M_y$$

$$\int_A z^2 \, dA = I_y \quad \rightarrow \quad \frac{E}{\rho} I_y = M_y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{E \, I_y}$$

$\frac{1}{\rho} = \kappa$ - zakrivljenost neutralnog sloja nosača

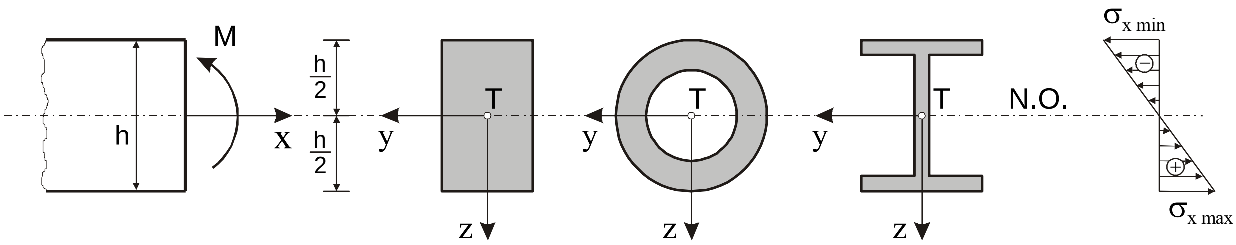
(zakrivljenost **elastične linije** ili **progibne linije štapa**)

$E \, I_y$ - **fleksijska krutost** (krutost presjeka pri savijanju)

Normalna naprezanja u svakoj točki poprečnog presjeka su:

$$\boxed{\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z}$$

Raspodjela normalnih naprezanja u presjeku ne ovisi o obliku poprečnog presjeka:




Ekstremne vrijednosti normalnih naprezanja su u krajnjim vlaknima. Za presjeke s horizontalnom osi simetrije *y*, ekstremne vrijednosti su u $z = \pm\frac{h}{2}$:

$$\sigma_{x\,max} = \frac{M_y}{I_y}\frac{h}{2} \quad \text{i} \quad \sigma_{x\,min} = -\frac{M_y}{I_y}\frac{h}{2}$$

$$\frac{I_y}{\frac{h}{2}} = W_y \quad \rightarrow \quad \sigma_{x\,max} = \frac{M_y}{W_y}\,, \quad \sigma_{x\,min} = -\frac{M_y}{W_y}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\sigma_{x\,max}\right| = \left|\sigma_{x\,min}\right| = \frac{M_y}{W_y}$$

Ako poprečni presjek nema horizontalnu os simetrije (neutralna os presjeka ne prolazi sredinom visine presjeka):

$$z_{max} = h_1 \;\; \text{i} \;\; z_{min} = -h_2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{x\,max} = \frac{M_y}{I_y} h_1 \quad \text{i} \quad \sigma_{x\,min} = -\frac{M_y}{I_y} h_2$$

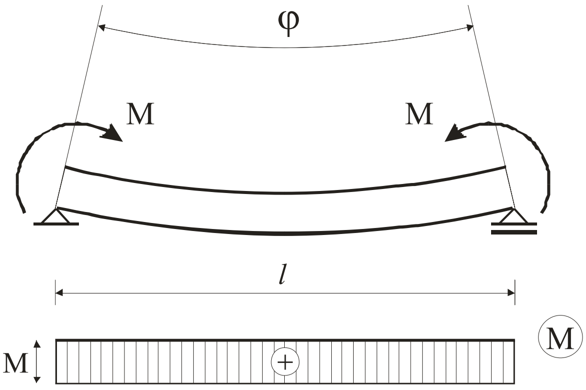
$$\frac{I_y}{h_1} = W_{y_1}\,, \;\; \frac{I_y}{h_2} = W_{y_2} \quad \rightarrow \quad \sigma_{x\,max} = \frac{M_y}{W_{y_1}}\,, \quad \sigma_{x\,min} = -\frac{M_y}{W_{y_2}}$$

$$\left|\sigma_{x\,max}\right| \neq \left|\sigma_{x\,min}\right|$$

Zakrivljenost osi štapa vezana je na uzajamno zaokretanje poprečnih presjeka:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx}$$

$$d\varphi = \frac{dx}{\rho} \quad \rightarrow \quad d\varphi = \frac{M\,dx}{E\,I_y}$$




Kut zaokreta između krajnjih presjeka štapa konstantne krutosti duljine *l*:

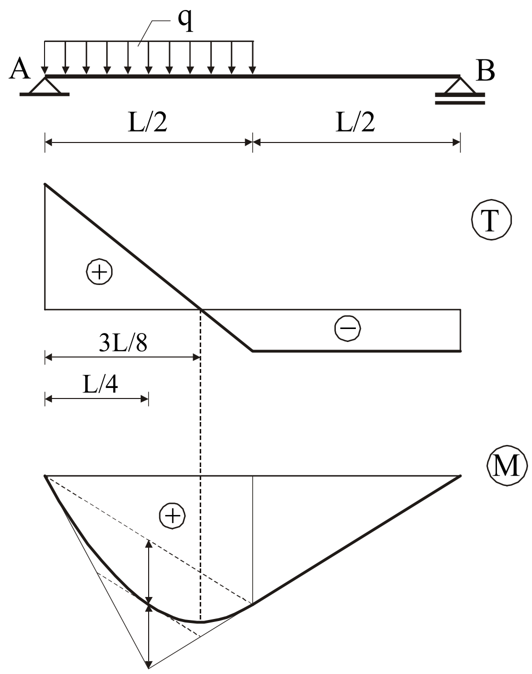
$$\varphi = \int_0^l \frac{M\,dx}{E\,I_y} = \frac{M\,l}{E\,I_y}$$

Normalno naprezanje za slučaj djelovanja momenta savijanja oko osi *z*:

$$\boxed{\sigma_x = \frac{M_z}{I_z}\,y}$$

**Opće savijanje (savijanje silama)**

Poprečne sile ($T_z$) djeluju zajedno s momentima savijanja ($M_y$):

