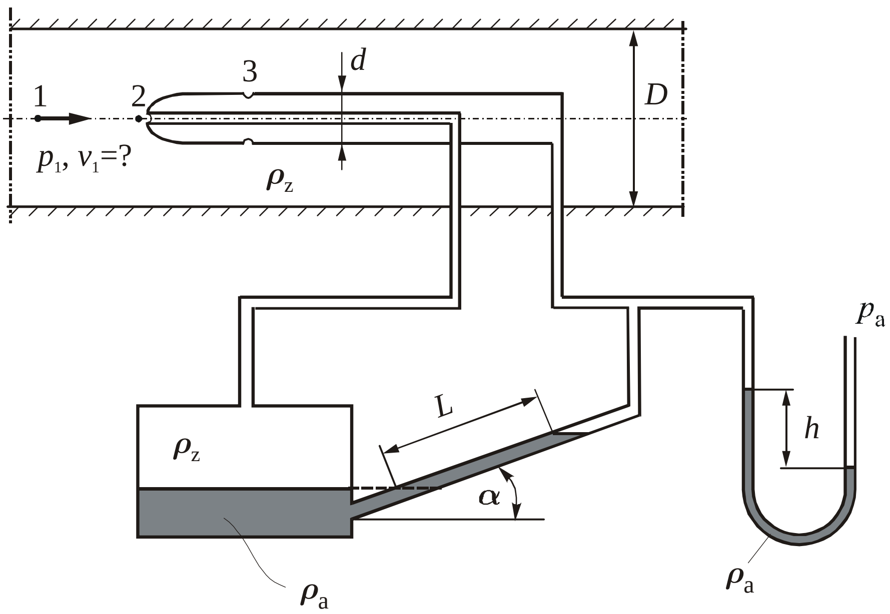
1. Odredite brzinu v_1 i tlak p_1 zraka (ρ_z =1,23 kg/m^3) u simetrali cijevi promjera D=50 mm, pomoću mjernog sustava s Prandtl-Pitotovom cijevi prema slici. Pretpostavite neviskozno strujanje i uzmite u obzir debljinu Prandtl-Pitotove cijevi. Zadano je: d=5 mm, L=100 mm, α=11°, ρ_a=800 kg/m^3, h=40 mm, p_a=101325 Pa.



Rješenje:

Točka 2 je točka zastoja, a u točki 2 će zbog smanjenja presjeka brzina v_3 biti od brzine v_1, a tlak p_3 manji od tlaka p_1. Diferencijalni manometar s kosom cijevi mjeri razliku tlaka p_2-p_3 , a U cijev razliku tlaka p_3-p_a (ako se u jednadžbama manometra zanemari gustoća zraka).

Gustoća zraka ρ_z je puno manja od gustoće alkohola ρ_a u manometrima. Postavljanjem B.J, J.K. i jednadžbi manometra slijedi:

B.J. 1-2 $$\frac{p_1}{\rho_z g}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho_z g} \qquad (1)$$

B.J. 2-3 $$\frac{p_2}{\rho_z g}=\frac{p_3}{\rho_z g}+\frac{v_3^2}{2g} \qquad (2)$$

J.K. $$v_1\cdot\frac{D^2\pi}{4}=v_3\cdot\frac{\left(D^2-d^2\right)\pi}{4} \qquad (3)$$

J.D.M. $$p_2-p_3=\rho_a g\,L\sin\alpha \qquad (4)$$

J.M. $$p_a-p_3=\rho_a g\,h \qquad (5)$$

U gornjem sustavu 5 jednadžbi nepoznanice su: p_1, v_1, p_2, p_3, i v_3.

