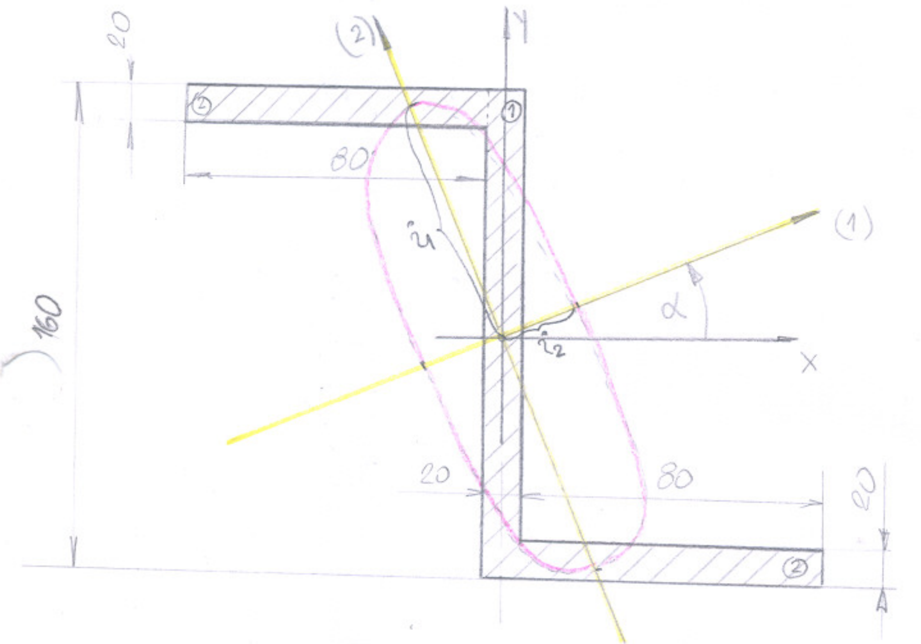
Za složenu površinu premo datoj slici odrediti

a) sopstvene momente inercije

b) položaj glavnih centralnih osa inercije

c) glavne centralne momente inercije

d) glavne centralne poluprečnike inercije



$$I_x = I_1 + 2I_2 =$$

$$= \frac{20\cdot 160^3}{12} + 2\cdot\left[\frac{80\cdot 20^3}{12} + 80\cdot 20\cdot 70^2\right] =$$

$$= 682{,}67\cdot 10^4 + 2\cdot[5{,}33\cdot 10^4 + 784\cdot 10^4] =$$

$$= 2\,261{,}33\cdot 10^4 \ mm^4$$

$$I_y = I_1 + 2I_2 = \frac{160\cdot 20^3}{12} + 2\cdot\left[\frac{20\cdot 80^3}{12} + 20\cdot 80\cdot 50^2\right] =$$

$$= 10{,}67\cdot 10^4 + 2\cdot[85{,}33\cdot 10^4 + 400\cdot 10^4] =$$

$$= 981{,}33\cdot 10^4 \ mm^4$$

$$I_{xy} = \overset{0}{I_1} + 2I_2 = +80\cdot 20\cdot(70)(-50) + 80\cdot 20\cdot(-70)\cdot 50 =$$

$$= -1120\cdot 10^4 \ mm^4$$

Glavni pravci

$$tg\,2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2\cdot(-1120)}{2261-981} = 1{,}75$$

$$2\alpha = 60{,}255^\circ$$

$$\alpha = 30{,}127^\circ$$

Glavni momenti inercije

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4\,I_{xy}^2}$$

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}(2261 + 981) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2261-981)^2 + 4\cdot 1120^2}$$