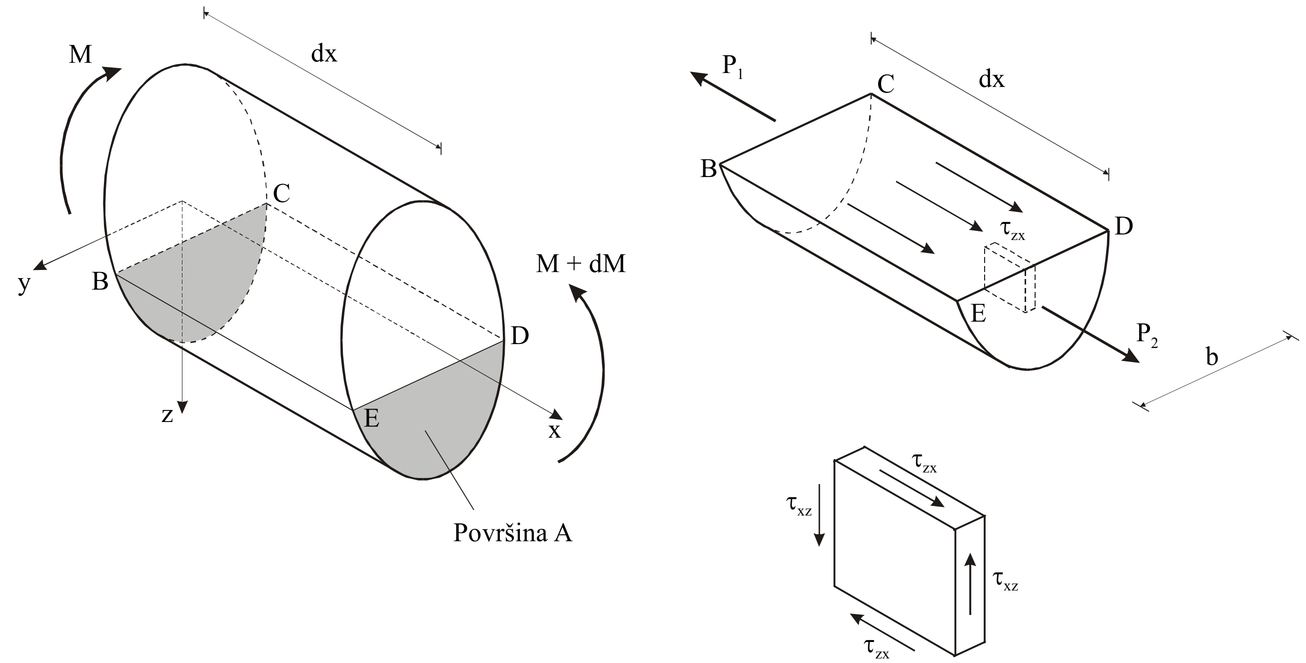



U presjeku štapa osim normalnih naprezanja $\sigma_x$ pojavljuju se i **posmična naprezanja** $\tau_{xz}$.

Normalno naprezanje određuje se kao i kod čistog savijanja:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$$

Promatra se dio štapa duljine dx:




$$P_2 - P_1 = \int_A \frac{M_y + dM_y}{I_y} z\,dA - \int_A \frac{M_y}{I_y} z\,dA = \int_A \frac{dM_y}{I_y} z\,dA$$

Uvjet ravnoteže svih sila u smjeru osi *x*:

$$-\tau_{zx}\, b\, dx + P_2 - P_1 = 0$$

Uvrštavanjem gornjeg izraza za $(P_2 - P_1)$ slijedi:

$$\tau_{zx}\, b\, dx - \frac{dM_y}{I_y} \int_A z\,dA = 0 \quad \rightarrow \quad \tau_{zx} = \frac{dM_y}{dx} \frac{\int_A z\,dA}{b\, I_y}$$

$\int_A z\,dA = S_y$ - statički moment površine A s obzirom na neutralnu os y

Budući je $\frac{dM_y}{dx} = T_z$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, dobiva se izraz za posmično naprezanje:

$$\boxed{\tau_{xz} = \frac{T_z\, S_y}{b\, I_y}}$$

gdje je: $I_y$ moment tromosti čitavog poprečnog presjeka,

b - širina presjeka u visini točke u kojoj se traži posmično naprezanje.

U rubnim vlaknima posmična naprezanja su jednaka nuli (jer je $S_y = 0$).

Mjesto maksimalnog posmičnog naprezanja $\tau_{xz}$ dobiva se iz uvjeta:

$$\frac{d\tau_{xz}}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{T_z\, S_y}{b\, I_y}\right) = \frac{T_z}{I_y}\,\frac{d}{dz}\left(\frac{S_y}{b}\right) = 0$$

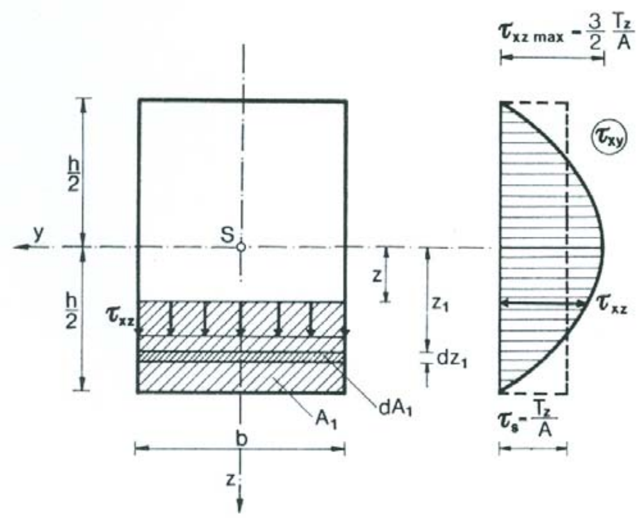
Ako je $b = \text{konst.}$, slijedi:

$$\frac{d}{dz} S_y = \frac{d}{dz}\int_A z\, dA = \frac{d}{dz}\int_z z\, b\, dz = b\, z_0 = 0 \quad \rightarrow \quad z_0 = 0$$

***Maksimalna posmična naprezanja pojavljuju se u visini neutralne osi y.***

Raspodjela posmičnih naprezanja u poprečnom presjeku **ovisi** o obliku presjeka štapa.

## a) **Pravokutni presjek**




$$I_y = \frac{b\,h^3}{12}$$

$$b(z) = b = \text{konst.}$$

$$S_y = \int_{A_1} z_1\, dA_1 = \int_{z}^{\frac{h}{2}} z_1\, b\, dz_1 = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)$$

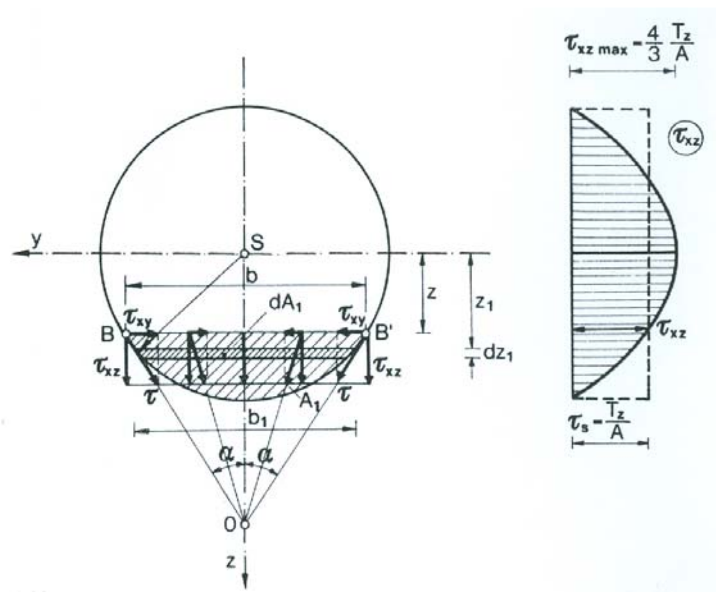
$$\tau_{xz} = \frac{T_z\, S_y}{b\, I_y} = \frac{6\,T_z}{b\,h^3}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)$$

Posmična naprezanja $\tau_{xz}$ po visini pravokutnog presjeka raspodijeljena su po zakonu kvadratne parabole.

$$z = \frac{h}{2} \qquad \rightarrow \qquad \tau_{xz} = 0$$

$$z = 0 \qquad \rightarrow \qquad \tau_{xz\,max} = \frac{3}{2}\,\frac{T_z}{b\,h} = \frac{3}{2}\,\frac{T_z}{A}$$

