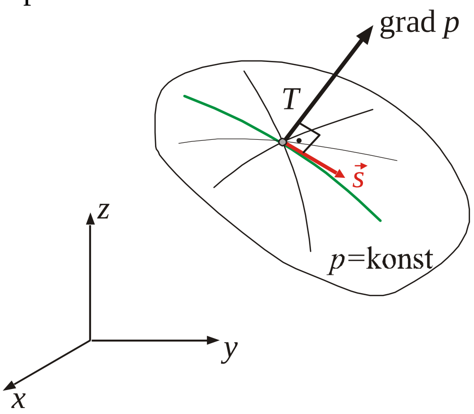
1. Odredite jedan jedinični vektor $\vec{s}$ u čijem smjeru nema promjene polja $p = 6x^2 + yz$ u točki T (1,2,3).

Rješenje:

Općenito:




$\vec{s}$ može biti bilo koji vektor u ravnini koja je tangencijalna na *p*=konst u točki T

$$\text{grad}\,p = \nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 12x; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = z; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = y$$

U točki T (1,2,3) ...... $\nabla p|_{\mathrm{T}} = (12, 3, 2)$

Uvjet okomitosti $\nabla p$ i $\vec{s}$

$$\nabla p \cdot \vec{s} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x}s_x + \frac{\partial p}{\partial y}s_y + \frac{\partial p}{\partial z}s_z = 0$$

$$(\nabla p \cdot \vec{s})_{\mathrm{T}} = 0 \qquad 12s_x + 3s_y + 2s_z = 0$$

Proizvoljno odabiremo $s_x = s_y = 1$, pa je

$$s_z = \frac{1}{2}\left(-12s_x - 3s_y\right) = -7,5$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-7,5)^2} = \sqrt{58,25}$$

$$\vec{s} = \left(\frac{1}{\sqrt{58,25}}, \frac{1}{\sqrt{58,25}}, \frac{-7,5}{\sqrt{58,25}}\right) = (0,131;\ 0,131; -0,983)$$

**2**. Izračunajte vrijednost integrala $\vec{F}=\int_S p\vec{n}\,\mathrm{d}S$ gdje je S površina kugle promjera *R*=3, sa središtem u točki S(2,1,3), a $\vec{n}$ je vanjska normala na površinu, ako je $p=x^2+y^2+z^2$. Kolika bi bila vrijednost za slučaj *p*=konst?

Rješenje:

$$\vec{F}=\int_S p\vec{n}\,\mathrm{d}S=\int_V \nabla p\,\mathrm{d}V\ ,$$

$$p=x^2+y^2+z^2\,,\quad \frac{\partial p}{\partial x}=2x;\quad \frac{\partial p}{\partial y}=2y;\quad \frac{\partial p}{\partial z}=2z$$

$$F_x=\int_V 2x\mathrm{d}V=2x\big|_S\cdot V=2\cdot 2\cdot\frac{4}{3}\cdot 3^3\pi=144\pi$$

$$F_y=\int_V 2y\mathrm{d}V=2y\big|_S\cdot V=2\cdot 1\cdot\frac{4}{3}\cdot 3^3\pi=72\pi$$

$$F_z=\int_V 2z\mathrm{d}V=2z\big|_S\cdot V=2\cdot 3\cdot\frac{4}{3}\cdot 3^3\pi=216\pi$$

$$\vec{F}=\left(144\pi,72\pi,216\pi\right)$$

Za *p*=konst, $\nabla p=\left(0,0,0\right)$, slijedi $\vec{r}=\left(0,0,0\right)$

**3**. Odredite fluks vektora $Q=\int_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$ po površini S kocke brida a=2 s centrom u ishodištu T(0,0,0). Površina S je orjentirana vektorom vanjske normale $\vec{n}$, a vektor $\vec{v}$ je $\vec{v}=3xy\,\vec{i}+6yz\,\vec{j}-\left(3yz+z\right)\vec{k}$

Rješenje:

Formula Gauss-Ostrogradski

$$Q=\int_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\int_V \nabla\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}V$$

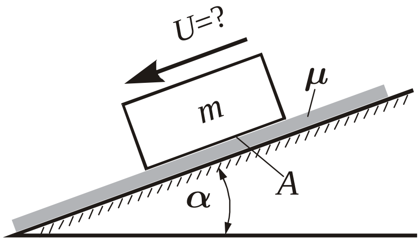
$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=3y,\quad \frac{\partial v_y}{\partial y}=6z,\quad \frac{\partial v_z}{\partial z}=-3y-1$$

$$\nabla\cdot\vec{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=3y+6z-3y-1=6z-1$$

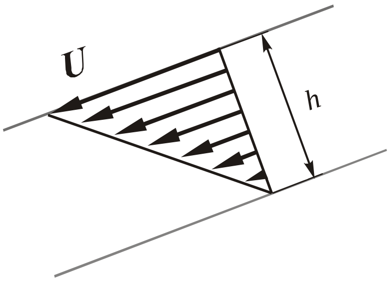
$$Q=\int_V\left(6z-1\right)\mathrm{d}V=\left|6z-1\right|_{\mathrm{T}}\cdot V=-V=-8$$

Kada podintegralna funkcija predstavlja linearnu promjenu po koordinatama, integral je jednak vrijednosti funkcije u težištu volumena pomnožen s volumenom

**4**. Blok mase $m$=10 kg klizi po glatkoj površini kosine nagnute pod kutom $\alpha$=20°. Odredite brzinu $U$ bloka koja će se ustaliti, ako se između bloka i kosine nalazi uljni film debljine $h$=0,1 mm. Koeficijent dinamičke viskoznosti ulja je $\mu$=0,38 Pa·s, a površina bloka u dodiru s uljem $A$=0,15 m$^{2.}$ Pretpostavite linearni profil brzine u uljnom filmu.

