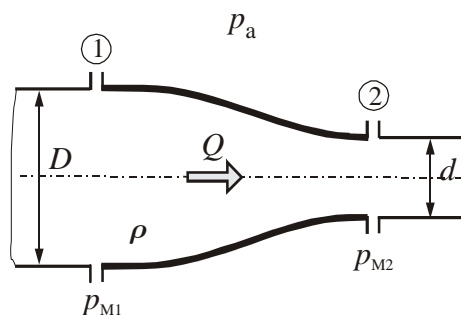


1. Odredite horizontalnu silu vode na redukcijisku spojnicu prema slici, uz pretpostavku neviskoznog strujanja fluida. Zadano je: $D=200$ mm, $d=100$ mm, $\rho=1000$ kg/m³, $p_{M1}=1,6$ bar, $p_{M2}=0,9$ bar.



Rješenje:

$$\text{B.J.} \quad \frac{p_{M1}}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_{M2}}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (1)$$

$$\text{J.K.} \quad Q = v_1 \cdot \frac{D^2 \pi}{4} = v_2 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \quad (2)$$

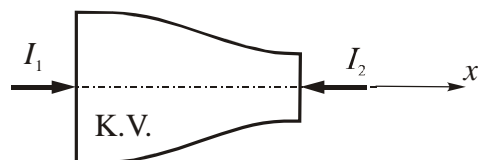
$$v_1 = \frac{4Q}{D^2 \pi}; \quad v_2 = \frac{4Q}{d^2 \pi} \quad (3)$$

(3) u (1)

$$Q = \pi \sqrt{\frac{p_{M1} - p_{M2}}{8\rho \left(\frac{1}{d^4} - \frac{1}{D^4} \right)}} = 96,0 \text{ l/s}$$

iz (3) $v_1 = 3,05$ m/s; $v_2 = 12,2$ m/s

Sila se određuje iz J.K.G:



$$I_1 = (\rho v_1^2 + p_{M1}) \cdot \frac{D^2 \pi}{4} = 5320 \text{ N}$$

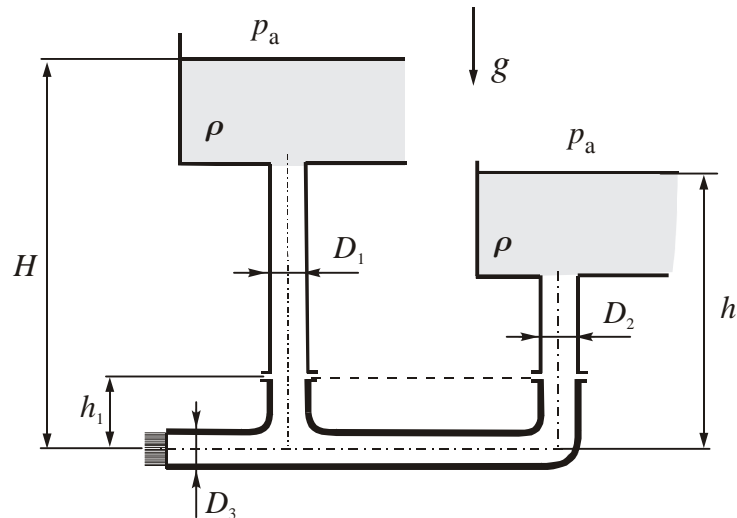
$$I_2 = (\rho v_2^2 + p_{M2}) \cdot \frac{d^2 \pi}{4} = 1880 \text{ N}$$

Impulsne funkcije su izračunate s pretlakom što znači da smo obračunali silu atmosferskog tlaka izvana.

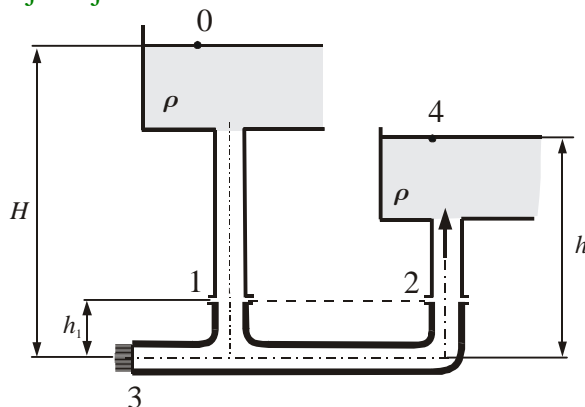
$$F_x = I_1 - I_2 = 3440 \text{ N}$$

S obzirom da se radi o neviskoznom strujanju, brzine i tlakovi u presjecima 1 i 2 bi bili isti da je strujanje protokom Q u suprotnom smjeru, te bi impulsne funkcije I_1 i I_2 ostale iste, pa bi sila F_x ostala ista.

