

# **MEHANIKA FLUIDA**

**Skripta za studente Tehničkog fakulteta u Rijeci**

**Luka Sopta**  
**Lado Kranjčević**

Rijeka, 2006.

## **SADRŽAJ**

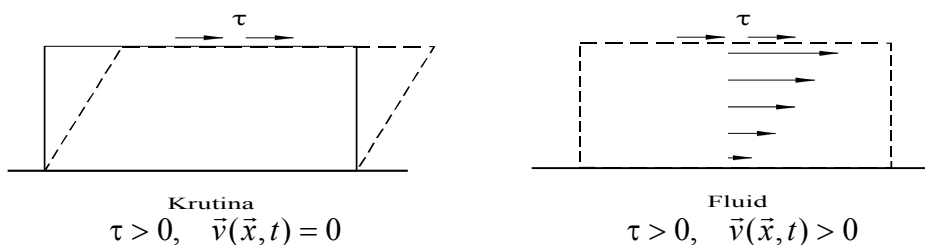
- 1. Statika fluida**
- 2. Osnove dinamike fluida**
- 3. Strujanje idealnog fluida**
- 4. Strujanje realnog fluida u cijevi**
- 5. Optjecanje tijela**

## UVOD

Materija se dijeli na čvrstu, tekuću i plinovitu. U čvrstom stanju materije molekule se nalaze u kristalnoj rešetki s malim stupnjem slobode gibanja. U tekućem stanju molekule imaju veću slobodu gibanja i mogu zauzeti proizvoljan oblik zadržavajući isti volumen, a u plinovitom stanju molekule mogu zauzeti proizvoljan prostor.

Najveći dio svemira je u fluidnom stanju. Galaksije, zvijezde i planete u većem dijelu se promatraju kao fluid. Atmosfera, oceani, mora, jezera i rijeke su fluidi. Unutrašnjost zemlje je u fluidnom stanju. Za gotovo sve industrijske grane važna je mehanika fluida: automobilska, avionska, brodograđevna, kemijska industrija, energetika... Čovjekovo tijelo je većim dijelom fluid. Za medicinu je od velike važnosti poznavanje strujanja krvi i drugih fluida u tijelu.

Definicija fluida: fluid je materija koja se deformira za proizvoljno malo tangencijalno naprezanje (SI.1.1).



SI.1.1

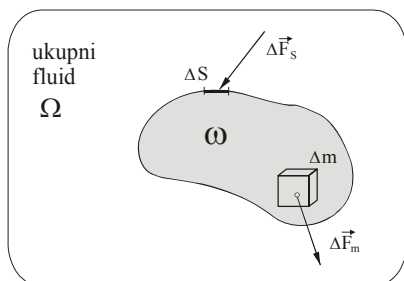
## 1. STATIKA FLUIDA

Statika fluida se bavi fluidom u stanju mirovanja. Fluid je u stanju mirovanja ako postoji koordinatni sustav u kojem je brzina čestica fluida u svakoj točki jednaka nuli.

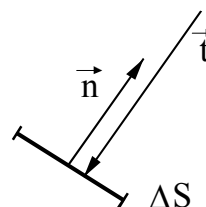
### 1.1 Osnovni zakoni statike fluida

U statici fluida vrijede dva osnovna zakona:

1. Suma sila na svako tijelo fluida jednaka je nuli.
2. Suma momenata na svako tijelo fluida jednaka je nuli.



SI.1.2



SI.1.3

Sile u mehanici fluida dijele se na [Cauchy]:

- *masene ili tjelesne sile*, u oznaci  $\vec{F}_m$ , (gravitacija, inercijalna sila, centrifugalna sila, Coriolisova sila, elektromagnetska sila)
- *kontaktne ili površinske sile*, u oznaci  $\vec{F}_s$ .

Gustoća masene sile, u oznaci  $\vec{f}$ , se definira u svakoj točki promatranog tijela fluida kao

$$\vec{f}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_m}{\Delta m} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_m}{\rho \Delta V},$$

gdje je  $\Delta m$  masa tijela  $\Delta V$  koje sadrži točku  $(x_0, y_0, z_0)$  i  $\Delta \vec{F}_m$  masena sila na to tijelo (SI.1.2).

Gustoća kontaktne sile, u oznaci  $\vec{t}$ , se definira u svakoj točki tijela fluida kao

$$\vec{t}(x, y, z) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_S}{\Delta S},$$

gdje je  $\Delta S$  površina diferencijalnog dijela ravnine definirane točkom  $(x, y, z)$  i normalom  $\vec{n}$ , te  $\Delta \vec{F}_S$  kontaktna sila na  $\Delta S$  (SI.1.3).

Uz osnovna dva zakona statike fluida, koji su ujedno osnovni zakoni statike bilo kojeg kontinuuma, potrebno je definirati konstitutivnu relaciju za fluid koja se očituje u definiranju tenzora naprezanja. Fluid u stanju mirovanja nema tangencijalnih naprezanja, odnosno gustoća kontaktne sile u proizvoljnoj točki  $(x, y, z)$  fluida kolinearna je vektoru normale za proizvoljno zadanu ravninu u točki  $(x, y, z)$  (SI.1.3), tj.

$$\vec{t}(x_0, y_0, z_0) = -|\vec{t}| \cdot \vec{n}.$$

Intenzitet gustoće kontaktne sile zove se tlak i označava se sa  $p$ . Stoga:

$$\vec{t}(x_0, y_0, z_0) = -p \cdot \vec{n}$$

*Intenzitet tlaka ne mijenja se s promjenom položaja plohe u promatranj točki.*

Kad fluid miruje, sila na plohu je okomita i tlak je uvijek isti, kako god postavili plohu  $\Delta s$ .

**Tlak je temeljna varijabla u mehanici fluida.**

Tlak u točki  $(x, y, z)$ ,  $p(x, y, z)$ , definiran je omjerom intenziteta kontaktne sile i površinom plohe. Osnovna jedinica za tlak je paskal, u oznaci Pa, i jednaka je kvocijentu sile od jednog njutna i površine od jednog metra kvadratnog, Pa (paskal) = N/m<sup>2</sup>. Često se koristi i jedinica *bar* = 10<sup>5</sup> Pa.

## 1.2 Osnovna jednadžba statike fluida – Eulerova jednadžba

$$\boxed{\text{grad } p = \rho \vec{f}}$$

Eulerova jednadžba predstavlja sustav diferencijalnih jednadžbi:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z$$

Zadatak statike fluida sastoji se u tome da se iz Eulerove jednadžbe statike fluida uz poznatu  $\vec{f}$  - gustoću volumne sile i  $\rho$  - gustoću (mase), izračuna raspodjela tlaka  $p(x, y, z)$ .

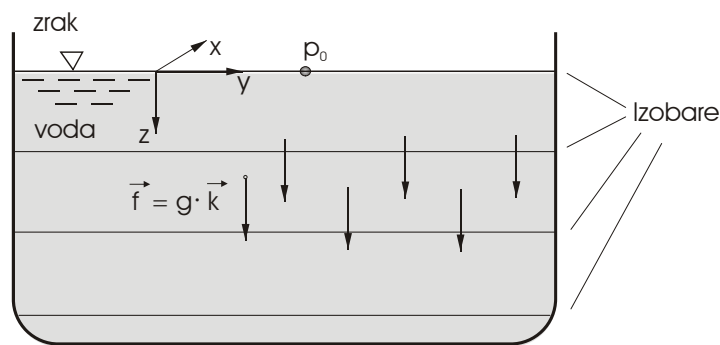
Eulerova jednađba izražava zakonitost da je najveća promjena tlaka (*grad p*) u mirujućem fluidu u smjeru masene sile  $\vec{f}$ . Gradijent tlaka je vektor okomit na *izobaru* (plohu jednakog tlaka).

### 1.3 Fluid konstantne gustoće u polju sile teže

Važan slučaj je slučaj fluida konstantne gustoće (homogenog fluida) u konstantnom polju sile teže. Koordinatni sustav definiran je tako da je

$$\vec{f} = g\vec{k},$$

gdje je  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  ubrzanje sile teže (*SI.1.4*).



*SI.1.4 Mirujući fluid u polju sile teže*

Eulerova jednađba napisana po komponentama glasi:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g.$$

Iz prve dvije jednađbe izlazi da je  $p$  funkcija samo varijable  $z$ , tj.  $p = p(z)$ . Treća diferencijalna jednađba je:

$$\frac{dp}{dz} = \rho g.$$

Opće rješenje ove jednađbe je

$$p(z) = \rho g z + C.$$

Konstanta integracije  $C$  se određuje iz poznavanja tlaka u jednoj točki fluida. Za  $z = 0$ , prema slici *SI.1.4* tlak je  $p = p_0$  pa slijedi vrijednost konstantne integracije  $C$ :

$$p(0) = p_0 = C.$$

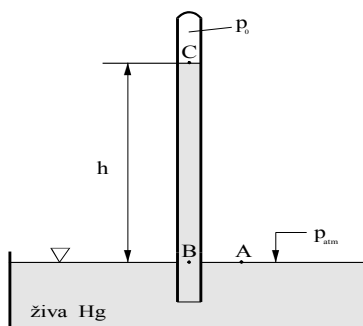
Iz prethodnog izraza vidljivo je: Izobare, plohe jednakog tlaka, su ravnine  $z = C$ , gdje je  $C$  proizvoljan broj, odnosno izobare su ravnine okomite na smjer sile teže. Na određenoj dubini fluida  $z = h$  tlak je:

$$p(z) = p_0 + \rho g h.$$

## 1.4 Mjerenje tlaka

### Barometar

Barometar je instrument za mjerenje atmosferskog tlaka. Princip barometra [Torricelli, 1643] je prikazan na **Sl.1.5**. Cijev dužine 1m napunjena je živom i uronjena u posudu sa živom. Živa u cijevi se spusti na visinu H, približno 760 mm, iznad površine žive u posudi.



**Sl.1.5**

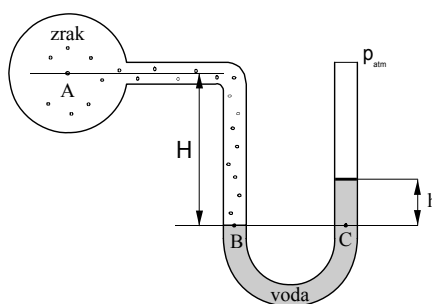
Prema **Sl.1.5**:  $p_A = p_{atm}$  (atmosferski tlak)

$$p_B = p_A, \quad p_C \approx 0 \quad (\text{vakuum}), \quad p_B = p_C + \rho_{Hg} \cdot g \cdot h$$

$$p_{atm} = p_B = \rho_{Hg} g h = 13600 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.81 \text{ N/kg} \cdot 0.76 \text{ m} = 1.01396 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1.01396 \text{ bar}$$

### Manometar

Manometar je instrument koji mjeri tlak pomoću stupca fluida. Princip rada manometra je prikazan na **Sl.1.6**. Sa slike moguće je zaključiti:



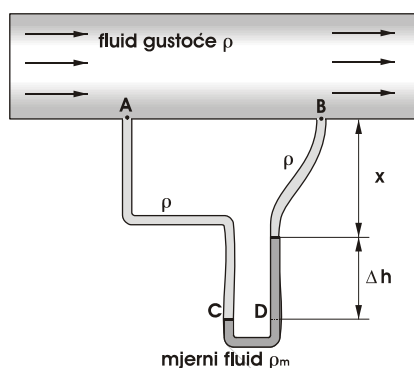
**Sl.1.6**

$$p_B = p_C \quad p_C = \rho_{fluida} g h + p_{atm} \quad p_B \cong p_A$$

### Diferencijalni manometar

Za diferencijalni manometar prema **Sl.1.7** slijedi:

$$p_C = p_A + \rho g (x + \Delta h), \quad p_D = p_B + \rho g x + \rho_m g \Delta h$$



SI.1.7

Izobara povučena kroz točke C i D daje  $p_C = p_D$ . Slijedi:

$$p_A - p_B = (\rho_m - \rho)g \Delta h$$

U slučaju da u cijevi SI.1.7 struji zrak, a mjerni fluid je voda, gornji izraz za razliku tlakova moguće je aproksimirati

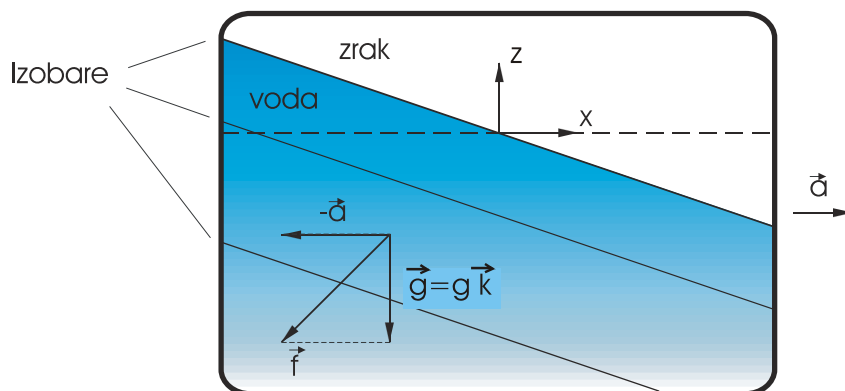
$$p_A - p_B \approx \rho_m g \Delta h,$$

pošto je mjerni fluid (voda  $\rho_m = \rho_{voda}$ ) u ovom slučaju približno tisuću puta gušći od fluida čiju razliku tlakova mjerimo (zrak  $\rho = \rho_{zrak}$ ).

## 1.5. Relativno mirovanje fluida

### Jednoliko ubrzanje fluida.

Promatra se fluid u posudi koja se giba konstantnim ubrzanjem  $\vec{a}$ , (SI.1.8) Čestice fluida miruju u koordinatnom sustavu vezanom za spremnik.



SI.1.8

Gustoća masene sile je:

$$\vec{f} = -\vec{a} - \vec{g}$$

Eulerova jednadžba glasi:

$$\text{grad } p = \rho \cdot \vec{f} = -\rho(\vec{a} + \vec{g}),$$

odnosno po komponentama:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Iz druge jednadžbe slijedi

$$p = p(x, z).$$

Integracijom iz prve jednadžbe slijedi

$$p = -\rho ax + \varphi(z)$$

Uvrštavanjem u treću jednadžbu dobije se:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} = -\rho g, \quad \varphi(z) = -\rho gz + C$$

Konačno se može napisati

$$p = -\rho ax - \rho gz + C .$$

Konstanta  $C$  se određuje iz poznavanja tlaka u proizvoljnoj točki fluida. Izobare su ravnine (u XZ ravnini pravci):

$$-\rho ax - \rho gz + C = 0$$

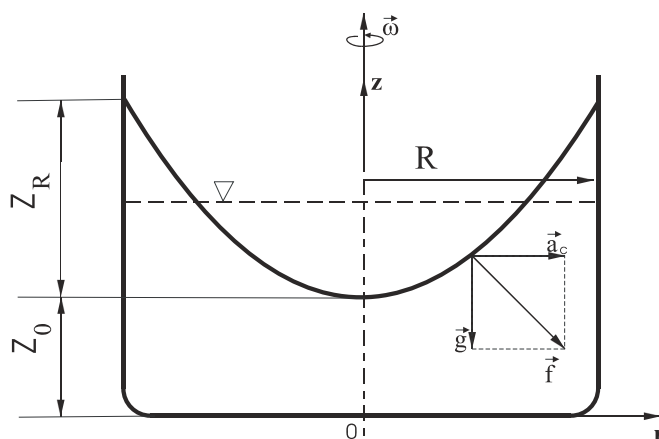
Ako fluid ima slobodnu površinu, onda je ona jedna izobara. Kut  $\theta$  izobara u odnosu na horizontalnu ravninu može se izračunati iz relacije:

$$\boxed{\tan \theta = \frac{a}{g}}$$

### **Rotacija fluida.**

Fluid u posudi rotira (*SI.1.9*) konstantnom kutnom brzinom  $\omega$ . Čestice fluida miruju u koordinatnom sustavu koji je vezan za posudu.





**SI.1.9**

Gustoća masene sile je sada

$$\vec{f} = \vec{g} + \vec{a}_c$$

gdje je  $\vec{a}_c$  centrifugalno ubrzanje. Treba uočiti da se  $\vec{f} = \vec{g} + \vec{a}_c$  mijenja po smjeru i intezitetu počevši od osi rotacije do ruba posude.

U cilindričnom koordinatnom sustavu (gdje je ishodište sustava na dnu posude, a osi  $z$  i  $r$  usmjerene kako je prikazano na slici **SI.1.9**) je

$$\vec{f} = \omega^2 r \vec{e}_r + 0 \cdot \vec{e}_\varphi + (-g) \vec{k}.$$

i gradijent tlaka

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}.$$

Eulerove jednačbe po komponentama glase:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Iz druge jednačbe slijedi  $p = p(r, z)$ . Integracijom prve jednačbe dobija se

$$p(r, z) = \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} + \psi(z).$$

gdje je  $\psi(z)$  proizvoljna funkcija varijable  $z$ . Ako se navedeni izraz uvrsti u treću jednačbu, nalazimo:

$$\frac{dp}{dz} = \frac{d\psi}{dz} = -\rho g, \text{ odnosno } \psi = -\rho g z + C$$

Konačno, polje tlaka je definirano relacijom:

$$p(r, z) = -\rho g z + \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} + C$$

Konstanta integracije C se dobije iz poznavanja tlaka u proizvoljnoj točki fluida (npr. na površini fluida  $p=p_0$ ):

$$p(r, z) = \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} + \rho g(Z_0 - z) + p_0$$

Izobare, plohe konstantnog tlaka, su rotacijski paraboloidi:

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + Z_0$$

Ako fluid ima slobodnu površinu, onda je ona izobara – rotacijski paraboloid. Volumen rotacijskog paraboloida jest pola volumena valjka visine  $Z_R$

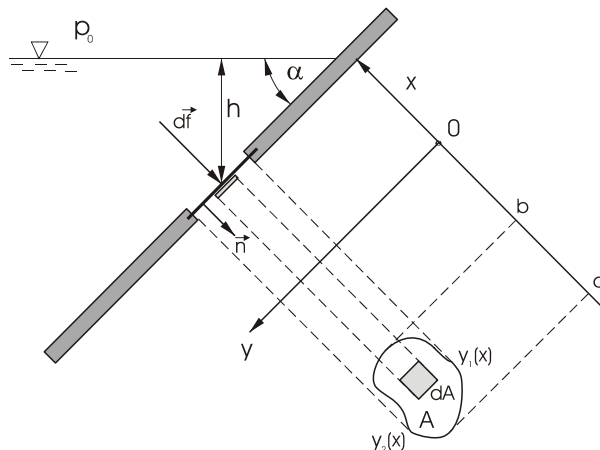
$$V_R = \frac{1}{2} R^2 \pi Z_R ,$$

gdje je (SI.1.9):

$$Z_R = \frac{\omega^2 R^2}{2g} .$$

## 1.6. Sile fluida na ravnu plohu

Na dio ravnine A treba izračunati silu F. Na  $dA$  djeluje sila  $d\vec{F}$  u smjeru normale  $\vec{n}$  (SI.1.10):



SI.1.10

$$d\vec{F} = p \cdot dA \cdot \vec{n} .$$

Ukupna sila je (vektor normale u ovom slučaju je konstanta):

$$\vec{F} = \vec{n} \int_A p dA ,$$

a intenzitet sile jednak je:

$$|\vec{F}| = F = \int_A p dA.$$

Za slučaj fluida konstantne gustoće u konstantnom gravitacijskom polju tlak je definiran relacijom:

$$p = \rho g h + p_0, \quad h = y \sin \alpha$$

$$p = \rho g y \sin \alpha + p_0$$

Sada za silu vrijedi:

$$F = \int_A (p_0 + \rho g \cdot y \sin \alpha) dx dy = \rho g \sin \alpha \int_A y dA + p_0 \int_A dA = p_0 A + \rho g \sin \alpha \int_A y dx dy,$$

Teorem o srednjoj vrijednosti daje:

$$\int_A y dx dy = y_T A,$$

gdje je  $y_T$  ordinata težišta  $T(x_T, y_T)$  površine  $A$ . Slijedi formula za izračun sile na dio ravnine  $A$ :

$$F = p_0 A + \rho g \sin \alpha y_T A$$

### **Centar tlaka**

Centar tlaka je točka  $P(x_P, y_P)$  za koju vrijedi:

$$M_x = y_P F, \quad M_y = x_P F$$

gdje su  $M_x, M_y$  momenti oko osi-x i osi-y.