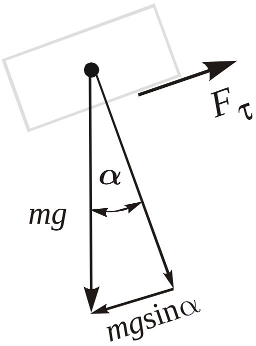



Rješenje:




$$\tau = \mu \frac{U}{h}$$

$$F_\tau = \tau \cdot A$$




$$F_\tau = mg \sin \alpha$$

$$\mu \frac{U}{h} \cdot A = mg \sin \alpha$$

$$U = \frac{mg \sin \alpha \cdot h}{\mu \cdot A}$$

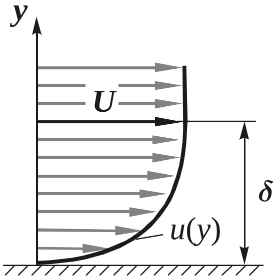
$$U = \frac{10 \cdot 9{,}80665 \cdot \sin 20^\circ \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-3}}{0{,}38 \cdot 0{,}15}$$

$$U = 0{,}0588 \quad \text{m/s}$$

Napomena: Za konstantu $g$ se koristi vrijednost $g = 9{,}80665 \text{ m/s}^2$.

**5.** Newtonska kapljevina gustoće $\rho$ =920 kg/m$^3$, kinematičkog koeficijenta viskoznosti ν=5·10$^{-4}$ m$^2$/s struji preko nepomične stijenke. Profil brzine uz stijenku dan je izrazom

$$\frac{u}{U}=\frac{3}{2}\frac{y}{\delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$




gdje je $y$ udaljenost od stijenke, a $\delta$ udaljenost na kojoj je brzina $u=U$. Odredite veličinu i smjer tangencijalnog naprezanja na površini stijenke, u zavisnosti od $U$ i $\delta$.

Rješenje:

$$\tau=\mu\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=\rho\nu\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=U\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\delta}-\frac{3}{2}\cdot\frac{y^2}{\delta^3}\right)\quad\Rightarrow\quad\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=\frac{3}{2}\frac{U}{\delta}$$

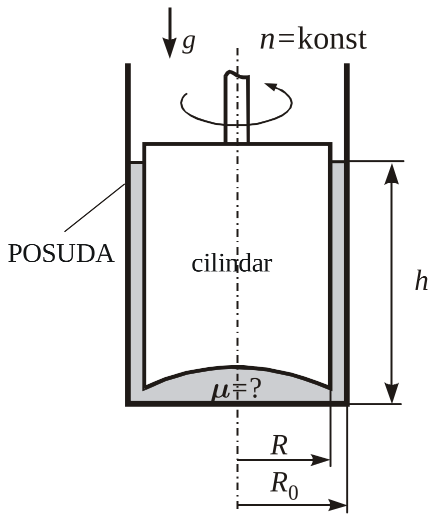
$$\tau=\rho\nu\frac{3}{2}\frac{U}{\delta}$$

$$\tau=920\cdot5\cdot10^{-4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{U}{\delta}$$

$$\{\tau\}_{\mathrm{N/m^2}}=0,69\cdot\frac{\{U\}_{\mathrm{m/s}}}{\{\delta\}_{\mathrm{m}}}$$

Tangencijalno naprezanje fluida na stijenku djeluje u smjeru relativne brzine fluida u odnosu na stijenku.

**6**. U cilindričnoj posudi polumjera $R_0$=220 mm, nalazi se cilindar polumjera $R$=216 mm koji rotira stalnom brzinom vrtnje $n$=200 o/min za što se troši snaga $P$ = 46 W. Odredite koeficijent dinamičke viskoznosti $\mu$ kapljevine koja ispunjava prostor između cilindra i posude u kojem pretpostavite linearni profil brzine, a utjecaj dna zanemarite. Zadano je: $h$=20 cm.




Rješenje:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} \;; \quad u = \omega \cdot R\,; \qquad \tau = \mu \frac{u}{R_0 - R}$$

$$F = \tau \cdot 2R\pi h\,; \quad M = F \cdot R\,; \quad P = M \cdot \omega$$

$$P = F \cdot R \cdot \omega = \tau \cdot 2R^2\pi \cdot h \cdot \omega = 2\mu \frac{u}{R_0 - R} R^2\pi \cdot h \cdot \omega$$

$$P = 2\mu \frac{\omega^2 R^3}{R_0 - R} \pi \cdot h = 2\mu \frac{\pi^3 n^2 R^3}{900\left(R_0 - R\right)} \cdot h$$

$$\mu = \frac{450P\left(R_0 - R\right)}{\pi^3 n^2 R^3 h}$$

$$\mu = \frac{450 \cdot 46 \cdot \left(0,220 - 0,216\right)}{\pi^3 \cdot 200^2 \cdot 0,216^3 \cdot 0,20}$$

$$\mu = 0,0331 \quad \mathrm{Pa \cdot s}$$