## b) **Kružni presjek**




$$I_y = \frac{\pi\, r^4}{4}$$

$$b(z) = 2\sqrt{r^2 - z^2}$$

$$S_y = \int_{A_1} z_1\, dA_1 = \int_{z}^{r} z_1\, b_1\, dz_1 =$$

$$= 2\int_{z}^{r} z_1 \sqrt{r^2 - z_1^{\,2}}\; dz_1 = \frac{2}{3}\left(r^2 - z^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

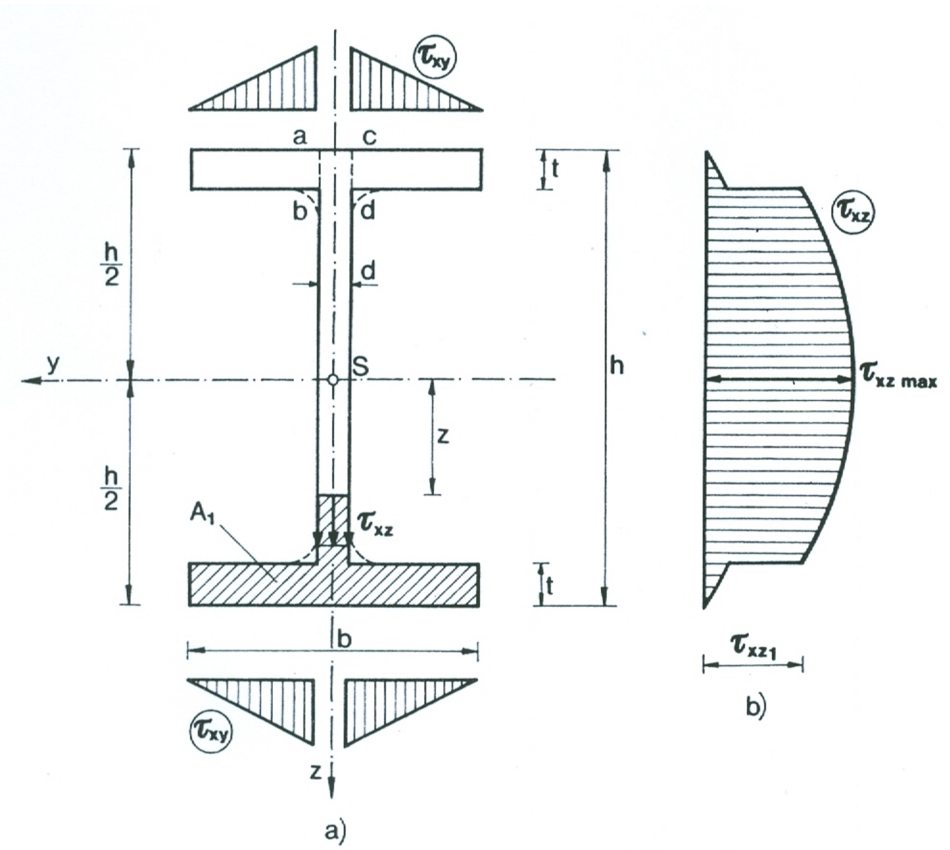
$$\tau_{xz} = \frac{T_z\, S_y}{b\, I_y} = \frac{4}{3}\,\frac{T_z}{\pi\, r^4}\left(r^2 - z^2\right)$$

Posmična naprezanja $\tau_{xz}$ po visini presjeka raspodijeljena su po zakonu kvadratne parabole.

$$z = r \qquad \rightarrow \qquad \tau_{xz} = 0$$

$$z = 0 \qquad \rightarrow \qquad \tau_{xz\,max} = \frac{4}{3}\,\frac{T_z}{\pi\, r^2} = \frac{4}{3}\,\frac{T_z}{A}$$

c) **I-presjek**



# Savijanje i aksijalno opterećenje

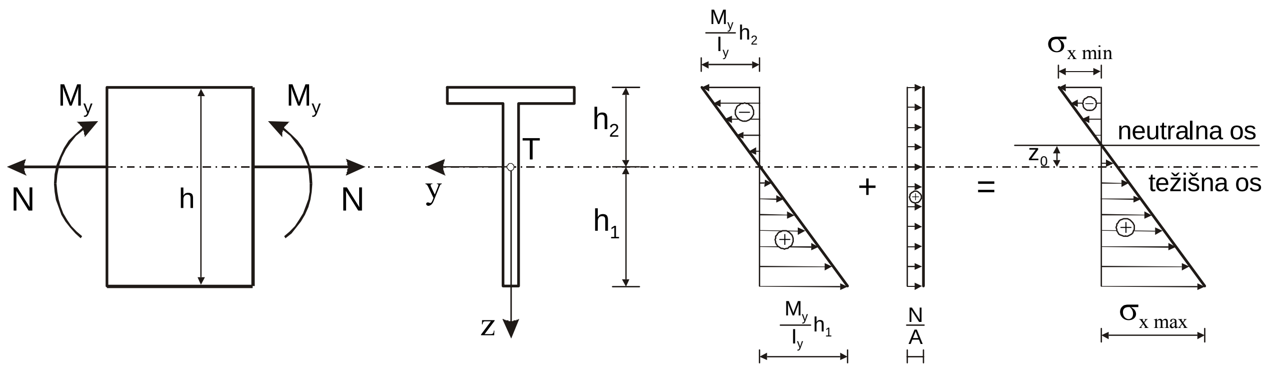
Štap je istodobno opterećen momentom savijanja M i uzdužnom silom N.

Moment savijanja $M_y$ uzrokuje normalna naprezanja: $\sigma_x{}' = \frac{M_y}{I_y} z$

Naprezanje od uzdužne sile je: $\sigma_x{}'' = \frac{N}{A}$

Ukupno naprezanje u nekoj točki presjeka jednako je:

$$\sigma_x = \sigma_x{}' + \sigma_x{}'' = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z$$




Naprezanja u rubnim vlaknima iznose:

$$\sigma_{x(1)} = \sigma_{x\,max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot h_1 = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_{y1}}$$

$$\sigma_{x(2)} = \sigma_{x\,min} = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} \cdot h_2 = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{W_{y2}}$$

Ako je poprečni presjek simetričan s obzirom na os y: $\sigma_{\substack{x(1)\\(2)}} = \sigma_{\substack{x\,max\\min}} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{W_y}$

**Položaj neutralne osi** dobiva se iz uvjeta:

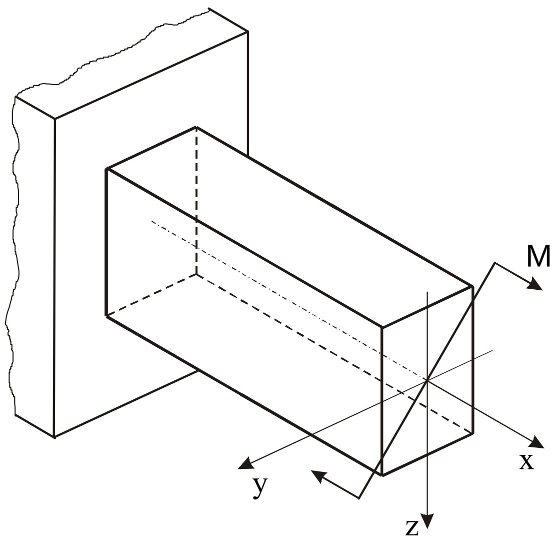
$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z_0 = 0 \quad \rightarrow \quad z_0 = -\frac{N}{M_y} \cdot \frac{I_y}{A} = -\frac{N}{M_y} \cdot i_y^2$$