$$= 1621 \pm \frac{1}{2}\sqrt{1\,638\,400 + 5017\,600}$$

$$= 1621 \pm \frac{1}{2}\,2580$$

$$= 1621 \pm 1290$$

$$I_1 = 2911\ cm^4$$

$$I_2 = 331\ cm^4$$

Glavni centralni polupræčnici inercije

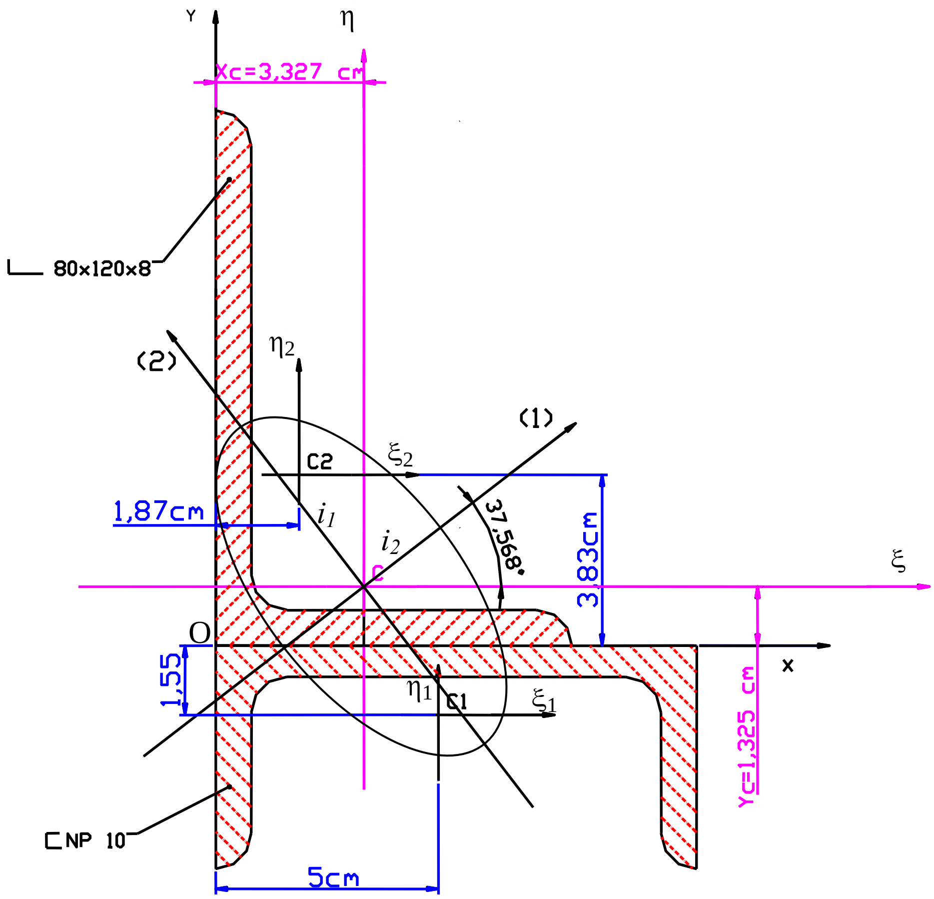
$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = 6{,}74\,cm$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = 2{,}27\,cm$$

Momenti inercije složenog profila

Za zadani složeni presjek odrediti:

1. Glavne centralne momente inercije i položaj glavnih centralnih osa inercije
2. Momente inercije za sistem osa Ouv koji je zaokrenut za ugao φ=50° u odnosu na težišne ose
3. Glavne poluprečnike inercije i elipsu inercije
4. Morov krug inercije

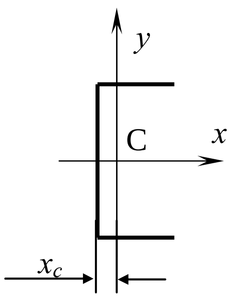


Sl.1 Složeni presjek

Iz tablica:

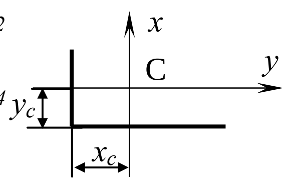
NP10

$A_1=13,5\ cm^2$
$I_{x1}=206\ cm^4$
$I_{y1}=29,3\ cm^4$



80x120x8

$A_2=15,5\ cm^2$
$I_{x2}=226\ cm^4$
$I_{y2}=80,8\ cm^4$
$I_1=261\ cm^4$
$I_2=45,8\ cm^4$



Podaci koji se odnose na poprečni presjek prikazan slikom 1:

profil	Ai [cm^2]	x_i [cm]	y_i [cm]	$I_{\xi i}$ [cm^4]	$I_{\eta i}$ [cm^4]	I_{1i} [cm^4]	I_{2i} [cm^4]
1. [	13,5	5	-1,55	29,3	206	206	29,3
2. L	15,5	1,87	3,83	226	80,8	261	45,8

Poredeći podatke u tablicama i podatke koji su prilagođeni usvojenim koordinatnim sistemima na slici 1, može se zaključiti da za vlastite ose profila mogu biti korištene različite oznake kao i za oznake koordinata težišta profila. Npr. za profil L vrijedi $x_2=y_c$ i $y_2=x_c$. Za profil [NP10 osa ξ_1 odgovara osi *y* u tablicama, a osa η_1 odgovara osi *x*. Pažnja se mora obratiti i na znak koordinata težišta profila u odnosu na usvojeni koordinatni sistem Oxy jer je npr. y_1= - 1,55 cm.