2. Odredite rezultantu silu vode na račvu prema slici uz pretpostavku neviskoznostrujanja. Volumen vode u račvi je $V=0,11 \text{ m}^3$. Zadano je: $H=3,8 \text{ m}$, $h=2,1 \text{ m}$, $h_1=1 \text{ m}$, $D_1=300 \text{ mm}$, $D_2=200 \text{ mm}$, $D_3=100 \text{ mm}$, $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$.



Rješenje:



Budući je točka na najvećoj visini, a točka 3 na najnižoj sigurno će fluid strujati od točke 0 prema 3 te vrijedi B.J. 0-3

$$H = \frac{v_3^2}{2g} \Rightarrow v_3 = \sqrt{2gH} = 8,63 \text{ m/s}$$

Budući nema viskoznih gubitaka, a točka 4 je niža od točke 0, doći će do strujanja u spremnik te B.J. 0-4 uz gubitke utjecanja glasi

$$H = h + \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2g(H-h)} = 5,77 \text{ m/s}$$

Brzina u presjeku 1 se određuje iz J.K.

$$v_1 \cdot \frac{D_1^2 \pi}{4} = v_2 \cdot \frac{D_2^2 \pi}{4} + v_3 \cdot \frac{D_3^2 \pi}{4}$$

$$v_1 = \frac{v_2 D_2^2 + v_3 D_3^2}{D_1^2} = 3,53 \text{ m/s}$$

Za određivanje impulsnih funkcija potrebno je poznavati pretlake u presjecima 1 i 2, koji se određuju iz B.J. 1-3 i B.J. 1-2

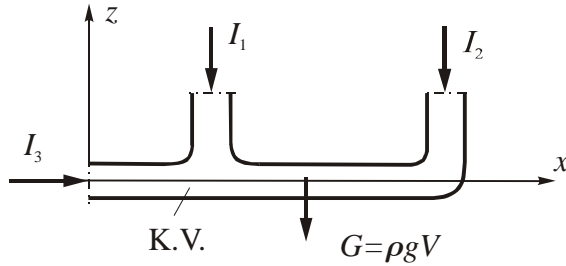
$$\text{B.J. 1-3} \quad \frac{p_{M1}}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{v_3^2}{2g}$$

$$p_{M1} = \frac{\rho}{2} (v_3^2 - v_1^2) - \rho g h_1 = 21244 \text{ Pa}$$

$$\text{B.J. 1-2} \quad \frac{p_{M1}}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{p_{M2}}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_1$$

$$p_{M2} = p_{M1} + \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2) = 10787 \text{ Pa}$$

Sila na račvu se određuje iz J.K.G.



$$I_1 = (p_{M1} + \rho v_1^2) \cdot \frac{D_1^2 \pi}{4} = 2380 \text{ N}$$

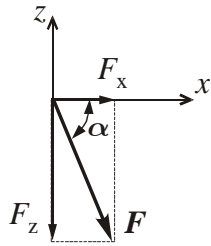
$$I_2 = (p_{M2} + \rho v_2^2) \cdot \frac{D_2^2 \pi}{4} = 1386 \text{ N}$$

$$I_3 = (\rho v_3^2) \cdot \frac{D_3^2 \pi}{4} = 585 \text{ N}$$

$$G = \rho g V = 1079 \text{ N}$$

$$F_x = I_3 = 585 \text{ N}$$

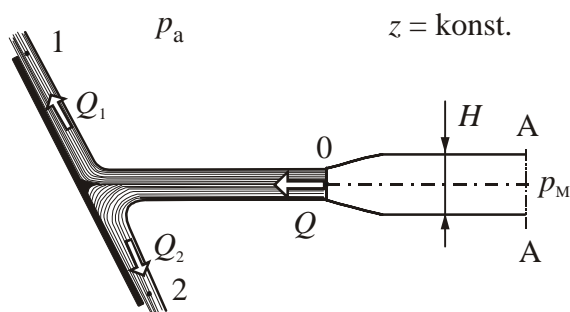
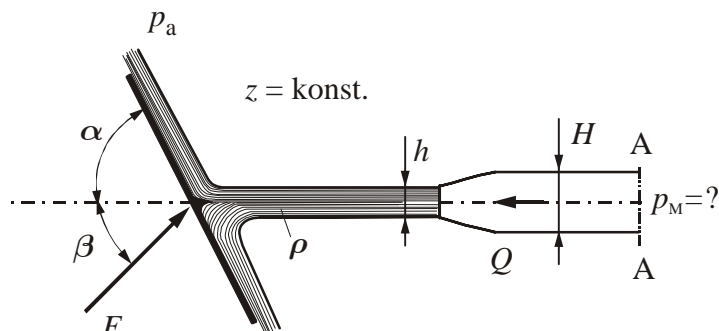
$$F_z = -I_1 - I_2 - G = -4845 \text{ N}$$