Kako je ukupni moment oko x-osi promjenjive sile po površini  $A$ :

$$M_x = \int_A dM_x = \int_A y dF = \int_A y p dA = \int_A y (p_0 dA + \rho g \cdot y \cdot \sin \alpha \cdot dA) = p_0 \int_A y dA + \rho g \cdot \sin \alpha \int_A y^2 dA$$

slijedi da je:

$$y_P F = \rho g \cdot \sin \alpha I_{xx} + p_0 y_T A,$$

$$y_P = \frac{\rho g \sin \alpha I_{xx} + p_0 y_T A}{\rho g \sin \alpha \cdot y_T A + p_0 A}$$

gdje je  $I_{xx}$  (*moment inercije prema osi x*):

$$I_{xx} = \int_A y^2 dx dy$$

Na analogan način moguće je dobiti i x-koordinatu centra tlaka :

$$x_P F = \iint_A x p dA = \rho g \sin \alpha \iint_A x y dx dy + p_0 \iint_A x dx dy = \rho g \sin \alpha I_{xy} + p_0 x_T A$$

$$x_P = \frac{\rho g \sin \alpha I_{xy} + p_0 x_T A}{\rho g \sin \alpha y_T A + p_0 A},$$

pri čemu je:

$$I_{xy} = \iint_A x y dx dy$$

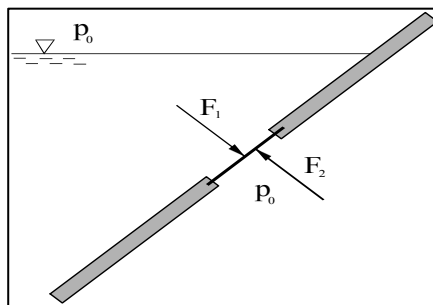
**produkt inercija** obzirom na osi x i y.

Za slučaj da je vanjski tlak  $p_0$  isti s obje strane plohe (**Sl.1.11**) vrijedi:

$$F_1 = p_0 A + \rho g \cdot y_T A \cdot \sin \alpha \quad F_2 = p_0 A \quad F_1 - F_2 = \rho g \cdot y_T A \cdot \sin \alpha$$

$$F = \rho g y_T \sin \alpha A$$

$$y_P = \frac{I_{xx} \cdot \rho g \sin \alpha}{y_T A \cdot \rho g \sin \alpha} = \frac{I_{xx}}{y_T A}.$$



**Sl.1.11 Tlak  $p_0$  s obje strane plohe**

Translacijom koordinatnog sustava x-y u težište plohe A dobije se novi koordinatni sustav  $\xi - \eta$ .

Ako se moment inercije  $I_{xx}$  izrazi pomoću  $I_{xx} = y_T^2 A + I_{\xi\xi}$ , gdje je  $I_{\xi\xi}$  moment inercije prema osi  $\xi$  koja prolazi kroz težište plohe, slijedi:

$$y_P = \frac{I_{\xi\xi} + y_T^2 A}{y_T A}, \text{ tj.}$$

$$y_P = y_T + \frac{I_{\xi\xi}}{y_T A}$$

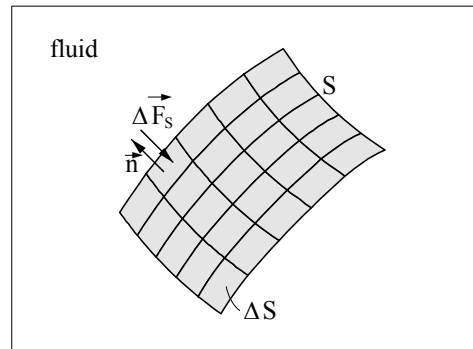
Slično, dobije se i

$$x_P = x_T + \frac{I_{\xi\eta}}{y_T A},$$

gdje je  $I_{\xi\eta}$  **produkt inercija** obzirom na koordinatni sustav koji prolazi kroz težište plohe. Izraze za moment inercije  $I_{\xi\xi}$  i produkt inercija  $I_{\xi\eta}$  za različite geometrijske likove moguće je očitati u većini adekvatnih priručnika.

## 1.7. Sile fluida na plohu

Na dio plohe  $S$ ,  $dS$ , djeluje sila  $d\vec{F}$  u smjeru vektora normale (**SI.1.12**):



**SI.1.12**

$$d\vec{F} = p \cdot dS \cdot \vec{n} .$$

Ukupna sila je:

$$\vec{F} = \int_S d\vec{F} = \int_S p \vec{n} dS .$$

Vektor normale može se napisati kao

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}$$

pri čemu je  $n_x = \cos \alpha$ ,  $n_y = \cos \beta$ ,  $n_z = \cos \gamma$ , a  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  kutevi koje vektor normale zatvara sa koordinatnim osima. Sila po komponentama:

$$F_x = \iint_S p n_x dS = \iint_{A_x} p dy dz , \quad F_y = \iint_S p n_y dS = \iint_{A_y} p dz dx , \quad F_z = \iint_S p n_z dS = \iint_{A_z} p dx dy$$

pri čemu su  $A_x$ ,  $A_y$ , i  $A_z$  odgovarajuće projekcije plohe  $S$  u ravnine  $yz$ ,  $xz$  i  $xy$ .

## 1.8. Uzgon

Ukupna kontaktna sila mirujućeg fluida na tijelo koje pluta ili je potopljeno u njemu zove se uzgon. Ukupna kontaktna sila fluida na tijelo jednaka je:

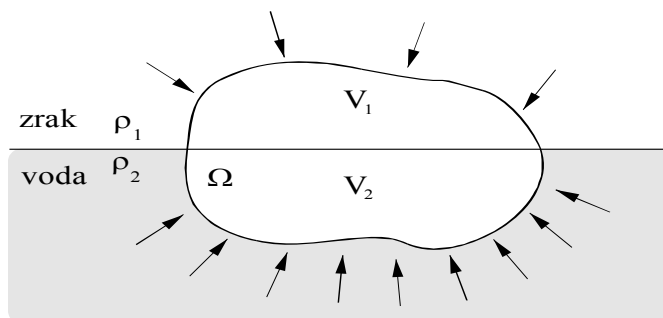
$$\boxed{\vec{F} = \rho_{fluida} \cdot g \cdot V_{tijela} \cdot \vec{k}}$$

$$U = F_z = \rho g V_{tijela}$$

odnosno, sila fluida na tijelo, **uzgon (U)**, ne ovisi o gustoći (materijalu) tijela, nego o gustoći fluida, gravitacijskom ubrzanju i volumenu tijela. Ako je težina tijela veća od uzgona,  $G > U$ , tijelo tone, ako je težina tijela jednaka uzgonu,  $G = U$ , tijelo lebdi u fluidu, a ako je težina tijela manja od uzgona,  $G < U$ , tijelo izranja.

Nakon što je tijelo izronilo njegova težina je jednaka uzgonu, i vrijedi, npr. za tijelo na granici kapljevine i plina (vode i zraka), sljedeće (**SI.1.13**):

$$U = \rho_2 g V_2 + \rho_1 g V_1 = G$$



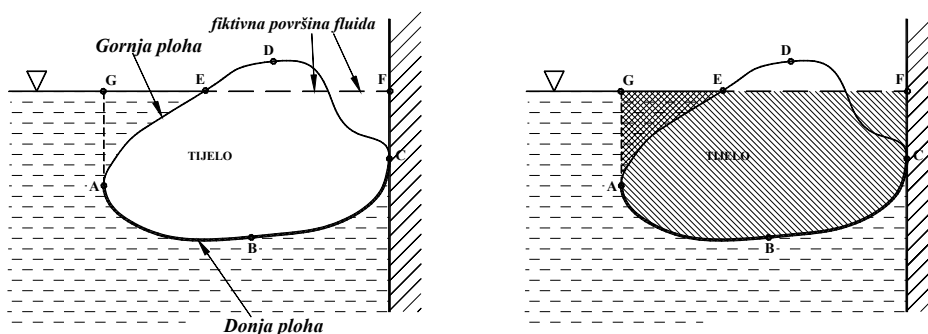
Sl.1.13

U ovom slučaju gustoća vode  $\rho_2 = 1000 \text{ kg/m}^3$ , znatno je veća od gustoće zraka  $\rho_1 = 1,29 \text{ kg/m}^3$  te se može pisati:

$$U \cong \rho_2 \cdot g \cdot V_2 \cong G$$

**tj. uzgon je jednak težini istisnute vode koju istiskuje dio tijela uronjen u vodu.**  
Uzgon djeluje uvijek **vertikalno prema gore** i nema horizontalne komponente.

**Primjer 1**

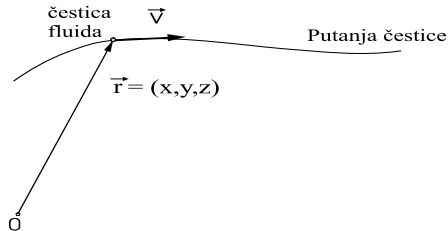


Sl.1.14 Primjer računanja uzgona za tijelo djelomično uronjeno u fluid

Ako na slici **Sl.1.14** označimo plohu  $CDA$  kao *gornju plohu* tijela i plohu  $ABC$  kao *donju plohu* tijela, uzgon na tijelo, potpuno ili djelomično potopljeno u fluidu, jednak je razlici vertikalne komponente sile fluida na *donju plohu* tijela i vertikalne komponente sile fluida na *gornju plohu* tijela. Sila na gore koja djeluje na *donju plohu* tijela jest,  $F_G = \rho_{\text{fluida}} \cdot g \cdot V_{ABCFGA}$ , gdje je  $V_{ABCFGA}$  volumen između donje plohe tijela i površine fluida (realne ili fiktivne.). Sila na dolje, koja djeluje na *gornju plohu* je  $F_D = \rho_{\text{fluida}} \cdot g \cdot V_{AEGA}$ , gdje je  $V_{AEGA}$  volumen između *gornje plohe* tijela i površine fluida (realne ili fiktivne). Uzgon je jednak razlici:  $U = F_G - F_D$  tj. za dani primjer na slici **Sl.1.14**  $U = \rho_{\text{fluida}} \cdot g \cdot V_{ABCFEA}$ .

## 2. OSNOVNI ZAKONI DINAMIKE FLUIDA

Jedna od najvažnijih varijabli fluida jest brzina. Položaj određene čestice dan je vektorom položaja



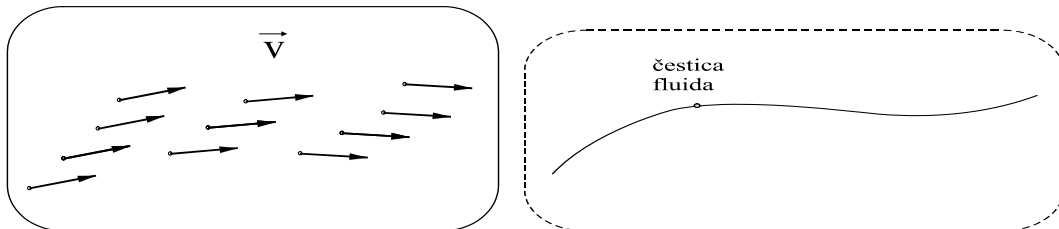
SI.2.1

$\vec{r}$  (SI.2.1) koji je funkcija vremena (ako se čestica giba). Vremenska derivacija položaja daje brzinu čestice  $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ . Računanje brzina  $\vec{v}(x, y, z, t)$  svih čestica daje polje brzina.

Dvije su osnovne metode opisa strujanja (SI.2.2). U prvoj, *Eulerovoj metodi*, promatra se fiksno područje, **kontrolni volumen**  $\Omega$  tj. analizira se stanje u fiksnim točkama područja  $\Omega$ . Druga, *Lagrangeova metoda* prati gibanje pojedine čestice i analizira kako se osobine fluida vezane za tu česticu mijenjaju kao funkcija vremena.

(Kao ilustracija različitosti ovih dviju metoda može poslužiti primjer iz biologije, npr. ornitološko promatranje migracija ptica. Eulerova metoda bi zahtijevala postavljanje osmatračke postaje i mjerenja preleta broja ptica u određenom vremenu, dok bi Lagrangeova metoda značila postavljanje radio odašiljača na određene ptice i praćenje njihovog gibanja.)

Općenito, u mehanici fluida koristi se Eulerova metoda opisa strujanja, dok se Lagrangeova metoda koristi u posebnim slučajevima. Važna je činjenica da su osnovni zakoni fizike definirani za čestice, a njih treba za potrebe mehanike fluida prevesti u odgovarajući opis polja (stanja, raspodjele) određene fizikalne veličine u prostoru (dijelu prostora – kontrolnom volumenu).



SI.2.2A Polje brzina kod Eulerovog opisa strujanja

SI.2.2B Lagrangeov opis strujanja

### Materijalne čestice, materijalni volumen i kontrolni volumen

Najjednostavnije forme univerzalnih fizikalnih zakona odnose se na materijalnu česticu koja je toliko malena da su brzina  $v$ , gustoća  $\rho$  i ostala immanentna svojstva uniformna unutar nje. Osnovni zakoni očuvanja za materijalnu česticu mogu se izraziti:

- zakon očuvanja mase:

$$\frac{d}{dt}(\rho \delta V) = 0;$$

- zakon očuvanja količine gibanja:

$$\frac{d}{dt}(\rho \vec{v} \delta V) = \delta \vec{F};$$

- zakon očuvanja momenta količine gibanja: 
$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \rho \vec{v} \delta V) = \vec{r} \times \delta \vec{F}$$

- zakon očuvanja energije (prvi zakon termodinamike): 
$$\frac{d}{dt}(\rho e \delta V) = \delta W + \delta Q$$

gdje je  $e$  totalna energija (unutarnja+kinetička+potencijalna) po jedinici mase,  $\delta W$  rad učinjen na granicu materijalne čestice, a  $\delta Q$  toplina dovedena materijalnoj čestici na njenoj granici.

U gornjim izrazima očuvanja  $\delta$  indicira infinitezimalno malenu veličinu, a  $d/dt$  se odnosi na vremensku derivaciju.

Potrebno je pojasniti da pojam *zakon očuvanja* uistinu predstavlja očuvanje veličine samo u slučaju zakona očuvanja mase dok bi u ostala tri zakona adekvatniji bio pojam *zakon ravnoteže*. Pojam *zakon očuvanja* ipak se koristi ukazujući na određene analogije prema zakonu očuvanja mase.

U dinamici fluida kao kontinuumu potrebno je poopćiti zakone očuvanja za materijalnu česticu na **materijalni volumen**. Materijalni volumen je sustav beskonačnog broja beskonačno malenih materijalnih čestica i uvijek (u svakom vremenskom trenutku) se sastoji od istih čestica.

Zakon očuvanja mase izražen za materijalni volumen jest

$$\frac{D}{Dt} \int_{MV} \rho dV = 0,$$

zakon očuvanja količine gibanja

$$\frac{D}{Dt} \int_{MV} \rho \vec{v} dV = \vec{F}_{MV},$$

zakon očuvanja momenta količine gibanja

$$\frac{D}{Dt} \int_{MV} \rho \vec{r} \times \vec{v} dV = \vec{M}_{MV}$$

i zakon očuvanja energije (tj. prvi zakon termodinamike)

$$\frac{D}{Dt} \int_{MV} \rho e_T dV = \dot{Q}_{MV} + \dot{W}_{MV}.$$

**Objašnjenje pojma materijalne derivacije**  $\frac{D}{Dt}$

Materijalna derivacija naziva se još i supstancijalna, individualna ili puna derivacija. Operator

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)$$

jest operator materijalne derivacije. Primjena materijalne derivacije na neku skalarnu veličinu  $\varphi$  daje

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\varphi \quad (a)$$

odnosno raspisano u kartezijskom koordinatnom sustavu



$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + v_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + v_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + v_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

U izrazu (a) prvi član desne strane  $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$  predstavlja brzinu promjene veličine u zadanoj točki prostora te se naziva *lokalnom ili mjesnom derivacijom*. Drugi član desne strane  $(\vec{v} \cdot \nabla)\varphi$  predstavlja promjenu veličine  $\varphi$  zbog promjene položaja čestice u prostoru i naziva se *konvektivnom derivacijom*. U određenom smislu materijalna derivacija  $\frac{D}{Dt}$  označuje vremensku promjenu koju osjeća promatrač koji se giba zajedno s fluidom (česticom fluida), dok  $\frac{\partial}{\partial t}$  označuje promjenu koju bi osjećao promatrač koji npr. miruje zajedno s kontrolnim volumenom.

U mehanici fluida često se koristi pojam totalnog ubrzanja

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$$

gdje  $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$  predstavlja lokalno ubrzanje, a  $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$  konvektivno ubrzanje.

Pri stacionarnom strujanju ne postoji lokalno ubrzanje.

Član konvektivnog ubrzanja može se matematičkim transformacijama vektorske algebre napisati u obliku

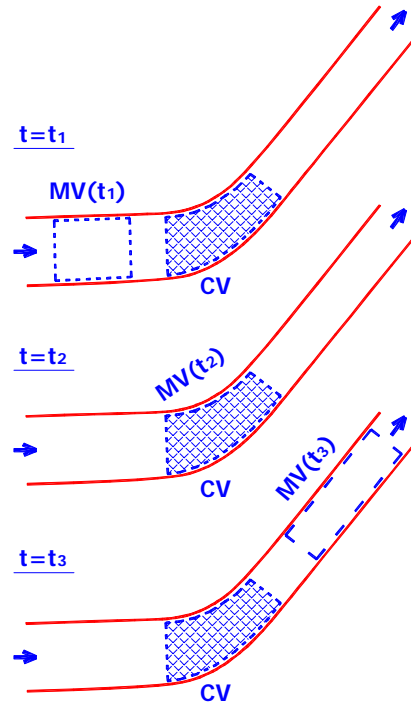
$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \mathit{grad}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}). \quad (\text{b})$$

U sva četiri prethodna izraza zakona očuvanja za materijalni volumen koristi se član oblika

$$\frac{D}{Dt} \int_{MV} \Phi dV$$

u kojoj  $\Phi$  predstavlja neku veličinu po jedinici volumena (masu, količinu gibanja, moment količine gibanja, energiju) koja je prvo integrirana po materijalnom volumenu  $MV$  i rezultat zatim deriviran materijalnom derivacijom  $D/Dt$  po vremenu.