***Ako je uzdužna sila tlačna, ona ulazi u gornje izraze s predznakom minus.***

# Koso savijanje

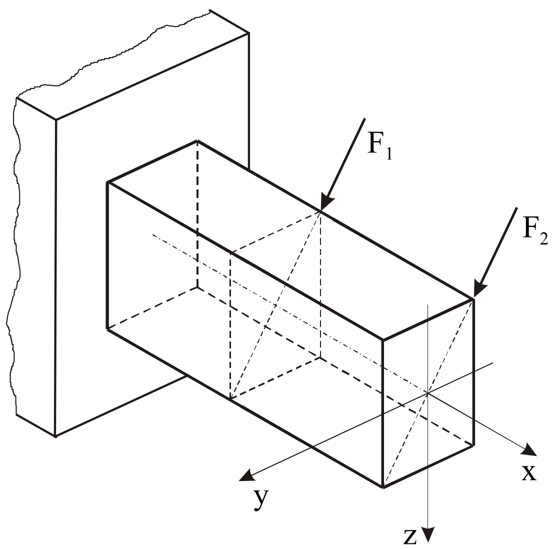
Ravnina djelovanja momenta savijanja ne poklapa se ni s jednom od glavnih središnjih osi tromosti presjeka.
U tom slučaju se ravnina savijanja štapa <u>ne podudara</u> s ravninom djelovanja momenta savijanja.

- **čisto koso savijanje** - u poprečnom presjeku štapa pojavljuje se samo moment savijanja



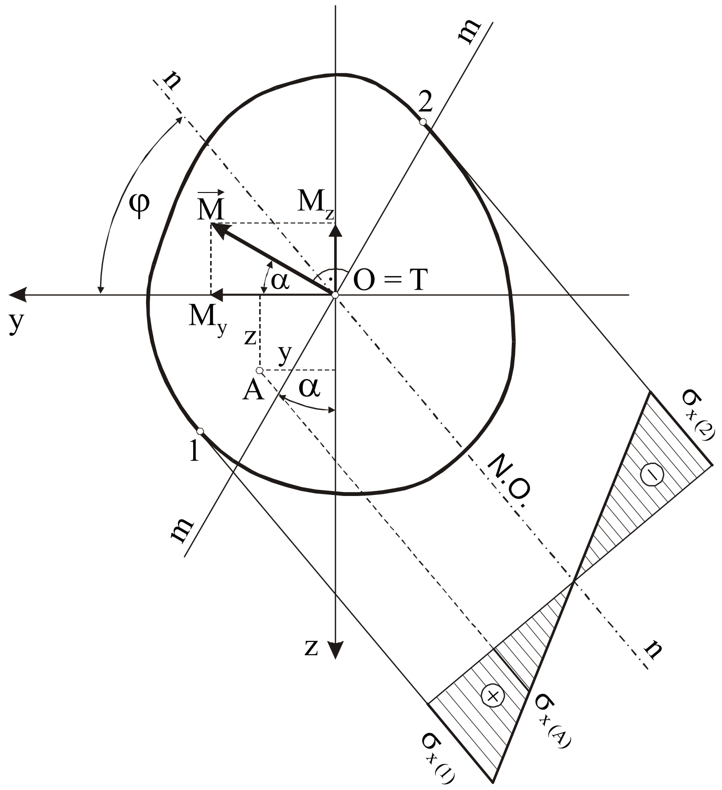

- **poprečno koso savijanje ili koso savijanje silama** –

  u poprečnom presjeku štapa pojavljuju se poprečna sila i moment savijanja



## Čisto koso savijanje

U bilo kojem presjeku štapa ravnina djelovanja momenta savijanja m-m prolazi težištem poprečnog presjeka i s glavnom osi tromosti z zatvara kut $\alpha$:




Moment savijanja M može se rastaviti na komponente:

$$M_y = M\cos\alpha$$

$$M_z = M\sin\alpha$$

$$\rightarrow$$

Čisto koso savijanje:

istodobno savijanje štapa u dvjema glavnim ravninama *xz* i *xy*

Normalno naprezanje od momenta savijanja $M_y$ koje djeluje u ravnini *xz*:

$$\sigma_{x1} = \frac{M_y}{I_y} z$$

Normalno naprezanje od momenta savijanja $M_z$ koje djeluje u ravnini *xy*:

$$\sigma_{x2} = \frac{M_z}{I_z} y$$

Ukupno normalno naprezanje u točki A(y,z) poprečnog presjeka:

$$\sigma_x = \sigma_{x1} + \sigma_{x2} \quad \rightarrow \quad \sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y \quad \rightarrow \quad \boxed{\sigma_x = M\left(\frac{\cos\alpha}{I_y} z + \frac{\sin\alpha}{I_z} y\right)}$$

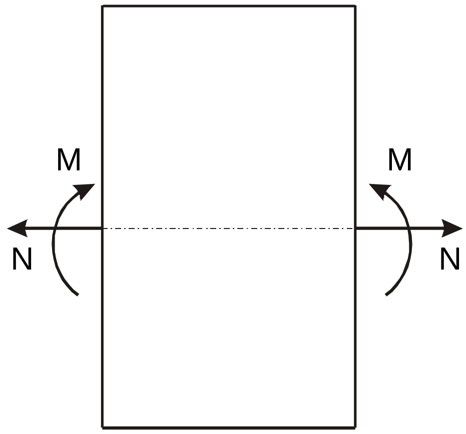
Jednadžba neutralne osi dobit će se iz uvjeta $\sigma_x = 0$:

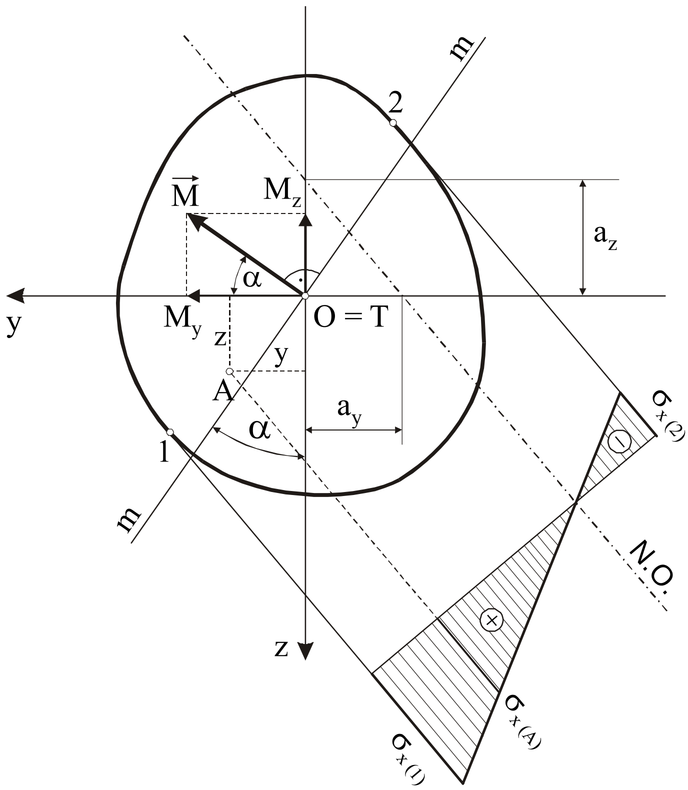
$$\frac{\cos\alpha}{I_y} z + \frac{\sin\alpha}{I_z} y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{z}{y} = -\mathrm{tg}\alpha \, \frac{I_y}{I_z}$$