iz (5) $$p_3 = p_a - \rho_a g\, h = 101011 \text{ Pa}$$

iz (4) $$p_2 = p_3 + \rho_a g\, L \sin\alpha = 101161 \text{ Pa}$$

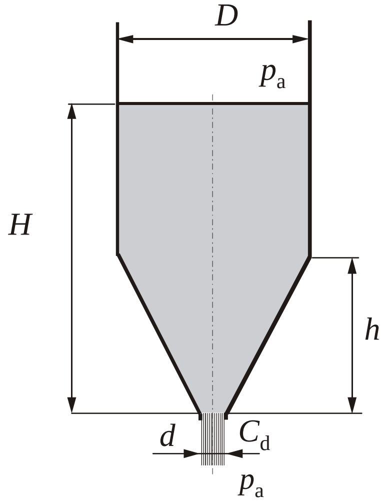
iz (2) $$v_3 = \sqrt{\frac{2}{\rho_z}\left(p_2 - p_3\right)} = 15{,}6 \text{ m/s}$$

iz (3) $$v_1 = v_3 \cdot \frac{D^2 - d^2}{D^2} = 15{,}44 \text{ m/s}$$

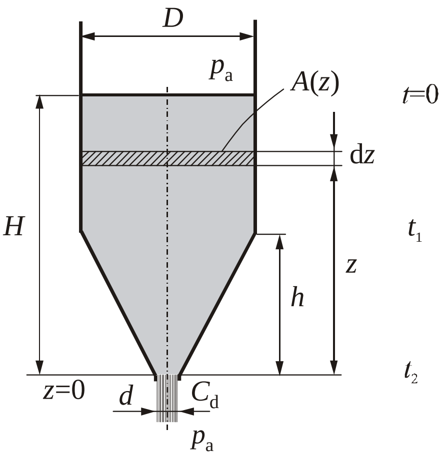
vidimo da je korekcija neznatna pa se najčešće zanemaruje debljina Prandtl-Pitotove cijevi

iz (1) $$p_1 = p_2 - \frac{1}{2}\rho_z v_1^2 = 100841 \text{ Pa}$$

2. Osnosimetrična posuda prema slici otvorena je prema atmosferi, a u početnom je trenutku ispunjena nestlačivim fluidom do visine H. Treba odrediti vrijeme pražnjenja posude ako otvor na dnu ima koeficijent protoka C_d=0,96. Zadano je: D=42 cm, d=12 mm, H=59,5 cm, h=29 cm.



Rješenje:



Slika (a)

U ovom je primjeru promjer D posude dosta veći od promjera d otvora, te se može pretpostaviti kvazistacionarno strujanje. Ova pretpostavka prestaje vrijediti u zadnjem stadiju pražnjenja koji traje vrlo kratko, pa to neće bitno narušiti točnost ukupnog vremena pražnjenja.
Opći integral za određivanje brzine pražnjenja spremnika slijedi iz jednadžbe kontinuiteta $Q = C_\mathrm{d}\dfrac{d^2\pi}{4}\sqrt{2gz} = -A(z)\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ (vidjeti predavanja), a glasi:

$$\int \mathrm{d}t = -\frac{1}{C_\mathrm{d}\dfrac{d^2\pi}{4}\sqrt{2g}}\int \frac{A(z)}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z \qquad \text{(a)}$$

gdje je $A(z)$ ploština poprečnog presjeka posude na visini z, na kojoj se nalazi razina fluida.

Problem će se riješiti u dva koraka. Prvo će se izraz (a) integrirati za cilindrični dio posude, gdje je $A(z) = D^2\pi/4$ konstantno, visina z se mijenja od H do h, a vrijeme t od nula do t_1. Zamjenom mjesta donje i gornje granice integrala na desnoj strani izraza (a) mijenja se i predznak integrala te se može pisati.

$$t_1 = \frac{D^2}{C_\mathrm{d} d^2\sqrt{2g}}\int_h^H \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} = \frac{D^2}{C_\mathrm{d} d^2\sqrt{2g}}2\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right) = 134{,}2\ \mathrm{s} \qquad \text{(b)}$$

U koničnom dijelu posude promjer se mijenja od d na z=0 do D na visini z=h. Jednadžba pravca između te dvije točke glasi $D(z)=d+\frac{z}{h}(D-d)$, što daje izraz za ploštinu $A(z)$ oblika

$$A(z)=\frac{\pi}{4}\left[d^2+\frac{z^2}{h^2}(D-d)^2+\frac{2\,d\,z}{h}(D-d)\right] \qquad \text{(c)}$$