Pri strujanju fluida materijalni volumen se giba i deformira, a s njim i materijalna površina koja je nepoznata funkcija u vremenu sve dok i sam problem nije riješen. Pošto je forma materijalnog volumena nepogodna za primjenu u inženjerstvu nameće se potreba definiranja sistema po izboru promatrača na koji će se moći primijeniti zakoni očuvanja. Zato se definira pojam *kontrolnog volumena*.



**Sl.2.2.1 Odnos materijalnog i kontrolnog volumena**

### **Kontrolni volumen**

Kontrolni volumen (CV) je proizvoljno, teoretski definirani volumen ograničen kontrolnom površinom  $CS$  u kojem se određuju dinamički i termodinamički učinci fluida. Kroz kontrolni volumen tijekom vremena prolaze različiti materijalni volumeni *Sl.2.2.1*. Kontrolna površina ograda dio prostora i u određenom koordinatnom sustavu može biti statična, može se gibati, ekspanirati ili kontrahirati, ovisno o želji promatrača. Kontrolni volumen i kontrolna površina analogni su Eulerovom opisu strujanja fluida, dok pojam materijalnog volumena odgovara Lagrangeovom opisu strujanja. Često se uzima da granice kontrolnog volumena (označene  $CS$ ) koincidiraju dijelom sa čvrstim granicama (*Sl.2.3* stijenka  $S_3$ ), a dijelom su postavljene okomito na smjer strujanja (*Sl.2.3*,  $A_1$ ,  $A_2$ ), radi pojednostavljenja.

### **Transformacija materijalnog u kontrolni volumen Reynoldsovim transportnim teoremom**

Reynoldsov transformacijski teorem omogućuje transformaciju fundamentalnih zakona za materijalni volumen na kontrolni volumen. Osnovna pretpostavka za transformaciju je da materijalni volumen i kontrolni volumen koincidiraju u određenom vremenskom trenutku, kao na srednjoj slici na *Sl.2.2.1*. Nakon trenutka koincidencije dva volumena se protokom vremena više neće poklapati pošto će materijalni volumen biti "odstrujan" dalje skupa s česticama koje njega čine, dok će kontrolni volumen mirovati ili se gibati prema odluci promatrača. Za provedbu transformacije od interesa je jedino trenutak kada se dva volumena poklapaju. Zapisano matematički Reynoldsova transformacija jest

$$\frac{D}{Dt} \int_{MV} \Phi dV = \int_{CV} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_{CS} \Phi \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

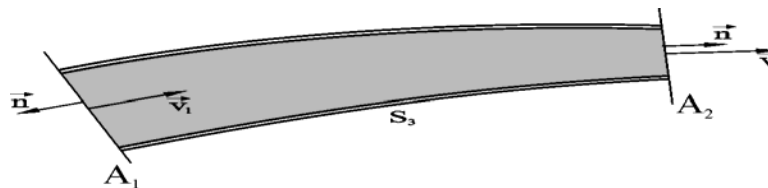
gdje  $\Phi$  predstavlja neku općenitu veličinu.

### Zakon očuvanja mase

Primjenom Reynoldsovog transportnog teorema, iz formulacije za materijalni volumen, dolazi se do formulacije zakona očuvanja mase za kontrolni volumen vezane uz Eulerov opis strujanja. Općenita veličina  $\Phi$  zamjenjuje se gustoćom tj.,  $\Phi = \rho$  pa slijedi

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{CS} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0$$

što se fizikalno može interpretirati tvrdnjom da je povećanje mase unutar kontrolnog volumena plus istjecanje mase iz kontrolnog volumena kroz njegovu granicu jednako nuli u svakom trenutku.



Sl.2.3 Dio cijevi, kontrolni volumen

Primjenom teorema Gauss Ostrogradskog na drugi član gornjeg izraza, prevodi se plošni integral u volumni te slijedi:

$$\int_{CV} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right) dV = 0.$$

Pošto je u gornjem izrazu proizvoljan volumen integracije slijedi da je izraz u zagradi nula:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0,$$

a što jest zakon očuvanja mase u diferencijalnom obliku.

Za slučaj stacionarnog strujanja prvi član u integralnom izrazu za zakon očuvanja mase je nula. Slijedi

$$\int_{\partial \Omega} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0,$$

tj. za slučaj na gornjoj slici:

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = \dot{m}$$

uz pretpostavku da su  $\rho, v$  srednje vrijednosti po presjeku. Oznaka  $\dot{m}$  predstavlja *maseni protok* [ $\text{kg s}^{-1}$ ]. Uvođenjem nove varijable *volumnog protoka* ili kraće *protoka*

$$Q = v A \text{ [m}^3\text{s}^{-1}\text{]}$$

prethodna relacija može se pisati

$$\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 = \dot{m},$$

odnosno za stacionarno strujanje uz konstantnu gustoću fluida unutar kontrolnog volumena vrijedi

$$Q = v_1 A_1 = v_2 A_2.$$

Zadnji izraz posebno je koristan pri proračunima cjevovoda pa je tako npr. brzinu  $v_1$  moguće izraziti pomoću  $v_2$  na način:  $v_1 = v_2 (A_2/A_1)$ . Osim pojma masenog protoka koristi se i *težinski protok*

$$W = \dot{m}g = \rho g Q [Ns^{-1}].$$

### **Zakon očuvanja količine gibanja**

Zakon očuvanja količine gibanja za materijalni volumen jest

$$\frac{D}{Dt} \int_{MV} \rho \vec{v} dV = \int_{MV} \vec{f} \rho dV + \int_{MS} \vec{\sigma}_n dS.$$

Primjenom Reynoldsovog transportnog teorema na gornji izraz, slijedi formulacija zakona očuvanja količine gibanja za *kontrolni volumen*:

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV + \int_{CS} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_{CV} \vec{f} \rho dV + \int_{CS} \vec{\sigma}_n dS$$

Fizikalno je gornji izraz moguće interpretirati na način da je promjena količine gibanja u vremenu i dotok količine gibanja kroz granicu kontrolnog volumena (CS) jednak članovima na desnoj strani koji predstavljaju resultantnu silu  $\sum \vec{F}$  (masenu + kontaktnu) koja djeluje na *kontrolni volumen*:

$$\sum \vec{F} = \int_{CV} \vec{f} \rho dV + \int_{CS} \vec{\sigma}_n dS.$$

Za primjer segmenta cijevi (**SI.2.3**) i uz pretpostavku stacionarnog i nestlačivog strujanja, iz gornjeg izraza proizlazi tzv. *impulsni zakon*

$$\boxed{\sum \vec{F} = \dot{m}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)} \text{ ili } \boxed{\sum \vec{F} = \rho Q(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}$$

### **Bernoullijeva jednadžba**

U integralnom izrazu za očuvanje količine gibanja za materijalni volumen, moguće je drugi član na desnoj strani prevesti u volumni integral primjenom teorema Gauss Ostrogradskog:

$$\int_{MS} \vec{\sigma}_n dS = \int_{MV} \text{div} T_\sigma dV$$

Zbog očuvanja mase  $\frac{D(\rho dV)}{Dt} = 0$  te stavljajući znak totalne derivacije ispod znaka integrala (u prvom članu lijeve strane) slijedi:

$$\int_{MV} \left( \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - \rho \vec{f} - \text{div} T_\sigma \right) dV = 0.$$

Gornji izraz biti će jednak nuli ako je izraz u zagradi jednak nuli. Proizlazi ***jednadžba gibanja fluida***

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f} + \text{div } T_\sigma ,$$

odnosno

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \nabla \vec{v} = \rho \vec{f} + \text{div } T_\sigma$$

gdje je

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

matrica naprezanja sa komponentama normalnih  $\sigma$  i tangencijalnih (smičnih naprezanja)  $\tau$ . Za idealni fluid, zbog neviskoznosti odnosno nepostojanja smičnih naprezanja, matrica naprezanja  $T_\sigma$  postaje  $T_p$

$$T_p = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

te slijedi izraz koji se naziva **Eulerova jednažba gibanja**

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p .$$

Ako se pretpostavi nestlačivo strujanje fluida  $\rho = \text{const.}$  tada u gornjem izrazu

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } \frac{P}{\rho} ,$$

nadalje, član konvektivnog ubrzanja  $(\vec{v} \nabla) \vec{v}$  moguće je pisati u obliku (b) danom u istaknutom paragrafu o materijalnoj derivaciji, a pošto je gustoća masene sile definirana potencijalom masene sile  $P$

$$\vec{f} = -\text{grad } P ,$$

gdje je potencijal masene sile u polju sile teže

$$P = gz ,$$

slijedi izraz *Eulerove jednažbe gibanja* u Lamb Gromekinovoj formi

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} = -\text{grad} \left( gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \right) ,$$

odnosno za stacionarno strujanje

$$\vec{v} \times \text{rot } \vec{v} = -\text{grad} \left( gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \right).$$

Ako se gornji izraz pomnoži skalarno s elementom luka strujnice  $d\vec{s}_s = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} ds$ , nestaje lijeva strana izraza jer je vektor brzine  $\vec{v}$  okomit na vektor  $\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}$  te slijedi diferencijal

$$ds_s \left( gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \right) = 0.$$

Da bi gornji diferencijal bio jednak nuli potrebno je da je izraz u zagradi konstanta, tj. da uzduž strujnice vrijedi

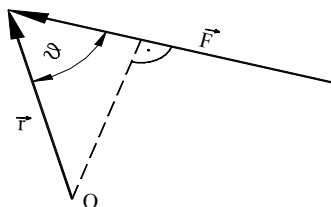
$$\boxed{gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 = \text{const. duž strujnice}}$$

što je izraz **Bernoullijeve jednadžbe** koji je proizašao iz Eulerove jednadžbe gibanja uz pretpostavke zanemarive viskoznosti te stacionarnog i nestlačivog strujanja.

### **Zakon očuvanja momenta količine gibanja**

Moment sile  $\vec{F}$  oko točke  $O$  jest  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  (SI.2.4).  $\vec{r}$  je vektor položaja točke na pravcu djelovanja sile u odnosu na točku  $O$ . Vektorskim množenjem izraza zakona očuvanja količine gibanja za kontrolni volumen vektorom položaja  $\vec{r}$  slijeva, slijedi:

$$\sum \vec{r} \times \vec{F} = \int_{cv} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{r} \times \vec{v}) dV + \int_{cs} (\rho \vec{r} \times \vec{v}) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$



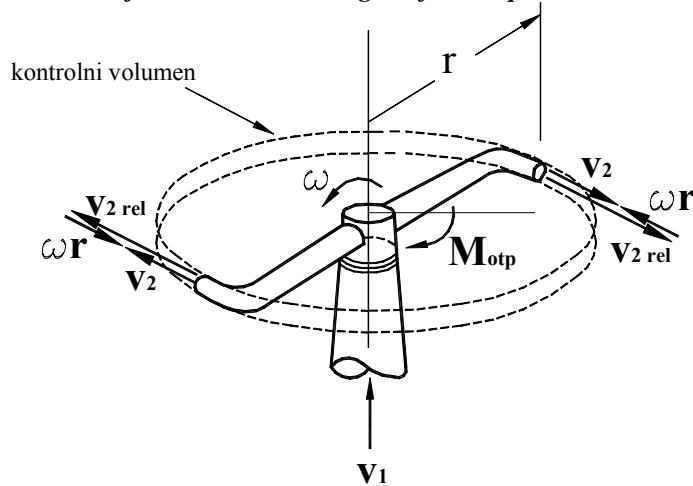
SI.2.4

Lijeva strana jednadžbe predstavlja moment na kontrolni volumen prouzročen od vanjskih sila, a desna strana promjenu momenta količine gibanja u vremenu te utok momenta količine gibanja kroz granicu kontrolnog volumena. Gornji izraz predstavlja zakon očuvanja momenta količine gibanja za kontrolni volumen koji ima posebno izraženu primjenu pri analizi turbostrojeva gdje su momenti značajniji od samih sila. Pri stacionarnom strujanju i(ili) strujanju fluida konstantne gustoće, gubi se prvi član desne strane u gornjem izrazu. Za slučaj rotacijskog uređaja (SI.2.5-raspršivač vode) sa ulaznom brzinom u kontrolni volumen  $\vec{v}_1$  i izlaznom brzinom  $\vec{v}_2$  zakon očuvanja momenta količine gibanja moguće je pisati:

$$\boxed{\vec{M}_{otp} = \vec{M}_{izlaz} - \vec{M}_{ulaz}} \quad \text{tj.} \quad \boxed{\vec{M}_{otp} = \dot{m}[(\vec{r} \times \vec{v})_2 - (\vec{r} \times \vec{v})_1] = \rho Q[(\vec{r} \times \vec{v})_2 - (\vec{r} \times \vec{v})_1]}$$

U gornjem izrazu  $\vec{M}_{otp}$  jest moment na kontrolni volumen tj. kod rotacijskih i turbo strojeva otporni moment na osovini, a  $(\vec{v}, \vec{r})_{1,2}$  vektori brzina i pripadajući krakovi.

**Primjer primjene zakona očuvanja momenta količine gibanja na "sprinkler"**



**Sl.2.5 Raspršivač vode - primjena zakona očuvanja momenta količine gibanja**

Za slučaj simetričnog raspršivača vode sa mlaznicama istog promjera, na slici, ulazni moment  $\vec{M}_{ulaz} = \vec{0}$  pošto je vektor ulazne brzine  $\vec{v}_1$  na pravcu osi rotacije. Zakon očuvanja momenta količine gibanja reducira se na

$$\vec{M}_{otp} = 2\rho \frac{Q}{2} (\vec{r} \times \vec{v}_2) \quad \text{tj.} \quad M_{otp} = 2\rho \frac{Q}{2} r (v_{rel} - \omega r).$$

Od relativne izlazne brzine vode u odnosu na mlaznicu  $v_{rel}$  potrebno je oduzeti brzinu mlaznice  $\omega r$  kako bi se dobila apsolutna izlazna brzina  $v_2$  tj.  $v_2 = v_{rel} - \omega r$ . Relativna brzina  $v_{rel}$  ovisi samo o masenom dotoku fluida u kontrolni volumen, dok se  $v_2$  mijenja s brzinom vrtnje uređaja  $\omega$ .

**Zakon očuvanja energije**

Jednadžba očuvanja energije za kontrolni volumen može se napisati u obliku

$$\frac{dE}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) dV + \int_{CS} \rho e (\vec{v}\vec{n}) dS.$$

Prvi zakon termodinamike

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q}_H + \dot{W}$$

definira da je

promjena energije sustava = toplina dodana sustavu ( $\dot{Q}_H$  (heat)) + snaga predana sustavu ( $\dot{W}$ ).

Rad u vremenu predan sustavu moguće je rastaviti na

$$\dot{W} = \dot{W}_S + \dot{W}_p,$$

gdje je

$$\dot{W}_p = \int_{S_i} p \bar{v}\bar{n} dS,$$

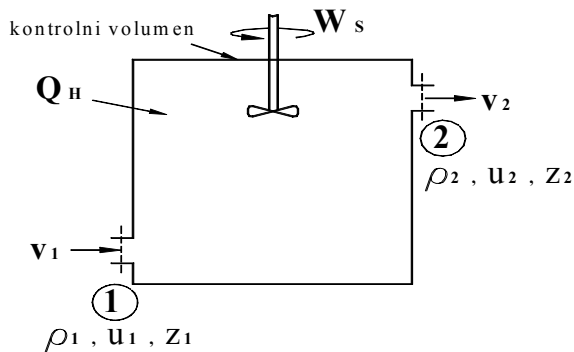
rad u vremenu učinjen tlačnim silama na pomičnoj granici, a  $\dot{W}_S$  (*work, shaft*) rad tangencijalnih sila u vremenu predan sustavu, npr. moment u vremenu na rotirajućoj osovini rotacijskog uređaja (turbostroja). Uzimajući u obzir gornje izraze može se pisati:

$$\dot{Q}_H + \dot{W}_S = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) dV + \int_{CS} \rho \left( \frac{p}{\rho} + e \right) (\bar{v}\bar{n}) dS$$

gdje je  $e$  totalna energija po jedinici mase koja predstavlja zbroj unutarnje energije (energije molekularnih sila) po jedinici mase, kinetičke energije po jedinici mase i potencijalne energije po jedinici mase:

$$e = u + \frac{v^2}{2} + g z .$$

U jednadžbi očuvanja energije prvi član desne strane predstavlja promjenu ukupne energije sustava u vremenu, a drugi član jest zbroj rada tlačnih sila na pomičnu granicu u vremenu i protoka ukupne energije kroz granicu. Ako se jednadžba zakona očuvanja energije primijeni na stacionarno strujanje kroz kontrolni volumen sa jednim utokom i jednim istokom iz kontrolnog volumena (**Sl.2.6**), jednadžba se pojednostavljuje u sljedeći izraz:



**Sl.2.6**

$$\dot{m} \left[ u_2 - u_1 + \frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \right] = \dot{Q}_H + \dot{W}_S .$$

Dijeljenjem jednadžbe sa masenim protokom  $\dot{m}$  te uz činjenicu da je

$$gubitak \text{ raspoložive energije sustava} \equiv u_2 - u_1 - q_H$$

i konačno dijeljenjem sa konstantom gravitacije  $g$  proizlazi:

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_g - h_s}$$



što predstavlja **jednadžbu mehaničke energije**. Zbog sličnosti s Bernoullijevom jednadžbom ova jednadžba se još naziva i tzv. **proširena Bernoullijeva jednadžba**. Dimenzijski jednadžba jest u obliku *energija po jedinici težine* [Nm/N = m]. Oznaka  $h_g$  predstavlja sve gubitke (gubitak piezometrične visine). Ako se unutar kontrolnog volumena nalazi turbina tada

$$h_S = -h_T$$

gdje je  $h_T$  pad piezometrične visine na turbini, a za pumpu unutar kontrolnog volumena vrijedi

$$h_S = h_P$$

gdje je  $h_P$  dobavna visina pumpe. Pošto je strujanje u prisustvu rotacijskih uređaja (turbostrojeva) nestacionarno (najčešće ciklično), strujanje se smatra samo *lokalno nestacionarno* kako bi bila zadovoljena pretpostavka o stacionarnosti strujanja unutar kontrolnog volumena pomoću koje je i izvedena gornja jednadžba.

### 3. STRUJANJE IDEALNOG FLUIDA

#### 3.1 Idealan fluid

Idealan fluid (nestlačiv, neviskozan) - fluid kod kojeg se zanemaruje efekt trenja pri strujanju.

Izraz

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad } p + \rho \vec{f}$$

jest **Eulerova jednadžba gibanja** (koja je izvedena u poglavlju o Zakonu očuvanja količine gibanja) koju je tekstualno moguće otprilike izaziti

$$\text{masa} \cdot \text{ubrzanje} = \text{ukupna sila na fluid} .$$

Integracijom Eulerove jednadžbe duž proizvoljno izabrane *strujnice* i uz pretpostavku strujanja idealnog fluida dobija se Bernoullijeva jednadžba,

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{konst.}}$$

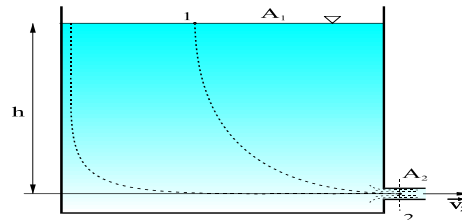
kao što je pokazano u poglavlju o zakonu očuvanja količine gibanja.