Kut $\varphi$ što ga neutralna os zatvara s osi y: $\boxed{\mathrm{tg}\varphi = -\frac{I_y}{I_z}\mathrm{tg}\alpha}$

**Koso savijanje s aksijalnim opterećenjem**

(ako ravnina djelovanja momenta savijanja zatvara s glavnom osi tromosti z kut α)




Normalno naprezanje u nekoj točki presjeka:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z + \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

Jednadžba neutralne osi ima oblik:

$$\frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z + \frac{M_z}{I_z} \cdot y = 0$$

pa su odsječci neutralne osi na glavnim osima tromosti y,z:

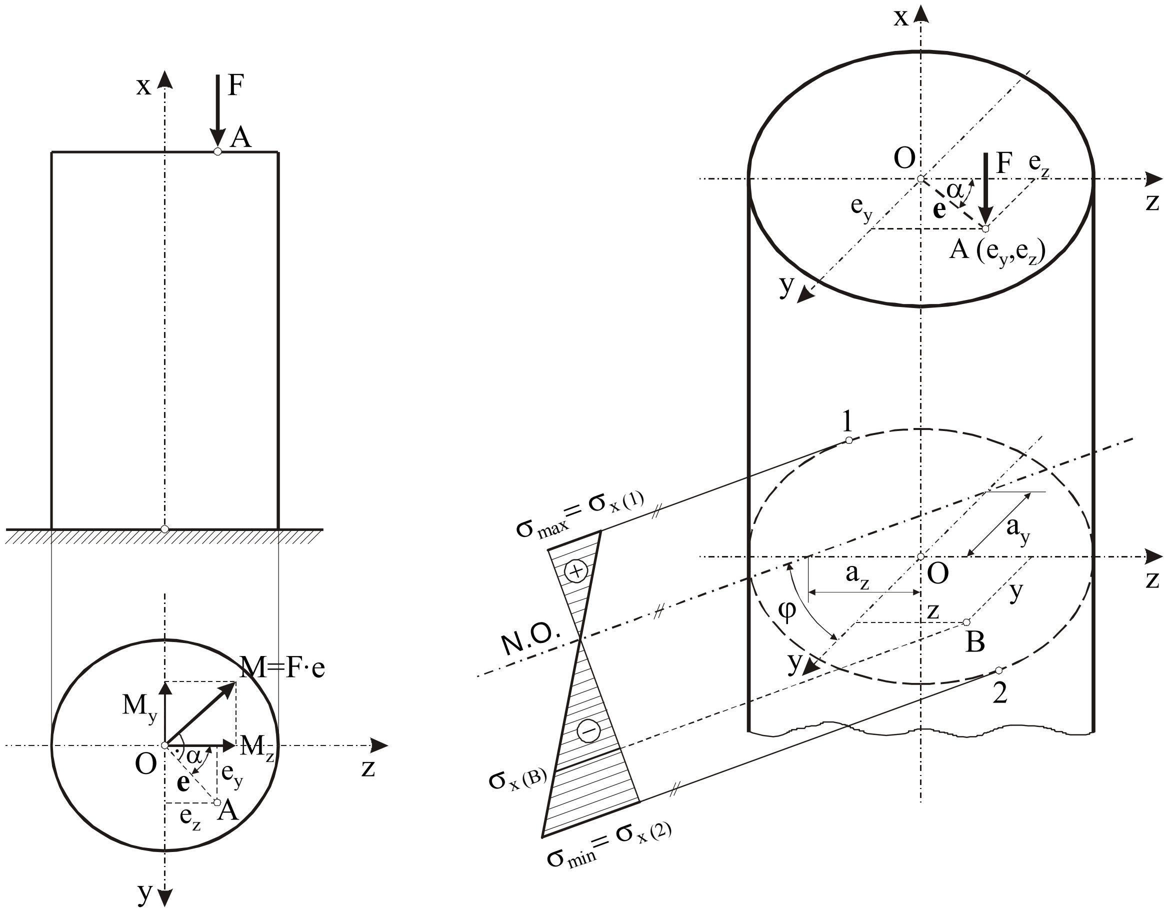
$$y_0 = a_y = -\frac{N}{M_z} \cdot \frac{I_z}{A} = -\frac{N}{M_z} \cdot i_z^2$$

$$z_0 = a_z = -\frac{N}{M_y} \cdot \frac{I_y}{A} = -\frac{N}{M_y} \cdot i_y^2$$

# Ekscentrično opterećenje

To je zajedničko djelovanje čistog kosog savijanja i aksijalnog opterećenja (vlaka ili tlaka).

Primjer: Tlačna sila F djeluje u točki A gornjeg poprečnog presjeka stupa




Hvatište A sile F: **pol** sile F

Udaljenost *e* pola A od težišta poprečnog presjeka: **ekscentričnost** sile F

U nekom presjeku štapa postoji uzdužna sila $N = F$ i moment savijanja $M = F \cdot e$. Ravnina djelovanja momenta M s glavnom osi tromosti *z* zatvara kut $\alpha$.

Moment savijanja M može se rastaviti na komponente:

$$M_y = M \cos\alpha = F \cdot e \cos\alpha = F \cdot e_z$$

$$M_z = M \sin\alpha = F \cdot e \sin\alpha = F \cdot e_y$$

Ako je uzdužna sila tlačna: ekscentrični pritisak
Ako je uzdužna sila vlačna: ekscentrično rastezanje

Normalno naprezanje u nekoj točki B(y,z) poprečnog presjeka je:

$$\boxed{\sigma_x = \pm\frac{N}{A} \pm \frac{|M_y|}{I_y}\cdot z \pm \frac{|M_z|}{I_z}\cdot y}$$

Slijedi:

$$\sigma_x = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{e_z}{i_y^2}\cdot z + \frac{e_y}{i_z^2}\cdot y\right) \quad ; \qquad \underbrace{i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad , \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}}_{\text{polumjeri tromosti}}$$

Jednadžba neutralne osi dobit će se iz uvjeta $\sigma_x = 0$:

$$1 + \frac{e_z}{i_y^2}\cdot z + \frac{e_y}{i_z^2}\cdot y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{z}{-\frac{i_y^2}{e_z}} + \frac{y}{-\frac{i_z^2}{e_y}} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z}{a_z} + \frac{y}{a_y} = 1$$

Neutralna os ne prolazi kroz težište poprečnog presjeka (ishodištem koordinatnog sustava).

