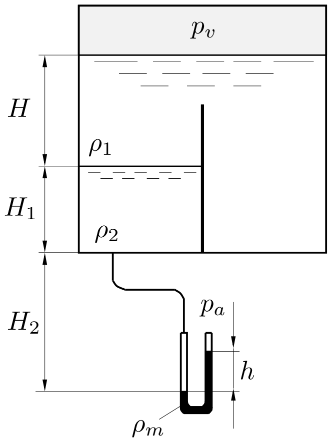
Машински факултет Београд
Катедра за механику флуида 02. фебруар 2008. год.

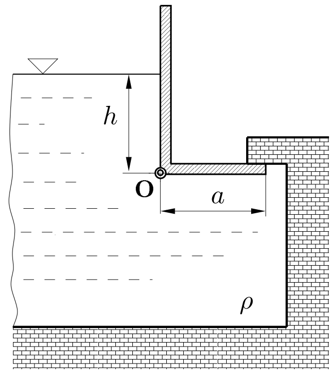
МЕХАНИКА ФЛУИДА Б - практични део испита

1. Резервоар подељен је преградом занемарљиве дебљине на два дела (слика 1). У резервоару се налазе две течности густина $\rho_1 = 800\,\mathrm{kg/m^3}$ и $\rho_2 = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$. Одредити висину H ако су познати следећи подаци: $\rho_m = 13600\,\mathrm{kg/m^3}$, $H_1 = 0.6\,\mathrm{m}$, $H_2 = 1.2\,\mathrm{m}$, $h = 50\,\mathrm{mm}$ и $p_v = 0.2\,\mathrm{bar}$. (7 поена)

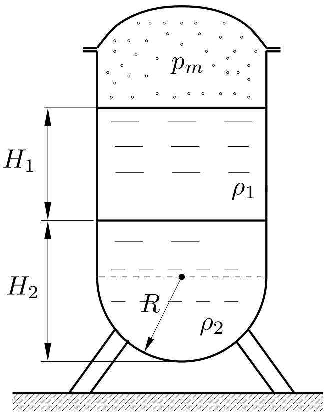
2. Угласти затварач приказан на слици 2 и ширине b (управно на раван цртежа) затвара отвор у резервоару у коме се налази течност густине ρ и може да се окреће без трења око осовине O. Ако је $a = 0.5\,\mathrm{m}$, одредити при којој висини h ће доћи до отварања затварача. Занемарити његову тежину. (12 поена)



Слика 1



Слика 2



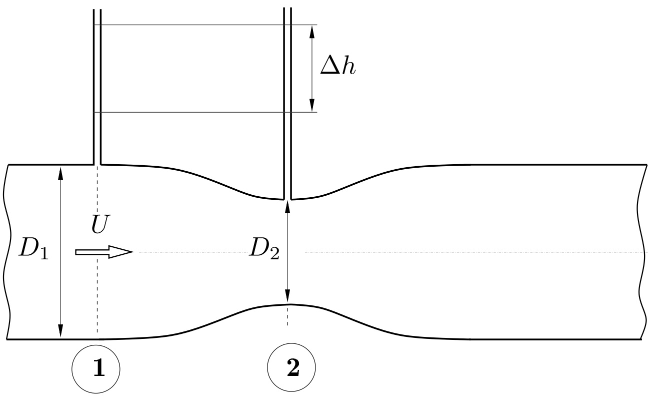
Слика 3

3. На слици 3 је приказан резервоар у коме се налазе две течности густина $\rho_1 = 800\,\mathrm{kg/m^3}$, $\rho_2 = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$. Познати су и следећи подаци: $p_m = 5\,\mathrm{kPa}$, $H_1 = 2\,\mathrm{m}$, $H_2 = 1.5\,\mathrm{m}$, $R = 1\,\mathrm{m}$. Одредити положај слободне површи течности густине ρ_2, и силу притиска на дно суда облика полусфере. (14 поена)

4. Векторско поље брзине неког раванског струјања је описано у Декартовом правоуглом координатном систему као $\vec{U} = 6xe^{-t}\,\vec{i} + 6ye^{-t}\,\vec{j}$.

- Одредити једначине струјница и нацртати струјну слику у временском тренутку $t = 0$ и
- одредити вектор убрзања у просторно-временској тачки A$(x = 10\,\mathrm{m}, y = 6\,\mathrm{m}, t = 10\,\mathrm{s})$. (12 поена)

5. Вода тече кроз Вентури цев. Одредити висинску разлику Δh нивоа воде у пијезометарским цевчицама ако се зна да је брзина $U_1 = U$ и да је $D_1/D_2 = 2$.



