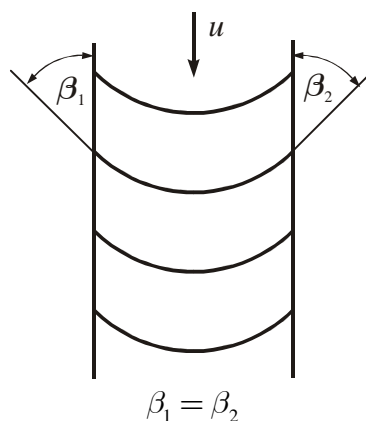
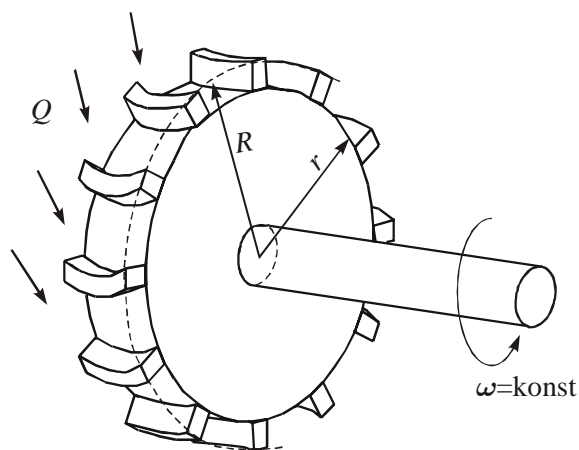


1. Nestlačivi fluid struji pri stalnom tlaku protokom  $Q$  kroz lopatice radnog kola turbine prema slici, koja rotira stalnom kutnom brzinom  $\omega$ . Uz pretpostavku neviskoznog strujanja i beskonačnog broja beskonačno tankih lopatica, treba odrediti snagu  $P$  turbine. Također pretpostaviti da je visina lopatice puno manja od polumjera radnog kola, tako da se vijenac lopatica smije razmotati u ravninu, i strujanje kroz lopatice smatrati ravninskim.



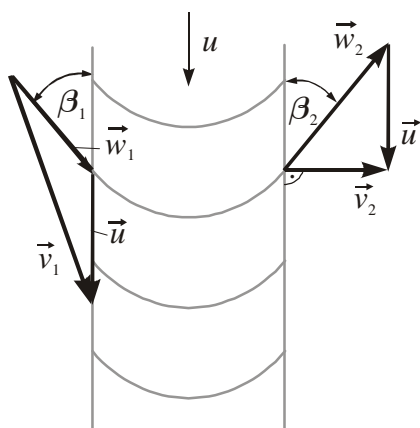
razmotani vijenac lopatica

### Rješenje:

Kao što je u zadatku pretpostavljeno visina lopatice  $R-r$  je puno manja od srednjeg polumjera  $(R+r)/2$ , te se s dovoljnom točnošću strujanje može smatrati ravninskim. Razmotani vijenac lopatica se tada giba prosječnom translatornom brzinom  $u$  koja je definirana izrazom

$$u = \omega \frac{R+r}{2} \quad (a)$$

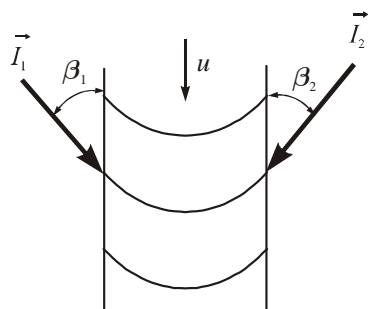
Zbog stalne brzine vrtnje i brzina  $u$  je stalna brzina, a koordinatni sustav vezan čvrsto za vijenac lopatica je inercijski. Pretpostavka beskonačnog broja beskonačno tankih lopatica osigurava da sve strujnice u strujanju kroz prostor između lopatica imaju oblik lopatice, tj. relativna brzina strujanja fluida kroz lopaticu je tangencijalna na lopaticu. Apsolutna brzina  $\vec{v}$  je zbroj obodne brzine  $\vec{u}$  i relativne brzine  $\vec{w}$ ,  $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ . Zbroj  $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$  geometrijski se predočuje trokutom brzina.



