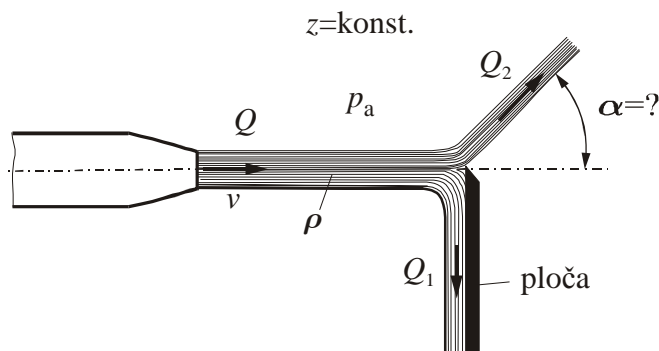
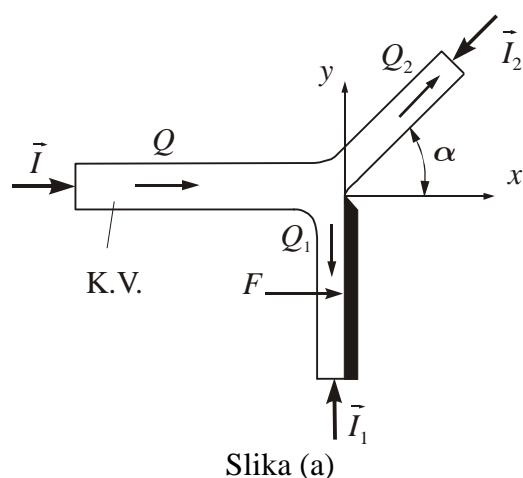


1. Mlaz fluida nastrujava u neviskoznom strujanju u horizontalnoj ravnini protokom  $Q=30$  l/s, brzinom  $v=3$  m/s, na okomito postavljenu ploču prema slici. Treba odrediti silu fluida na ploču ako je  $Q_1=10$  l/s. Zadano je:  $\rho=1000$  kg/m<sup>3</sup>.



Rješenje:

Strujanje je neviskozno, stacionarno i ravninsko te vrijedi Bernoullijeva jednadžba po kojoj zbroj  $\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z$  ostaje konstantan uzduž strujnice. Strujanje je u horizontalnoj ravnini  $z=\text{konst.}$  pri atmosferskom tlaku  $p=p_a=\text{konst.}$  iz čega se zaključuje da i brzina  $v$  mora biti konstantna. Iz jednadžbe kontinuiteta slijedi da je protok  $Q_2 = Q - Q_1 = 20$  l/s.



Slika (a)

Slika (a) prikazuje kontrolni volumen koji obuhvaća mlaz. Na ulaznoj površini djeluje impulsna funkcija  $\vec{I}$ , a na izlaznim površinama impulsne funkcije  $\vec{I}_1$  i  $\vec{I}_2$ . Ostali dijelovi kontrolne površine su nepropusni za fluid s tim da je samo na dijelu kontrolne površine između fluida i ploče tlak različit od atmosferskog te će se sila  $\vec{F}_w$  u jednadžbi količine gibanja odnositi samo na tu površinu. Ako se u izraz za impulsnu funkciju uvrštava pretlak, sila  $\vec{F}_w$  će biti rezultatna sila fluida na ploču umanjena za silu atmosferskog tlaka s desne strane ploče.

Veličina impulsne funkcije na ulaznoj površini je  $I = \rho v^2 A = \rho Q v$ . Analogno su veličine impulsnih funkcija na izlaznim površinama  $I_1 = \rho Q_1 v$  i  $I_2 = \rho Q_2 v$ . Pretpostavka o neviskoznom strujanju ima za posljedicu da u fluidu nema smičnih naprezanja, pa tako ni između fluida i ploče, a s obzirom da je ploča ravna, sila fluida na ploču mora biti okomita na nju, tj. djeluje u smjeru osi  $x$  prema slici (a). Iz ravnoteže impulsnih funkcija u smjeru osi  $y$  slijedi jednadžba