Слика 4

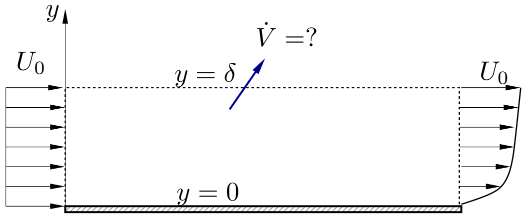
Уцртати положај нивоа воде у пијезометарским цевчицама. (10 поена)

6. Нестишљив флуид струји преко равне плоче (слика 5). Улазни профил је равномеран, док је излазни профил одређен изразом

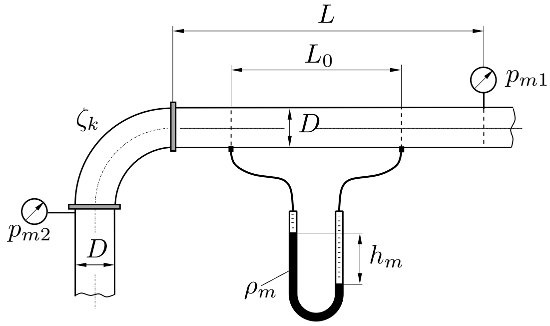
$$u = U_0 \frac{3\eta - \eta^3}{2}, \qquad \eta = \frac{y}{\delta}$$

Одредити запремински проток $\dot{V} = \dot{V}(U_0, \delta)$ по јединици ширине ($b = 1\,\mathrm{m}$, димензија управна на раван цртежа) кроз горњу површ контролне запремине.

(13 поена)



Слика 5



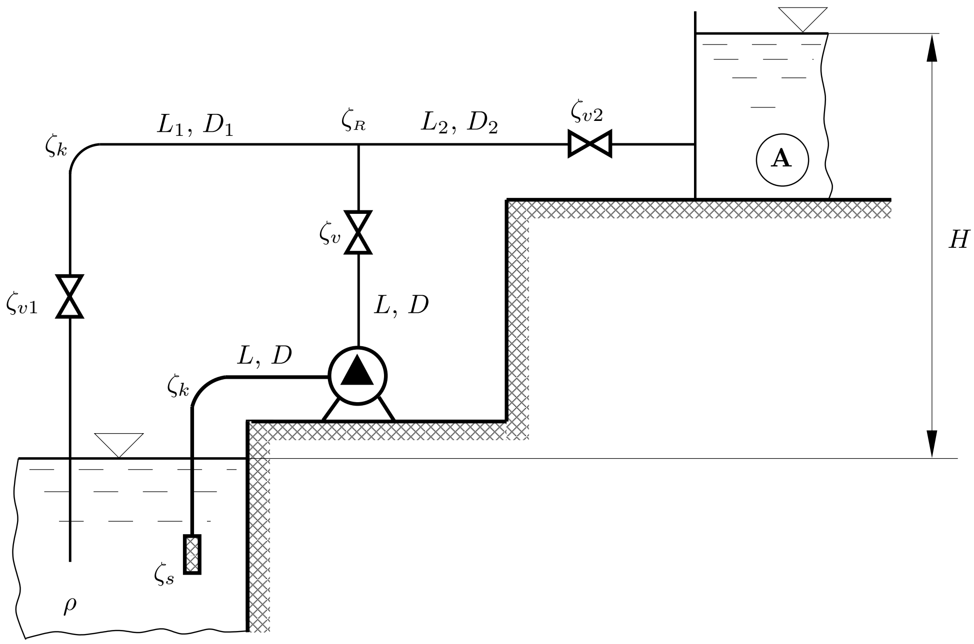
Слика 6

7. На слици 6 је приказан део неког цевовода кроз који тече вода ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$). Цевовод је пречника $D = 100\,\mathrm{mm}$ и измерени притисци у одговарајућим пресецима износе $p_{m1} = 3\,\mathrm{bar}$, $p_{m2} = 2.485\,\mathrm{bar}$, показивање манометра са живом ($\rho_m = 13600\,\mathrm{kg/m^3}$) је $h_m = 180\,\mathrm{mm}$, дужине $L_0 = 15\,\mathrm{m}$ и $L = 30\,\mathrm{m}$, а коефицијент отпора кривине је $\zeta_k = 0.95$. Одредити силу којом вода приликом струјања делује на кривину. Занемарити тежину воде унутар кривине, као и разлику геодезијских висина између прирубница (карактеристичних контролних пресека).