Slika (a)

Slika (a) prikazuje trokut brzina na ulazu u vijenac lopatica (gdje relativna brzina  $\vec{w}_1$  gleda u kontrolni volumen) i na izlazu iz vijenca (gdje relativna brzina  $\vec{w}_2$  gleda od kontrolnog volumena). Relativna brzina  $\vec{w}_1$  čini s obodnim smjerom kut  $\beta_1$ , a na izlazu brzina  $\vec{w}_2$  čini kut  $\beta_2$ . Obodna brzina  $\vec{u}$  je jednaka na ulaznom i izlaznom presjeku kontrolnog volumena koji obuhvaća unutarnjost vijenca lopatica. Osnovni zakoni u pomičnom koordinatnom sustavu čvrsto vezanom za vijenac lopatica koji se giba stalnom brzinom  $u$  imaju isti oblik kao i u nepomičnom koordinatnom sustavu s jedinom razlikom da se umjesto apsolutne brzine koristi relativna brzina.

Zanemarujući promjenu geodetske visine od ulaza do izlaza iz vijenca lopatica, te uz pretpostavku strujanja pri stalnom tlaku, iz Bernoullijeve jednadžbe slijedi jednakost veličina relativnih brzina  $w_1 = w_2 = w$ . Prema jednadžbi kontinuiteta je protok  $Q$  kroz izlaznu površinu jednak protoku  $Q$  kroz ulaznu površinu, tj.  $Q = A_1 w_1 \sin \beta_1 = A_2 w_2 \sin \beta_2$ . Očito da za  $w_1 = w_2$  i uz zadane  $\beta_1 = \beta_2$  slijedi  $A_1 = A_2$ , odnosno jednakost ulazne i izlazne površine.



Slika (b)

Slika (b) prikazuje kontrolni volumen s ucrtanim impulsnim funkcijama  $\vec{I}_1 = \rho Q \vec{w}_1$  i  $\vec{I}_2 = \rho Q \vec{w}_2$ . U impulsnim funkcijama se ne pojavljuje tak  $p$  jer je pretpostavljeno strujanje pri konstantnom tlaku, te se sile tlaka međusobno poništavaju. Množenjem  $\rho \vec{w}$  u impulsnoj funkciji s ukupnim protokom  $Q$  impulsna funkcija je obračunata po čitavoj površini. Aksijalna sila koja djeluje od ulazne prema izlaznoj površini je

$$F_a = I_1 \sin \beta_1 - I_2 \sin \beta_2 = \rho Q w (\sin \beta_1 - \sin \beta_2) \quad (\text{b})$$

Očito će zbog  $\beta_1 = \beta_2$  aksijalna sila biti jednaka nuli. Sila  $F$  u obodnom smjeru u kojem se giba vijenac lopatica je

$$F = I_1 \cos \beta_1 + I_2 \cos \beta_2 = \rho Q w (\cos \beta_1 + \cos \beta_2) \quad (\text{c})$$

Snaga  $P$  turbine je jednaka

$$P = F \cdot u = \rho Q w u (\cos \beta_1 + \cos \beta_2) \quad (\text{d})$$

Visina pada energije u turbini je

$$h_T = \frac{P}{\rho g Q} = \frac{w \cdot u}{g} (\cos \beta_1 + \cos \beta_2) \quad (\text{e})$$

Do istog se rezultata za snagu  $P$  turbine može doći i primjenom Bernoullijeve jednadžbe iz nepomičnog koordinatnog sustava. Ako se zanemari promjena geodetske visine i uzme u obzir da je strujanje pri konstantnom tlaku iz Bernoullijeve jednadžbe slijedi da je pad visine energije  $h_T$  kroz vijenac lopatica jednak razlici kinetičkih energija na ulazu i izlazu iz vijenca, tj.