1.1 Težište složenog presjeka

$$x_C = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{13,5\cdot 5 + 15,5\cdot 1,87}{13,5+15,5} = 3,327\,\text{cm}$$

$$y_C = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{13,5\cdot(-1,55) + 15,5\cdot 3.83}{13,5+15,5} = 1,325\,\text{cm}$$

1.2 Težišni (centralni) momenti inercije

$$I_\xi = I_{\xi 1} + (1,55+1,325)^2\cdot A_1 + I_{\xi 2} + (3,83-1,325)^2\cdot A_2$$

$$I_\xi = 29,3 + 8,265\cdot 13,5 + 226 + 6,275\cdot 15,5$$

$$\underline{I_\xi = 464,14\ \text{cm}^4}$$

$$I_\eta = I_{\eta 1} + (5-3,327)^2\cdot A_1 + I_{\eta 2} + (3,327-1,87)^2\cdot A_2$$

$$I_\eta = 206 + (5-3,327)^2\cdot 13,5 + 80,8 + (3,327-1,87)^2\cdot 15,5$$

$$\underline{I_\eta = 357,489\ \text{cm}^4}$$

Centrifugalni moment inercije L profila određujemo na osnovu druge invarijante momenata inercije:

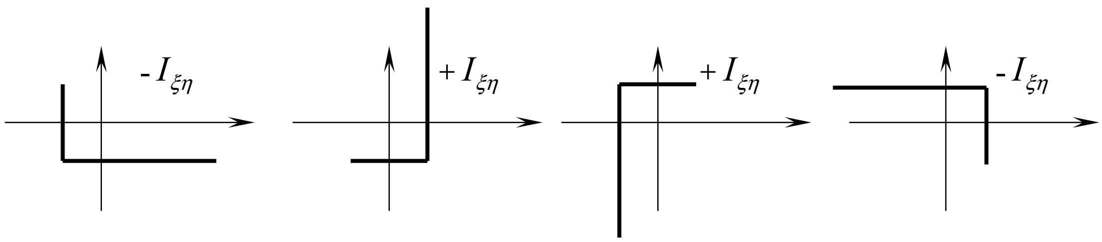
$$\text{Druga invarijanta} = \begin{vmatrix} I_\xi & I_{\xi\eta} \\ I_{\xi\eta} & I_\eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Iu & Iuv \\ Iuv & Iv \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{vmatrix}$$

$$I_\xi\cdot I_\eta - I_{\xi\eta}{}^2 = I_u I_v - I_{uv}{}^2$$

$$I_\xi\cdot I_\eta - I_{\xi\eta}{}^2 = I_1 I_2$$

$$I_{\xi\eta} = \pm\sqrt{I_\xi\cdot I_\eta - I_1 I_2}$$

$$I_{\xi 2\eta 2} = -\sqrt{226\cdot 80,8 - 261\cdot 45,8} = -79,42\ \text{cm}^4$$



Znak centrifugalnog momenta inercije (-79,42 cm^4) određuje se na osnovu položaja presjeka u odnosu na njegove težišne ose. Težišne ose dijele presjek u četiri kvadranta. U I i III kvadrantu proizvod koordinata xy je pozitivan, dok je u II iIV kvadrantu taj proizvod negativan. Na osnovu definicije centrifugalnog momenta inercije $I_{xy} = \int \int xy\, dA$ slijedi da će moment u I I III kvadrantu biti pozitivan, a u II i IV kvadrantu negativan. Ukupan centrifugalni moment je jednak zbiru centrifugalnih momenata po kvadrantima. Vizuelno posmatrajući profil u odnosu na sopstveni koordinatni sistem možemo ocjeniti procenat površine po pojedinim kvadrantima, a time i znak ukupnog cetrifugalnog momenta inercije.