(16 поена)

8. Пумпом се претаче вода ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$) у велики отворени резервоар А сложеним цевоводом (слика 7). Вентилом $\mathrm{V_1}$ у повратном воду може се регулисати проток воде ка резервоару А. Познати су следећи подаци: $H = 5\,\mathrm{m}$, $L = 3\,\mathrm{m}$, $D = 100\,\mathrm{mm}$, $L_1 = 6\,\mathrm{m}$, $D_1 = 60\,\mathrm{mm}$, $L_2 = 3\,\mathrm{m}$, $D_2 = 80\,\mathrm{mm}$, $\zeta_s = 2.5$, $\zeta_k = 0.3$, $\zeta_v = 0.8$, $\zeta_{v1} = 25$, $\zeta_{v2} = 2$, $\zeta_R = 0.5$ и $\lambda = 0.03$ (за све цеви). Израчунати снагу потребну за погон пумпе ($\eta_P = 0.75$) којом се остварује проток $\dot{V}_2 = 300\,\mathrm{l/min}$ ка резервоару А.

(16 поена)



Слика 7

МЕХАНИКА ФЛУИДА Б - решења задатака из јануарског испитног рока

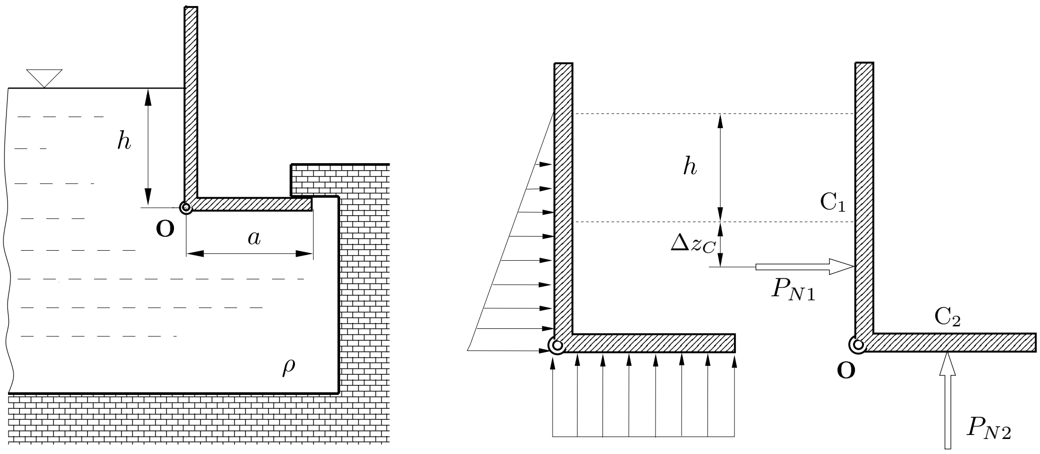
1. На основу показивања манометра (једначина хидростатичке равнотеже):

$$p_a - p_v + \rho_1 g H + \rho_2 g (H_1 + H_2) = p_a + \rho_m g h$$

следи:

$$\boxed{H} = \frac{p_v + \rho_m g h - \rho_2 g (H_1 + H_2)}{\rho_1 g} = \frac{0.2 \cdot 10^5 + 13600 \cdot 9.81 \cdot 0.05 - 800 \cdot 9.81 (0.6 + 1.2)}{800 \cdot 9.81} = \boxed{1.598\,\mathrm{m}}$$

2. Висина h се одређује из моментне једначине написане за осу која се поклапа са осовином O. Угласти затварач се састоји из једне вертикалне (правоугаоник димензија $b \times h$) и једне хоризонталне површи. Како је хидростатички притисак линеарно зависи од вертикалне координате (обично је означавамо са z), на вертикалној површи он ће се линеарно повећавати идући од слободне површи течности као тачки 0, док ће се он бити исти у свим тачкама хоризонталне површи. Овде правимо аналогију са за Механиком I (Статиком) и континуалним оптерећењем; такве расподеле притиска доводе до тога да сила притиска на вертикалној површи делује испод тежишта на растојању означеном са Δz_C, док ће на хоризонталној површи она деловати тачно у њеном тежишту (слика 1).



Слика 1

Силе притиска су одређене изразима:

$$P_{N1} = (p_{C1} - p_a) A \equiv \rho g z_{C1} A = \rho g \frac{h}{2} b h$$

$$P_{N1} = (p_{C2} - p_a) A \equiv \rho g z_{C2} A = \rho g h a b.$$

Положај нападне тачке силе P_{N1} се одређује применомВарињонове теореме - опет Статика 1 - сума момената свих сила за дату тачку (осу) једнака је моменту резултанте тих сила за дату тачку (осу). Како се ради о континуалном оптерећењу (притисак), компоненте су елементарне силе притиска dP, па се применом горе поменуте теореме добија израз:

$$\Delta z_C = \frac{I_{Cx}}{z_{C1} A} = \frac{bh^3}{12} \frac{1}{\frac{h}{2} bh} = \frac{h}{6}.$$

Величина $I_C x$ тежишни момент инерције за одговарајућу површ (у конкретном случају правоуганик) за осу управну на раван цртежа.