$$h_T = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} \quad (\text{f})$$

Gledajući sliku (a) kvadrati apsolutnih brzina se mogu izraziti s pomoću obodne brzine  $u$  i relativne brzine  $w$  u obliku

$$\begin{aligned} v_1^2 &= (w \sin \beta_1)^2 + (w \cos \beta_1 + u)^2 \\ v_2^2 &= (w \sin \beta_2)^2 + (w \cos \beta_2 - u)^2 \end{aligned} \quad (\text{g})$$

Uvrštavanjem jednadžbe (g) u (f) slijedi

$$h_T = \frac{w \cdot u}{g} (\cos \beta_1 + \cos \beta_2) \quad (\text{h})$$

što odgovara izrazu (e). Iz jednadžbe (f) je očito da će pad visine energije u turbini biti maksimalan ako je apsolutna brzina  $v_2$  na izlazu minimalna. Iz slike (a) je vidljivo da će za zadani kut  $\beta_2$  i relativnu brzinu  $w_2$ , brzina  $v_2$  biti minimalna, ako je okomita na brzinu  $u$ .

Konačno, zadatak se mogao riješiti i primjenom jednadžbe momenta količine gibanja, po kojoj je moment  $M$  fluida na vijenac lopatica jednak zbroju momenata količine gibanja na ulaznoj i izlaznoj površini. Uz pretpostavku da je polumjer  $r$  kola velik u odnosu na visinu lopatica  $R-r$ , moment količine gibanja na ulaznoj i izlaznoj površini se može izračunati kao moment impulsne funkcije. Komponenta impulsne funkcije u obodnom smjeru je  $I \cos \beta$ , prema slici (b), a srednji krak do osi vrtnje je  $(R+r)/2$ . Moment sile težine se zanemaruje, a s obzirom da je tlak na ulaznoj i izlaznoj površini jednak, jednadžba za moment  $M$  sile fluida na lopaticu glasi

$$M = \frac{R+r}{2} I_1 \cos \beta_1 + \frac{R+r}{2} I_2 \cos \beta_2 = \frac{R+r}{2} \rho Q w (\cos \beta_1 + \cos \beta_2) \quad (\text{i})$$

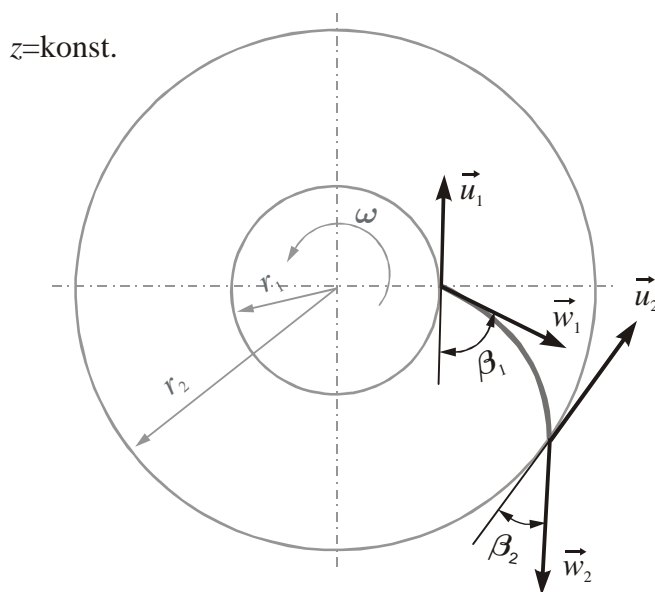
Snaga  $P$  je

$$P = M \cdot \omega = \omega \frac{R+r}{2} \rho Q w (\cos \beta_1 + \cos \beta_2) = \rho Q w u (\cos \beta_1 + \cos \beta_2) \quad (\text{j})$$

što je jednako izrazu (d).

