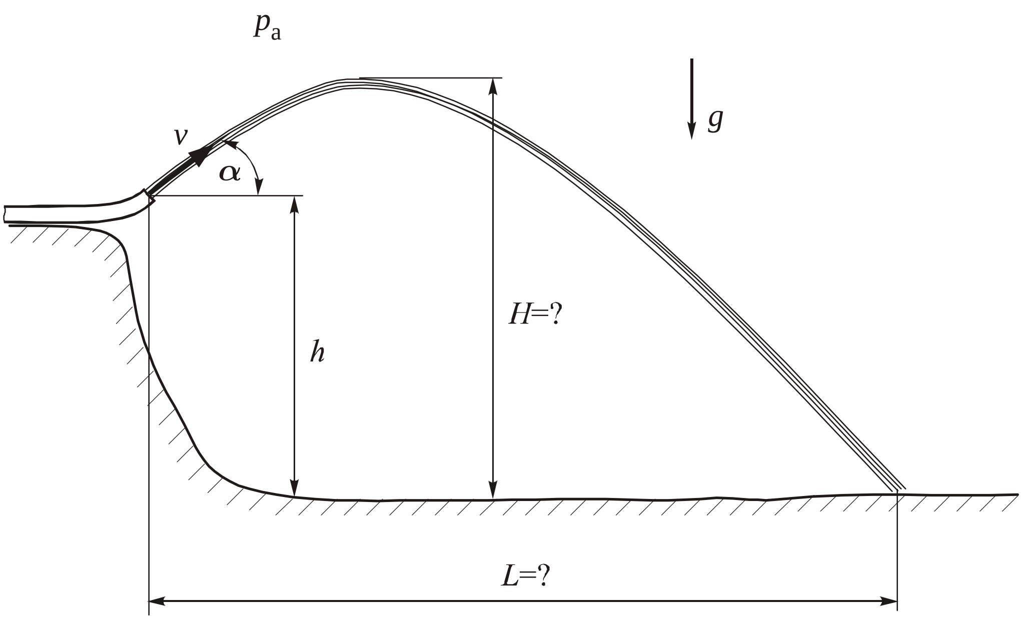
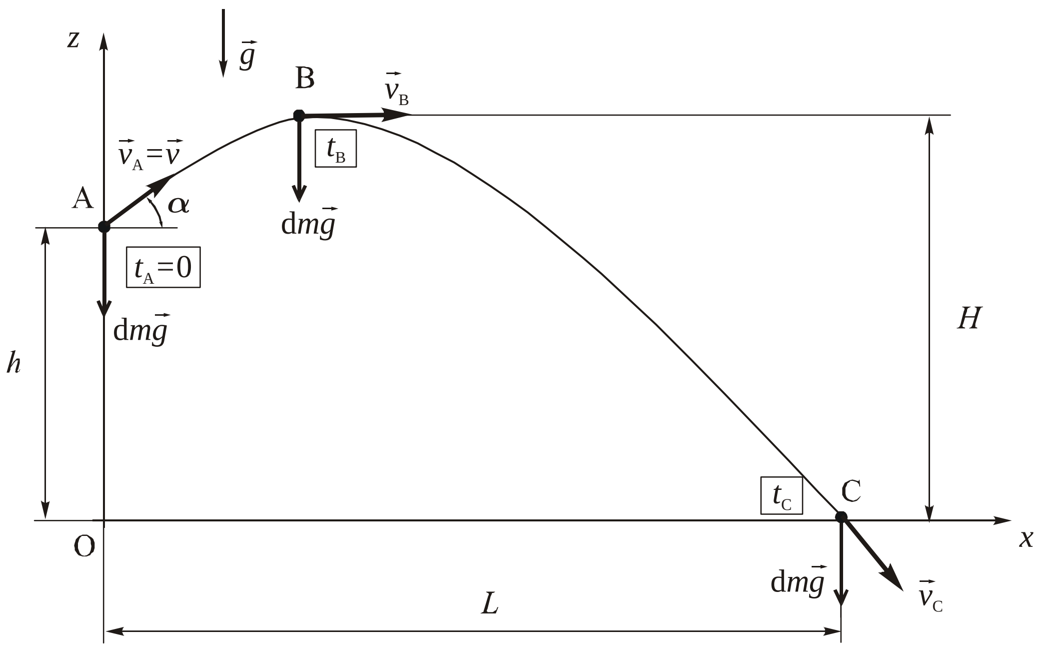
1. Na visini h=1 m, prema slici, nalazi se otvor cijevi iz koje izlazi mlaz fluida stalnom brzinom v=8 m/s, pod kutom α=49°. Uz pretpostavku idealnog fluida i uz zanemarenje trenja između zraka i fluida odredite maksimalnu visinu H i duljinu L koju će mlaz dosegnuti.