Сада су познати сви неопходни подаци, па се може написати моментна једначина за осу која пролази кроз тачку O и управна је на раван цртежа. Како се у задатку тражила висина h при којој ће доћи до отварања затварача, реакција ослонца на месту где је ослоњена хоризонтална површ затварача ће у том случају бити једнака нули (затварач почиње да се отвара), моментна једначина је облика

$$P_{N1}\left(\frac{h}{2}-\Delta z_C\right) \geq P_{N2}\,\frac{a}{2}.$$

Заменом одговарајућих једначина добија се

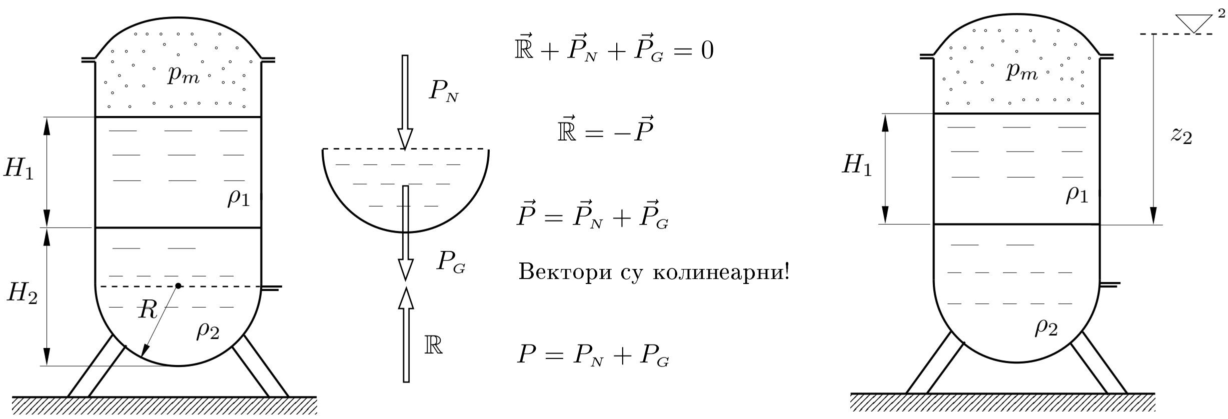
$$\rho g\frac{h}{2}bh\left(\frac{h}{2}-\frac{h}{6}\right) \geq \rho ghab\cdot\frac{a}{2},$$

одакле је

$$\boxed{h \geq a\sqrt{3}} \qquad \text{тј.} \qquad \boxed{h \geq 0.866\,\text{m}}.$$

---

3. Задатак је најједноставније решити тако што се посматра статичка равнотежа погодно изабране запремине течности, с тим да један део површи који ограничава ту запремину буде у потпуности у контакту са одговарајућом површи, а да се остали део површи састоји из једне или више равни површи. Тако на изабрану запремину течности приказану на слици 2, делују површинске силе: сила P_N, која делује на равну површ и представља утицај остатка течности у суду; сила $\mathbb{R}$, која представља дејство криве површи на течност - $\vec{\mathbb{R}}=-\vec{P}$, где је $\vec{P}$ сила којом течност делује на криву површ (**то се тражи**) и запреминска сила, у овом случају (апсолутно мировање у пољу силе Земљине теже), тежина течности која се налази унутар запремине.



Слика 2

Имајући у виду горе речено, силе P_N и P_G су одређене изразима:

$$\begin{aligned}\boxed{P_N} &= (p_C-p_a)A=\left[\,p_m+\rho_1 gH_1+\rho_2 g(H_2-R)\,\right]R^2\pi\\ &= \left[\,5\cdot 10^3+800\cdot 9.81\cdot 2+1000\cdot 9.81\cdot(1.5-1)\,\right]1^2\pi=\boxed{80.43\,\text{kN}}\end{aligned}$$

$$\boxed{P_G}=\rho_2 gV=\rho_2 g\cdot\frac{2}{3}r^3\pi=\frac{2}{3}1000\cdot 9.81\cdot 1^3\pi=\boxed{20.55\,\text{kN}}$$

Сила притиска P је једнака

$$\boxed{P}=P_N+P_G=80.43+20.55=\boxed{101\,\text{kN}}.$$

Положај слободне површи (изобарска површ на којој је $p=p_a$) одређен изразом

$$p_m+\rho_1 gH_1=\rho_2 gz_2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{z_2}=\frac{p_m}{\rho_2 g}+\frac{\rho_1}{\rho_2}H_1=\frac{5000}{9.81\cdot 1000}+\frac{800}{1000}\cdot 2=\boxed{2.11\,\text{m}}$$