2. Centrifugalna pumpa radi na  $N=1750$  o/min, a apsolutna brzina na ulazu u lopatični prostor ja radijalna ( $\alpha_1=90^\circ$ ). Kut lopatica na ulaznom bridu u odnosu na negativni smjer obodne brzine je  $\beta_1=30^\circ$ , a na izlaznom  $\beta_2=45^\circ$ . Uz pretpostavku neviskoznog strujanja i beskonačnog broja beskonačno tankih lopatica (tangencijalne relativne brzine na lopatice) odredite protok  $Q$  vode gustoće  $\rho=1000$  kg/m<sup>3</sup> kroz pumpu, te visinu dobave  $h_p$  pumpe, snagu  $P_p$  koju pumpa predaje vodi i prirast tlaka  $p_2-p_1$  kroz pumpu. Promjer lopatičnog vijenca na ulazu je  $D_1=100$  mm, a na izlazu  $D_2=250$  mm, visina lopatica na ulazu je  $b_1=15$  mm, a na izlazu  $b_2=8$  mm.

Rješenje:



Kutovi  $\beta_1$  i  $\beta_2$  se definiraju u odnosu na smjer  $-\vec{u}$  !!!

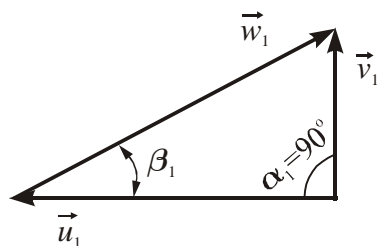
Prema uvjetima zadatka rotor se okreće brzinom  $N=1750$  o/min, te je kutna brzina rotacije

$$\omega = \frac{\pi N}{30} = 183,3 \text{ rad/s} \quad (\text{a})$$

Ako se sve veličine na ulazu u rotor označe indeksom 1, a na izlazu iz rotora indeksom 2, tada su obodne brzine na ulazu i izlazu iz rotora

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega \cdot r_1 = 9,16 \text{ m/s} \\ u_2 &= \omega \cdot r_2 = 22,9 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (\text{b})$$

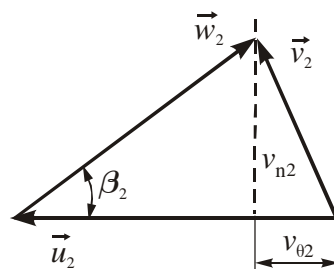
Trokuti brzina:



$$v_{\theta 1} = 0 \quad (1)$$

$$v_{n1} = v_1 = u_1 \operatorname{tg} \beta_1 \quad (2)$$

$$v_{n1} = 5,29 \text{ m/s}$$



$$v_{\theta 2} = u_2 - w_2 \cos \beta_2 \quad (3)$$

$$v_{n2} = w_2 \sin \beta_2 \quad (4)$$

$$\text{J.K.} \quad Q = 2r_1 \pi b_1 v_{n1} = 2r_2 \pi b_2 v_{n2} \quad (5)$$

$$Q = D_1 \pi b_1 v_{n1} = 0,0249 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{iz (5)} \quad v_{n2} = \frac{Q}{D_2 \pi b_2} = 3,97 \text{ m/s}$$

$$\text{iz (4)} \quad w_2 = \frac{v_{n2}}{\sin \beta_2} = 5,61 \text{ m/s}$$

$$\text{iz (3)} \quad v_{\theta 2} = u_2 - w_2 \cos \beta_2 = 18,9 \text{ m/s}$$

Osnovna Eulerova jednađžba za turbostrojeve

$$h_p = \frac{1}{g} (u_2 v_{\theta 2} - u_1 v_{\theta 1})$$

$$h_p = 44,2 \text{ m}$$

! Uočimo da visina dobave ne zavisi o gustoći fluida

Snaga predana fluidu

$$P_p = \rho g Q h_p = 10,8 \text{ kW}$$

! Snaga se povećava s gustoćom fluida.