*Strujnica* je krivulja kojoj je u svakoj točki stujnog polja vektor brzine tangenta, a u slučaju *stacionarnog strujanja* *stujnica* se poklapa s *trajektorijom* (putanjom, stazom). Pri *stacionarnom strujanju* ništa se ne mijenja u vremenu na određenoj lokaciji u strujnom polju tj. svaka čestica koja prolazi kroz zadanu točku ima istu trajektoriju. Bernoullijeva jednadžba često se postavlja između dvije točke 1 i 2 na strujnici, a pogodno ju je pisati i u obliku tzv. piezometrične visine (jedinica *metar*):

$$\left( \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \right)_1 = \left( \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \right)_2$$

## 3.2 Primjene Bernoullijeve jednadžbe

### Primjer 1 - Istjecanje kroz male otvore



**Sl.3.1 - Istjecanje kroz male otvore**

Putanja čestice ide sa površine vode u spremniku. Potrebno je izračunati brzinu  $v_2$  (**Sl.3.1**):  
Iz jednadžbe kontinuiteta slijedi

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 .$$

Uz  $p = const.$  i uz pretpostavku  $A_1 \gg A_2$ , slijedi

$$v_1 = v_2 (A_2/A_1),$$

odnosno  $v_1 \cong 0$ . Iskustveno, brzina spuštanja razine površine je malena ako je otvor spremnika relativno mali u odnosu na volumen spremnika, odnosno brzina  $v_1$  je relativno malena.  
Za slučaj prikazan na slici (**Sl.3.1**) vrijedi

$$v_1 = 0 \quad ; \quad z_1 = 0 \quad ; \quad z_2 = -h \quad ; \quad p_1 = p_{atm} \quad ; \quad p_2 = p_{atm}$$

Gornji izraz govori da je tlak u okolini otvorenog mlaza na izlazu iz spremnika jednak atmosferskom pa je stoga i kroz čitav mlaz tlak jednak atmosferskom jer bi u protivnom došlo do promjene poprečne površine mlaza. Iz Bernoullijeve jednadžbe slijedi:

$$v_2^2 = 2gh$$

tj.

$$v_2 = \sqrt{2gh} .$$

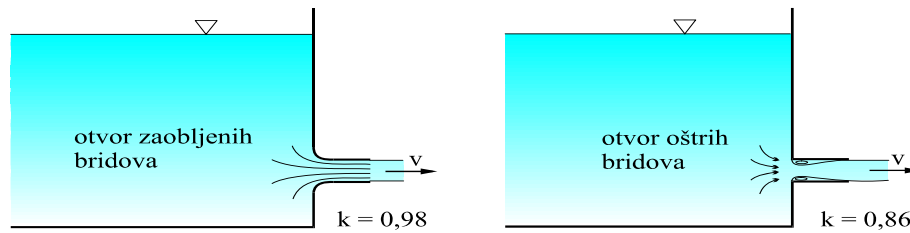
Prethodni izraz predstavlja tzv. *Torricelijevu formulu*.  
Hidrostatski tlak računa se prema izrazu:

$$p = p_0 + \rho gh .$$

Na izlaznom presjeku (točka 2) vrijednost brzine je

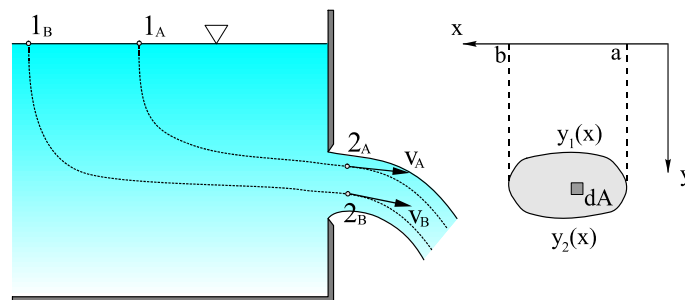
$$v_2 = k \cdot \sqrt{2gh}$$

gdje je  $k$  korekcijski faktor koji uključuje efekt viskoznosti (**Sl.3.2**).



SI.3.2 - različiti faktori  $k$

**Primjer 2 - Istjecanje kroz otvore proizvoljne veličine (SI.3.3)**



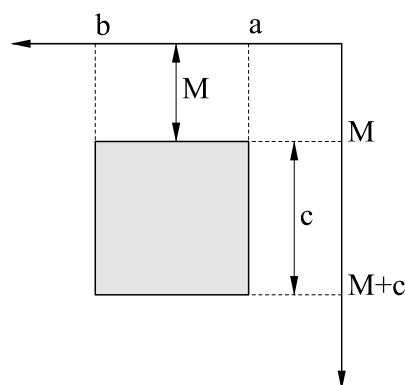
SI.3.3

Izvod izraza za izračun protoka dan je u slijedu:

$$dQ = \bar{v} dA$$

$$Q = \int_A v dA = \int_A \sqrt{2gy} dA = \int_A \sqrt{2gy} dx dy = \sqrt{2g} \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \sqrt{y} dy = \sqrt{2g} \int_a^b \frac{2}{3} \left[ y_2(x)^{\frac{3}{2}} - y_1(x)^{\frac{3}{2}} \right] dx$$

Za specifičan slučaj kada je otvor pravokutnik (SI.3.4)



SI.3.4

$$y_1(x) = M$$

$$y_2(x) = M + c$$

Pošto gore navedeni izrazi nisu funkcije od  $x$  nego su konstante, vrijedi:

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2g} \left( (M + c)^{\frac{3}{2}} - M^{\frac{3}{2}} \right) \cdot (b - a)$$

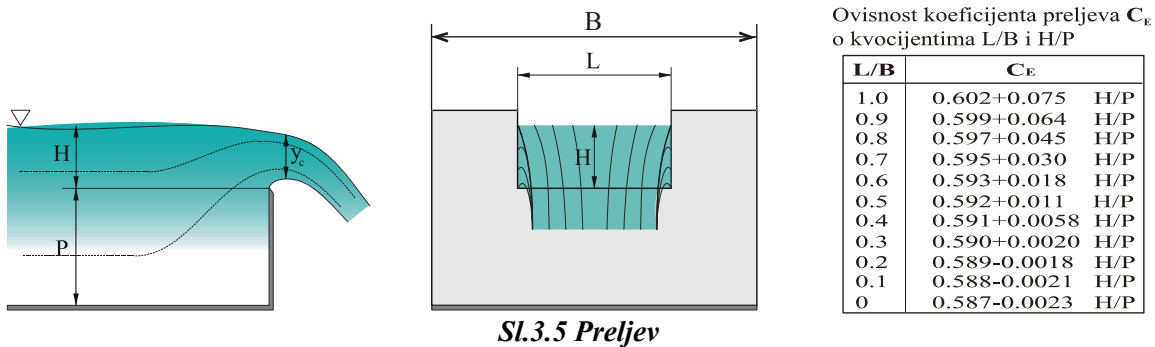
### Primjer 3 - Preljev

U slučaju preljeva  $M=0$ , slijedi:

$$Q = \frac{2}{3} \sqrt{2g} c^{\frac{3}{2}} (b-a),$$

odnosno uz oznake prema slici (SI.3.5) gdje  $c=H$ ,  $(b-a)=L$  i uz dodavanje empirijskog koeficijenta preljeva  $C_E$  kako bi se dobila efektivna vrijednost protoka ovisno o geometriji preljeva, slijedi:

$$Q = C_E \frac{2}{3} \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}} L.$$

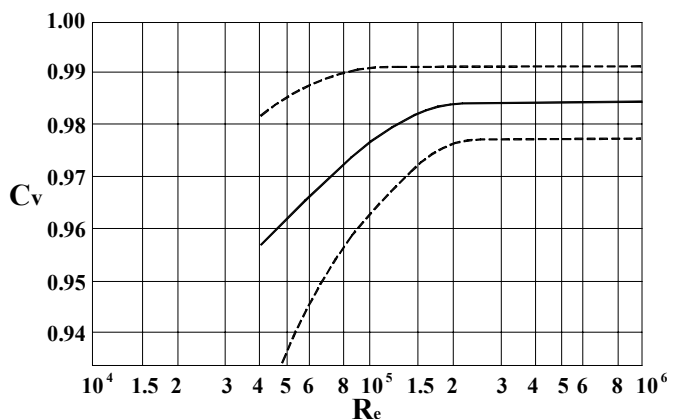
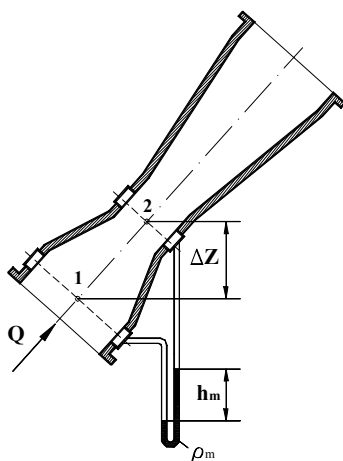


SI.3.5 Preljev

Protok otvorenih vodotoka moguće je točno izračunati na osnovu geometrije presjeka (preljeva)(SI.3.5) toka. Primarno se mjeri dubina vode na preljevu. Primjenom samo Bernoullijeve jednadžbe dobije se gruba aproksimacija, ali se eksperimentalno mogu dobiti dodatni korekcijski faktori ( $C_E$ ) koji simuliraju viskozne efekte.

### Primjer 4 - Venturijeva sapnica

Venturijevom sapnicom (SI.3.6) mjeri se protok na osnovu razlike tlakova. Ona se sastoji od postupnog koničnog suženja pod kutem  $\approx 20^\circ$ , kratkog cilindričnog dijela te difuzora pod kutem  $5^\circ$  do  $7^\circ$ . Radi točnosti



SI.3.6 Venturijeva sapnica

mjerenja uzvodno od venturimetra cijev treba biti ravna u dužini barem trideset cjevnih promjera. Na bazi venturimetra i u suženju tlak se najčešće mjeri *piezometričnim prstenovima*. Pri mjerenju protoka plinova potrebno je neovisno mjeriti temperaturu i tlak na bazi venturimetra dok za

mjerenje protoka tekućina dovoljno je izmjeriti razliku tlakova. Primjenom jednadžbe kontinuiteta  $A_1 v_1 = A_2 v_2$

uz konstantnu vrijednost tlaka  $p = const.$  i prosječne vrijednosti brzina  $v_1$  i  $v_2$  po presjecima, postavlja se Bernoullijeva jednadžba od 1 do 2 (**SL.3.6**)

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2$$

Primjenom jednadžbe kontinuiteta  $v_1 = v_2 (A_2/A_1)$  i uz  $\Delta p = p_1 - p_2$  slijedi:

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho} + 2g(z_1 - z_2)}$$

U gornji izraz potrebno je dodati korekcijski faktor brzine  $C_v$  kojim se obuhvaćaju gubici zbog viskoznih efekata. Protok kroz venturimetar sada se može izraziti:

$$Q = \frac{C_v A_2}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho} + 2g(z_1 - z_2)}$$

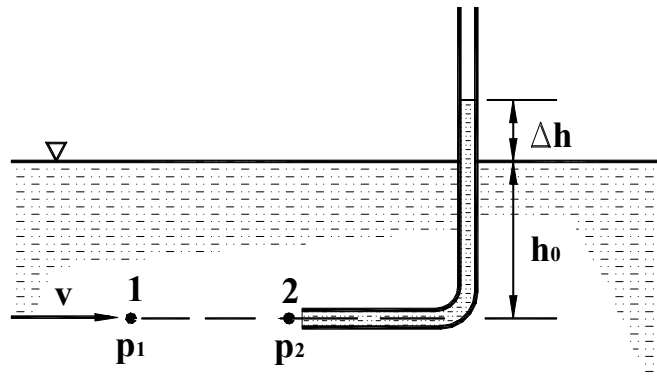
Vrijednosti empirijskog faktora  $C_v$  u ovisnosti o Reynoldsovom broju i geometriji venturimetra dane u dijagramu (**SI3.6**) primjenjive su za odnose promjera venturimetra  $D_2/D_1$  u rasponu od 0.25 do 0.75 koji je prikazan iscrtkanim krivuljama na dijagramu. Kod izboru venturimetra dobro je izabrati onaj kod kojega je koeficijent venturimetra  $C_v$  približno konstantan za raspon Reynoldsovog broja koji se očekuje pri upotrebi. Izrazimo li razliku tlaka  $\Delta p$  u gornjem izrazu pomoću stupca mjernog fluida  $h_m$  gustoće  $\rho_m$ , tada je izraz za protok kroz venturijevu cijev:

$$Q = C_v A_2 \sqrt{\frac{2g h_m \left( \frac{\rho_m}{\rho} - 1 \right)}{1 - \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^4}}$$

Uočljivo je da ako izrazimo razliku tlakova pomoću stupca mjernog fluida u diferencijalnom manometru  $h_m$  izraz za protok postaje neovisan o nagibu venturimetra.

### **Primjer 5 – Pitotova cijev**

Pitotova cijev (**SI.3.7**) je uređaj kojim se mjeri brzina strujanja u određenoj točki. Princip mjerenja brzine pomoću Pitotove cijevi prikazan je na slici pomoću cijevi (npr. staklena cijev) savinute pod pravim kutem. Cijev je usmjerena u pravcu strujanja fluida tako da fluid ustrojava direktno u otvor sve dok se u cijevi ne poveća tlak toliko da se izjednači s djelovanjem fluida koji nastrojava te tada neposredno ispred otvora cijevi fluid miruje (točka 2). Točka neposredno ispred otvora cijevi u kojoj fluid miruje  $v_2 = 0$ , zove se stagancijska ili zaustavna točka. Postavljanjem Bernoullijeve



### Sl.3.7 Princip mjerenja brzine fluida pomoću jednostavne Pitotove cijevi

jednadžbe duž strujnice između točaka 1 i 2 (Sl.3.7) uzimajući u obzir  $z_1 = z_2$  i  $v_2 = 0$ , slijedi:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g}.$$

Tlak u točki 2 moguće je izmjeriti pomoću visine stupca fluida u cijevi

$$p_2 = \rho g(h_0 + \Delta h)$$

što predstavlja *totalni tlak*. *Totalni tlak* je sastavljen od dvije komponente, statičkog tlaka  $p_1 = \rho g h_0$  predstavljenog visinom stupca  $h_0$  i dinamičkog tlaka kojeg predstavlja dio stupca fluida  $\Delta h$ . Izjednačavanjem dvaju prethodnih izraza slijedi izraz za brzinu strujanja lokalno:

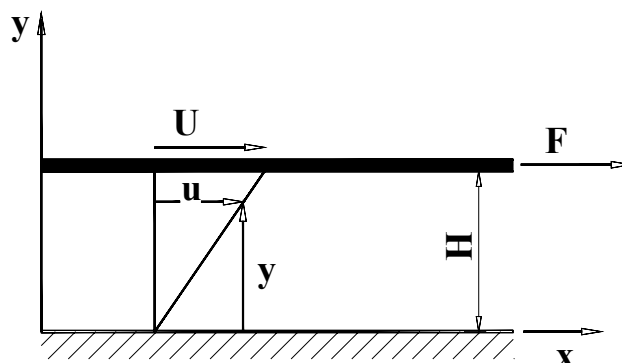
$$v_1 = \sqrt{2g \Delta h}.$$

## 4. STRUJANJE REALNOG FLUIDA U CIJEVI

### 4.1 Viskoznost

Fluid je tvar koja se kontinuirano deformira pod utjecajem smičnog napreznja ma kako malo to napreznje bilo.

Viskoznost – svojstvo otpornosti fluida prema smičnoj deformaciji. Svojstvo suprotno viskoznosti jest fluidnost. Viskoznost je također i mjera unutarnjeg trenja u fluidu. Povezanost viskoznosti i trenja ukazuje na viskoznost kao svojstvo fluida zbog kojeg nastaju gubici pri strujanju. Viskoznost je svojstvo fluida koje se očituje tek pri gibanju fluida.



Sl.4.1.1

Između dvije paralelne ploče nalazi se neka tvar (Sl.4.1.1). Donja ploča je fiksna, dok na gornju djeluje sila  $F$ , koja proizvodi smično napreznje  $\tau = F/A$  na tvar među pločama.  $A$  je površina gornje ploče. Ako sila  $F$  prouzrokuje gibanje ploče stalnom brzinom, tada je moguće zaključiti da je tvar među pločama fluid. Fluid u neposrednom kontaktu s čvrstom granicom ima istu brzinu kao čvrsta granica (tzv. "no slip condition"). Pokus pokazuje da je sila  $F$  direktno proporcionalna površini i brzini  $A$  i  $U$  i obrnuto proporcionalna debljini sloja fluida  $H$

$$F = \mu \frac{AU}{H},$$

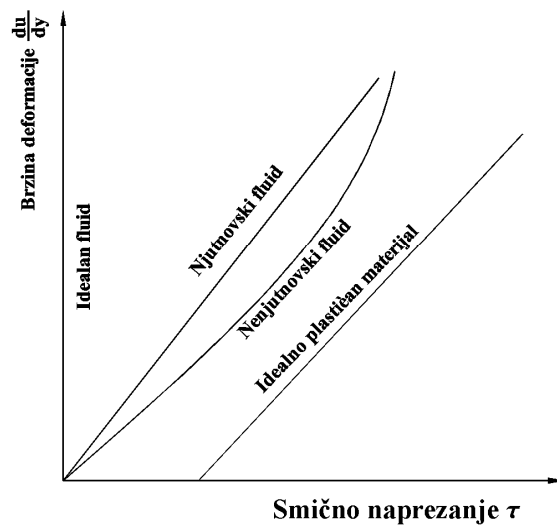
gdje je  $\mu$  faktor proporcionalnosti vezan za svojstva fluida. Kvocijent  $U/H$  predstavlja brzinu kutne deformacije i općenitije ga se može napisati  $\frac{du}{dy}$ . Ako se nadalje u prethodnu jednadžbu uvede izraz za smično napreznje  $\tau = F/A$ . Slijedi **Newtonov zakon viskoznosti**:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy},$$

gdje je  $\tau$  smično napreznje,  $du/dy$  brzina kutne deformacije pri 1D strujanju fluida, a  $\mu$  [Pa s] dinamički koeficijent viskoznosti.