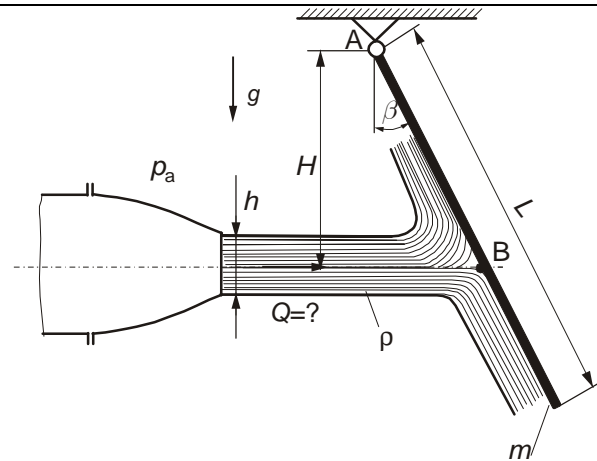
$$I_1 - I_2 \sin \alpha = 0 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{I_1}{I_2} = \frac{Q_1}{Q_2} = 0,5 \quad (\text{a})$$

iz koje je kut  $\alpha=30^\circ$ .

Iz  $x$ -komponente jednadžbe količine gibanja slijedi tražena sila na ploču

$$F = I - I_2 \cos \alpha = \rho v (Q - Q_2 \cos \alpha) = 38,0 \text{ N} \quad (\text{b})$$

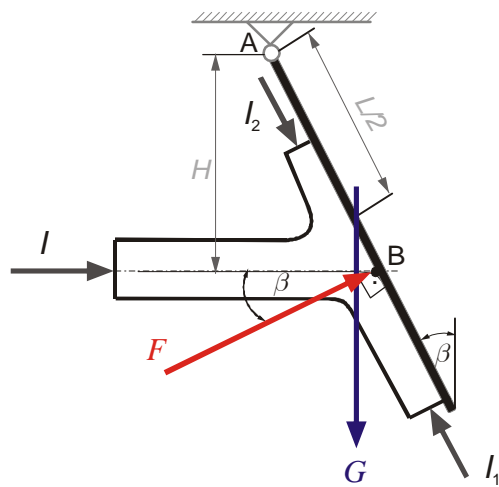
2. Mlaz fluida jedinične širine gustoće  $\rho=998 \text{ kg/m}^3$  udara u ploču jedinične širine, mase  $m=50 \text{ kg}$ , koja je okretljiva oko točke A. Ploča je u ravnotežnom položaju prema slici. Pretpostavite neviskozno strujanje fluida, te da je hvatište sile mlaza na ploču u točki B. Zanemarite utjecaj gravitacije na mlaz. Odredite protok  $Q$  fluida kroz mlaznicu. Zadano je:  $H=43 \text{ cm}$ ,  $L=65 \text{ cm}$ ,  $\alpha=28^\circ$ ,  $h=12 \text{ mm}$ .



### Rješenje:

Strujanje je neviskozno, stacionarno te vrijedi Bernoullijeva jednačba po kojoj zbroj

$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z$  ostaje konstantan uzduž strujnice. Zbog zanemarenja utjecaja gravitacije na mlaz te zato što je strujanje pri atmosferskom tlaku  $p=p_a=\text{konst}$  može se zaključiti da i brzina  $v$  mora biti konstantna.



Postavit ćemo impulsne funkcije na ulaznoj i izlaznim površinama, koje su jednake

$$I = \rho v^2 A = \rho Q v$$

$$I_1 = \rho Q_1 v \quad \text{i} \quad I_2 = \rho Q_2 v$$

Strujanje je neviskozno, pa je sila  $F$  mlaza okomita na ploču, a djeluje u točki B. Sila težine  $G$  ploče djeluje u težištu ploče.

Krakovi sile  $F$  fluida na ploču, te sile težine  $G$  ploče u odnosu na točku A jednaki su:

$$k_F = \frac{H}{\cos \beta}, \quad k_G = \frac{L}{2} \sin \beta$$

Ploča je u ravnotežnom položaju, pa iz jednakosti momenata oko točke A slijedi sila  $F$

$$F \cdot \frac{H}{\cos \beta} = G \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin \beta$$