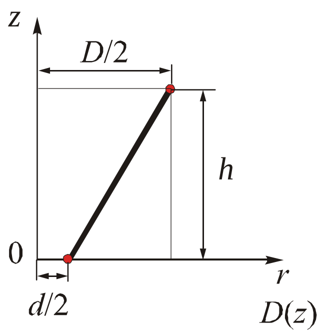
Integriranje izraza (a) uz $A(z)$ prema izrazu (c), gdje se vrijeme mijenja od t_1 do t_2, a visina z od h do 0 daje

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t=\frac{1}{C_\mathrm{d}d^2\sqrt{2g}}\int_0^h\left(\frac{d^2}{\sqrt{z}}+\frac{(D-d)^2}{h^2}z^{3/2}+\frac{2d(D-d)}{h}\sqrt{z}\right)\mathrm{d}\,z \qquad \text{(d)}$$

odnosno

$$t_2=t_1+\frac{1}{C_\mathrm{d}d^2\sqrt{2g}}\left(2d^2+\frac{2}{5}(D-d)^2+\frac{4}{3}d(D-d)\right)\sqrt{h} \qquad \text{(e)}$$

Izraz (e) definira ukupno vrijeme pražnjenja $t_2=198,7\text{ s}$.



$$z-0=\frac{h-0}{\frac{D}{2}-\frac{d}{2}}\left(r-\frac{d}{2}\right)$$

$$z\left(\frac{D}{2}-\frac{d}{2}\right)=h\left(\frac{D(z)}{2}-\frac{d}{2}\right)$$

$$\frac{z}{h}(D-d)=D(z)-d$$

$$D(z)=d+\frac{z}{h}(D-d)$$

3. Benzin (ρ=680 kg/m^3; υ=3,7·10^{-7} m^2/s) struji kroz cijev od trgovačkog čelika promjera D=76 mm i duljine L=305 m. Odredite protok benzina, ako se za svladavanje gubitaka tlaka raspolaže s Δp_f = 1,7 bar.

Rješenje:

k=0,045 mm (prema podacima iz tablice u Moodyevom dijagramu)

$$\frac{k}{D}=\frac{0,045}{76}=0,000592$$

$$\Delta p_\mathrm{f}=\lambda\frac{L}{D}\rho\frac{v^2}{2}=\lambda\frac{L}{D}\frac{\rho}{2}\frac{16Q^2}{D^4\pi^2}$$

$$\Delta p_\mathrm{f}=\lambda\frac{L}{D^5}\rho\frac{8Q^2}{\pi^2}\quad\Rightarrow\qquad Q=\sqrt{\frac{\Delta p_\mathrm{f}D^5\pi^2}{8\rho\lambda L}}=\pi\sqrt{\frac{\Delta p_\mathrm{f}D^5}{8\rho L}}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$Q=\frac{1,60125\cdot 10^{-3}}{\sqrt{\lambda}}$$

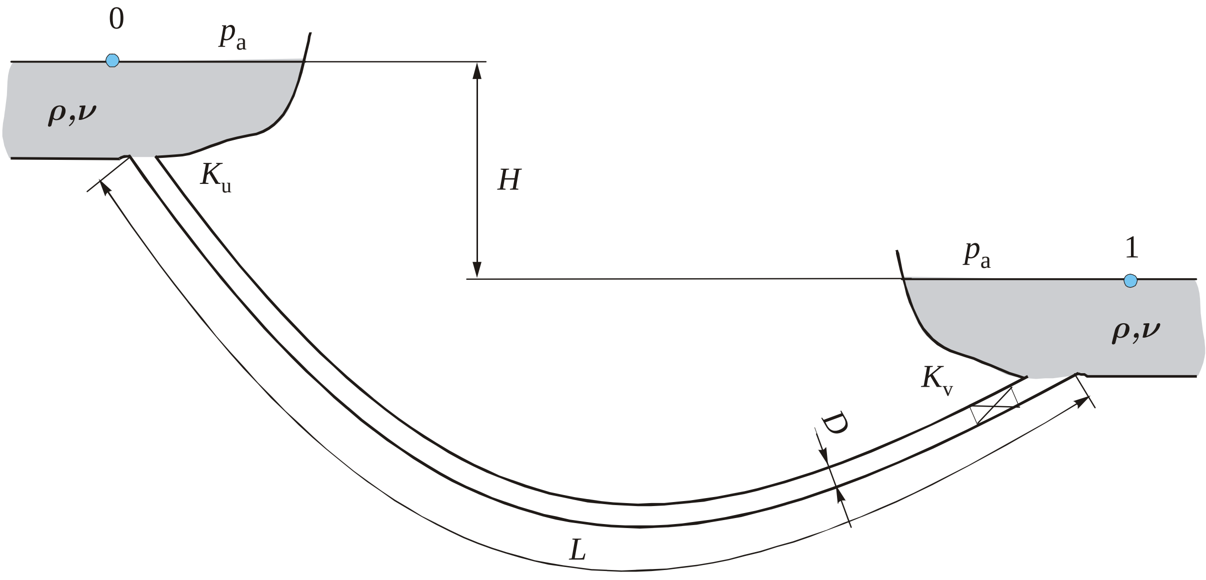
$$\lambda=\lambda\left(Re,\frac{k}{D}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} Re=\dfrac{vD}{\nu}=\dfrac{4Q}{D\pi\nu}=4,52788\cdot 10^7\cdot Q \\ \dfrac{k}{D}=0,000592 \end{array}\right\}\qquad \lambda=\frac{1,325}{\left[\ln\left(\dfrac{k}{3,7D}+\dfrac{5,74}{Re^{0,9}}\right)\right]^2}$$