---

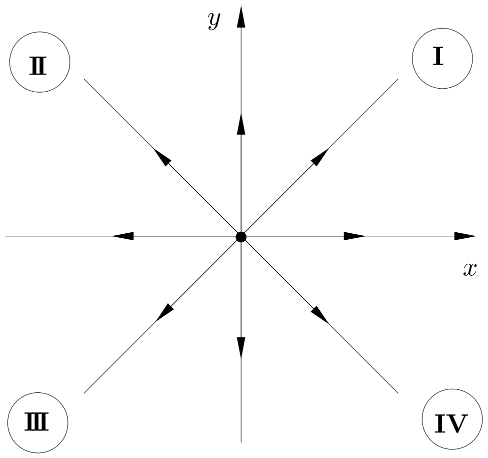
4. На основу задатог брзинског поља, његове пројекције су одређене скаларним пољима

$$u(x,y,t)=6x\,e^{-t} \qquad \text{и} \qquad v(x,y,t)=6y\,e^{-t}.$$

Струјнице представљају векторске линије брзинског поља, и одређене су изразом

$$\frac{\mathrm{d}x}{u} = \frac{\mathrm{d}y}{v} \quad \Rightarrow \quad e^t\,\frac{\mathrm{d}x}{6x} = e^t\,\frac{\mathrm{d}y}{6y} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y} + C_1 \quad \Rightarrow \quad \ln x = \ln y + \ln C_2 \quad \Rightarrow \boxed{y = C\,x}$$

где су C, C_1 и C_2 константе. Фамилије струјница (разне вредности константе C, $C \in \mathcal{R}$, где је $\mathcal{R}$ скуп реалних бројева) су праве које пролазе кроз координатни почетак. Смер струјања се одређује на основу задатог брзинског поља (слика 3).



Слика 3

Временски тренутак $t = 0$

$$u(x, y) = 6x, \qquad v(x, y) = 6y$$

I квадрант $(x > 0,\, y > 0) \quad \rightarrow \quad u > 0,\, v > 0$

II квадрант $(x < 0,\, y > 0) \quad \rightarrow \quad u < 0,\, v > 0$

III квадрант $(x < 0,\, y < 0) \quad \rightarrow \quad u < 0,\, v < 0$

IV квадрант $(x > 0,\, y < 0) \quad \rightarrow \quad u > 0,\, v < 0$

Векторско поље убрзања одређено је материјалним изводом векторског поља брзине, а како се у овом случају ради о дводимензијском струјању, убрзање је одређено изразом:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{D}\vec{U}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U}\cdot\nabla)\vec{U} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + u\,\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + v\,\frac{\partial \vec{U}}{\partial y}.$$

Убрзање у просоторно временској тачки A:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -6xe^{-t}\,\vec{i} - 6ye^{-t}\,\vec{j} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\bigg|_{\mathrm{A}} = -6\cdot 10\,e^{-10}\,\vec{i} - 6\cdot 6\cdot\, e^{-10}\,\vec{j} = -e^{-10}\,\left(60\,\vec{i} + 36\,\vec{j}\right)$$

$$u\,\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = 6x\,e^{-t}\cdot 6e^{-t}\,\vec{i} \quad \rightarrow \quad u\,\frac{\partial \vec{U}}{\partial x}\bigg|_{A} = 36\cdot 10\cdot e^{-2\cdot 10}\,\vec{i} = 360\,e^{-20}\,\vec{i}$$

$$v\,\frac{\partial \vec{U}}{\partial y} = 6y\,e^{-t}\cdot 6e^{-t}\,\vec{i} \quad \rightarrow \quad v\,\frac{\partial \vec{U}}{\partial y}\bigg|_{A} = 6\cdot 6\cdot 6\,e^{-2\cdot 10} = 216\,e^{-20}\,\vec{i}$$

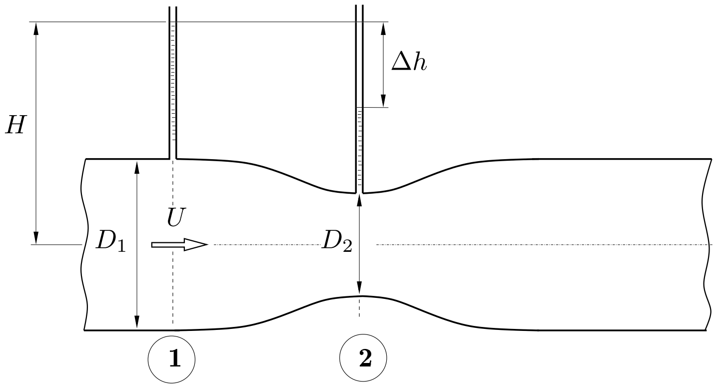
Коначно је:

$$\begin{aligned} \boxed{\vec{a}\Big|_{\mathrm{A}}} \quad &= \quad -e^{-10}\left(60\,\vec{i} + 36\,\vec{j}\right) + 360\,e^{-20}\,\vec{i} + 216\,e^{-20}\,\vec{i} = -e^{-10}\left(1 - e^{-10}\right)\left(60\vec{i} + 36\vec{j}\right) \\ &= \quad \boxed{-(2.724\vec{i} + 1.634\vec{j})\cdot 10^{-3}} \end{aligned}$$