Odsječci neutralne osi na koordinatnim osima y,z su:

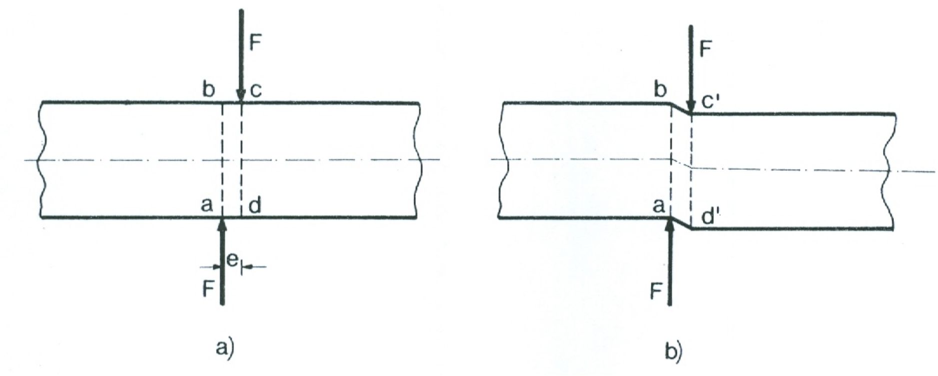
$$a_z = -\frac{i_y^2}{e_z} \ , \quad a_y = -\frac{i_z^2}{e_y}$$

Neutralna os *n-n* s pozitivnim smjerom osi *y* zatvara kut $\varphi$:

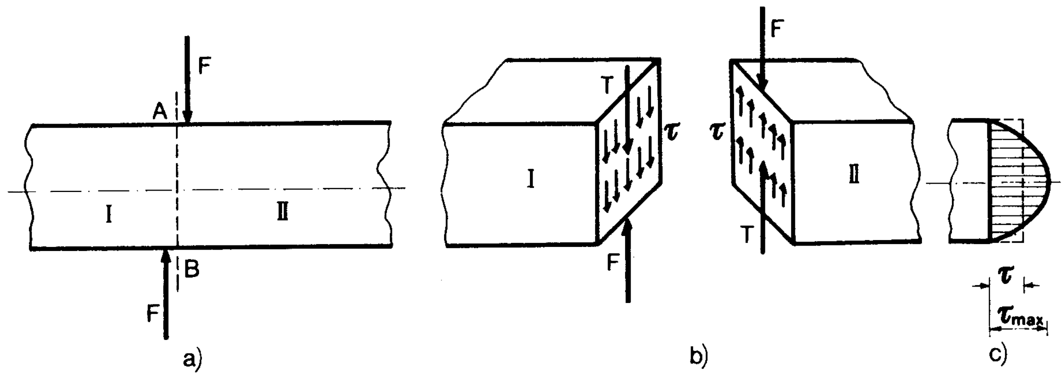
$$\mathrm{tg}\varphi = -\frac{a_z}{a_y} = -\frac{i_y^2\, e_y}{e_z\, i_z^2} = -\frac{i_y^2}{i_z^2}\,\mathrm{tg}\alpha = -\frac{I_y}{I_z}\,\mathrm{tg}\alpha$$

# Smicanje (odrez)

– vanjske sile mogu se reducirati na dvije jednake sile suprotnog smjera okomite na os štapa s malim razmakom među pravcima djelovanja




– u poprečnom presjeku djeluje samo poprečna sila T, ostale komponente unutarnjih sila su jednake nuli




Iz uvjeta ravnoteže promatranog dijela štapa: $T = F$

U poprečnom presjeku djeluju samo posmična naprezanja.

$$\int_A \tau \, dA = T$$

Uz pretpostavku da su naprezanja $\tau$ jednoliko raspodijeljena po čitavom poprečnom presjeku:

$$\int_A \tau \, dA = \tau \int_A dA = \tau \, A = T$$

$$\rightarrow \quad \tau = \frac{T}{A} = \frac{F}{A}$$

Prema Hookeovu zakonu pri posmiku je:

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$\gamma$ – posmična deformacija (prosječni kut klizanja poprečnog presjeka)

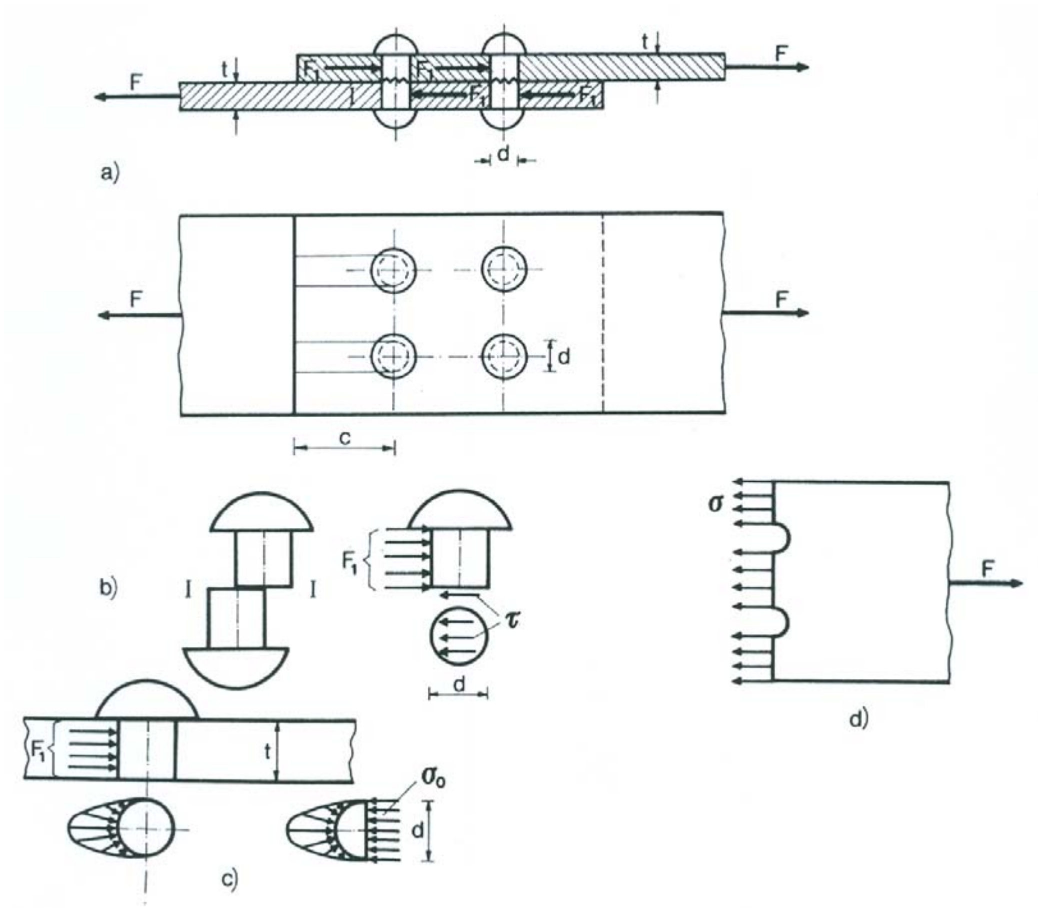
$G$ – modul posmika: $G = \dfrac{E}{2\,(1+\nu)}$

Slijedi:

$\gamma = \dfrac{\tau}{G} = \dfrac{T}{A\,G}$ ; $A\,G$ – **posmična krutost štapa**

Pojava smicanja najčešće se susreće kod elemenata kojima se spajaju pojedini dijelovi konstrukcije (zakovice, klinovi, zavareni spojevi).