$$F = m g \frac{L \sin \beta \cos \beta}{2H}$$

$$F = 153,6 \text{ N}$$

Iz jednadžbe količine gibanja za smjerove osi  $x$  i  $y$  slijedi

$$F_x = F \cos \beta = I - I_1 \sin \beta + I_2 \sin \beta \quad (1)$$

$$F_y = F \sin \beta = -I_2 \cos \beta + I_1 \cos \beta \quad (2)$$

$$\text{iz (2)} \quad I_1 - I_2 = \frac{F \sin \beta}{\cos \beta}$$

$$(1) \quad I - (I_1 - I_2) \sin \beta = F \cos \beta$$

$$I - \frac{F \sin \beta}{\cos \beta} \sin \beta = F \cos \beta$$

$$I = \frac{F (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)}{\cos \beta}$$

$$I = \frac{F}{\cos \beta}$$

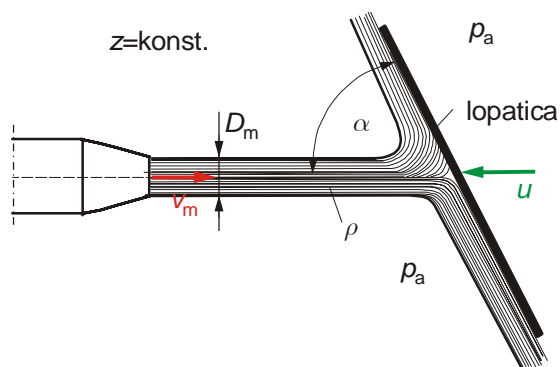
$$\underline{I = 174 \text{ N}}$$

$$I = \rho Q v = \rho \frac{Q^2}{A} = \frac{\rho Q^2}{h \cdot 1}$$

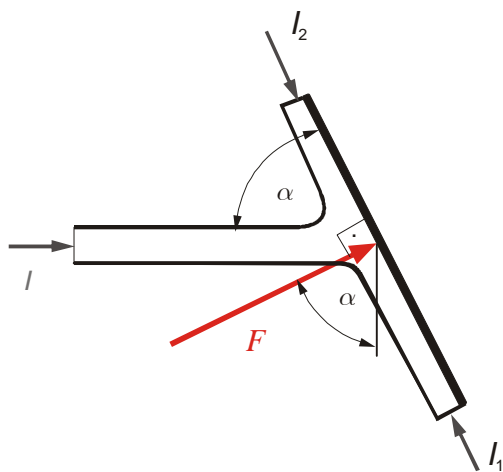
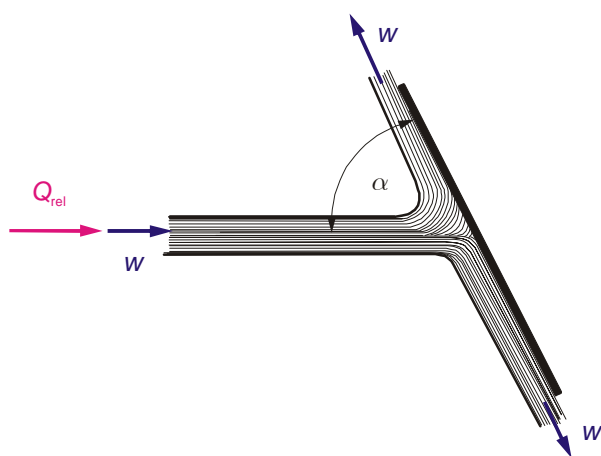
$$Q = \sqrt{\frac{I \cdot h}{\rho}}$$

$$\underline{Q = 0,0457 \text{ m}^3/\text{s}}$$

3. Odredite rezultantnu silu  $F$  mlaza fluida na lopaticu koja se približava mlazu konstantnom translatorskom brzinom, prema slici. Pretpostavite idealni fluid i lopaticu u horizontalnoj ravnini. Zadano je:  $D_m=40$  mm,  $v_m=20,6$  m/s,  $u=10,2$  m/s,  $\alpha=64^\circ$ ,  $\rho=1000$  kg/m<sup>3</sup>.