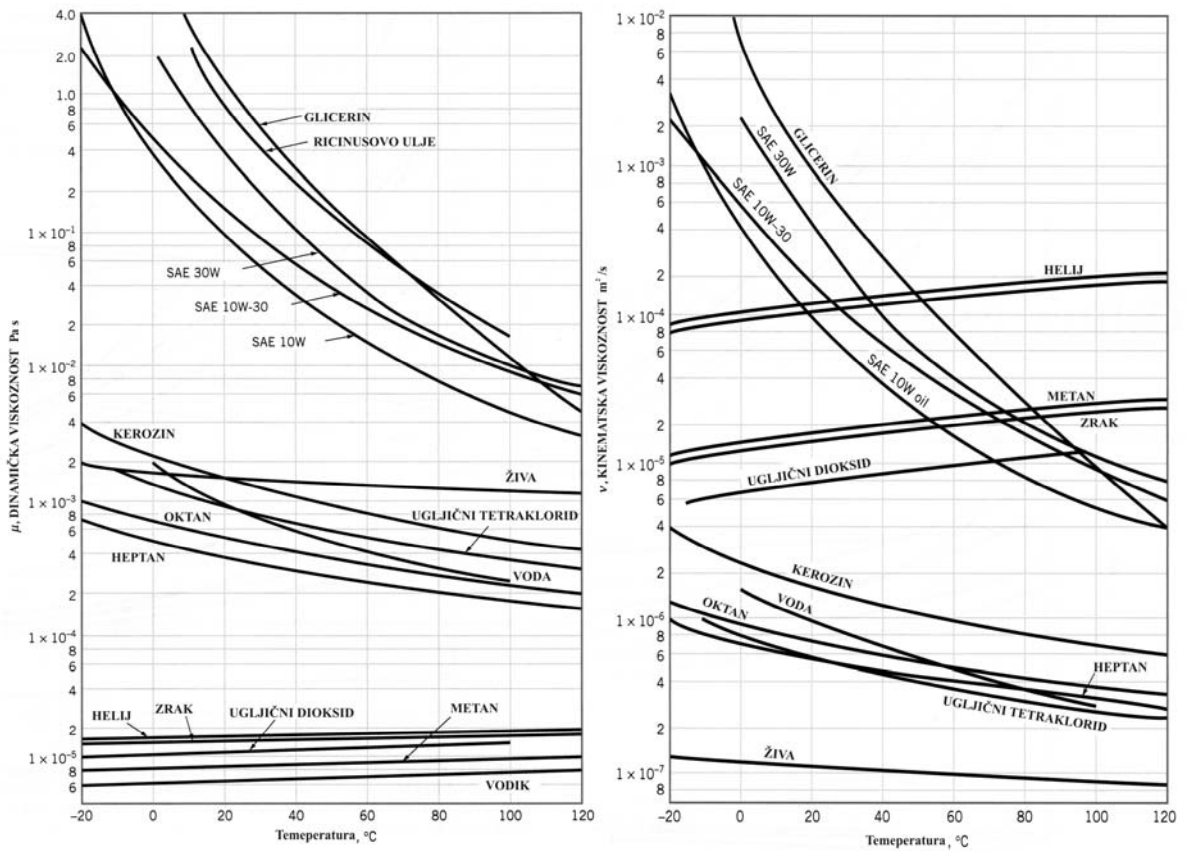
Osnovna podjela fluida je na njutnovske i nenjutnovske (ili *newtonske*, *nenewtonske*) fluide (Sl.4.1.2). Kod njutnovskih fluida (plinovi, većina tekućina) postoji linearna relacija (kao na Sl.4.1.1) između intenziteta smičnog napreznja i odgovarajuće brzine deformacije. Nenjutnovski fluidi jesu npr. dugolančani hidrokarbonati, krv, zubna pasta, neke boje, blato... (Sl.4.1.2) i kod njih je odnos između intenziteta smičnog napreznja i odgovarajuće brzine deformacije nelinearan.





**Sl.4.1.2 Newtonovski i nenujtonovski fluid**

Viskoznost se gotovo ne mijenja promjenom tlaka, a mijenja se s promjenom temperature. Kod tekućina, povećanjem temperature smanjuje se viskoznost, dok se kod plinova povećanjem temperature viskoznost povećava (Sl.4.1.3.a,b).

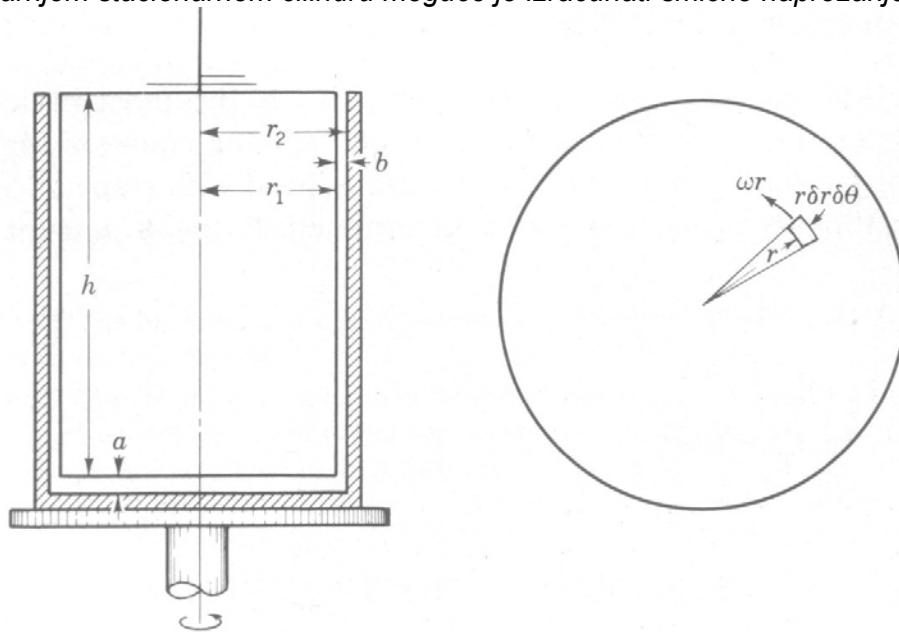


**Sl.4.1.3a,b Dinamička i kinematska viskoznost u ovisnosti o temperaturi, za neke fluide**

Dijeljenjem koeficijenta dinamičke viskoznosti s gustoćom fluida dobiva se koeficijent *kinematske viskoznosti* fluida  $\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{m^2}{s} \right]$ . Kinematska viskoznost se često koristi u mehanici fluida i inženjstvu i predstavlja mjeru otpora fluida smičnoj deformaciji odn. tečenju pod djelovanjem sile gravitacije. Na slikama **SL.4.1.3a,b** uočljivi su različiti međusobni odnosi dinamičkog odn. kinematskog viskoziteta za neke fluide (npr. voda i živa **SL.4.1.3a,b**). Za vodu pri normalnim uvjetima vrijedi  $\nu \approx 1 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{m^2}{s} \right] = 1 \text{ cSt}$  (centi Stokes), odn.  $\mu \approx 1 \cdot 10^{-3} [Pa \cdot s] = 1 \text{ cP}$  (centi Poise). Spomenute su starije jedinice za kinematsku viskoznost *Stokes* i dinamičku viskoznost *Poise* koje su još ponegdje u upotrebi.

### Mjerenje dinamičke viskoznosti rotacijskim viskozimetrom

Uz zadanu brzinu kutne deformacije  $du/dy$  te mjerenjem smičnog naprezanja  $\tau$ , moguće je pomoću Newtonovog zakona viskoznosti  $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ , izračunati koeficijent dinamičke viskoznosti  $\mu$ . Rotacijski viskozimetar se u osnovi sastoji od vanjskog rotirajućeg cilindra i unutarnjeg, koncentričnog, stacionarnog cilindra **SL.4.1.P1**. Mjerenjem torzijskog momenta  $T$  na unutarnjem stacionarnom cilindru moguće je izračunati smično naprezanje.



**SL.4.1.P1** Shematski prikaz rotacijskog viskozimetra

Unutarnji je cilindar u dodiru s fluidom preko "plašta" i dna. Ukupni torzijski moment izmjeren na unutarnjem cilindru je stoga

$$T = T_C + T_D$$

gdje je  $T_C$  torzija zbog smičnog naprezanja na plaštu i  $T_D$  torzija zbog naprezanja na dnu.

Za plašt:

$$\frac{du}{dy} = \frac{\omega r_2}{b},$$

gdje je  $\omega$  brzina rotacije vanjskog cilindra, a  $b$  zračnost među cilindrima. Torzijski moment zbog trenja na plaštu je

$$T_C = \tau \cdot 2r_1\pi \cdot h \cdot r_1 .$$

Uzevši u obzir prethodna dva izraza i Newtonov zakon viskoznosti slijedi

$$T_C = \frac{2\pi r_1^2 r_2 h \mu \omega}{b} .$$

Za dno cilindra:

$$dA = r d\theta \cdot dr$$

$$dT_D = \tau r dA = \mu \frac{\omega r}{a} r \cdot r d\theta dr$$

Integriranjem po dnu unutarnjeg cilindra slijedi:

$$T_D = \frac{\mu \omega}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_1} r^3 dr$$

$$T_D = \frac{\mu \omega r_1^4 \pi}{a \cdot 2}$$

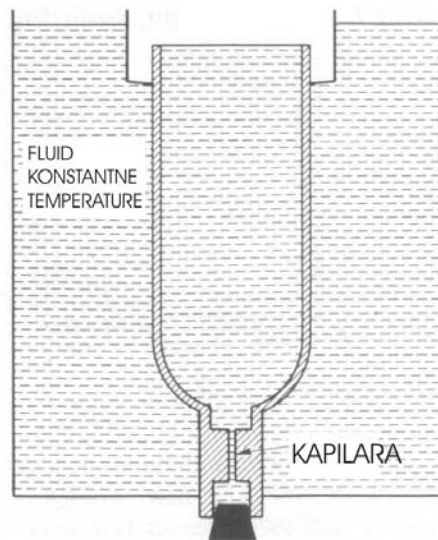
gdje je  $a$  zračnost na dnu cilindra prema slici.  
Slijedi jednačba za ukupni torzijski moment

$$T = \mu \pi \omega r_1^2 \left( \frac{2r_2 h}{b} + \frac{r_1^2}{2a} \right).$$

Pošto je  $T$  ukupni torzijski moment izmjeren na unutarnjem cilindru iz gornjeg izraza direktno proizlazi dinamički koeficijent viskoznosti  $\mu$ .

### **Mjerenje kinematske viskoznosti Sayboltovim viskozimetrom**

Princip mjerenja viskoznosti Sayboltovim viskozimetrom (**SI.4.1.P2**) sastoji se u mjerenju vremena potrebnog za istjecanje  $V_L=60 \text{ cm}^3$  fluida kroz kapilarnu cijev pod utjecajem gravitacije. Pri mjerenju se održava konstantna temperatura mjenog fluida. Pošto fluid istječe pod utjecajem sile gravitacije važnost pri ovom mjerenju ima i gustoća fluida te je mjerena viskoznost kinematska viskoznost  $\nu$ .



#### SI.4.1.P2 Shematski prikaz Sayboltovog viskozimetra

Pri analizi strujanja kreće se od Hagen Poiseuilleove formule za strujanje viskoznog fluida kroz cijev ( Hagen Poiseuilleova formula će biti analizirana kasnije u ovom poglavlju) :

$$Q = \frac{\Delta p \pi D^4}{128 \mu L}$$

Dalje, definira se prosječna piezometrična visina za vrijeme istjecanja  $h_L$ , poznat je volumen mjerenog fluida  $V_L$ , protok  $Q$  se aproksimira  $Q = V_L / t$  te se uzima  $\Delta p = \rho g h_L$ . Slijedi:

$$\frac{V_L}{t} = \frac{\rho g h_L \pi D^4}{128 \mu L}$$

$$\nu = \frac{\pi g D^4 h_L}{128 V_L L} \cdot t = C_1 \cdot t$$

Pošto je duljina kapilarne cjevčice  $L$  relativno malena dodaje se gornjem izrazu još i korekcijski faktor oblika  $C/t$  pa konačno slijedi izraz za kinematski viskozitet oblika

$$\nu = C_1 t + \frac{C_2}{t}$$

tj. približni odnos *Sayboltovih sekundi* i kinematske viskoznosti jest

$$\nu = \left( 0.0022 t - \frac{1.8}{t} \right) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

#### SAE gradacija viskoznosti motornih ulja

S inženjerskog motrišta viskoznost je najvažnije svojstvo industrijskih maziva. Premalo viskozno mazivo pod silom strojnih nasjednih površina bude istisnuto te dolazi do kontakta strojnih elemenata i oštećenja. Previše viskozno mazivo npr. ne teče preko cijele ležajne površine te dolazi do oštećenja ili zbog svoje prevelike viskoznosti apsorbira

previše energije koja se potom pretvara u toplinu te dovodi do pregrijavanja. Stoga je pravilan izbor određenog maziva, ulja za određenu industrijsku namjenu od izuzetne važnosti.

Za pravilan izbor maziva odn. motornih ulja važna je njihova što preciznija klasifikacija.

SAE (Society of Automotive Engineers) klasifikacija motornih ulja prema viskoznosti je najrašireniji i općenito prihvaćen sustav klasifikacije na svijetu. Prema SAE oznakama definiraju se dvije grupe viskoznosti:

- sa oznakom *W* - kojom se klasificiraju ulja za zimske uvjete rada;
- bez oznake - ulja za općenite uvjete rada.

Viskoznost se kod ulja s oznakom *W* mjeri na dva načina:

- simulatorima hladnog starta;
- testom pumpanja koji definira kritičnu temperaturu pumpanja.

U simulatorima hladnog starta dobiva se dinamička viskoznost u (Pa s), dok ta ulja moraju također zadovoljiti i test minimalne kinematske viskoznosti pri 100°C.

Kod ulja *bez oznake* mjeri se samo kinematska viskoznost pri višoj temperaturi.

U modernim motorima koriste se tzv. *multigrade* ulja koja se dobiju miješanjem prethodno navedenih dviju grupa ulja te ona zadovoljavaju kriterije viskoznosti pri niskim temperaturama i zadovoljavaju također uvjete minimalne viskoznosti pri 100°C. Npr. ulje koje zadovoljava **10W** uvjete i **30** uvjet označava se **SAE 10W30**.

SAE Viskoznost	ASTM D2602 Viskoznost (Pa s) Max temp. (°C)	ASTM D3829 Granična temp. pumpanja (°C)	ASTM D445 Minimalna viskoznost (mm <sup>2</sup> /s) pri 100°C	ASTM D445 Maksimalna viskoznost (mm <sup>2</sup> /s) pri 100°C
0W	6200 pri -35	-35	3,8	-
5W	6600 pri -30	-30	3,8	-
10W	7000 pri -25	-25	4,1	-
15W	7000 pri -20	-20	5,6	-
20W	9500 pri -15	-15	5,6	-
25W	13000 pri -10	-10	9,3	-
20			5,6	9,3
30			9,3	12,5
40			12,5	16,3
50			16,3	21,9

**Tablica 4.1.P3 SAE klasifikacija viskoznosti motornih ulja**

U inženjerstvu se često koristi veličina **indeksa viskoznosti "VI"**. Unutarnje trenje u kapljevinama pa tako i mazivu je veće pri nižoj temperaturi i manje pri višoj temperaturi. Npr. med pri niskoj temperaturi jedva da teče, a nakon zagrijavanja teče sasvim lako. Med i njemu slični fluidi imaju **nizak indeks viskoznosti** dok fluid koji podjednako teče i pri niskim i visokim temperaturama ima **visok indeks viskoznosti**. Raspon indeksa VI ide od VI=0 za ulja sa visokom osjetljivošću na viskoznost obzirom na temperaturu do cca. VI=200 za ulja kod kojih se viskoznost puno manje mijenja s promjenom temperature. U motorna ulja stoga se dodaju kemijski aditivi (obično dugolančani polimeri) za poboljšanje indeksa viskoznosti, a što se posebno odnosi na miješana (*multigrade*) ulja.

## 4.2 Navier Stokesove jednadžbe

Za Newtonovski fluid viskozna naprežanja proporcionalna su brzini smičnog naprežanja. Ta se naprežanja  $\tau_{ij}$ ,  $\sigma_{ii}$  mogu izraziti pomoću gradijenata brzine i svojstava fluida (viskoznost). Ako se tako izražena naprežanja uvrste u diferencijalnu jednadžbu gibanja (dana u poglavlju o zakonu očuvanja količine gibanja) proizlaze *Navier Stokesove* jednadžbe gibanja. Uz pretpostavku nestlačivog strujanja i konstantne viskoznosti, Navier Stokesove jednadžbe u vektorskom obliku jesu

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad } p + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{f}$$

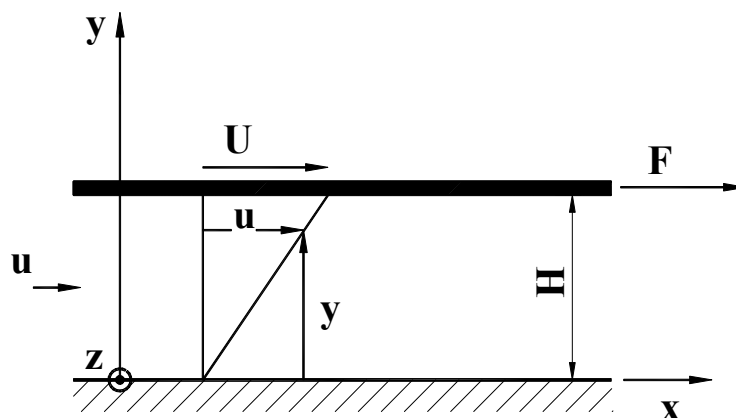
gdje član na lijevoj strani predstavlja silu inercije, prvi i drugi član desne strane predstavljaju kontaktne sile i to normalne (tlak) i smične te zadnji član desne strane predstavlja masenu silu. Zapisane u kartezijevom koordinatnom sustavu po osima  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , jednadžbe jesu:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z \end{aligned}$$

**Navier Stokesove jednadžbe u sprezi sa zakonom očuvanja mase daju puni matematički model strujanja nestlačivih Newtonovskih fluida.** Zbog složenosti Navier Stokesovih jednadžbi (parcijalne diferencijalne nelinearne jednadžbe drugog reda) moguće ih je riješiti analitički samo u nekim specijalnim slučajevima uz niz pojednostavljenja i pretpostavki. U daljnjem tekstu primijenit će se na tzv. Couetteovo strujanje te Hagen Poiseuilleovo strujanje.

### 4.2.1 Couetteovo strujanje

Viskozni fluid struji između dvije horizontalne, beskonačno dugačke ploče (*Sl.4.2.1*) zbog nametnutog gradijenta tlaka  $dp/dx$ , a uz to gornja se ploča giba konstantnom brzinom  $U$  dok donja miruje. Strujanje je laminarno, nestlačivo, stacionarno. Kako bi se dobio algebarski izraz raspodjele



*Sl.4.2.1 Strujanje fluida između dvije paralelne ploče - Couetteovo strujanje*

brzine po presjeku za ovako definiran režim strujanja, koriste se jednažba očuvanja mase i Navier Stokesove jednažbe. Zbog činjenice da je strujanje nestacionarno i nestlačivo, zakon očuvanja mase u diferencijalnom obliku jest

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

tj.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Obzirom da je strujanje ravninsko proizlazi  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ ,  $w = 0$ . Profil brzine je ustaljen tj. ne mijenja

se duž osi  $x$ , tj.  $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ . Zbog navedenih pojednostavljenja izraz očuvanja mase reducira se u

$\frac{\partial v}{\partial y} = 0$  te integracijom uz uvrštenje rubnih uvjeta („no slip“) proizlazi  $v = 0$ .

Navier Stokesove jednažbe na nestlačivo strujanje njutnovskog fluida i konstantnu viskoznost jesu:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{f}.$$

Zapisom Navier Stokesovih jednažbi u kartezijevom koordinatnom sustavu (danom na prethodnoj slici) te primjenom prije navedenih pojednostavljenja, slijedi sustav jednažbi dan po koordinatnim osima:

- smjer  $x$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Zbog prethodno spomenutih pojednostavljenja, iz gornjeg izraza slijedi

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4C.1)$$

- smjer  $y$

Istim pojednostavljenjima kao i za os  $x$  slijedi

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g$$

Ovaj izraz daje ovisnost za tlak

$$p = -\rho g y + p(x) \quad (4C.2)$$

- smjer  $z$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z},$$

iz čega proizlazi da se tlak ne mijenja po osi  $z$ .