Spoj dviju ploča spojenih zakovicama:




Opterećenje je raspodijeljeno jednoliko na sve zakovice. Jednoj zakovici pripada sila:

$$F_1 = \frac{F}{n} \quad ; \quad n \; - \; \text{broj zakovica (ovdje } n = 4\text{)}$$

Zakovica je opterećena na smicanje u presjeku I-I: $\tau = \dfrac{F_1}{\dfrac{d^2 \pi}{4}}$

Na trup zakovice djeluje bočni površinski pritisak kao posljedica djelovanja sile $F_1$: $\sigma_0 = \dfrac{F_1}{d\,t}$

Zbog rastezanja ploče, u presjeku oslabljenom s rupama za zakovice javlja se normalno naprezanje:

$$\sigma = \frac{F}{t\,(b - m\,d)} \quad ; \quad m \; - \; \text{broj rupa u promatranom presjeku (ovdje } m = 2\text{)}$$

U krajnjem dijelu ploče, između njezina kraja i zakovice, može doći do smicanja:

$$\tau = \frac{F_1}{2\left(c - \dfrac{d}{2}\right)t} \quad ; \quad c \; - \; \text{udaljenost od kraja ploče do težišta zakovice}$$

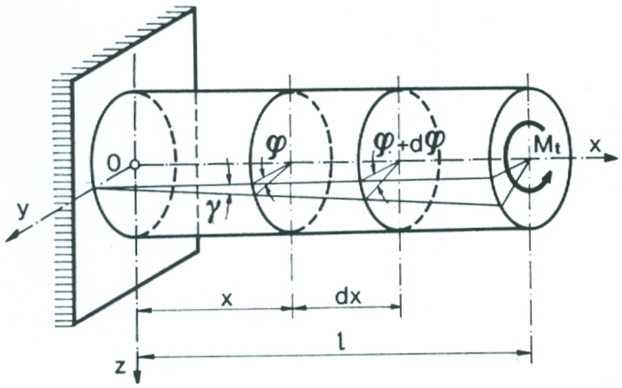
# Torzija (uvijanje) štapa

- štap je opterećen momentima koji djeluju u ravnini okomitoj na os štapa
- u poprečnom presjeku djeluje samo moment torzije $M_x$, ostale komponente unutarnjih sila su jednake nuli

Karakter deformacija štapa pri torziji ovisi o obliku poprečnog presjeka. Tri su grupe štapova: štapovi kružnog, neokruglog (pravokutnog, eliptičnog, trokutnog itd.) i tankostijenog presjeka.
Hipoteza ravnih poprečnih presjeka primjenjuje se samo za štapove kružnog presjeka.

***Torzija štapova kružnog presjeka***

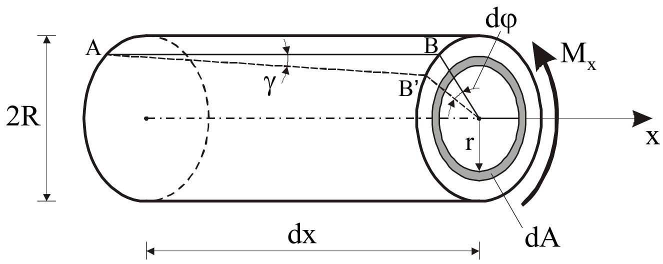
Štap je na jednom kraju upet, a na drugome opterećen momentom torzije $M_x = M_t$.

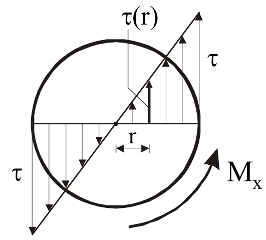



$\varphi$ – kut uvijanja ili kut torzije

U ravnini poprečnog presjeka djeluju samo posmična naprezanja $\tau$.

Promatra se diferencijalni element pravog štapa opterećenog momentom torzije:




Dijagram raspodjele naprezanja

Iz uvjeta ravnoteže promatranog dijela štapa se dobiva: $M_t = M_x = \int_A r\, \tau\, dA$

Kut zaokreta izvodnice diferencijalnog elementa: $\gamma = \overline{BB'}/dx$ ; duljina izvodnice $\overline{BB'} = d\varphi \cdot R$

Specifičan kut zaokreta poprečnog presjeka oko osi štapa:

$$\vartheta = d\varphi/dx \quad \text{(kut uvijanja na jedinicu duljine štapa)}$$

Kut klizanja: $\gamma = R \cdot \vartheta$

Posmično naprezanje u poprečnom presjeku: $\tau(r) = G \cdot \vartheta \cdot r$

Veličina najvećeg posmičnog naprezanja: $\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \vartheta \cdot R$

Moment torzije u presjeku iznosi:

$$M_x = \int_A r \cdot \tau(r) \cdot dA = G \cdot \vartheta \cdot \int_A r^2 \cdot dA = G \cdot \vartheta \cdot I_x$$

*Torzijska konstanta* $I_x$ je funkcija poprečnog presjeka štapa. Za poprečni presjek kružnog oblika radijusa R torzijska konstanta jednaka je *polarnom momentu tromosti presjeka*:

$$I_x = I_p = \frac{\pi \cdot R^4}{2}$$

Relativni kut uvijanja je: $\vartheta = \dfrac{M_x}{G\, I_p}$

$G\, I_p$ – **torzijska krutost štapa**

Raspodjela naprezanja u poprečnom presjeku štapa je prema tome: $\tau = \dfrac{M_x}{I_p} \cdot r$

Maksimalno naprezanje se pojavljuje na rubu poprečnog presjeka:

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{I_p} \cdot r_{max} = \frac{M_x}{I_p} \cdot R \quad \rightarrow \quad \tau_{max} = \frac{M_x}{W_p}$$

Kut zaokreta krajnjih presjeka štapa duljine $\ell$:

$$\varphi = \int_0^\ell \vartheta\, dx = \int_0^\ell \frac{M_x}{G\, I_p}\, dx = \frac{M_x\, \ell}{G\, I_p}$$

## ***Torzija štapova neokruglog presjeka***

Hipoteza ravnih poprečnih presjeka ne vrijedi za štapove neokruglog presjeka.