---

5. Смањење попречног пресека доводи до повећања брзине (да би била задовољена једначина континуитета у случају стационарног струјања нестишљивог флуида, $\dot{V} = const$), а с друге стране повећање брзине условљава смањене статичког притиска (на основу Бернулијеве једначине; ако се посматрају унутрашња струјање, ово је, стриктно говорећи, ово је апсолутно тачно у случају хоризонталне цеви, $z = const$). Имајући претходно речено у виду, притисак у најужем пресеку Вентуријеве цеви ће бити мањи од притиска у узводном пресеку, па ће положај течности у пиезометарским цевчицама бити као на слици 4. Из једначине континуитета следи:

$$U_1 D_1^2 = U_2 D_2^2 \quad \rightarrow \quad U_2 = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{U_2 = 4U}.$$



Слика 4

Из Бернулијеве једначине следи:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{U_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{U_2^2}{2} \quad \rightarrow \quad p_1 - p_2 = \rho\,\frac{U_1^2 - U_2^2}{2}$$

На основу показивања пијезометарских цевчица

$$p_1 = p_a + \rho g H, \quad p_2 = p_a + \rho g (H - \Delta h) \qquad \Rightarrow \qquad p_1 - p_2 = \rho g \Delta h$$

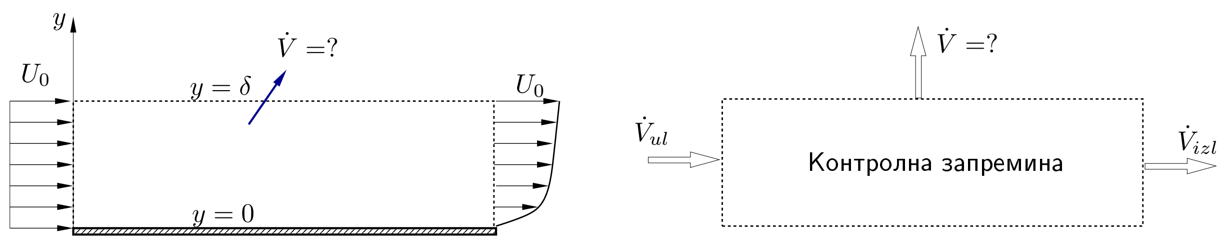
Коначно се добија:

$$\rho\,\frac{U_1^2 - U_2^2}{2} = \rho g \Delta h \quad \rightarrow \quad \Delta h = \frac{(4U)^2 - U^2}{2g} \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta h = \frac{15U^2}{2g}}$$

---

6. Запремински проток се одређује из једначине биланса за контролону запремину са слике 5

$$\dot{V} = \dot{V}_{ul} - \dot{V}_{izl}$$



Слика 5

У улазном пресеку профил брзине је равномеран, па је запремински проток одређен изразом

$$\dot{V}_{ul} = U_0\, A = U_0\, \delta b = U_0\, \delta.$$

У излазном пресеку профил брзине је неравномеран, па је запремински проток одређен изразом

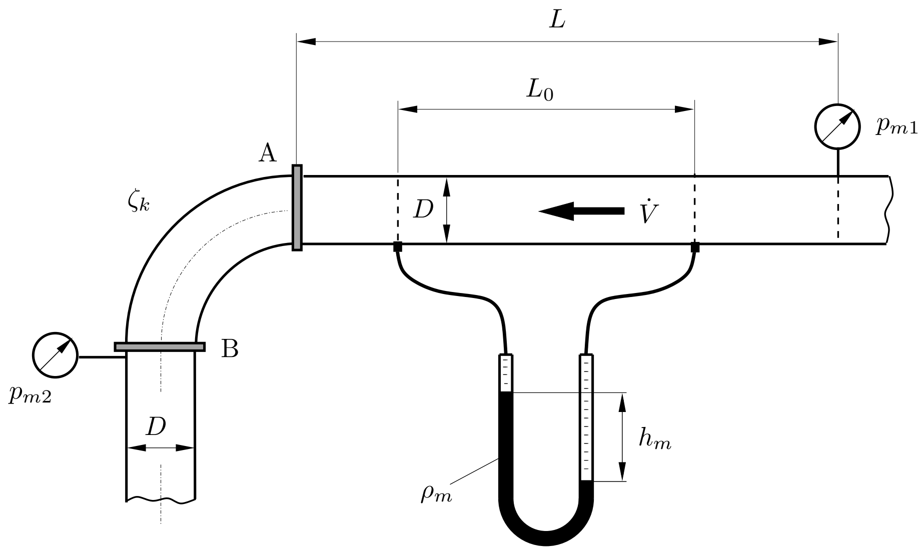
$$\dot{V}_{izl} = \int_0^\delta u(y)\, b\, \mathrm{d}y = \int_0^\delta U_0 \left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] \mathrm{d}y = \left[\frac{3U_0}{2\delta}\frac{y^2}{2} - \frac{U_0}{2\delta^3}\frac{y^4}{4}\right]_0^\delta = \frac{5}{8} U_0\, \delta$$