$$I_{\xi\eta} = I_{\xi 1\eta 1} + (5-3,327)\cdot\left[-(1,55+1,325)\right]\cdot A_1 + I_{\xi 2\eta 2} + \left[-(3,327-1,87)\right]\cdot(3,83-1,32)\cdot A_2$$

$$I_{\xi 1\eta 1} = 0 \quad \textit{simetričan profil}$$

$$I_{\xi\eta} = -64,933 - 79,42 - 56,571 = \underline{-200,924\text{cm}^4}$$

1.3 Glavni momenti inercije i položaj glavnih osa inercije

Prilikom rotiranja koordinatnog sistema $C\xi\eta$, momenti inercije mijenjaju vrijednosti.
Za određen položaj osa α imaju ekstremne vrijednosti $I_1 = I_{max}$ i $I_2 = I_{min}$, a centrifugalni moment inercije je jednak nuli.
Vrijednosti glavnih momenata inercije i položaj glavnih osa inercije određujemo prema formulama:

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}\left(I_\xi + I_\eta\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_\xi - I_\eta\right)^2 + 4I_{\xi\eta}^{\ 2}}$$

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}(464,14 + 357,489) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(464,14 - 357,489)^2 + 4(-200,924)^2}$$

$$\underline{I_1 = 618,694\text{cm}^4 \quad I_2 = 202,934\text{cm}^4}$$

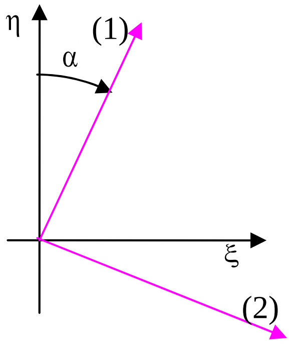
$$tg2\alpha = -\frac{2I_{\xi\eta}}{I_\xi - I_\eta} = -\frac{2(-200,924)}{464,14 - 357,489} = 3,7678784$$

$$2\alpha = 75,136°$$

$$\underline{\alpha = 37,568°}$$

Ugao α određuje položaj glavne ose 1, a odmjerava se od <u>ose veće vrijednosti momenta inercije</u> u smjeru suprotno kazaljci na satu ili u smjeru kazaljke zavisno je li vrijednost ugla α pozitivna ili negativna.
Primjer:

α= - 19°; $I\xi$=250 cm^4 i $I\eta$=500 cm^4,



2. Momenti inecije za zarotirane ose za ugao φ=50°

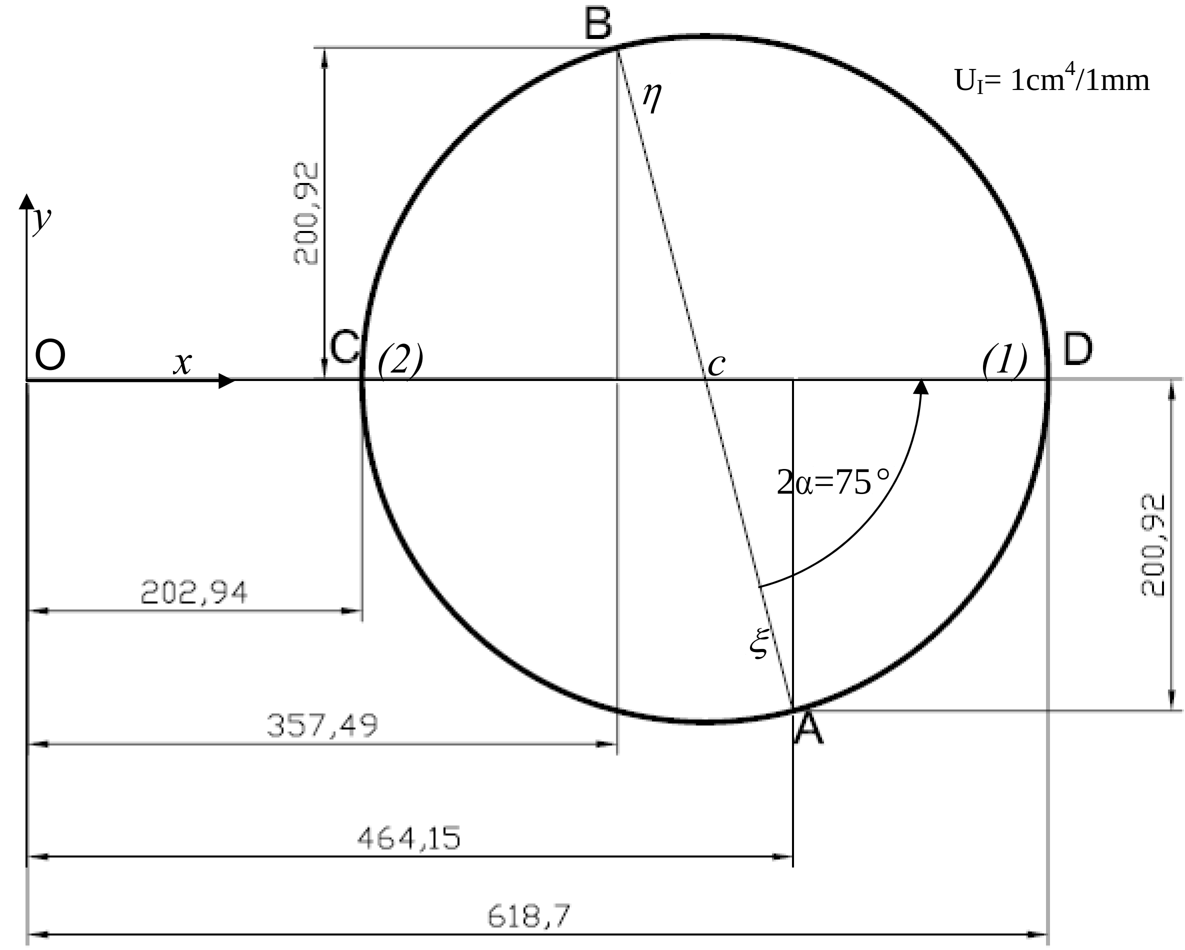
$$I_u = \frac{1}{2}(I_\xi + I_\eta) + \frac{1}{2}(I_\xi - I_\eta)\cos 2\varphi - I_{\xi\eta}\sin 2\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}(464{,}14 + 357{,}489) + \frac{1}{2}(464{,}14 - 357{,}489)\cos 100° - (-200{,}924)\sin 100° =$$
$$= 410{,}8145 - 9{,}259 + 197{,}871$$
$$I_u = 599{,}427 \text{ cm}^4$$
$$I_v = \frac{1}{2}(I_\xi + I_\eta) - \frac{1}{2}(I_\xi - I_\eta)\cos 2\varphi + I_{\xi\eta}\sin 2\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}(464{,}14 + 357{,}489) - \frac{1}{2}(464{,}14 - 357{,}489)\cos 100° + (-200{,}924)\sin 100° =$$
$$= 410{,}8145 + 9{,}259 - 197{,}871 = 222{,}202\ cm^4$$
$$I_v = 222{,}202 \text{ cm}^4$$
$$I_{uv} = \frac{1}{2}(I_\xi - I_\eta)\sin 2\varphi + I_{\xi\eta}\cos 2\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}(464{,}14 - 357{,}489)\sin 100° + (-200{,}924)\cos 100°$$
$$I_{uv} = 87{,}405 \text{ cm}^4$$

3. Glavni poluprečnici inercije i elipsa inercije

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = \sqrt{\frac{618{,}694}{29}} = 4{,}618 \text{ cm}$$
$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{202{,}934}{29}} = 2{,}645 \text{ cm}$$

Poluprečnici inercije služe za konstruisanje elipse inercije. Poluprečnik i_1 nanosi se na osu 2, a poluprečnik i_2 nanosi se na osu 1. Elipsa inercije ima položaj koji slijedi konturu složenog presjeka.

4. Morov krug inercije



Sl.2 Morov krug inercije

Morov krug inercije možemo nacrtati u AutoCADu. Polazne tačke za konstrukciju kruga su A i B. Tačka A ima koordinate: $x_A=I_\xi$=464,15 i $y_A=I_{\xi\eta}$= -200,92. Tačka B ima koordinate: $x_B=I_\eta$=357,49 i $y_B=-I_{\xi\eta}$=-(-200,92)=200,92. Centar Morovog kruga je presječna tačka "*c* " duži AB i ose *x*, a poluprečnik je duž *c*B ili *c*A.

Tačke C i D dobiju se kao presjek Morovog kruga i ose *x*. One predstavljaju glavne momente inercije: I_2=OC=202,94 i I_1=OD=618,7.

Ugao između ose ξ i ose (1) u Morovom krugu je duplo veći nego na slici 1, jer je Morov krug konstruisan na osnovu formula transformacije momenata inercije u kojima se javljaju dvostruki uglovi (npr. $I_u = \frac{1}{2}(I_\xi + I_\eta) + \frac{1}{2}(I_\xi - I_\eta)\cos 2\varphi - I_{\xi\eta}\sin 2\varphi$).