Ako se u izraz 4C.1 uvrsti  $\mu = \rho \nu$  slijedi

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}.$$

Pošto je lijeva strana funkcija samo od  $x$ , a desna strana samo od  $y$  to slijedi da su gornji izrazi konstante

$$\frac{dp}{dx} = C \quad i \quad \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = C$$

odnosno,

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{C}{\mu} \Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{C}{\mu} y + C_1 \Rightarrow u = \frac{C y^2}{2\mu} + C_1 y + C_2$$

tj. izraz za brzinu jest oblika

$$u = \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2\mu} + C_1 y + C_2.$$

Rubni uvjeti za brzinu jesu

$$\begin{array}{lll} \text{za } y = 0 & \text{vrijedi} & u = 0 \\ \text{za } y = H & \text{vrijedi} & u = U \end{array}$$

te iz njih slijede konstante integracije

$$C_2 = 0, \quad U = \frac{CH^2}{2\mu} + C_1 H \Rightarrow C_1 = \frac{U}{H} - \frac{C}{2\mu} H.$$

Ako se u izraz za brzinu uvrsti bezdimenzijski gradijent tlaka oblika

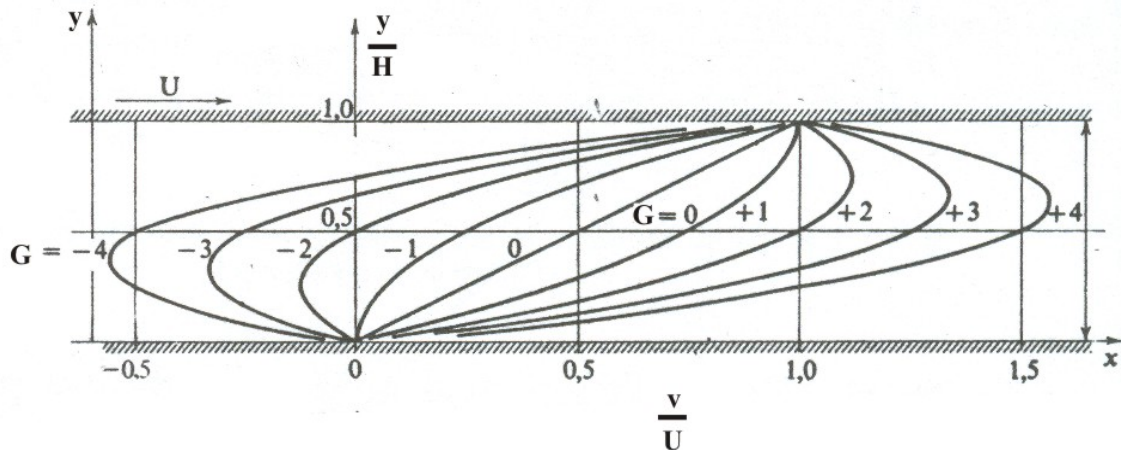
$$G = \frac{H^2}{2\mu U} \left( -\frac{dp}{dx} \right)$$

slijedi konačni bezdimenzijski izraz za raspodjelu brzine po presjeku

$$\frac{u}{U} = \frac{y}{H} + G \frac{y}{H} \left( 1 - \frac{y}{H} \right)$$



koji je prikazan na donjoj slici. Zbog tzv. "no slip" uvjeta tj. činjenice da je brzina fluida uz stijenku jednaka brzini stijenke, za navedeni primjer Couetteovog strujanja slijedi da je brzina fluida neposredno u dodiru s donjom pločom  $u=0$ , a brzina fluida uz gornju ploču  $u=U$ .



**Sl.4.2.2 Couetteovo strujanje – profili brzine**

Analiza Couetteovog strujanja prema dobivenim profilima brzina kao na gornjoj slici (Sl.4.2.2) daje:

Za  $G=0$ :

- gibanje gornje ploče je jedini razlog gibanja fluida među pločama, nema nametnutog gradijenta tlaka  $dp/dx=0$ . Proizlazi linearni profil brzina.

Za  $G > 1$ :

- nametnuti tlak se smanjuje u smjeru gibanja ploče,  $dp/dx < 0$ , brzina stujanja pozitivna je preko čitavog presjeka.

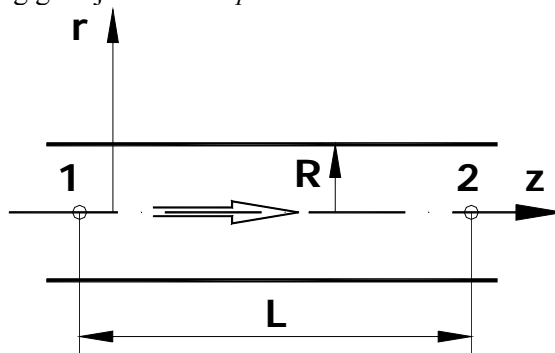
Za  $G < -1$ :

- tlak raste u smjeru gibanja ploče  $dp/dx > 0$ , brzina stujanja postaje negativna na dijelu presjeka uz nepomičnu ploču, tj. na tom dijelu strujanje je suprotno od smjera gibanja ploče. Sile smičnog naprezanja prenošene od gornje ploče kroz slojeve fluida postaju na određenoj udaljenosti manje od sile pozitivnog uzdužnog gradijenta tlaka  $dp/dx$ . te dolazi do povratnog strujanja.

Za slučaj kada bi gornja ploča mirovala,  $U=0$ , uspostavio bi se parabolični profil brzine.

#### 4.2.2 Hagen-Poiseuilleovo strujanje

Laminarno, nestlačivo, stacionarno strujanje, njutnovskog, realnog viskozno fluida u cijevi (Sl.4.2.3) zbog nametnutog gradijenta tlaka  $dp/dx$ .



**Sl.4.2.3 Laminarno, stacionarno, nestlačivo strujanje u cijevi**

Navier Stokesove enačbe za nujtovski fluid konstantne viskoznosti u cilindričnim koordinatama jesu:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} - \frac{v_\vartheta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= \\ &= \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho f_r \\ \rho \left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{v_r v_\vartheta}{r} + v_z \frac{\partial v_\vartheta}{\partial z} \right) &= \\ &= \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\vartheta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \rho f_\vartheta \\ \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \vartheta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \\ &= \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z \end{aligned}$$

Zbog stacionarnosti  $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$ . Zbog aksisimetričnog strujanja  $\frac{\partial}{\partial \vartheta} \equiv 0$ . Strujanje je laminarno, paralelno s osi z, slijedi  $v_\vartheta = 0$ . Profil brzine je ustaljen te stoga  $\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$ .

Iz zakona očuvanja mase za stacionarno, nestlačivo strujanje  $\text{div } \vec{v} = 0$  koji u cil. koord. glasi:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\rho r v_\vartheta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho r v_z) = 0$$

proizlazi  $\frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0$  odnosno nakon integracije  $v_r = \frac{C}{r}$ . Uvrštenjem rubnih uvjeta  $v_r = 0$  za  $r=R$

slijedi  $C=0$  tj.  $v_r = 0$ .

Od Navier Stokesovih enačbi preostaje:

$$\begin{aligned} \underline{r - komponenta} : \quad & 0 = -\rho g \sin \vartheta - \frac{\partial p}{\partial r} \\ \underline{\vartheta - komponenta} : \quad & 0 = -\rho g \cos \vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} , \\ \underline{z - komponenta} : \quad & 0 = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right) - \frac{\partial p}{\partial z} . \end{aligned}$$

Integrirane enačbe po  $r$  i  $\vartheta$  daju

$$p = -\rho g r \sin \vartheta + f(z),$$

odnosno

$$p = -\rho g y + f(z)$$

što pokazuje da je tlak hidrostatski distribuiran na po poprečnom presjeku cijevi te da gradijent tlaka  $\partial p / \partial z$  ne ovisi o  $r$  i  $\mathcal{G}$ .

Pošto vrijedi da je  $v_z = v_z(r)$ , umjesto parcijalne može se pisati obična dif. jednačba:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}$$

Gornji izraz moguć je samo ako su i lijeva i desna strana konstantne jer je lijeva strana funkcija samo od  $r$ , a desna samo od  $z$ . Konstantu je moguće definirati kao

$$\text{const.} = -\frac{\Delta p}{L}, \text{ uz } \Delta p = p_1 - p_2,$$

gdje je  $\Delta p$  pad tlaka na segmentu cijevi duljine  $L$ . Slijedi,

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{\mu L} r$$

te integriranjem,

$$\begin{aligned} r \frac{dv_z}{dr} &= -\frac{\Delta p}{\mu L} \frac{r^2}{2} + C_1 \\ \frac{dv_z}{dr} &= -\frac{\Delta p}{\mu L} \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} \\ v_z &= -\frac{\Delta p}{4\mu L} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \end{aligned}$$

Iz uvjeta realnosti da je za  $r=0$  brzina  $v_z$  konačna, slijedi konstanta integracije  $C_1=0$ .

Tzv. *no-slip* uvjet prijanjanja viskoznog fluida uz stijenku cijevi daje za  $r=R$  brzinu  $v_z=0$  odn.

$$C_2 = \frac{\Delta p}{4\mu L} R^2.$$

Konačno,

$$v_z(r) = -\frac{\Delta p}{4\mu L} (r^2 - R^2) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} (R^2 - r^2)$$

što predstavlja rotacijski paraboloid.

### Volumni protok $Q$

Volumni protok moguće je dobiti integracijom donjeg izraza

$$dQ = v_z dA$$

preko poprečnog presjeka cijevi:

$$Q = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} (R^2 - r^2) r dr = 2\pi \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} \left[ R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R$$

Slijedi Hagen-Poiseuilleova formula za protok u kružnoj cijevi:

$$Q = \pi \frac{p_1 - p_2}{8\mu L} R^4$$

Prosječna brzina po presjeku  $\bar{v}_z = \frac{p_1 - p_2}{8\mu L} R^2$  tj.  $Q = \bar{v}_z \cdot A$ .

Pad tlaka linearno je proporcionalan protoku:

$$\Delta p = \frac{8\mu L}{\pi R^4} \cdot Q$$

### 4.3 Dimenzijska analiza strujanja realnog fluida u cijevi

Primjenom dimenzijske analize minimizira se potreban broj mjerenja pri laboratorijskom istraživanju neke pojave i olakšava prikaz i analiza rezultata mjerenja.

#### 4.3.1 BUCKINGHAM $\Pi$ teorem

Buckingham  $\Pi$  teorem:

Svaki fizikalni zakon između  $n$  fizikalnih veličina  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$  izražen funkcijom

$$f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = 0,$$

može se izraziti kao funkcija  $n-k$  bezdimenzijskim značajki

$$\phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}) = 0,$$

gdje je  $k$  minimalan broj osnovnih veličina čijim se dimenzijama mogu opisati dimenzije čitavog skupa  $n$  fizikalnih veličina.

Potreban broj bezdimenzijskih  $\Pi$  veličina je za  $r$  manji od broj originalnih veličina  $Q$ . Potrebno je izabrati između dvije grupe baznih dimenzija za opis varijabli:

- $M$  (masa),  $L$  (duljina),  $T$  (vrijeme);
- $F$  (sila),  $L$  (duljina),  $T$  (vrijeme).

Jednostavan sistematičan postupak kreiranja tzv. bezdimenzijskih produkata jest **metoda ponavljajućih varijabli** koju je moguće pregledno prikazati na sljedećem primjeru.

### 4.3.2 Analiza pada tlaka u cijevi – primjena BUCKINGHAM $\Pi$ teorema

Primjer stacionarnog, nestlačivog strujanja newtonovskog fluida kroz dugu, horizontalnu cijev kružnog poprečnog presjeka i glatke unutarnje stijenke. Analizu gubitaka strujanja moguće je započeti definirajući varijable o kojima ovisi pad tlaka po jedinici duljine cijevi  $\Delta p_L$ , tj.

$$\Delta p_L = f(D, \rho, \mu, v)$$

gdje je  $D$  promjer cijevi,  $\rho$  gustoća fluida,  $\mu$  dinamička viskoznost,  $v$  srednja brzina. Postupak metode ponavljajućih varijabli sastoji se dalje od sljedećih koraka:

- a) Izraziti svaku od varijabli pomoću jednog skupa baznih dimenzija, npr.  $F, L, T$ :

$$\begin{aligned}\Delta p_L &\equiv FL^{-3} \\ D &\equiv L \\ \rho &\equiv FL^{-4}T^2 \\ \mu &\equiv FL^{-2}T \\ v &\equiv LT^{-1}\end{aligned}$$

- b) Primjenom Buckinghamovog  $\Pi$  teorema moguće je definirati broj potrebnih  $\Pi$  veličina. Broj varijabli je  $n=5$  ( $\Delta p_L, D, \rho, \mu, v$ ), a broj bazih dimenzija  $k=3$  ( $F, L, T$ ) pa je stoga broj potrebnih  $\Pi$  varijabli  $n-k=2$ .
- c) Potrebno je definirati  $\Pi_1, \Pi_2$ . Ponavljajuće varijable za formiranje  $\Pi$  veličina moraju se izabrati iz neovisnih varijabli ( $D, \rho, \mu, v$ ), a nije moguće koristiti ovisnu varijablu  $\Delta p_L$ . Pošto postoje tri bazne veličine  $k=3$  potrebno je izabrati po tri ponavljajuće varijable za svaki  $\Pi$ . Povoljno je izabrati one ponavljajuće varijable koje su dimenzijski jednostavnije. U ovom primjeru izabrane su neovisne varijable  $D, \rho, v$ . Slijedi definicija prve  $\Pi$  veličine:

$$\Pi_1 = \Delta p_L D^a v^b \rho^c$$

koja mora biti bezdimenzijska pa stoga

$$(FL^{-3})(L)^a(LT^{-1})^b(FL^{-4}T^2)^c \equiv F^0L^0T^0.$$

Slijedi:

$$\begin{aligned}1 + c &= 0 \quad (\text{za } F) \\ -3 + a + b - 4c &= 0 \quad (\text{za } L) \\ -b + 2c &= 0 \quad (\text{za } T).\end{aligned}$$

Iz gornjeg sustava jednadžbi slijedi  $a = 1, b = -2, c = -1$  te je dobivena prva  $\Pi$  veličina

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p_L D}{\rho v^2}.$$

Za definiciju druge bezdimenzijsku veličine  $\Pi_2$  uvodi se jedina preostala neovisna varijabla  $\mu$ . Slijedi:

$$\begin{aligned}\Pi_2 &= \mu D^a v^b \rho^c \\ (FL^{-2}T)(L)^a(LT^{-1})^b(FL^{-4}T^2)^c &\equiv F^0L^0T^0 \\ 1 + c &= 0 \quad (\text{za } F) \\ -2 + a + b - 4c &= 0 \quad (\text{za } L) \\ 1 - b + 2c &= 0 \quad (\text{za } T) .\end{aligned}$$

Iz sustava jednadžbi slijede vrijednosti koeficijenata  $a = -1$ ,  $b = -1$ ,  $c = -1$  te je:

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{D\rho v} .$$

d) Rezultat bezdimenzijske analize jest:

$$\frac{\Delta p_L D}{\rho v^2} = \tilde{\phi}\left(\frac{\mu}{D\rho v}\right)$$

ili

$$\frac{\Delta p_L D}{\rho v^2} = \phi\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right) .$$

Dobivena bezdimenzijska značajka odnosno broj  $\frac{\rho v D}{\mu}$  ili  $\frac{v D}{\nu}$  jedan je od najvažnijih *brojeva* u mehanici fluida i zove se **Reynoldsov broj (Re)**.

### **4.3.3 Važne bezdimenzijske veličine (brojevi) u mehanici fluida**

Metodom ponavljajućih varijabli pokazanom u prethodnom poglavlju (ili nekom drugom metodom) definiraju se bezdimenzijske značajke u mehanici fluida. Određene bezdimenzijske kombinacije varijabli poznati su brojevi u mehanici fluida i dani su u sljedećoj tablici.

BROJ	IZRAZ	OPISNI KVOCIJENT	PRIMJENA
REYNOLDSOV BROJ	$Re = \frac{vL}{\nu}$	$\frac{\text{inercija}}{\text{viskoznost}}$	Općenita primjena u meh. fluida, mjera turbulencije
FROUDOV BROJ	$Fr = \frac{v}{\sqrt{gL}}$	$\frac{\text{inercija}}{\text{gravitacija}}$	Strujanje sa slobodnom površinom, otvoreni vodotoci
MACHOV BROJ	$Ma = \frac{v}{c}$	$\frac{\text{inercija}}{\text{stlačivost}}$	Strujanje kod kojeg su važni efekti kompresibilnosti, transsonična strujanja
CAUCHYJEV BROJ	$Ca = \frac{\rho v^2}{E}$	$\frac{\text{inercija}}{\text{stlačivost}}$	Strujanje kod kojeg su važni efekti kompresibilnosti, transsonična strujanja
EULEROV BROJ	$Eu = \frac{p}{\rho v^2}$	$\frac{\text{tlak}}{\text{inercija}}$	Problemi kod kojih su primarni tlakovi i razlike tlakova
BROJ	IZRAZ	OPISNI KVOCIJENT	PRIMJENA
KAVITACIJSKI BROJ	$\sigma = \frac{(p - p_v)}{\frac{1}{2}\rho v^2}$	$\frac{\text{tlak}}{\text{inercija}}$	Problemi kod kojih su primarni tlakovi i razlike tlakova, strujanje u turbostrojevima ...
STROUHALOV BROJ	$St = \frac{\omega L}{v}$	$\frac{\text{inercija (lokalno)}}{\text{inercija (konvektivno)}}$	Nestacionarno strujanje s karakterističnom frekvencijom oscilacije
WEBEROV BROJ	$We = \frac{\rho v^2 L}{\sigma_s}$	$\frac{\text{inercija}}{\text{površinska napetost}}$	Problemi kod kojih je važna površinska napetost

**Tablica 4.3.1 Važniji brojevi u mehanici fluida**

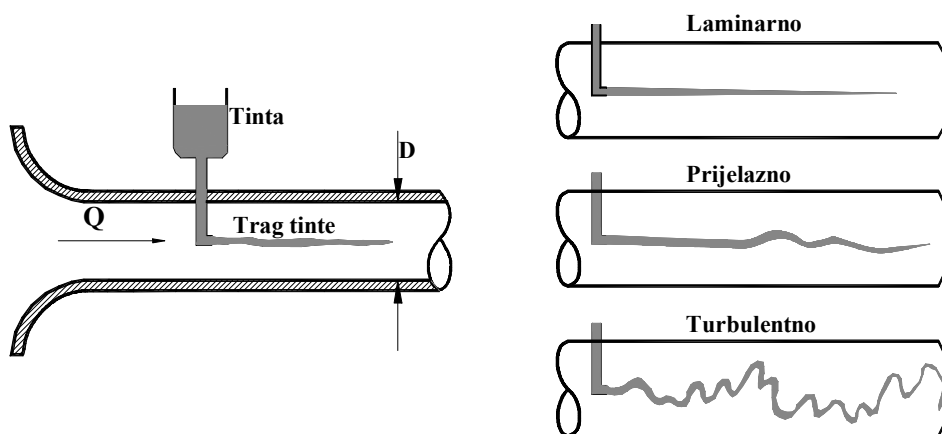
Varijable korištene u tablici jesu:  $v$  brzina,  $L$  karakteristična duljina,  $\nu$  koeficijent kinematske viskoznosti,  $c$  brzina zvuka,  $\rho$  gustoća fluida,  $E$  modul elastičnosti,  $\sigma_s$  koeficijent površinske napetosti,  $g$  ubrzanje sile teže,  $\omega$  frekvencija oscilirajućeg strujanja,  $p$  tlak,  $p_v$  tlak zasićenja.