Тражени запремински проток је

$$\boxed{\dot{V}} = \dot{V}_{ul} - \dot{V}_{izl} = U_0\,\delta - \frac{5}{8}U_0\,\delta = \boxed{\frac{3}{8}\,U_0\,\delta}$$

---

7. На основу показивања диференцијалног манометра закључује се да је смер струјања с десна у лево (слика 6)



Слика 6

На основу показивања диференцијалног манометра

$$\left.\begin{aligned} \Delta p_{L0} &= (\rho_m-\rho)gh = \rho\lambda\frac{L_0}{D}\frac{U^2}{2} \\ \Delta p_L &= \rho\lambda\frac{L}{D}\frac{U^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} \frac{\Delta p_{L0}}{\Delta p_L} &= \frac{L_0}{L} \\ \Delta p_L &= \Delta p_{L0}\frac{L}{L_0} \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \Delta p_L = (\rho_m-\rho)gh\,\frac{L}{L_0} = 44.45\,\mathrm{kPa}$$

Натпритисак у пресеку А:

$$p_{mA} = p_{m1} - \Delta p_L = 3\cdot 10^5 - 44.45\cdot 10^3 = 2.556\,\mathrm{bar}$$

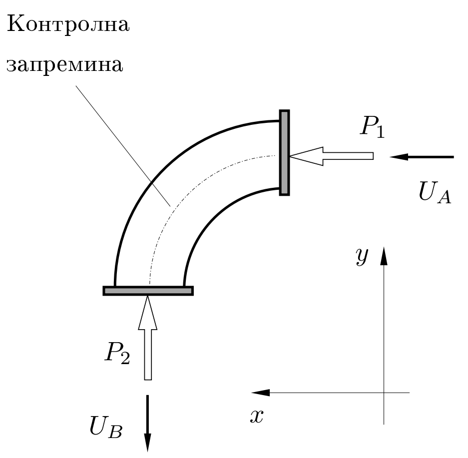
Бернулијева једначина А-В ($U_A = U_B = U$, јер је $D = const$):

$$p_{mA} + \rho\frac{U_A^2}{2} = p_{mB} + \rho\frac{U_B^2}{2} + \rho\,\zeta_k\,\frac{U_B^2}{2} \quad\Rightarrow\quad U = \sqrt{\frac{2(p_{mA}-p_{mB})}{\rho\,\zeta_k}} = 3.886\,\mathrm{m/s}$$

Масени проток кроз цевовод

$$\dot{m} = \rho U\frac{D^2\pi}{4} = 3.886\cdot 1000\cdot\frac{0.1^2\,\pi}{4} = 30.36\,\mathrm{kg/s}$$

За одређивања силе којом вода делује на кривину користи се закон о промени количине кретања, који се у случају стационарног струјања, своди на једначину динамичке равнотеже за одговарајућу, погодно изабрану контролну запремину. Један део површи који ограничава контролну запремину се мора поклапати са кривином, док остале површи представљају улазну, односно излазну контролну површ кроз које се одвија флукс (проток) количине кретања. Промена тог флукса једнака је векторском збиру свих површинских и масених сила које делују на флуид унутар контролне запремине. На слици 7 је приказана контролна запремина, са карактеристичним површима и силама које на њу делују.