$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = 4880 \text{ N}$$

$$\alpha = \arctg \frac{F_z}{F_x} = -83,1^\circ$$

3. Fluid nastrujava u horizontalnom ravninskom neviskoznom strujanju na ploču jedinične širine nagnutu pod kutom $\alpha=36^\circ$. Treba odrediti pretlak u presjeku A-A ako je ploča uravnotežena silom $F=680$ N, prema slici. Zadano je: $h=25$ mm, $H=40$ mm, $\beta=42^\circ$, $\rho=1000$ kg/m³.

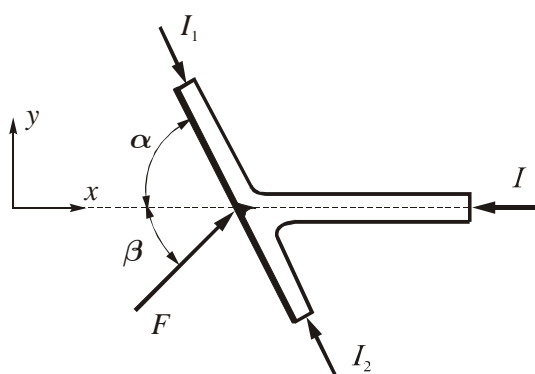


Slika (a)

Slika (a) prikazuje sustav s ucrtanim karakterističnim točkama. Strujanje je ravninsko neviskozno i stacionarno te vrijedi Bernoullijeva jednadžba, a profil brzine po poprečnom presjeku mlaza je jednolik. S obzirom da je strujanje u horizontalnoj ravnini pri stalnom tlaku iz Bernoullijeve jednadžbe postavljene od točke 0 do točke 1 i od točke 0 do točke 2 slijedi da je brzina u točkama 1 i 2 jednaka brzini u točki 0, tj. vrijedi $v_1=v_2=v_0=v$.

Iz jednadžbe kontinuiteta slijedi

$$Q = v \cdot h \cdot 1 = Q_1 + Q_2 \quad (a)$$



Slika (b)

Slika (b) prikazuje kontrolni volumen koji obuhvaća mlaz od izlaza iz mlaznice do izlaznih rubova ploče. Na ulaznoj površini je postavljena impulsna funkcija \vec{I} , a na izlaznim površinama impulsne funkcije \vec{I}_1 i \vec{I}_2 . Od preostalih dijelova kontrolne površine, postoji sila samo na površini između fluida i ploče, a koja je jednaka negativnoj vrijednosti sile \vec{F} , tako da vrijedi

$$\begin{aligned} F_x &= -F \cos \beta \\ F_y &= -F \sin \beta \end{aligned} \quad (b)$$

gdje su F_x i F_y komponente sile fluida na ploču. Veličine impulsnih funkcija su

$$\begin{aligned} I &= \rho \cdot v^2 \cdot h \cdot 1 = \rho \cdot Q \cdot v = \frac{\rho \cdot Q^2}{h \cdot 1} \\ I_1 &= \rho \cdot Q_1 \cdot v \quad \text{i} \quad I_2 = \rho \cdot Q_2 \cdot v \end{aligned} \quad (c)$$

te jednadžba količine gibanja za smjer x glasi

$$F_x = -F \cos \beta = -I + (I_1 - I_2) \cos \alpha \quad (\text{d})$$

a za smjer osi y

$$F_y = -F \sin \beta = -(I_1 - I_2) \sin \alpha \quad (\text{e})$$

Iz jednadžbe (e) je

$$I_1 - I_2 = F \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad (\text{f})$$