Za štapove **pravokutnog poprečnog presjeka** širine b i visine h ( $b \le h$ ), torzijska konstanta može se odrediti pomoću izraza:

$$I_x = \frac{hb^3}{3}\left[1 - 0.630\frac{b}{h} + 0.052\left(\frac{b}{h}\right)^5\right] \quad \rightarrow \quad I_x = \frac{hb^3}{3}\beta$$

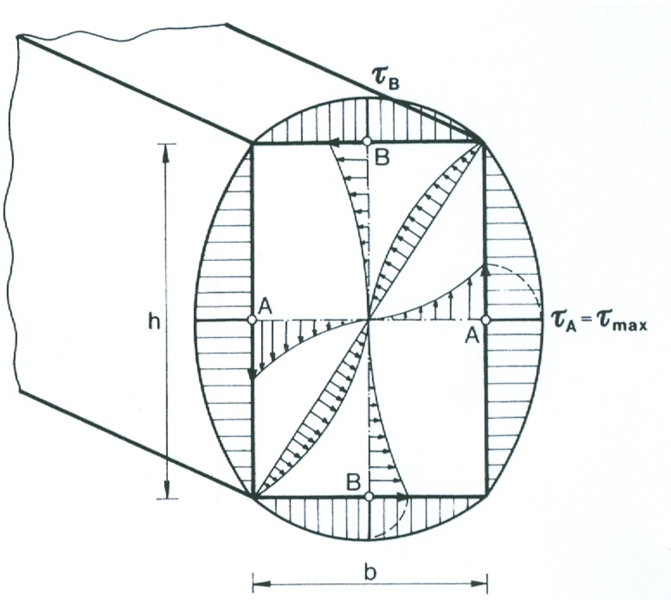
Vrijednosti koeficijenta β za različite odnose visine i širine presjeka date su u tablici:

| h/b | β | h/b | β | h/b | β |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 0.422 | 2.50 | 0.748 | 5.00 | 0.874 |
| 1.25 | 0.539 | 3.00 | 0.790 | 6.00 | 0.895 |
| 1.50 | 0.587 | 3.50 | 0.820 | 8.00 | 0.921 |
| 1.75 | 0.643 | 4.00 | 0.842 | 10.00 | 0.937 |
| 2.00 | 0.687 | 4.50 | 0.860 | ∞ | 1.000 |

Relativni kut torzije štapa: $\vartheta = \dfrac{M_x}{G\, I_x}$

Kut zaokreta krajnjih presjeka štapa duljine $\ell$: $\varphi = \dfrac{M_x\, \ell}{G\, I_x}$

Dijagram posmičnih naprezanja za štap pravokutnog presjeka:



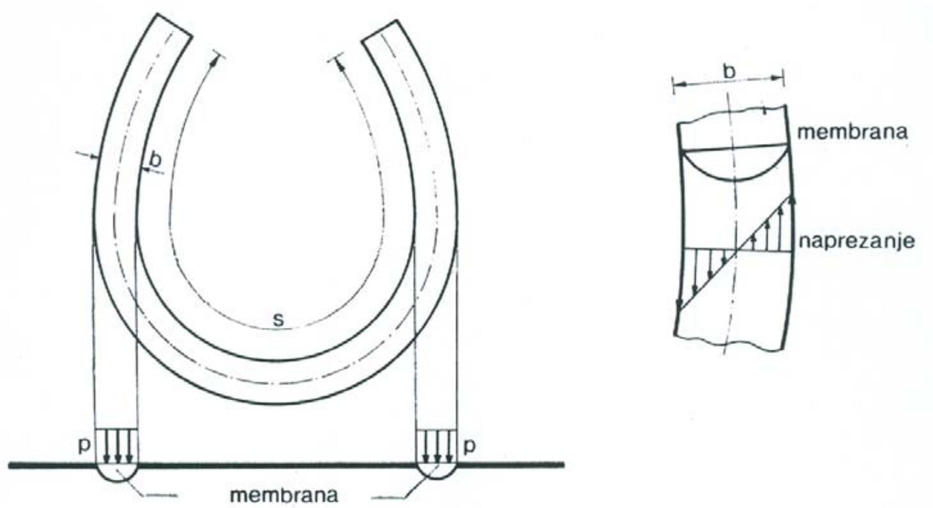

Najveće posmično naprezanje: $\tau_A = \tau_{max} = \dfrac{M_x}{\alpha\, h\, b^2}$ ; $\tau_B = \eta\, \tau_{max}$

Vrijednosti koeficijenta $\alpha$ i $\eta$ za različite odnose visine i širine presjeka date su u tablici:

| h/b | $\alpha$ | $\eta$ | h/b | $\alpha$ | $\eta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 0.208 | 1.000 | 4.00 | 0.282 | 0.745 |
| 1.50 | 0.231 | 0.859 | 6.00 | 0.299 | 0.743 |
| 2.00 | 0.246 | 0.795 | 8.00 | 0.307 | 0.742 |
| 2.50 | 0.258 | 0.766 | 10.00 | 0.313 | 0.742 |
| 3.00 | 0.267 | 0.753 | $\infty$ | 0.333 | 0.742 |

# ***Torzija štapova s tankim stijenkama otvorenog profila***

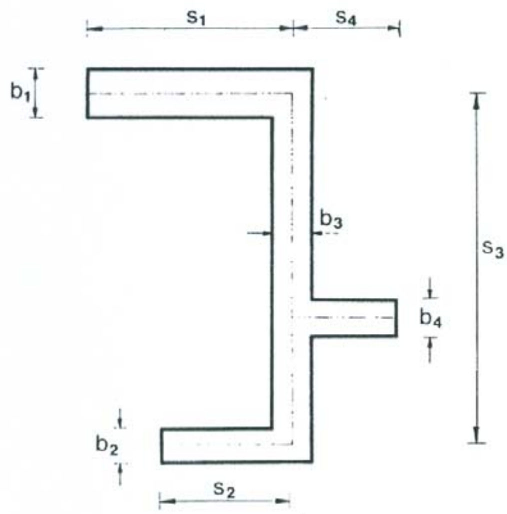
Otvoreni presjek konstantne debljine stijenke b:




Raspodjela naprezanja u poprečnom presjeku određuje se membranskom analogijom. Iz toga slijedi da je naprezanje u promatranom otvorenom profilu približno jednako kao i u uskom pravokutnom presjeku kojemu je duljina stranice jednaka razvijenoj središnjoj liniji profila s.

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{\frac{1}{3} s\, b^2} \quad ; \quad \vartheta = \frac{M_x}{\frac{1}{3} s\, b^3\, G}$$

Ako je tankostijeni presjek sastavljen od dijelova različite debljine:




Za svaki pravokutni dio presjeka gdje je $b_i$ debljina a $s_i$ duljina ($s_i >> b_i$), dobiva se:

$$M_{t_i} = \frac{1}{3} \vartheta\, G\, s_i\, b_i^{\,3} \quad ; \quad \tau_i = \frac{M_{t_i}}{\frac{1}{3} s_i\, b_i^{\,2}}$$

Moment torzije u presjeku:

$$M_t = \sum_{i=1}^{n} M_{t_i} = \frac{1}{3} \vartheta\, G \sum_{i=1}^{n} s_i\, b_i^{\,3} = G\, \vartheta\, I_t$$

$I_t = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} s_i\, b_i^{\,3}$ - torzijski moment tromosti čitavog poprečnog presjeka

Relativni kut torzije: $\vartheta = \dfrac{M_t}{G\, I_t}$

Maksimalno naprezanje u presjeku: $\tau_{max} = \dfrac{M_t}{I_t} b_{max} \;\rightarrow\; \tau_{max} = \dfrac{M_t}{W_t}$

gdje je $W_t = \dfrac{I_t}{b_{max}}$ torzijski moment otpora poprečnog presjeka.