## 4.4 Turbulentno i laminarno strujanje

Kao posljedicu uvođenja svojstva viskoznosti strujanje realnog - viskoznog fluida moguće je klasificirati i kao laminarno, turbulentno, odn. prijelazno (**SI.5.4, SI.4.5**).

**Laminarno strujanje** – čestice fluida gibaju se po glatkim putanjama u infinitezimalno tankim laminama (slojevima), koji klize mirno jedan po drugom.

**Turbulentno strujanje** – nepravilno kaotično gibanje čestica fluida sa jakim fluktuacijama brzine u svim točkama strujnog polja.



**Sl.4.4.1 Eksperiment injektiranja tinte u cijev u kojoj struji voda. Klasifikacija strujanja.**

Najvažniji bezdimenzijski parametar pri analizi strujanja u cijevi jest Reynoldsov broj

$$\text{Re} = \frac{vD}{\nu} \quad \text{ili} \quad \text{Re} = \frac{4Q}{D\pi\nu}$$

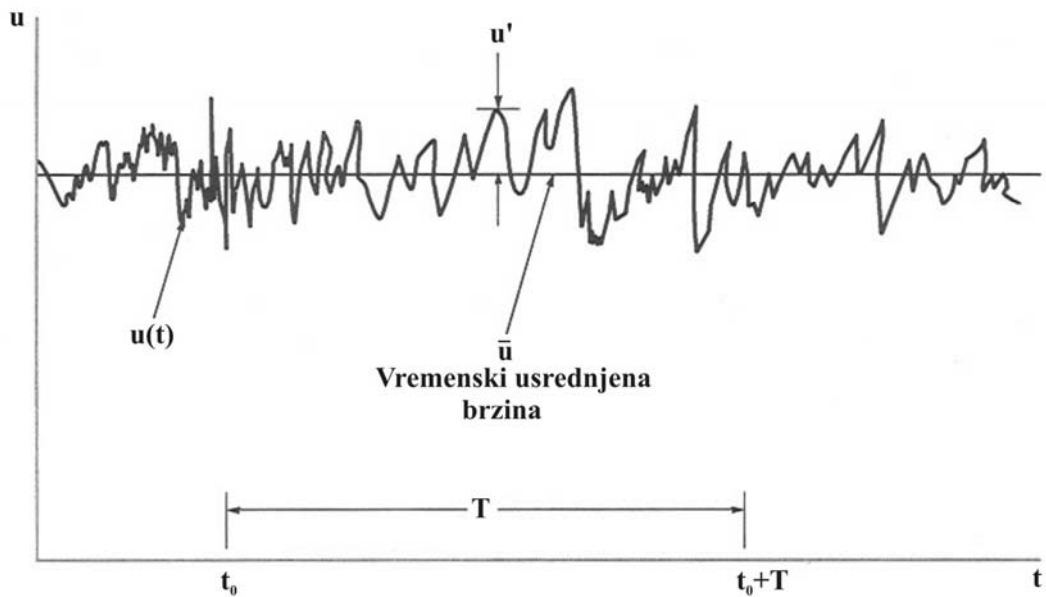
gdje je  $v$  srednja brzina,  $Q$  protok,  $D$  promjer cijevi (ili neka druga karakteristična dužina) te  $\nu$  kinematski koeficijent viskoznosti. Reynoldsov broj predstavlja omjer inercijskih i viskoznih efekata pri strujanju. On je mjera turbulencije.

Pokus (**Sl.4.4.1**) dobro ilustrira prijelaz iz laminarnog u prijelazni i onda potpuno turbulentni režim strujanja. Duga cijev inicijalno je napunjena vodom koja miruje sve dok se ne otvori ventil. Sve većim otvaranjem ventila povećava se brzina strujanja u cijevi, a time i Reynoldsov broj. Režim strujanja vizualiziran je injektiranjem tinte u struju fluida. Pri manjim brzinama strujanje je laminarno uz vrijednost Reynoldsovog broja  $\text{Re} \lesssim 2300$ . Pri vrijednostima Reynoldsovog broja  $\text{Re} \gtrsim 4000$  strujanje je već potpuno turbulentno. Za Reynoldsove brojeve između danih kritičnih vrijednosti pretpostavlja se prijelazno strujanje.

Spomenute granične vrijednosti Reynoldsovog broja otprilike vrijede u većini realnih situacija strujanja. Relativnost graničnih vrijednosti Reynoldsovog broja između laminarnog i turbulentnog strujanja vidljiva je i iz poznatih eksperimenata Osborne Reynoldsa koji je u laboratorijskim uvjetima uspio postići laminarno strujanje uz visoki  $\text{Re} \approx 20000$ , a kasnijim eksperimentima u još strože kontroliranim laboratorijskim uvjetima ta je granica povišena na  $\text{Re} \approx 40000$ .

Trag aksijalne ( $x$ -komponente) brzine mjerene na određenoj lokaciji u cijevi pri turbulenciji vidljiv je na slici (**Sl.4.4.1 desno dolje**), a moguće ga je prikazati i na dijagramu  $u-t$  (**Sl.4.4.2**).

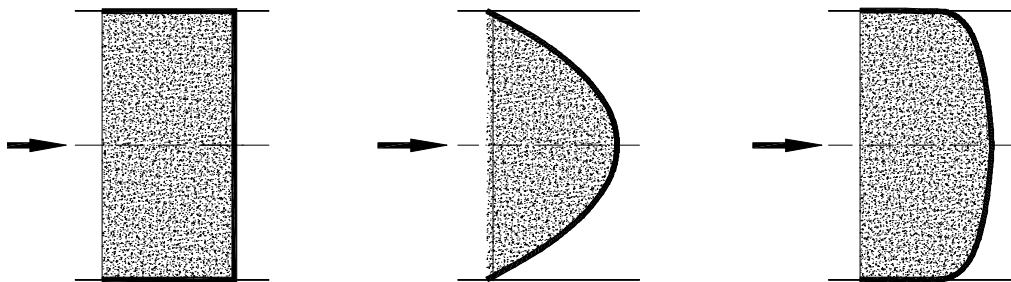




**SI.4.4.2 Usrednjena brzina  $\bar{u}$  i fluktuacija brzine  $u'$  pri turbulentnom strujanju u cijevi.**

Stohastična struktura dijagrama brzine i fluktuacije brzine značajka su turbulencije, a svojstva strujanja fluida npr. pad tlaka, prijenos topline itd., jako ovise o njima.

Na slici (SI.4.4.3) prikazan je odnos oblika profila brzina za slučaj strujanja idealnog neviskozno fluida te oblik laminarnog i turbulentnog profila brzina pri većem Reynoldsovom broju. Moguće je uočiti određenu *sličnost* turbulentnog i idealnog profila brzina. Pri velikim Reynoldsovim brojevima turbulentni profil brzina postaje sve "spljošteniji" te u određenom smislu oblikom *teži* idealnom pravokutnom obliku. Viskozni efekti pri turbulentnom strujanju nisu jako važni i brzina koja se koristi u strujanju idealnog fluida je adekvatna vremenski usrednjenoj brzini  $\bar{u}$  (SI.4.4.2) pri turbulentnom strujanju.



**SI.4.4.3 Idealan, laminaran i turbulentan oblik profila brzine**

Navedene činjenice jesu i razlog zašto analiza strujanja neviskozno fluida daje razumne fizikalne rezultate. Idealni fluid nije viskozan, postoje samo inercijalne sile, tj.  $\mu = 0$  pa je za idealan fluid Reynoldsov broj  $R_e = \rho v D / \mu = \infty$  pošto je nazivnik jednak nuli, odnosno logična je teoretska pretpostavka da bi u tom idealnom slučaju strujanje bilo turbulentno.

Na slici (SI.4.5.2) brzina  $\bar{u}$  predstavlja srednju brzinu pri turbulentnom strujanju, a  $v_C$  je brzina u centru cijevi. Povećanjem Reynoldsovog broja turbulentan profil brzina postaje sve "spljošteniji". Radi usporedbe prikazan je jedan laminaran paraboličan profil brzina. Uočljivo je da je u blizini stijenke cijevi turbulentan profil brzine znatno strmiji. Detaljnija analiza turbulentnog profila brzine dana je u sljedećem poglavlju.

Komponentu trenutne brzine u  $x$ -smjeru  $u = u(x, y, z, t)$  moguće je izraziti preko srednje brzine i fluktuacije (SI.4.4.2)

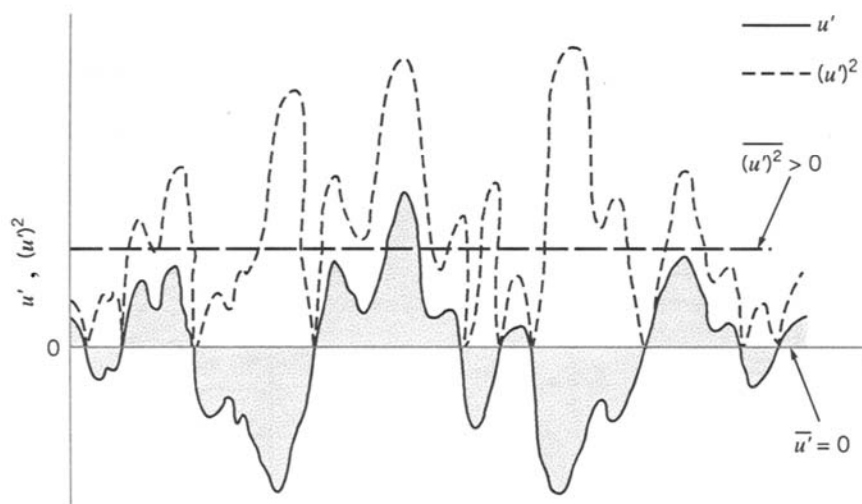
$$u = \bar{u} + u'$$

gdje je srednja brzina

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u dt$$

uz vremenski interval  $T$  koji je znatno duži od periode najduže fluktuacije. Vremensko usrednjenje fluktuacija je nula jer

$$\overline{u'} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (u - \bar{u}) dt = \frac{1}{T} \left( \int_{t_0}^{t_0+T} u dt - \bar{u} \int_{t_0}^{t_0+T} dt \right) = \frac{1}{T} (T\bar{u} - \bar{u}T) = 0$$



SI.4.4.4 Usrednjene fluktuacije i usrednjen kvadrat fluktuacija

odnosno fluktuacije su ravnomjerno distribuirane na obje strane linije vremenskog usrednjenja (SI.4.4.4). Kvadrati fluktuacija su, kao što je vidljivo i na slici, veći od nule  $(u')^2 > 0$ , a usrednjenja umnožaka fluktuacija po različitim smjerovima npr.  $\overline{u'v'}$ ,  $\overline{u'w'}$  mogu biti jednaka nuli, veća ili manja od nule.

#### Intenzitet turbulencije

Struktura i intenzitet turbulentnog strujanja mogu se okarakterizirati bezdimenzijskim parametrom koji se naziva *intenzitet turbulencije* i definiran je

$$I = \frac{\sqrt{\overline{(u')^2}}}{\bar{u}}$$

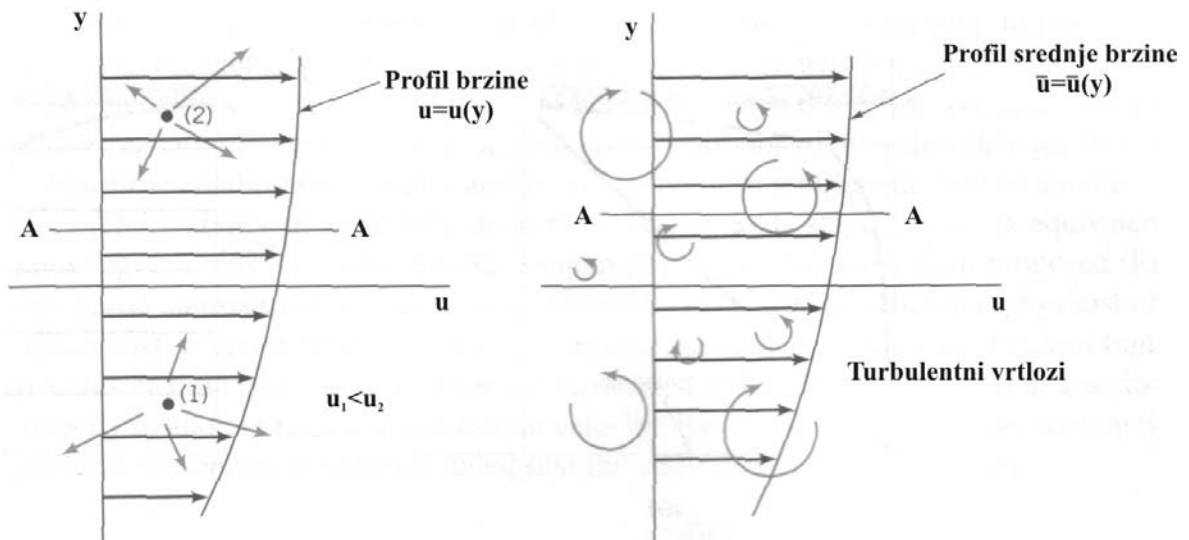
Što je veći intenzitet turbulencije jače su i fluktuacije brzine i ostalih veličina. Tipična vrijednost intenziteta turbulencije za strujanje u rijekama i pri atmosferskim strujanjima jest  $I \lesssim 0.1$ .

### Perioda fluktuacija

Perioda fluktuacija prikazanih na slici (SL.4.4.2) za uobičajene slučajeve npr. pri turbulentnom istjecanju iz slavine jest reda veličine 10, 100 ili 1000 ciklusa u sekundi dok su tipične periode pri strujanju golfske struje u Atlantskom oceanu reda veličine sata ili dana.

### Miješanje

Proces miješanja je transport mase, energije i količine gibanja kroz strujno polje. Miješanje je za više redova veličine efikasnije pri turbulentnom nego pri laminarnom strujanju, pošto su za glavninu procesa bitni slučajni procesi na makroskopskoj razini tj. vrtloženje fluida (SL.4.4.5), što je svojstvo turbuencije. Kod laminarnog strujanja strujno polje je moguće opisati laminama koje struje jedna iznad druge i svaki slučajni proces i miješanje događa se na molekularnoj razini određenim *preskakanjem* molekula u susjednu laminu. Pozitivni efekti miješanja pri turbulenciji od suštinske su važnosti u inženjerstvu kod npr. izmjenjivača topline, isparivača tj. izmjene topline između fluida i stijenke ili omogućuju efikasno raspršivanje dimnih plinova koji iz dimnjaka izlaze u atmosferu.



SL.4.4.5 Profili brzine: a.) Laminarno strujanje – smično naprezanje posljedica molekularnih procesa; b.) Turbulentno strujanje – vrtloženje fluida

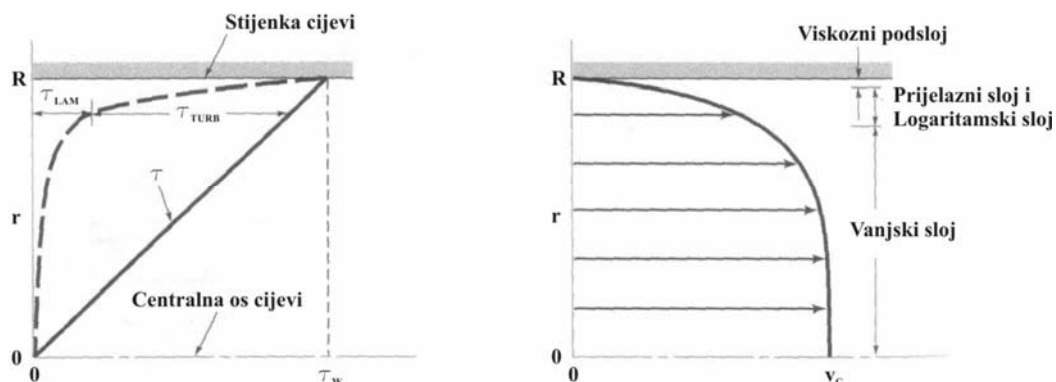
### Smično naprezanje

Vrtložna struktura strujnog polja pri turbulenciji snažno potiče miješanje i transport količine gibanja kroz zamišljenu ravninu A-A (SL.4.4.5) tj. smičnu silu. Niži sporiji slojevi fluida (SL.4.4.5a) bliži stijenci, usporavaju gonje brže slojeve fluida tj. taj transport količine gibanja preko zamišljene ravnine A-A stvara otpor u bržim slojevima odnosno stvara se smična sila. Smična sila nastaje samo ako postoji gradijent brzine  $u=u(y)$ . Ako se na te procese nadodaju i kohezivne molekularne sile moguće je pri laminarnom režimu strujanja ukupno smično naprezanje izraziti pomoću ranije spomenutog Newtonovog zakona viskoznosti  $\tau_{LAM} = \mu du / dy$ .

Uz spomenute efekte kod turbulentnog strujanja postoji i znatno važniji efekt vrtložne strukture strujnog polja (SL.4.4.5b) koji snažno potiče miješanje i transport količine gibanja kroz zamišljenu ravninu A-A. Slučajne fluktuacije brzine  $u'$  (komponenta u x smjeru) i  $v'$  (komponenta u y smjeru), za 2D slučaj prikazan na slici (SL.4.4.5), pri turbulenciji predstavljaju prevladavajući efekt koji sudjeluje u ukupnom smičnom naprezanju na zamišljenoj ravnini A-A

$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \overline{\rho u'v'} = \tau_{LAM} + \tau_{TURB}$$

Član u gornjem izrazu  $-\overline{\rho u'v'}$  je pozitivan i naziva se *Reynoldsovo naprezanje*. Iz prethodnog izraza također je vidljivo da smično naprezanje pri turbulentnom strujanju nije više proporcionalno gradijentu srednje brzine nego su u njemu bitni i efekti zbog fluktuacija brzina. Pri laminarnom strujanju fluktuacije brzina ne postoje tako da je i član  $\tau_{TURB} = 0$ .



**Sl.4.4.6 Turbulentno strujanje u cijevi: a.) Smično naprezanje; b.) Profil srednje brzine**

Međusoban odnos  $\tau_{LAM}$  i  $\tau_{TURB}$  je kompleksna funkcija (Sl.4.4.6). U uskom sloju fluida uz stijenku *viskoznom podsloju* dominira  $\tau_{LAM}$  dok u *vanjskom sloju* prevladava  $\tau_{TURB}$  koji je 100 ... 1000 puta veći od  $\tau_{LAM}$ .

Pri strujanju realnog fluida u cijevi ukupno smično naprezanje je proporcionalno udaljenosti od centralne osi cijevi (Sl.4.4.6), uz maksimalno smično naprezanje na samoj stijenci koje se naziva *smično naprezanje na zidu*  $\tau_w$ .

Na slici (Sl.4.4.6) samo načelno su prikazani odnosi  $\tau_{LAM}$  i  $\tau_{TURB}$  i odnos debljine viskoznog podsloja prema promjeru cijevi pošto je npr. pri srednjoj brzini strujanja od  $3 \text{ ms}^{-1}$  u cijevi promjera 75 mm debljina viskoznog podsloja oko 0.05 mm.

