KATEDRA ZA MEHANIKE

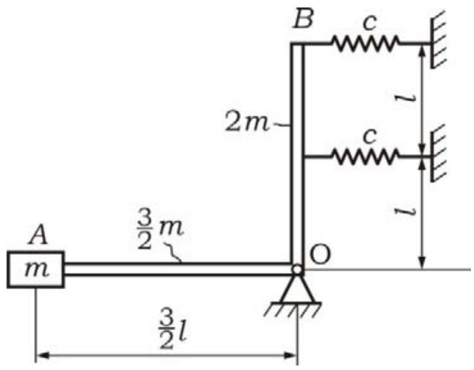
Predmet: **Oscilacije**
Pismeni ispit

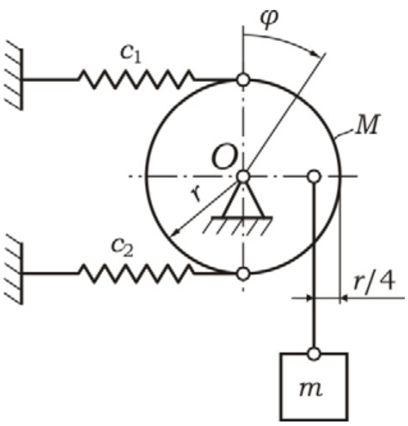
Univerzitet u Zenici
Mašinski fakultet

Školska godina 2009/2010
Nastavnik: *doc. dr. Elma Ekinović*
Asistent: mr. Josip Kačmarčik
Datum: 07.09.2010. godine

Zadaci:

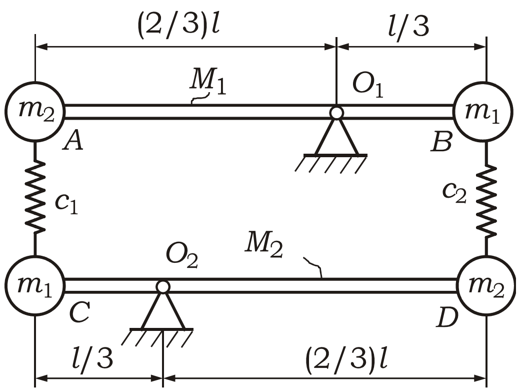
1. Ugaonik AOB se sastoji od dva homogena štapa OA i OB koji su međusobno spojeni pod uglom 90°. Štap OA je mase $\frac{3}{2}m$ i dužine $\frac{3}{2}l$, a štab OB je mase $2m$ i dužine $2l$. Ugaonik se može obrtati oko horizontalne nepokretne ose koja prolazio kroz tačku O. Na kraju štapa OA postavljen je teret mase m. Ugaonik se održava u položaju statičke ravnoteže prema slici pomoću dvije opruge krutosti c. Odrediti uslov stabilnosti ravnotežnog položaja.





2. Oscilatorni sistem u vertikalnoj ravni prikazan na slici u ravnotežnom položaju se sastoji od homogenog diska mase M poluprečnika r za koji je obješen obješen teret mase m (M=2m) na rastojanju $r/4$ od oboda diska. Disk se može obrtati oko horizontalne ose koja prolazi kroz O. Disk se održava u ravnotežnom položaju prikazanom na slici pomoću opruga krutosti c_1 i c_2 vezanih za nepokretni zid ($c_1=c_2=c$). Odrediti period malih oscilacija diska. Trenje zanemariti.

3. Za oscilatorni sistem u vertikalnoj ravni sa dva stepena slobode prikazan na slici u ravnotežnom položaju odrediti diferencijalne jednačine malih oscilacija sistema. Sistem se sastoji od dva homogena štapa AB i CD na čijim krajevima se nalaze tereti povezani oprugama zanemarljivih masa. Štapovi se mogu u ravni obrtati oko O_1 i O_2. Masa štapa AB je M_1, a CD M_2. Zadato je $m_1 = 2m_2 = 2m$, $M_1 = M_2 = 3m$, $c_1 = c_2 = c$.



KATEDRA ZA MEHANIKE

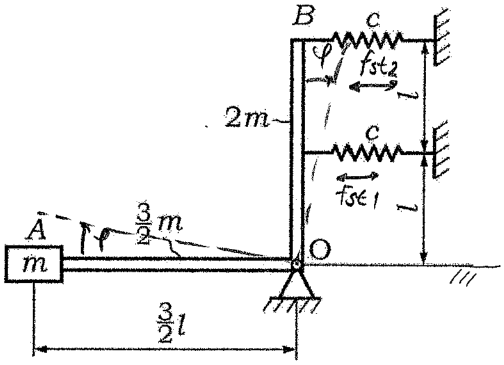
Predmet: **Oscilacije**
Pismeni ispit

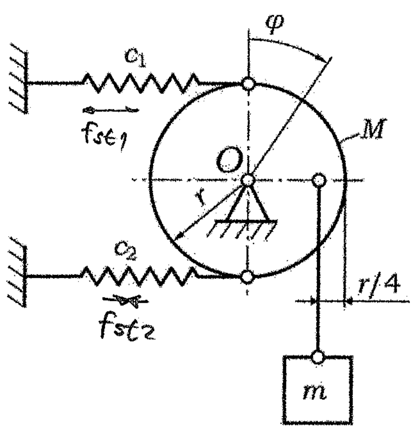
Univerzitet u Zenici
Mašinski fakultet

Školska godina 2009/2010
Nastavnik: *doc. dr. Elma Ekinović*
Asistent: mr. Josip Kačmarčik
Datum: 07.09.2010. godine