Prirast tlaka  $\Delta p = p_2 - p_1$  kroz rotor crpke se može izračunati bilo postavljanjem Bernoullijeve jednađžbe od ulaza do izlaza iz rotora koja glasi

$$\text{B.J.} \quad \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

ili Bernoullijeve jednađžbe za rotirajuću strujnicu između istih točaka, a koja glasi

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2 - u_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2 - u_2^2}{2g}$$

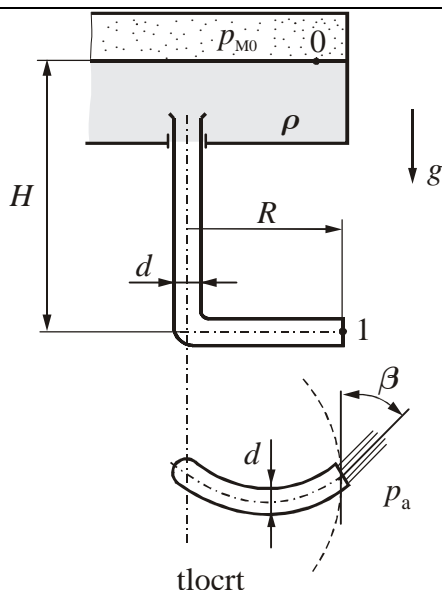
U obje jednačbe je uzeto u obzir da se rotor nalazi u horizontalnoj ravnini  $z=\text{konst.}$ , a iz obje jednačbe slijedi isti prirast tlaka.

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho \left( u_2^2 - w_2^2 + \underbrace{w_1^2 - u_1^2}_{v_{n1}^2} \right) \quad (\text{vidi trokut brzina na ulazu})$$

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (u_2^2 - w_2^2 + v_{n1}^2) = 2,61 \text{ bar}$$

3.

Treba odrediti kutnu brzinu vrtnje  $\omega$  i protok  $Q_0$  kroz slobodno rotirajuću svinutu cijev prema slici. Kolika je dobivena snaga  $P_T$  i protok  $Q_T$  za slučaj da cijev rotira kutnom brzinom  $\omega/2$ . Koliku snagu  $P_P$  (i pri kojem protoku  $Q_P$ ) treba uložiti da bi se cijev okretala kutnom brzinom  $2\omega$ . Pretpostavite nevaskozno strujanje fluida, a gubitke trenja u ležaju zanemarite. Zadano je:  $H=0,6$  m,  $R=0,6$  m,  $d=60$  mm,  $p_{M0}=0,31$  bar,  $\beta=35^\circ$ ,  $\rho=1000$  kg/m<sup>3</sup>.

**Rješenje:**

Zadatak se rješava primjenom osnovnih jednačbi: jednačbe kontinuiteta, Bernoullijeve jednačbe za rotirajuću strujnicu i osnovne Eulerove jednačbe za turbostrojeve. Jednačba kontinuiteta za rotirajuću cijev kaže da je protok

$$Q = w \frac{d^2 \pi}{4} = \text{konst.} \quad (\text{a})$$

Za konstantni promjer  $d$  cijevi i relativna brzina  $w$  ostaje konstantna duž cijevi. Bernoullijevu jednačbu za rotirajuću strujnicu se postavlja duž simetrale cijevi od ulaza do izlaza iz cijevi (točka 1 na slici uz zadatak). Na ulazu u cijev je prijenosna brzina jednaka nuli, te je specifična energija u toj točki jednaka energiji za slučaj da cijev miruje, tj. može se u strujanju idealnog fluida zamijeniti energijom u točki na slobodnoj površini, gdje se uz pretpostavku velikog spremnika smatra da je brzina strujanja fluida jednaka nuli. Bernoullijeva jednačba za rotirajuću strujnicu, postavljena od točke 0 do točke 1 (prema slici uz zadatak) glasi