iteracija	Q , m^3/s	Re	λ
1.	0,1	4,52788·10^6	0,037808
2.	0,008235	3,72871·10^5	0,018590
3.	0,011744	5,31758·10^5	0,018272
4.	0,011846	5,36373·10^5	0,018266
5.	0,011848	5,36456·10^5	0,018256

Q=11,85 l/s

4. Odredite promjer cijevi kojom protječe voda između dvaju jezera, ako se razine vode u jezerima ne mijenjaju. Zadano je: H=45 m, L=100 m, ρ=998 kg/m^3, ν=1,1$\cdot$10^{-6} m^2/s, K_u=0,2, K_v=0,6; Q=14,85 m^3/s, k=0,1 mm.



Rješenje:

M.B.J. 0-1

$$\frac{p_a}{\rho g}+H=\frac{p_a}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}\left(\lambda\frac{L}{D}+K_u+K_v+1\right)$$

$$H=\frac{8Q^2}{D_2^4\pi^2 g}\underbrace{\left(\lambda\frac{L}{D}+K_u+K_v+1\right)}_{\lambda\frac{L_{ek}}{D}}$$

$$H=\frac{8Q^2}{\pi^2 g}\lambda\frac{Lek}{D^5}$$

$$D=\sqrt[5]{\frac{8Q^2}{\pi^2 g\,H}}\sqrt[5]{L_{ek}\cdot\lambda}$$

$$L_{ek}=L+\frac{D}{\lambda}\left(K_u+K_v+1\right)$$

$$L_{ek}=100+1{,}8\,\frac{D}{\lambda}$$

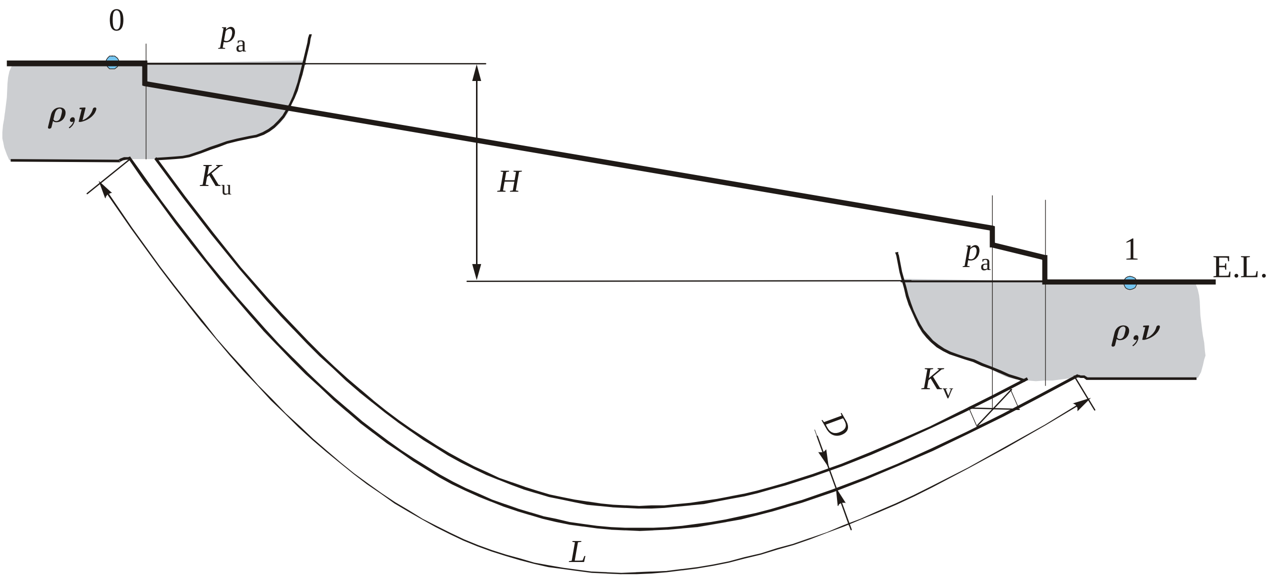
$$D=0{,}834645\,\sqrt[5]{L_{ek}\cdot\lambda}$$