Zadaci:

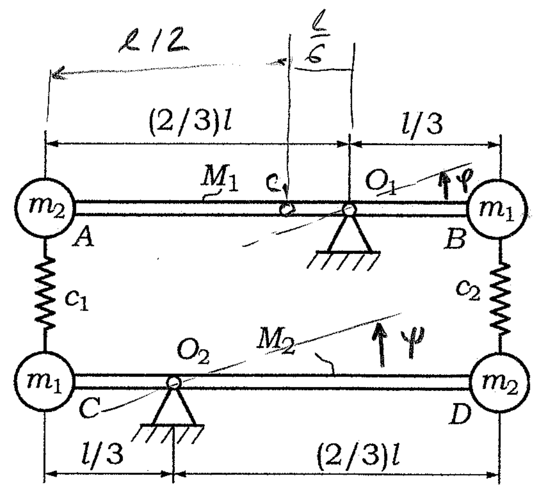
1. Ugaonik AOB se sastoji od dva homogena štapa OA i OB koji su međusobno spojeni pod uglom 90°. Štap OA je mase $\frac{3}{2}m$ i dužine $\frac{3}{2}l$, a štab OB je mase $2m$ i dužine $2l$. Ugaonik se može obrtati oko horizontalne nepokretne ose koja prolazio kroz tačku O. Na kraju štapa OA postavljen je teret mase m. Ugaonik se održava u položaju statičke ravnoteže prema slici pomoću dvije opruge krutosti c. Odrediti uslov stabilnosti ravnotežnog položaja.





2. Oscilatorni sistem u vertikalnoj ravni prikazan na slici u ravnotežnom položaju se sastoji od homogenog diska mase M poluprečnika r za koji je objеšen objеšen teret mase m (M=2m) na rastojanju $r/4$ od oboda diska. Disk se može obrtati oko horizontalne ose koja prolazi kroz O. Disk se održava u ravnotežnom položaju prikazanom na slici pomoću opruga krutosti c_1 i c_2 vezanih za nepokretni zid (c_1=c_2=c). Odrediti period malih oscilacija diska. Trenje zanemariti.

3. Za oscilatorni sistem u vertikalnoj ravni sa dva stepena slobode prikazan na slici u ravnotežnom položaju odrediti diferencijalne jednačine malih oscilacija sistema. Sistem se sastoji od dva homogena štapa AB i CD na čijim krajevima se nalaze tereti povezani oprugama zanemarljivih masa. Štapovi se mogu u ravni obrtati oko O_1 i O_2. Masa štapa AB je M_1, a CD M_2. Zadato je $m_1 = 2m_2 = 2m$, $M_1 = M_2 = 3m$, $c_1 = c_2 = c$.



① $E_p = m\cdot g\cdot \frac{3}{2}\ell\cdot\sin\varphi + \frac{3}{2}m\cdot g\cdot\frac{3}{4}\ell\cdot\sin\varphi$

$+ 2m\cdot g\cdot \ell\cdot\cos\varphi + \frac{1}{2}c\cdot(f_{st2} - 2\ell\cdot\sin\varphi)^2 + \frac{1}{2}c(f_{st1} - \ell\cdot\sin\varphi)^2$

$\sin\varphi \simeq \varphi \qquad \cos\varphi \simeq 1 - \frac{\varphi^2}{2}$

$$E_p = \frac{21}{8}m\cdot g\cdot\ell\cdot\varphi + 2m\cdot g\cdot\ell\cdot\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) + \frac{1}{2}c(f_{st2} - 2\ell\varphi)^2 + \frac{1}{2}c(f_{st1} - \ell\varphi)^2$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial\varphi} = \frac{21}{8}m\cdot g\ell - 2m\cdot g\cdot\ell\cdot\varphi + c(f_{st2} - 2\ell\varphi)\cdot(-2\ell) + c(f_{st1} - \ell\varphi)\cdot(-\ell)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial\varphi} = \frac{21}{8}mg\ell - 2c\ell f_{st2} - c\ell f_{st1} + 4c\ell^2\varphi + c\ell^2\varphi - 2m\cdot g\cdot\ell\varphi$$