Rješenje:

Mlaz fluida je sa svih strana okružen zrakom pod konstantnim atmosferskim tlakom, tako da je rezultirajuća sila tlaka na svaku česticu fluida u mlazu jednaka nuli, te od vanjskih sila ostaje samo sila težine. Prema tome, svaka čestica fluida u mlazu gibat će se poput materijalne točke u polju gravitacije (kosi hitac). Budući da svaka čestica u izlaznom mlazu ima brzinu v, dovoljno je promatrati gibanje jedne čestice fluida, a gibanje svih ostalih čestica će biti potpuno identično. Stoga će oblik mlaza biti jednak obliku putanje što bi ga opisala jedna materijalna točka izbačena brzinom v pod kutom α s visine h u odnosu na koordinatni sustav prikazan na slici.



Gibanje se rastavlja u smjeru osi x i osi z. U svakom trenutku na česticu djeluje samo sila težine $\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}\,m \cdot \vec{g}$, te prema drugom Newtonovom zakonu $\mathrm{d}\,m \cdot \vec{a} = \mathrm{d}\vec{F}$, vrijedi $\vec{a} = \vec{g}$, ili

$$a_{\mathrm{x}} = \ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

$$a_{\mathrm{z}} = \ddot{z} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -g \qquad (1)$$

Jednadžbe (1) se integriraju u vremenu nakon čega slijedi:

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_{\mathrm{x}} = C_1$$

$$\dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_{\mathrm{z}} = -g\,t + C_2 \qquad (2)$$

Konstante C_1 i C_2 se određuju iz početnih uvjeta. Vremenski trenutak t=0 odgovara trenutku nailaska čestice fluida u točku A u kojoj su komponente brzine

$$v_{\mathrm{x}} = v \cdot \cos\alpha$$

$$v_{\mathrm{z}} = v \cdot \sin\alpha; \quad \text{za} \quad t=0 \qquad (3)$$

Uvrštavanjem (3) u (2) slijedi da je

$$C_1 = v \cdot \cos\alpha \quad \text{i} \quad C_2 = v \cdot \sin\alpha \qquad (4)$$

odnosno vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_{\mathrm{x}} = v \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_{\mathrm{z}} = v \cdot \sin\alpha - g\,t \qquad (5)$$

Integriranjem jednadžbi (5) dobije se promjena puta čestice fluida u vremenu:

$$x = v \cdot \cos\alpha \cdot t + C_3$$

$$z = v \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 + C_4 \qquad (6)$$

Konstante integracije C_3 i C_4 se ponovo dobiju iz početnih uvjeta, tj. U trenutku t=0 čestica fluida se nalazi u točki A s koordinatama x=x_{A}=0 i z=z_{A}=h, što uvršteno u (6) daje: $C_3 = 0$ i $C_4 = h$, odnosno:

$$x = v \cdot \cos\alpha \cdot t$$

$$z = h + v \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (7)$$

Položaje točaka B i C moguće je odrediti iz jednadžbi (5) i (7).

Do točke B mlaz fluida ide prema gore, odnosno brzina v_z je pozitivna, a nakon točke B brzina v_z je negativna, što znači da je u točki B brzina v_z jednaka nuli, te se iz jednadžbe (5) može izračunati vrijeme t_B potrebno da čestica fluida dođe od točke A do točke B.

$$v_{zB} = 0 = v \cdot \sin\alpha - g\,t_B \quad \Rightarrow \quad t_B = \frac{v \cdot \sin\alpha}{g} \qquad (8)$$

Iz jednadžbe (7) za $t = t_B$ slijede koordinate točke B

$$x_B = v \cdot \cos\alpha \cdot \frac{v \cdot \sin\alpha}{g} = \frac{v^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g} = 3{,}23\ \mathrm{m}$$

$$z_B = H = h + \frac{(v \cdot \sin\alpha)^2}{2g} = 2{,}86\ \mathrm{m} \qquad (9)$$