Сила којом вода делује на кривину је одређена изразом

$$\vec{F} = \dot{m}\vec{U}_A - \dot{m}\vec{U}_B + \vec{P}_1 + \vec{P}_2,$$

па су њене пројекције на осе изабраног координатног система

$$F_x = \dot{m}U + p_{m1}\,\frac{D^2\pi}{4} = 2.125\,\mathrm{kN}$$

$$F_y = \dot{m}U + p_{m2}\,\frac{D^2\pi}{4} = 2.069\,\mathrm{kN},$$

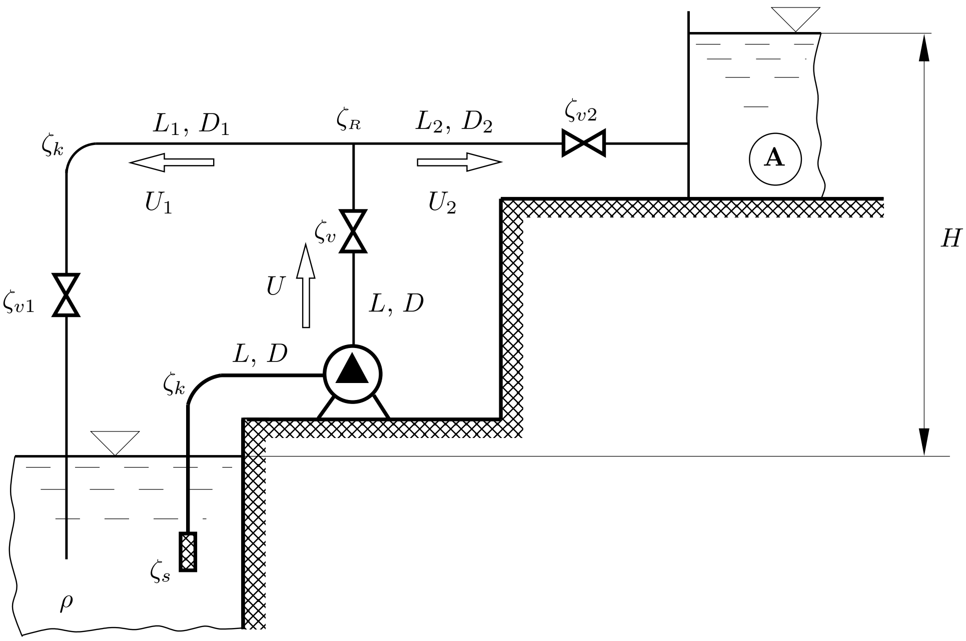
односно њен интензитет

$$F = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2} = \sqrt{2.125^2 + 2.069^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = 2.966\,\mathrm{kN}}$$

---

8. На слици 7 су назначене одговарајуће брзине у деоницама. На основу задатог запреминског протока $\dot{V}_2$ може се одредити брзина струјања у деоници 2 (проток је задат у литрима по минути!)

$$U_2 = \frac{4\dot{V}}{D_2^2\pi} = \frac{4\cdot 300\cdot 10^{-3}}{60\cdot 0.08^2\,\pi} = 0.995\,\mathrm{m/s}$$



Слика 7

На основу једнакости енергија у рачви следи[1]:

$$gH + \underbrace{\left(\zeta_R + \zeta_{v2} + 1 + \lambda\frac{L_2}{D_2}\right)}_{C_2=4.625}\frac{U_2^2}{2} = \underbrace{\left(\zeta_R + \zeta_k + \zeta_{v1} + 1 + \lambda\frac{L_1}{D_1}\right)}_{C_1=29.8}\frac{U_1^2}{2}$$

$$U_1 = \sqrt{\frac{2}{C_1}\left(gH + C_2\,\frac{U_2^2}{2}\right)} = \sqrt{\frac{2}{29.8}\left(9.81\cdot 5 + 4.625\cdot\frac{0.995^2}{2}\right)} = 1.856\,\mathrm{m/s}$$

[1] Једначина добијена одузимањем две Бернулијеве једначине: доњи резервоар → горњи резервоар и доњи резервоар → доњи резервоар (кроз повратну грану) или пак рачва → горњи резервоар и рачва → доњи резервоар

Даље се на основу једначине континуитета за рачву добија

$$U = \left(\frac{D_2}{D}\right)^2 U_2 + \left(\frac{D_1}{D}\right)^2 U_1 = \left(\frac{80}{100}\right)^2 \cdot 0.995 + \left(\frac{60}{100}\right)^2 \cdot 1.856 = 1.305\,\mathrm{m/s}$$

Проток кроз пумпу:

$$\dot{V} = U\,\frac{D^2\pi}{4} = 1.305 \cdot \frac{0.1^2\pi}{4} = 0.0102\,\mathrm{m^3/s}.$$

Јединични рад пумпе:

$$Y_P = \underbrace{\left(\zeta_s + \zeta_k + \zeta_v + \lambda\frac{2L}{D}\right)}_{C=21.6} + C_1\frac{U_1^2}{2} = gH + C\frac{U^2}{2} + C_2\frac{U_2^2}{2} = 21.6 \cdot \frac{1.305^2}{2} + 29.8 \cdot \frac{1.856^2}{2} = 69.72\,\mathrm{J/kg}$$

Снага пумпе је одређена изразом

$$\boxed{P} = \frac{\dot{m}Y_P}{\eta_P} = \frac{\rho\dot{V}Y_P}{\eta_P} = \frac{1000 \cdot 0.0102 \cdot 69.72}{0.8} = \boxed{888.9\,\mathrm{W}}$$