### Rješenje:



Gledano iz pomičnog koordinatnog sustava (vezanog za lopaticu) mlaz nastrojava relativnom brzinom  $w$ , koja je jednaka zbroju

$$w = v_m + u = 30,8 \text{ m/s}$$

Relativni protok  $Q_{\text{rel}}$  koji prelazi preko lopatice u pomičnom koordinatnom sustavu jednak je

$$Q_{\text{rel}} = w \cdot \frac{D_m^2 \pi}{4} = 0,0387 \text{ m}^3/\text{s}$$

Impulsne funkcije na ulaznoj i izlaznim površinama su

$$I = \rho \cdot Q_{\text{rel}} \cdot w = 1192 \text{ N}$$

$$I_1 = \rho \cdot Q_{1\text{rel}} \cdot w$$

$$I_2 = \rho \cdot Q_{2\text{rel}} \cdot w$$

Jednadžba količine gibanja za smjerove osi  $x$  i  $y$

$$F_x = F \sin \alpha = I + I_2 \cos \alpha - I_1 \cos \alpha$$

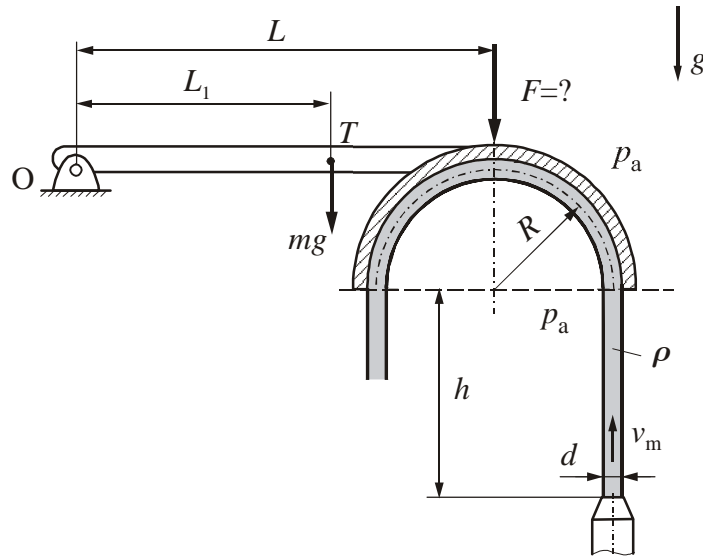
$$F_y = F \cos \alpha = -I_2 \sin \alpha + I_1 \sin \alpha$$

$$I_1 - I_2 = \frac{F \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$I - \frac{F \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha = F \sin \alpha$$

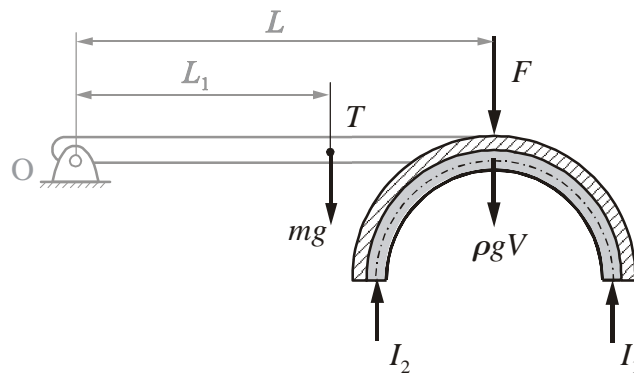
$$\underline{F = I \sin \alpha = 1071 \text{ N}}$$

4. Potrebno je odrediti silu  $F$  kojom treba pridržavati lopaticu mase  $m=4,8$  kg okretljivu oko točke  $O$ , prema slici, da bi bila u horizontalnom položaju. Pretpostaviti neviskozno strujanje fluida. Za proračun obujma vode u lopatici pretpostaviti poprečni presjek mlaza konstantnim i jednakim presjeku na ulazu u lopaticu. Zadano je:  $L=1,4$  m,  $L_1=0,9$  m,  $R=0,28$  m,  $h=1,9$  m,  $d=40$  mm,  $v_m=10,6$  m/s,  $\rho=999$  kg/m<sup>3</sup>.



Rješenje:

U ovom je primjeru lopatica zgloбно vezana u točki  $O$ , te se uvjet ravnoteže izražava činjenicom da suma momenata svih sila koje djeluju na lopaticu mora biti jednaka nuli.