U točki C je $t=t_C$ i $z_C=0$ te iz jednadžbe (7) slijedi

$$0 = h + v\sin\cdot\alpha \cdot t_C - \frac{1}{2} g \cdot t_C^2 \qquad (10)$$

Rješenje kvadratne jednadžbe (10) je:

$$t_C = \frac{v\sin\alpha \pm \sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2gh}}{g} \qquad (11)$$

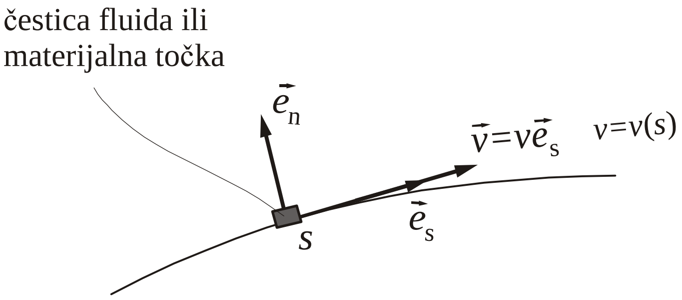
gdje je očito samo jedno rješenje fizikalno (t_C mora biti pozitivno)

$$t_C = \frac{v\sin\alpha + \sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2gh}}{g} = 1{,}379\ \mathrm{s}$$

Uvrštenjem t_C u jednadžbu (7) za x-koordinatu točke C slijedi:

$$x_C = L = v \cdot \cos\alpha \cdot t_C = 7{,}24\ \mathrm{m}.$$

2. Čestica fluida giba se po zakrivljenoj putanji, prema slici. Odredite ubrzanje čestice fluida za slučaj da je brzina zadana u funkciji puta *s*, koji se mjeri duž putanje.



Rješenje:

Definirat ćemo lokalne jedinične vektore $\vec{e}_s$ u smjeru putanje i $\vec{e}_n$ u smjeru normale na putanju. Vektor brzine je tada

$$\vec{v}=v(s)\cdot\vec{e}_s(s)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_s$$

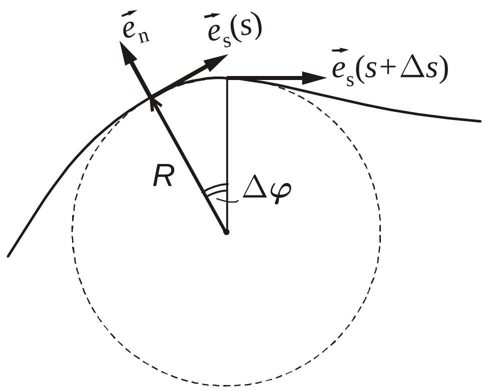
Ako je putanja zakrivljena, tada je vektor $\vec{e}_s$ promjenljiv.

Ubrzanje čestice fluida je po definiciji

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

Budući da je $\vec{v}=\vec{v}(s)$, po pravilima složenog deriviranja vrijedi:

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}s}\cdot\underbrace{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}_{v}=v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[v\vec{e}_s\right]=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\vec{e}_s+v^2\frac{\mathrm{d}\vec{e}_s}{\mathrm{d}s}$$

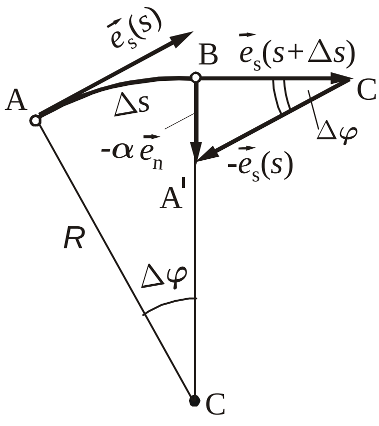


U svrhu određivanja derivacije $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_s}{\mathrm{d}s}$ putanja se lokalno zamijeni kružnicom polumjera *R*.