$$\frac{p_{M0}}{\rho g} + H = \frac{w^2 - u_1^2}{2g} \quad (\text{b})$$

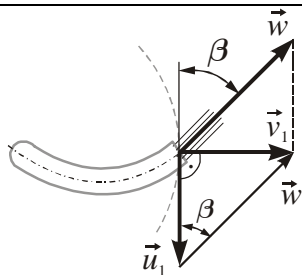
Uzimajući u obzir da je obodna brzina  $u$  na ulazu u cijev jednaka nuli izraz za snagu  $P$  za rotirajuću cijev se svodi na

$$P = \rho Q \cdot u_1 v_{\theta 1} \quad (\text{c})$$

gdje su

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega R \\ v_{\theta 1} &= u_1 - w \cos \beta \end{aligned} \quad (\text{d})$$

obodna brzina i projekcija apsolutne brzine na obodni smjer u izlaznom presjeku cijevi. Kut  $\beta$  je kut između relativne i obodne brzine



Slika (a)

Kod slobodno rotirajuće cijevi snaga  $P$  je jednaka nuli, tj. projekcija  $v_{\theta 1}$  je jednaka nuli, što je slučaj kada je apsolutna brzina  $\vec{v}_1$  okomita na obodnu brzinu  $\vec{u}_1$ , kao što prikazuje slika (a).

Jasno je da kod slobodno rotirajuće cijevi brzina  $u_1$  gleda u negativnom smjeru projekcije relativne brzine  $w$  na obodni smjer.

Iz izraza (d) za  $v_{\theta 1}=0$  i iz slike (a) slijedi da je

$$u_1 = w \cos \beta \quad (e)$$

što uvršteno u jednadžbu (b) daje izraz za veličinu relativne brzine, oblika

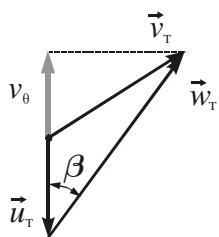
$$w = \sqrt{\frac{\frac{2}{\rho}(p_{M0} + \rho gH)}{1 - \cos^2 \beta}} = 15,0 \text{ m/s} \quad (f)$$

Iz jednadžbe (e) obodna brzina je  $u_1 = w \cos \beta = 12,3 \text{ m/s}$ , a tražena brzina vrtnje  $\omega_0 = u_1/R = 20,4 \text{ rad/s}$ . Iz jednadžbe (a) protok  $Q_0$  je  $Q_0=42,3 \text{ l/s}$ .

Slobodno rotirajuća cijev se vrti bez vanjskog utjecaja, a ako se želi da se cijev vrti sporije, znači da ju treba kočiti, tj. kočanjem odvoditi energiju od cjevčice što znači da će cjevčica raditi kao turbina. Za kutnu brzinu  $\omega = \omega_0/2$ , obodna brzina će biti  $u_T = 0,5\omega_0 R = 6,13 \text{ m/s}$ , što uvršteno u jednadžbu (b) daje

$$w_T = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_{M0} + \rho gH) + u_T^2} = 10,6 \text{ m/s} \quad (g)$$

a protok  $Q_T$  je prema jednadžbi (a)  $Q_T=29,8 \text{ l/s}$ .



Slika (b)

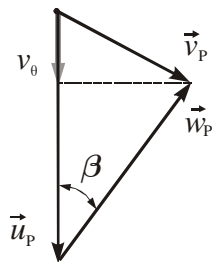
Slika (b) prikazuje trokut brzina na izlazu iz cijevi. Projekcija apsolutne brzine  $\vec{v}$  na smjer obodne brzine je prema izrazu (d)

$$v_{\theta} = u_T - w_T \cos \beta = -2,51 \text{ m/s} \quad (h)$$

Brzina  $v_{\theta}$  je negativna što ukazuje na turbinski rad, a snaga turbine je prema izrazu (c)  $P_T = \rho Q_T u_T v_{\theta} = 460 \text{ W}$ .