$$\left.\begin{aligned} Re &= \frac{4Q}{D\pi\nu} = \frac{1,7188734\cdot 10^{7}}{D} \\ \frac{k}{D} &= \frac{0,1}{D} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{1,325}{\left[\ln\left(\frac{k}{3,7D}+\frac{5,74}{Re^{0,9}}\right)\right]^{2}}$$

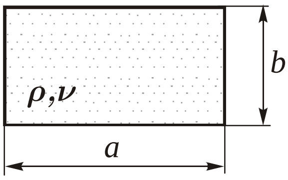
Pretpostavka za promjer D u prvoj iteraciji potpuno je proizvoljna.

iteracija	D , m	λ	L_{ek} , m
1.	0,1	0,0119942	250,07
2.	1,0397	0,012042	255,41
3.	1,04494	0,012032	256,35
4.	1,04551		

***D*=1045 mm.**



5. Odredite gubitke tlaka pri strujanju zraka (ρ=1,225 kg/m^3=konst., ν=1,4607·10^{-5} m^2/s) protokom Q=5 m^3/s kroz cjevovod duljine L=60 m pravokutnog presjeka axb=600x300 mm. Cijev je od galvaniziranog željeza.



Rješenje:

Budući nije zadana visina hrapavosti stijenke cijevi uzima se vrijednost definirana u tablici uz Moodyev dijagram, prema kojoj je za galvanizirano željezo k = 0,15 mm.

Ovdje se radi o nekružnom presjeku pa se proračun pada tlaka vrši s ekvivalentnim promjerom, koji je definiran formulom:

$$D_{\mathrm{e}} = \frac{4A}{O} = \frac{4ab}{2(a+b)} = 0,4$$

gdje je: A- površina poprečnog presjeka toka (ovdje je to puni presjek $A=a\cdot b$) i
O- oplakani opseg toka odnosno duljina opsega poprečnog presjeka u dodiru s fluidom, ovdje $O=2(a+b)$

U nastavku se koriste izrazi za proračun pada tlaka u okruglim cijevima, s tim da se u svim izrazima umjesto promjera D, koristi ekvivalentni promjer D_{e}, osim pri definiciji brzine strujanja, koja se definira omjerom protoka Q i stvarne površine A poprečnog presjeka toka. Dakle vrijedi:

$$\frac{k}{D_{\mathrm{e}}} = \frac{0,15}{0,4} = 0,000375$$

$$v = \frac{Q}{ab} = 27,7 \ \mathrm{m}/s$$ (prosječna brzina se računa sa stvarnom površinom toka!!)

$$Re = \frac{v \cdot D_{\mathrm{e}}}{\nu} = 7,6 \cdot 10^5$$

$$\lambda = \frac{1,325}{\left[\ln\left(\frac{k}{3,7D_{\mathrm{e}}} + \frac{5,74}{Re^{0,9}}\right)\right]^2} = 0,01647$$

te je traženi gubitak tlaka prema Darcy-Weissbachovom izrazu:

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D_{\mathrm{e}}} \frac{\rho}{2} v^2 = 1167,3 \ \mathrm{Pa}$$