Tada se može pisati

$$\mathrm{d}s=R\mathrm{d}\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_s}{\mathrm{d}s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\vec{e}_s(s+\Delta s)-\vec{e}_s(s)}{\Delta s}$$



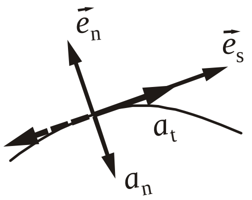
Iz slike je:

$$\vec{e}_s\left(s+\Delta s\right)-\vec{e}_s\left(s\right)=-\alpha\vec{e}_n$$

iz sličnosti trokuta ABC i A′BC′ slijedi:

$$\frac{\Delta s}{R}=\frac{\alpha}{1}$$

pa vrijedi: $$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_s}{\mathrm{d}s}=\frac{-\alpha\vec{e}_n}{R\alpha}=\frac{-\vec{e}_n}{R}$$

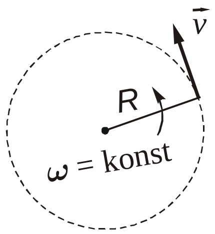


što uvršteno u izraz za ubrzanje daje:

$$\vec{a}=\underbrace{v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}}_{\text{tangencijalna komponenta ubrzanja}}\vec{e}_s\underbrace{-\frac{v^2}{R}}_{\text{normalna komponenta ubrzanja}}\vec{e}_n=a_t\vec{e}_s+a_n\vec{e}_n$$

Zaključak: Tangencijalna komponenta ubrzanja može gledati u smjeru $\vec{e}_s$ ili obrnuto, a normalna komponenta ubrzanja uvijek gleda prema središtu zakrivljenosti putanje.

Specijalni slučaj: Gibanje čestice fluida po kružnoj putanji polumjera R, uz konstantnu kutnu brzinu $\omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\text{konst.}$

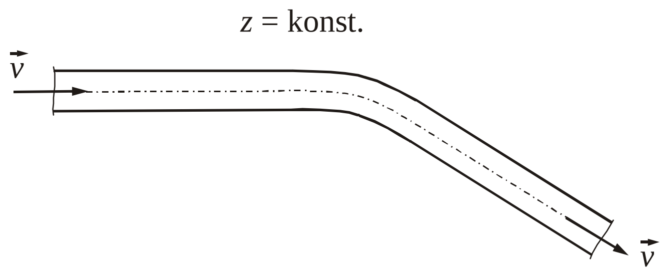


$$v=\omega R=\text{konst.}$$

$$a_t=0$$

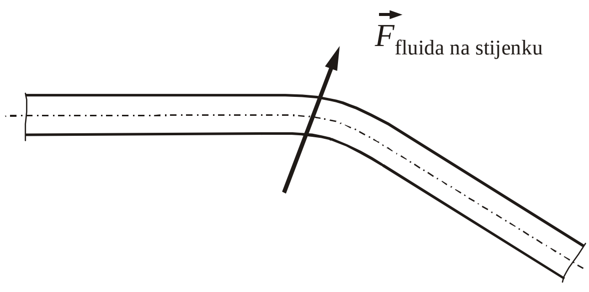
$$a_n=-\frac{v^2}{R}=-\omega^2 R$$

3. Fluid konstantne gustoće ρ struji stalnom brzinom $\vec{v}$ kroz svinutu cijev konstantnog poprečnog presjeka koja se nalazi u horizontalnoj ravnini. Primjenom zakona količine gibanja odredite smjer sile fluida na stijenku cijevi.



Rješenje:

Količina gibanja $m\vec{v}$ jediničnog volumena fluida $\frac{m\vec{v}}{V} = \rho\vec{v}$, je konstantna po veličini, a promjenjiva po smjeru. Za promjenu smjera količine gibanja od ulaza do izlaza iz cijevi je prema zakonu količine gibanja potrebna sila. Da bi fluid promijenio smjer strujanja potrebna je sila koja gleda prema središtu zakrivljenosti putanje čestice fluida. Sila kojom fluid djeluje na stijenku cijevi je suprotnog predznaka tj. djeluje kao na slici



Ako bi cijev bila fleksibilna imala bi tendenciju izravnavanja.

4. Nađite prirast tlaka Δp od ishodišta do točke R (2,3,-4) fluida u relativnom mirovanju, ako je specifična masena sila $\vec{f} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 9,81\vec{k}$. Gustoća fluida je 998,2 kg/m^3.

Rješenje:

Komponente radijus vektora $\vec{r}$ (vektor koji pokazuje položaj točke R u odnosu na ishodište koordinatnog sustava) su koordinate točke R , pa je $\vec{r} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$.