Ako se želi da se cjevčica vrti brže nego kod slobodne rotacije očito će trebati dovoditi snagu kao i kod crpke. Za kutnu brzinu  $\omega_p = 2\omega_0$ , obodna brzina će biti  $u_p = 24,5 \text{ m/s}$ , a relativna brzina  $w_p = 26,0 \text{ m/s}$ , i protok  $Q_p=73,5 \text{ l/s}$ .





Slika (c)

Slika (c) prikazuje trokut brzina na izlazu iz cijevi. Brzina  $v_\theta$  je

$$v_\theta = u_p - w_p \cos \beta = 3,24 \text{ m/s} \quad (\text{i})$$

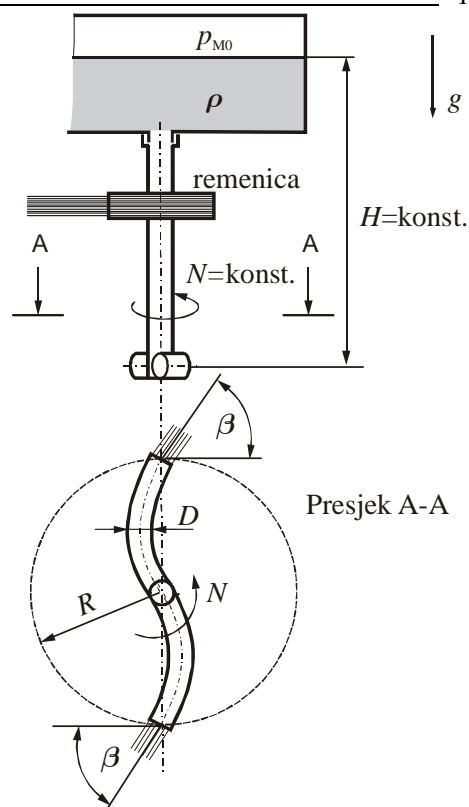
Brzina  $v_\theta$  je pozitivna što ukazuje da se snaga dovodi, a prema izrazu (c) snaga  $P_p$  je

$$P_p = \rho Q_p u_p v_\theta = 5,84 \text{ kW} \quad (\text{j})$$

4.

Primitivna turbina preko remenice predaje korisnu snagu  $P_M=730$  W, pri konstantnoj brzini vrtnje  $N=30$  o/min i pri ukupnom protoku kroz turbinu  $Q=28,5$  l/s. Treba odrediti snagu  $P_S$  koju predaje spremnik, snagu  $P_T$  turbine i snagu  $P_I$  fluida na izlazu iz turbine, mehanički stupanj korisnosti  $\eta_m = \frac{P_M}{P_T}$  i ukupni stupanj korisnosti  $\eta_u = \frac{P_M}{P_S}$ .

Pretpostavite jednodimenzijско strujanje idealnog fluida. Zadano je  $H=1,3$  m,  $R=1,2$  m,  $D=40$  mm,  $\beta=15^\circ$ ,  $\rho=1000$  kg/m<sup>3</sup>.



### Rješenje:

U ovom primjeru treba izvršiti makroskopsku bilancu energije u sustavu. Fluid se u spremniku nalazi pod nepoznatim pretlakom na visini  $H$  u odnosu na izlazni presjek turbine, a uz pretpostavku velikog spremnika se može smatrati da fluid u njemu miruje. Svaka čestica fluida ima specifičnu energiju (po jedinici težine fluida), koja odgovara piezometričkoj visini. Ako fluid iz spremnika istječe protokom  $Q$  kroz turbinu, tada je snaga  $P_S$  koju daje spremnik jednaka umnošku piezometričke visine (npr. slobodne površine u spremniku) i težinskog protoka fluida, tj.