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=0} = 0 \text{ (stat. uslov)} \Rightarrow \frac{21}{8}mg\ell - 2c\ell f_{st2} - c\ell f_{st1} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial\varphi} = 5c\ell^2\varphi - 2mg\ell\varphi$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial\varphi^2} = 5c\ell^2 - 2mg\ell > 0$$

$$\boxed{5c\ell - 2mg > 0} \qquad \boxed{c > \frac{2}{5}\frac{mg}{\ell}}$$

$$② \; E_k = \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{\varphi}\cdot\frac{3}{4}r\right)^2 = \frac{2mr^2}{4}\dot{\varphi}^2 + \frac{9}{32}mr^2\dot{\varphi}^2$$

$$E_k = \frac{25}{32}mr^2\dot{\varphi}^2$$

$$E_p = -m\cdot g\cdot\frac{3}{4}r\cdot\varphi + \frac{1}{2}c(f_{st1}+r\varphi)^2 + \frac{1}{2}c(f_{st2}+r\varphi)^2 \quad (\sin\varphi\approx\varphi) \; (c_1=c_2=c)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial\varphi} = -\frac{3}{4}m\cdot g\cdot r + c(f_{st1}+r\varphi)\cdot r + c(f_{st2}+r\varphi)\cdot r$$

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0} = 0 \qquad -\frac{3}{4}mgr + crf_{st1} + crf_{st2} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial\varphi} = 2cr^2\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{\varphi}}\right) + \frac{\partial E_p}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{25}{16}mr^2\ddot{\varphi} + 2cr^2\varphi = 0 \quad / : \frac{25}{16}mr^2$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{32}{25}\frac{c}{m}\varphi = 0$$

$$\omega^2 = \frac{32}{25}\frac{c}{m} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{25c}{32m}} = 2\pi\sqrt{\frac{25c}{2\cdot 16m}} = \cancel{2}\pi\cdot\frac{5}{\cancel{4}_{2}}\sqrt{\frac{c}{2m}}$$

$$T = \frac{5\pi}{2}\sqrt{\frac{c}{2m}}$$

③ $E_K = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\varphi} \cdot \frac{l}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{2}{3} l \dot{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{l}{3} \dot{\psi}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{2}{3} l \dot{\psi}\right)^2 +$

$+ \frac{1}{2} I_{01} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_{02} \dot{\psi}^2$

$$I_{01} = \frac{M_1 l^2}{12} + M_1 \left(\frac{l}{6}\right)^2 = \frac{3ml^2}{12} + \frac{3ml^2}{36} = \frac{12 m l^2}{36} = \frac{3}{9} m l^2$$

ili

$$I_{01} = \frac{\frac{2}{3} M_1 \left(\frac{2}{3} l\right)^2}{3} + \frac{\frac{M_1}{3}\left(\frac{l}{3}\right)^2}{3} = \frac{2m \cdot \frac{4}{9} l^2}{3} + \frac{m \cdot \frac{l}{9}}{3}$$

$$I_{01} = \frac{8 + 1}{27} m l^2 = \frac{3}{9} m l^2$$

$$I_{02} = I_{01}$$

$$E_K = m \frac{l^2}{9} \dot{\varphi} + \frac{4}{18} m l^2 \dot{\varphi}^2 + m \frac{l^2}{9} \dot{\psi}^2 + \frac{4}{18} m l^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} \frac{3}{9} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{3}{9} m l^2 \dot{\psi}^2$$

$$E_K = \frac{2+4+3}{18} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{2+4+3}{18} m l^2 \dot{\psi}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\psi}^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} c \left(\psi \frac{l}{3} - \varphi \frac{2}{3} l\right)^2 + \frac{1}{2} c \left(\varphi \frac{l}{3} - \psi \frac{2}{3} l\right)^2 \quad (c_1 = c_2 = c)$$

(mase bi se ponistila sa fst pa su zanemarene)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m l^2 \ddot{\varphi} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\psi}}\right) = m l^2 \ddot{\psi}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = c\left(\psi \frac{l}{3} - \varphi \frac{2}{3} l\right)\left(-\frac{2}{3} l\right) + c\left(\varphi \frac{l}{3} - \psi \frac{2}{3} l\right)\left(\frac{l}{3}\right)$$

$$= -\frac{2}{9} c l^2 \psi + \frac{4}{9} c l^2 \varphi + \frac{c l^2}{9} \varphi - \frac{2}{9} c l^2 \psi = \frac{5}{9} c l^2 \varphi - \frac{4}{9} c l^2 \psi$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \psi} = \frac{5}{9} c l^2 \psi - \frac{4}{9} c l^2 \varphi$$

$$m l^2 \ddot{\varphi} + \frac{5}{9} c l^2 \varphi - \frac{4}{9} c l^2 \psi = 0 \; / \cdot \frac{9}{l^2}$$

$$m l^2 \ddot{\psi} + \frac{5}{9} c l^2 \psi - \frac{4}{9} c l^2 \varphi = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} 9m \ddot{\varphi} + 5c\varphi - 4c\psi &= 0 \\ 9m \ddot{\psi} + 5c\psi - 4c\varphi &= 0 \end{aligned}}$$