što uvršteno u (d) daje vrijednost impulsne funkcije I

$$I = \frac{\rho \cdot Q^2}{h} = F \cos \beta + F \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cos \alpha \quad (\text{g})$$

odakle je protok Q

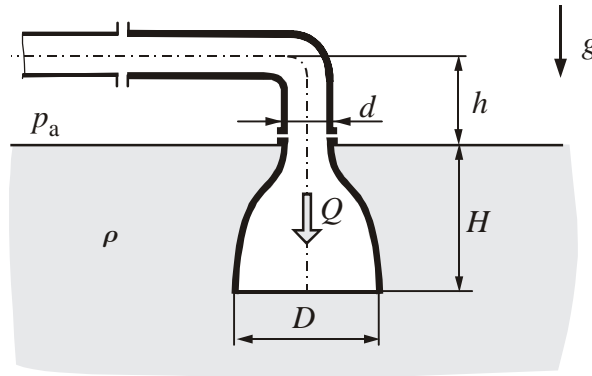
$$Q = \sqrt{\frac{F \cdot h \cdot (\cos \beta + \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha)}{\rho}} = 168 \text{ l/s} \quad (\text{h})$$

Brzina v u točki 0 je $v = Q/(h \cdot 1) = 6,73 \text{ m/s}$, a brzina v_A u presjeku A-A je $v_A = Q/(H \cdot 1) = 4,2 \text{ m/s}$. Iz Bernoullijeve jednadžbe postavljene od točke A do točke 0 prema slici (a), koja glasi

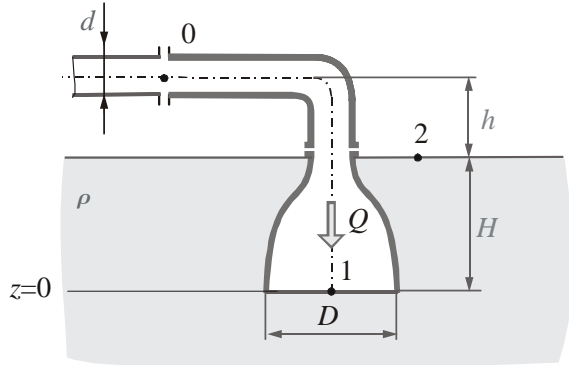
$$\frac{p_M}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} \quad (\text{i})$$

slijedi traženi pretlak $p_M = 0,5\rho(v^2 - v_A^2) = 13800 \text{ Pa}$.

4. Treba odrediti rezultantnu silu fluida (veličinu i smjer) na difuzor s koljenom, prema slici, uz protok $Q=389$ l/s. Pretpostaviti strujanje idealnoga fluida. Volumen difuzora je $V_d=3,27$ m³, a volumen koljena do priključka je $V_k=0,16$ m³. Napomena: uzeti u obzir i silu hidrostatskog tlaka koja djeluje izvana na difuzor. Zadano je: $D=1,2$ m, $d=0,3$ m, $H=6,6$ m, $h=1,2$ m, $\rho=1011$ kg/m³.



Rješenje:



Slika (a)

Slika (a) prikazuje sustav koljena i difuzora s ucrtanim karakterističnim točkama. Iz zadanog protoka Q je moguće izračunati brzine u cijevi i koljenu promjera d . Brzina v_0 na ulazu u koljeno je

$$v_0 = \frac{4Q}{d^2\pi} = 5,5 \text{ m/s} \quad (\text{a})$$

a na izlazu iz difuzora brzina v_1 je

$$v_1 = \frac{4Q}{D^2\pi} = 0,344 \text{ m/s} \quad (\text{b})$$

Pretpostavlja se da je prostor u kojeg fluid istječe iz difuzora dovoljno veliki da se strujanje fluida u tom prostoru može zanemariti, tj. pretpostavlja se da u njemu vlada hidrostatski tlak kao u fluidu u mirovanju. Prema tome je pretlak p_{M1} u točki 1 na izlazu iz difuzora jednak $p_{M1} = \rho g H = 65440$ Pa. Nepoznati pretlak p_{M0} u točki 0 na ulazu u koljeno slijedi iz Bernoullijeve jednadžbe postavljene od točke 0 do točke 1 koja glasi

$$\frac{p_{M0}}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} + H + h = \frac{p_{M1}}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} \quad (\text{c})$$

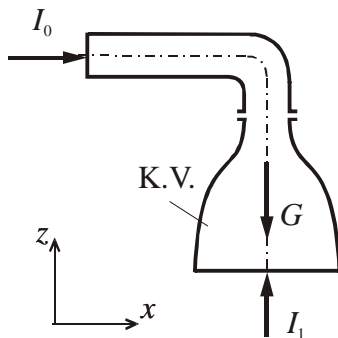
Uzimajući u obzir da je $p_{M1}/\rho g = H$, jasno je da jednadžba (c) prelazi u Bernoullijevu jednadžbu postavljenu od točke 0 do točke 2 na slobodnoj površini, u kojoj bi član $v_1^2/2g$ označavao gubitke utjecanja u veliki spremnik, a koji nastaju od točke 1 do točke 2 prema slici (a). Iz jednadžbe (c) slijedi

$$p_{M0} = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_0^2) - \rho g h = -27147 \text{ Pa} \quad (\text{d})$$