$$P_S = (p_{M0} + \rho g H) Q \quad (a)$$

Ta se snaga dijelom predaje turbini, a dijelom, kroz izlazni mlaz turbine, odlazi u okolinu. Uz pretpostavku idealnog strujanja fluida snaga  $P_T$  turbine je definirana izrazom

$$P_T = \rho Q u v_\theta \quad (b)$$

gdje je  $Q$  ukupni protok kroz turbinu (kroz oba kraka). U izrazu (b) je uzeto u obzir da su obodne brzina i projekcija apsolutne brzine na smjer brzine u jednake u oba izlazna presjeka turbine, te da je na ulazu u turbinu obodna brzina  $u=0$ . Fluid napušta turbinu apsolutnom brzinom  $v$ , te je snaga oba mlaza na izlazu iz turbine

$$P_I = \rho Q \frac{v^2}{2} \quad (c)$$

Jasno je da zbroj snaga  $P_T$  i  $P_I$  mora biti jednak snazi  $P_S$  koju predaje spremnik. Snaga turbine  $P_T$  se dijelom troši na svladavanje trenja u ležaju i remenici (snaga gubitaka  $P_G$ ), a preostala snaga je korisna snaga  $P_M$  koja je zadana.

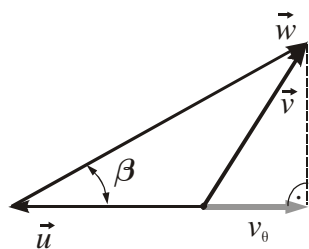
Za numeričko izračunavanje gore definiranih snaga, nužno je odrediti pretlak u spremniku. Kutna brzina rotacije turbine je  $\omega = \pi N/30 = 3,14 \text{ rad/s}$ . Obojna brzina  $u = \omega R = 3,77 \text{ m/s}$ , a relativna brzina  $w$  je prema jednadžbi kontinuiteta jednaka

$$w = \frac{1}{2} \frac{4Q}{D^2 \pi} = 11,3 \text{ m/s} \quad (\text{d})$$

gdje je pretpostavljeno da kroz svaki krak struji pola ukupnog protoka  $Q$ . Bernoullijeva jednadžba za rotirajuću strujnicu od slobodne površine u spremniku do izlaza iz turbine glasi

$$\frac{p_{M0}}{\rho g} + H = \frac{w^2 - u^2}{2g} \quad (\text{e})$$

odakle je pretlak  $p_{M0} = 0,44 \text{ bar}$ . Snaga  $P_S$  koju predaje spremnik je prema izrazu (a),  $P_S = 1630 \text{ W}$ . Slika (a) prikazuje trokut brzina na izlazu iz kraka turbine.



Slika (a)

Projekcija  $v_\theta$  je

$$v_\theta = u - w \cos \beta = -7,18 \text{ m/s} \quad (\text{f})$$

Negativni predznak brzine  $v_\theta$  ukazuje da se radi o turbini, tj. odvođenju snage.

Snaga  $P_T$  turbine je prema (b)  $P_T = 772 \text{ W}$ , a snaga  $P_G$  gubitaka  $P_G = P_T - P_M = 42 \text{ W}$ . Apsolutna brzina na izlazu iz turbine je

$$v = \sqrt{v_\theta^2 + (w \sin \beta)^2} = 7,76 \text{ m/s} \quad (\text{g})$$

Snaga  $P_I$  mlazova na izlazu iz turbine je prema (c)  $P_I = 858 \text{ W}$ . Očito je da vrijedi  $P_S = P_T + P_I$ . Traženi stupnjevi korisnosti su

$$\eta_m = \frac{P_M}{P_T} = 0,946$$

$$\eta_u = \frac{P_M}{P_S} = 0,448 \quad (\text{h})$$