Slika (a)

Slika (a) prikazuje lopaticu s ucrtanim silama koje djeluju na nju. Fluid svojim strujanjem kroz lopaticu izaziva silu koja želi podići lopaticu, a sila težine lopatice je želi spustiti. Pretpostavlja se da je moment sile fluida na lopaticu veći od momenta sile težine lopatice te je za postizanje ravnoteže potrebno djelovati silom  $F$  prema dolje kao što je prikazano na slici (a). Za određivanje momenta sile fluida na lopaticu je potrebno primijeniti jednadžbu momenta količine gibanja na kontrolni volumen koji obuhvaća fluid unutar lopatice. U ovom slučaju strujanje se smatra jednodimenzijским, a promjer ulazne i izlazne površine mlaza je mali u odnosu na udaljenost tih površina od točke  $O$ , te se moment količine gibanja na tim površinama može zamijeniti momentom impulsnih funkcija. U tom se slučaju moment sile fluida na lopaticu zamjenjuje sumom momenata

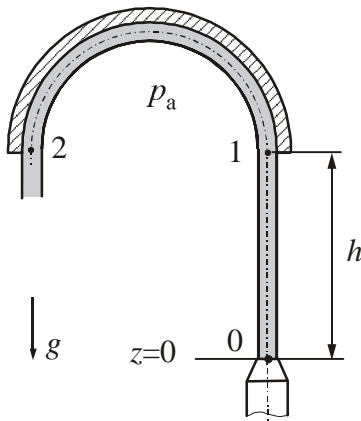
impulsnih funkcija umanjenom za moment sile težine fluida u kontrolnom volumenu, tj. impulsne funkcije se mogu smatrati silama koje djeluju u težištima ulazne i izlazne površine, kao što je prikazano na slici (a). Na ulaznom i izlaznom presjeku vlada atmosferski tlak te su impulsne funkcije

$$\begin{aligned} I_1 &= \rho v_1^2 A_1 \\ I_2 &= \rho v_2^2 A_2 \end{aligned} \quad (a)$$

Iz ravnoteže momenata oko točke O slijedi izraz za silu  $F$  oblika

$$F \cdot L = (L + R)I_1 + (L - R)I_2 - mgL_1 - \rho gVL \quad (b)$$

za čije je određivanje potrebno poznavati brzine  $v_1$  i  $v_2$ , ploštine ulazne  $A_1$  i izlazne  $A_2$  površine te obujam  $V$  fluida u kontrolnom volumenu. Tražene veličine će se odrediti primjenom Bernoullijeve jednadžbe i jednadžbe kontinuiteta.



Slika (b) prikazuje mlaz s ucrtanim karakterističnim točkama. Točka 0 je postavljena na izlazu iz mlaznice, u njoj vlada atmosferski tlak, a brzina strujanja je  $v_m$ . Strujanje je neviskozno, te Bernoullijeva jednadžba postavljena od točke 0 do točke 1 glasi

$$\frac{v_m^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} + h \quad (c)$$

a od točke 0 do točke 2

$$\frac{v_m^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} + h \quad (d)$$

Slika (b)

Usporedbom jednadžbi (c) i (d) se zaključuje da su brzine  $v_1$  i  $v_2$  jednake, tj.

$$v_1 = v_2 = \sqrt{v_m^2 - 2gh} = 8,66 \text{ m/s} \quad (e)$$

Treba naglasiti da u viskoznom strujanju brzine  $v_1$  i  $v_2$  ne bi bile jednake, jer bi došlo do gubitka mehaničke energije. S obzirom da je strujanje pri konstantnom atmosferskom tlaku, a da su točke 1 i 2 na istoj visini zaključuje se da se jedino može smanjiti kinetička energija, tj. brzina  $v_2$  bi bila manja od brzine  $v_1$ . Jednadžba kontinuiteta kaže da je protok fluida u mlazu konstantan, tj.

$$v_m \frac{d^2\pi}{4} = v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad (f)$$

iz koje je

$$A_1 = A_2 = \frac{d^2\pi}{4} \frac{v_m}{v_1} = 15,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \quad (g)$$

Obujam fluida u lopatici se prema zadatku aproksimira obujmom prizme čija je osnovica ploštine  $A_1$ , a visina poluopseg kruga polumjera  $R$ , tj.

$$V = R\pi A_1 = 13,52 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \quad (\text{h})$$

Konačno se iz izraza (b) može izračunati sila  $F$

$$F = \frac{\rho v_1^2 A_1 \cdot 2L - mgL_1 - \rho gVL}{L} = 187 \text{ N} \quad (\text{i})$$