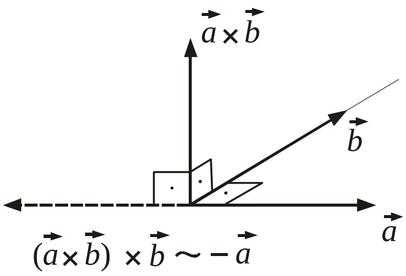
Promjena tlaka je definirana osnovnom jednadžbom statike, koja za slučaj konstantnog vektora specifične masene sile poprima oblik:

$$\Delta p = \rho \vec{f} \cdot \vec{r}$$

$$\Delta p = \rho\left(f_x r_x + f_y r_y + f_z r_z \right) = 998,2\left(3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 4 \cdot 9,81\right) = -39156 \text{ Pa } 6.$$

5. Izračunajte izraz $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{b}$, uz pretpostavku da je $\vec{a}$ okomito na $\vec{b}$.

Neka je vektor $\vec{d} = \underbrace{\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)}_{\vec{c}} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{b}$



Iznos vektora $\vec{c}$
$c = ab \sin 90° = ab \cdot 1 = ab$

Iznos vektora $\vec{d}$
$d = cb \sin 90° = ab \cdot b \cdot \sin 90° = ab^2$

Vektor $\vec{c} \perp \vec{a}, \perp \vec{b}$

Vektor $\vec{d} \perp \vec{c}, \perp \vec{b}$. Vektor $\vec{d}$ ima smjer $-\vec{a}$.

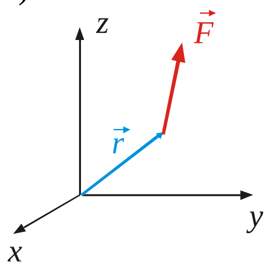
$\vec{d} = \vec{c} \times \vec{b} = -ab^2 \vec{a}_0 = -b^2\, \vec{a}$

6. Zapišite u Gibsovoj notaciji te nizom skalarnih jednadžbi izraze za

a) moment sile $\vec{F}$ u odnosu na ishodište koordinatnog sustava

b) rad sile $\vec{F}$ na putu $d\vec{r}$

a)

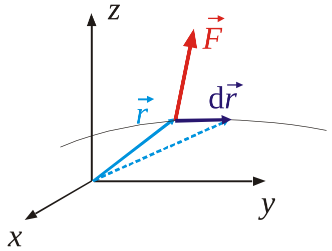


Moment sile $\vec{F}$ u odnosu na ishodište koordinatnog sustava

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}; \quad \vec{r} = (r_x, r_y, r_z), \quad \vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(r_y F_z - r_z F_y\right)\vec{i} + \left(r_z F_x - r_x F_z\right)\vec{j} + \left(r_x F_y - r_y F_x\right)\vec{k}$$

$$M_x = r_y F_z - r_z F_y$$
$$M_y = r_z F_x - r_x F_z$$
$$M_z = r_x F_y - r_y F_x$$



Rad sile $\vec{F}$ na putu $d\vec{r}$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Snaga:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot d\vec{v}$$

7. U točki T fluida tenzor naprezanja ima sljedeće komponente u odnosu na koordinatni sustav O*xyz*

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Odredite vektor naprezanja na ravninu orijentiranu normalom $\vec{n} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ te apsolutnu vrijednost toga vektora.

Rješenje:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}, \quad \vec{n} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\vec{t}\left(\vec{n}\right) = \vec{n} \cdot \mathbf{T} = \left(n_x T_{xx} + n_y T_{yx} + n_z T_{zx}, \quad n_x T_{xy} + n_y T_{yy} + n_z T_{zy}, \quad n_x T_{xz} + n_y T_{yz} + n_z T_{zz}\right)$$

$$t_x = n_x T_{xx} + n_y T_{yx} + n_z T_{zx} = \frac{2}{3} \cdot (-7) + \frac{1}{3} \cdot 2 = -4$$

$$t_y = n_x T_{xy} + n_y T_{yy} + n_z T_{zy} = -\frac{2}{3} \cdot (5) = \frac{10}{3}$$

$$t_z = n_x T_{xz} + n_y T_{yz} + n_z T_{zz} = \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot (-4) = 0$$

$$\vec{t}\left(\vec{n}\right) = \left(-4, \frac{10}{3}, 0\right), \qquad \left|\vec{t}\right| = \sqrt{(-4)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = 5,21$$