što ukazuje na činjenicu da na ulazu u koljeno vlada podtlak. Ovdje treba naglasiti da je u ovom primjeru pretpostavljeno strujanje idealnoga fluida kod kojeg je moguće strujanje bez odvajanja i

kod ovako velikog omjera promjera $D/d=4$, što kod realnog fluida ne bi dolazilo u obzir. Pojavom odvajanja strujanja u realnoj situaciji bi izlazni presjek difuzora bio efektivno manji, a i gubici mehaničke energije ne bi bili zanemarivi. U tom smislu ovo treba shvatiti kao školski primjer.

Nakon što su određene brzine i tlakovi u karakterističnim presjecima može se primjenom jednadžbe količine gibanja izračunati sila fluida na difuzor.



Slika (b)

Slika (b) prikazuje kontrolni volumen koji obuhvaća unutarnjost koljena i difuzora. Na ulaznoj površini je veličina impulsne funkcije

$$I_0 = (p_{M0} + \rho v_0^2) \frac{d^2 \pi}{4} = 243 \text{ N} \quad (\text{e})$$

a na izlaznoj

$$I_1 = (p_{M1} + \rho v_1^2) \frac{D^2 \pi}{4} = 74140 \text{ N} \quad (\text{f})$$

Težina G fluida u koljenu i difuzoru je

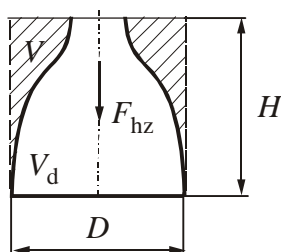
$$G = \rho g (V_k + V_d) = 34000 \text{ N} \quad (\text{g})$$

Gledajući sliku (b) horizontalna komponenta F_x^u i vertikalna komponenta F_z^u sile fluida na koljeno i difuzor su

$$F_x^u = I_0 = 243 \text{ N} \quad (\text{h})$$

$$F_z^u = I_1 - G = 40140 \text{ N} \quad (\text{i})$$

i gledaju u pozitivnim smjerovima izabranog koordinatnog sustava. S obzirom da su impulsne funkcije računane s manometarskim tlakom, u ovim komponentama sile je već obračunata sila atmosferskog tlaka koja djeluje izvana na difuzor, te ostaje još za izračunati silu hidrostatskog tlaka, koja djeluje na difuzor. Vertikalna komponenta sile hidrostatskog tlaka na površinu potopljenu u mirujućem fluidu je po definiciji jednaka težini fluida u volumenu između promatrane površine i slobodne površine.



Slika (c)

Slika (c) prikazuje taj volumen za ovaj primjer. Očito je obujam V fluida koji definira vertikalnu komponentu sile hidrostatskog tlaka jednak obujmu valjka promjera D visine H , umanjenom za obujam V_d difuzora, tj.

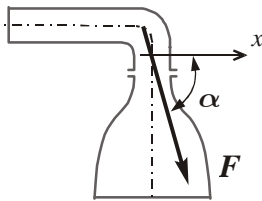
$$V = \frac{D^2 \pi}{4} H - V_d = 4,19 \text{ m}^3 \quad (\text{j})$$

Vertikalna komponenta F_z^v sile hidrostatskog tlaka gleda prema dolje, a po veličini je jednaka

$$F_z^v = -\rho g V = -41590 \text{ N} \quad (\text{k})$$

Horizontalna komponenta sile hidrostatskog tlaka na difuzor je jednaka nuli. Rezultantna sila F na koljeno i difuzor je zbroj sile F^u koja djeluje iznutra i sile hidrostatskog tlaka F_z^v , koja djeluje izvana, tj.

$$\begin{aligned} F_x &= F_x^u = 243 \text{ N} \\ F_z &= F_z^u + F_z^v = -1451 \text{ N} \end{aligned} \quad (\text{l})$$



Slika (d)

Rezultantna sila je $F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = 1471 \text{ N}$, a djeluje pod kutom $\alpha = \text{artg}(F_z/F_x) = 80,5^\circ$ u odnosu na pozitivnu smjer osi x , kao što prikazuje slika (d).