#### VRTLOŽNA VISKOZNOST

S ciljem uspostavljanja analogije prema Newtonovom zakonu viskoznosti *J. Boussinesq* uveo je pojam *vertložne viskoznosti*  $\eta$  pa je smično naprezanje pri turbulentnom strujanju moguće izraziti

$$\tau_{TURB} = \eta \frac{d\bar{u}}{dy}.$$

Za razliku od viskoznosti  $\mu$  koja je svojstvo fluida i koju je moguće očitati iz priručnika, vrtložna viskoznost ovisi i o vrsti fluida i o uvjetima strujanja i ona se mijenja od točke do točke strujnog polja.

#### DULJINA MIJEŠANJA

Poteškoća s nemogućnošću određivanja Reynoldsovog naprezanja  $-\overline{\rho u'v'}$  dakle ista je kao i poteškoća određivanja vrtložne viskoznosti  $\eta$ . U nastojanju definiranja procesa turbulencije  $L$ . Prandtl uvodi pojam **duljine miješanja**  $l_m$ . Turbulentni proces moguće je definirati kao slučajni transport čestica fluida kroz duljinu  $l_m$  između zona različite brzine. Vrtložnu viskoznost moguće je izraziti pomoću duljine miješanja

$$\eta = \rho l_m^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|,$$

slijedi izraz za smično naprezanje pri turbulenciji pomoću duljine miješanja

$$\tau_{TURB} = \rho l_m^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2.$$

Iz spomenutih pretpostavki i pokušaja proizlazi nemogućnost egzaktnog definiranja smičnog naprezanja kroz cijelo strujno polje turbulentnog realnog fluida, odnosno nemogućnost analitičkog određivanja turbulentnog profila brzine.

## 4.5 Turbulentni profil brzine u cijevi

Turbulentni profil brzine u cijevi moguće je podijeliti u četiri sloja (**SI.4.5.1**) obzirom na način aproksimacije profila brzine:

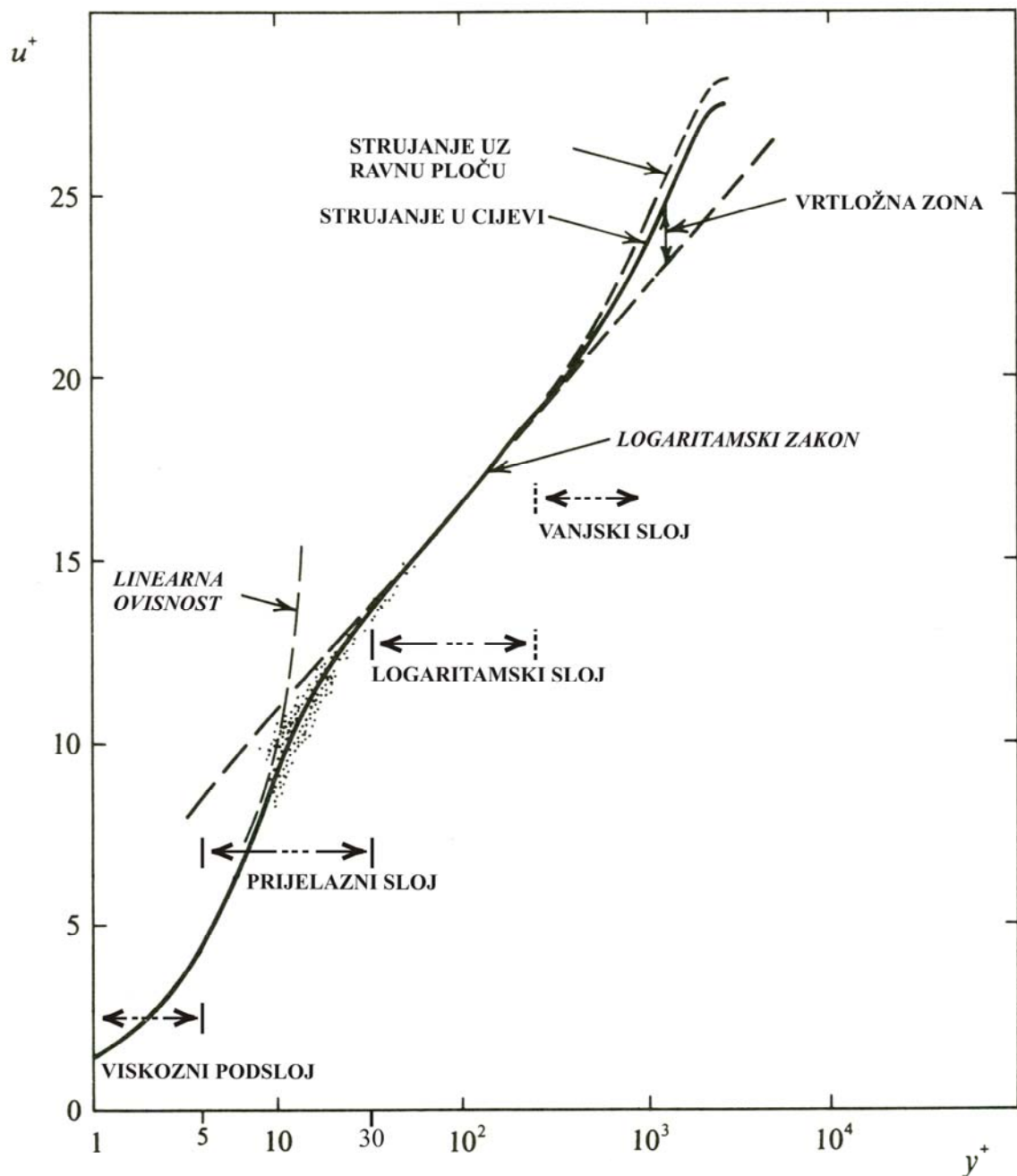
- **viskozni podsloj** („viscous sublayer“) područje laminarnog strujanja uz stijenku cijevi;
- **prijelazni sloj** („buffer layer“);
- **logaritamski sloj** – sloj logaritamskog zakona;
- **vanjski sloj** područje kojeg se uglavnom poklapa sa područjem primjene tzv. zakona defekta brzine („defect law“).

U viskoznom podsloju prevladava viskozno smično naprezanje  $\tau_{LAM}$  u odnosu na turbulentno naprezanje  $\tau_{TURB}$ , dok je u vanjskom turbulentnom sloju taj odnos obrnut. Za analizu profila brzina povoljno je uvesti bezdimenzijske značajke

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u^*} \quad \text{i} \quad y^+ = \frac{y u^*}{\nu}$$

gdje je  $y = R - r$  udaljenost od stijenke,  $\bar{u}$  vremenski usrednjena  $x$  komponenta brzine,  $u^* = \sqrt{\tau_w / \rho}$  je brzina trenja (uz  $\tau_w$  smično naprezanje na zidu).

Upotrebom bezdimenzijskih značajki dijagram graničnog sloja  $u^+ - y^+$  izgleda slično tj. usporedivo za različite režime strujanja, različite debljine graničnog sloja  $\delta_{99}$  kod optjecanja nekog objekta, odnosno za različite vrijednosti Reynoldsovog broja. Varijacijom Reynoldsovog broja primjetna su znatna odstupanja u vanjskom (desnom) dijelu dijagrama gdje se vrtložna zona *odvaja* od krivulje logaritamskog zakona ranije (tj. za niže vrijednosti  $y^+$ ) što je Reynoldsov broj manji.



Sl.4.5.1 Turbulentni profil brzine

### Viskozni podsloj

U području  $0 \leq y^+ \lesssim 5$  na stijenkama naliježe tanak sloj fluida u kojemu se srednja brzina mijenja sa udaljenošću od stijenke  $y$  linearno

$$u^+ = y^+.$$

U viskoznom podsloju prevladava viskozno smično naprezanje, a brzina je mala i ona se mijenja od 0 na stijenci ("no slip" uvjet) do reda veličine  $u^*$  za  $y^+ \approx 5$ . Strujanje u viskoznom podsloju je laminarno i ne postoje fluktuacije brzina. Vrijednost  $y^+ = 5$  predstavlja približnu vanjsku granicu viskoznog podsloja dok se kod definicije numeričkih modela turbulencije često uz određeni faktor sigurnosti vanjska granica viskoznog podsloja postavlja čak na  $y^+ = 2.5$ .

Uz postavljenu vanjsku granicu viskoznog podsloja  $y^+ = 5$  moguće je dobiti debljinu viskoznog podsloja  $\delta$  iz bezdimenzijskog izraza za profil brzine u viskoznom podsloju:

$$y = \delta = \frac{5\nu}{u^*} = \frac{25\nu}{u_\delta}$$

U prethodnom izraz  $u_\delta$  predstavlja brzinu strujanja na vanjskom rubu viskoznog podsloja, a koja je usko vezana uz srednju brzinu strujanja u cijevi. Moguće je zaključiti da je debljina viskoznog podsloja proporcionalna kinematskoj viskoznosti i obrnuto proporcionalna srednjoj brzini strujanja, odnosno povećanjem Reynoldsovog broja debljina viskoznog podsloja  $\delta$  se smanjuje. Na slici (SI.4.4.6) također je prikazan smještaj viskoznog podsloja kod strujanja u cijevi uz prenaplašenu debljinu.

### Prijelazni sloj

U prijelaznom sloju (često „*buffer layer*“) strujanje poprima karakteristike turbulencije.

### Logaritamski sloj

U logaritamskom sloju važni su i turbulentno smično naprezanje  $\tau_{\text{TURB}}$  i viskozno  $\tau_{\text{LAM}}$ . Profil brzina dobro je definiran *logaritamskim zakonom zida* za  $y^+ \gtrsim 30$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C$$

gdje je bezdimenzijska konstanta  $C \approx 5.0$  (za strujanje u idealno glatkoj cijevi), a  $\kappa \approx 0.41$  *Karmanova konstanta*. U unutarnjem dijelu logaritamskog sloja bliže stijenci u ukupnom smičnom naprezanju još u određenom dijelu sudjeluje viskozno naprezanje  $\tau_{\text{LAM}}$ , ali s odmakom od stijenke ono gubi na značaju i postaje zanemarivo te je ukupno smično naprezanje u vanjskom dijelu prijelazne zone  $y^+ > 70$  u potpunosti upravo turbulentno smično naprezanje  $\tau_{\text{TURB}}$ .

Logaritamski zakon zida koji u određenom smislu predstavlja poveznicu između viskoznog podsloja i centralne zone s druge strane može izuzetno dobro aproksimirati profil brzine kroz gotovo cijeli presjek cijevi (osim centralne zone u određenim slučajevima kada se tlak nizvodno jako povećava, npr. u difuzoru).

Povećanjem Reynoldsovog broja, maksimalna vrijednost  $y^+$  za koju je moguće uz veliku točnost primijeniti logaritamski zakon zida, se povećava.

### Vanjski sloj

U vanjskom sloju u potpunosti dominira turbulentno smično naprezanje  $\tau_{\text{TURB}}$ . Jedan od izraza za raspodjelu brzine često u upotrebi jest tzv. zakon defekta brzine (tzv. *defect zakon*)

$$\frac{v_c - \bar{u}}{u^*} = 2.5 \ln \frac{R}{y}$$

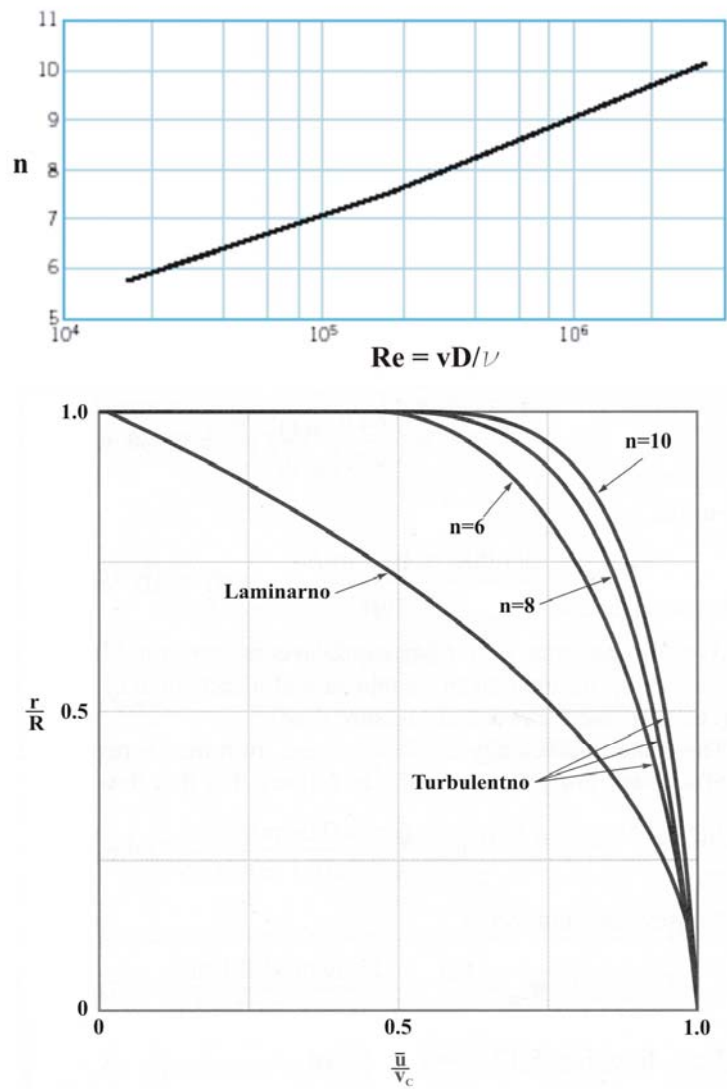
gdje je  $v_c$  brzina u centru cijevi. Unutarnja granicu ove zone (bliže stijenci) bitno ovisi o Reynoldsovom broju pa ju je u univerzalnom smislu nemoguće točnije definirati.

### ***Eksponencijalni zakon profila brzine***

Eksponencijalni zakon profila brzine (SI.4.5.2) je empirijski izraz koji daje aproksimativnu distribuciju brzine preko gotovo cijelog presjeka cijevi (iako ne vrijedi u blizini stijenke i u neposrednoj blizini centralne osi cijevi)

$$\frac{\bar{u}}{v_c} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n}$$

gdje je  $n$  funkcija Reynoldsovog broja (prikazanog na sljedećem dijagramu).



***SI.4.5.2 Ovisnost koeficijenta  $n$  o Reynoldsovom broju za glatku cijev i profili brzina pri turbulentnom i laminarnom strujanju***

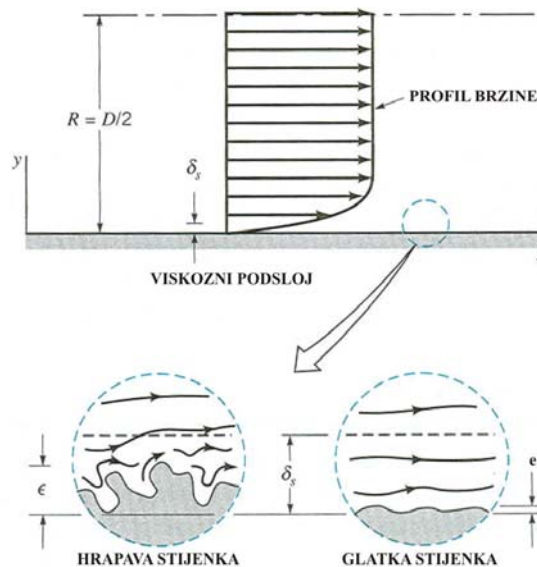


Gornji izraz uz  $n=7$  često se koristi kao dobra aproksimacija u praksi. Povećanjem Reynoldsovog broja raste koeficijent  $n$  i turbulentni profil postaje sve "spljošteniji" što je vidljivo na sljedećoj slici. Također, na slici je evidentna razlika laminarnog i turbulentnog profila brzine.

### Logaritamski zakon zida za hrapavu cijev

Dosadašnja analiza turbulentnog profila pretpostavlja strujanje u glatkoj cijevi. Pri analizi utjecaja hrapavosti stijenke na strujanje (**SI.4.5.3**) važan je odnos debljine laminarnog podsloja i visine neravnina  $e$ . Cijev se smatra hidraulički glatkom ako  $\frac{u^* e}{\nu} < 5$  i tada su sve neravnine unutar viskoznog podsloja te stoga ne utječu na strujanje. Stijenka se smatra potpuno hrapavom ako  $\frac{u^* e}{\nu} > 70$  jer tada vrhovi neravnina stijenke prodiru u potpunosti kroz viskozni podsloj u turbulentno područje i stvaraju otpor strujanju, te se *logaritamski zakon zida* modificira u izraz

$$u^+ = 8.5 + 5.75 \ln \frac{y}{e}$$



**SI.4.5.3 Hrapavost stijenke, apsolutna hrapavost  $e$  i debljina viskoznog podsloja  $\delta_s$**

## 4.6 Modeliranje turbulencije

### DNS

DNS (Direct Numerical Simulation) predstavlja kompletno u prostoru trodimenzijsko i o vremenu ovisno rješavanje Navier Stokesovih jednadžbi i jednadžbi očuvanja. Ovakvo direktno rješavanje je proračunski izuzetno zahtjevno i za sad neupotrebljivo za rješavanje općenitih inženjerskih problema. Razvoj jakih paralelnih računala i povećanje memorijskih mogućnosti računala omogućit će u budućnosti vjerojatno veću upotrebljivost ovakvog pristupa.

### LES

LES (Large Eddy Simulation) tj. *modeliranje velikih vrtloga* predstavlja pristup u kojem se veliki vrtlozi računaju numerički, a mali vrtlozi koji su veličine ispod rastera numeričke mreže se matematički modeliraju. Takav postupak opravdan je pretpostavkom da su veliki vrtlozi direktno povezani s numeričkim rubnim uvjetima te da oni nose glavnu Reynoldsovih naprezanja. Mali

vtlozi su reda veličine manje značajni obzirom na ukupna Reynoldsova naprezanja, više izotropni i stoga pogodniji za matematičko modeliranje. Pošto se u LES pristupu mali vrtlozi ne računaju direktno nego matematički modeliraju to je dovoljna znatno grublja numerička mreža, što znatno smanjuje računalni napor.

## RANS

Obzirom na činjenicu da su i DNS i LES pristup danas još proračunski jako zahtijevni obzirom na rješavanje općenitih praktičnih problema u inženjerstvu, u tretiranju turbulencije danas su najpopularniji RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes) modeli zasnovani na Reynoldsovim usrednjenjima (najčešće usrednjenjima u vremenu). Obzirom da su Navier Stokesove jednačbe nelinearne, rezultirajuća usrednjena diferencijalna jednačba sadrži ne samo tražene usrednjene varijable brzine i tlaka nego i produkte fluktuacija (npr. Reynoldsovo naprezanje  $-\rho\overline{u'v'}$ ) te je za zatvaranje sustava jednačbi potrebno još dodatnih aproksimacija. U osnovi Reynoldsovo usrednjenje jest simplifikacija kojom se gubi puno informacija sadržanih u Navier Stokesovim jednačbama. Najkorišteniji RANS pristupi danas su tzv. dvojednačbeni modeli od kojih su najpoznatiji  $k-\varepsilon$  model i  $k-\omega$  model koji se sastoje u rješavanju jednačbi turbulentne kinetičke energije ( $k$ ) i disipacije turbulentne kinetičke energije ( $\varepsilon$ ) odnosno specifičnoj brzini disipacije ( $\omega$ ). Spomenuti modeli (i njihove varijacije) osnova su danas velikog broja komercijalnih računalnih inženjerskih programa na području računalne dinamike fluida (CFD).

Nakon 2005. godine, porastom snage računala, tj. zamahom paralelnih računala visokih performanci i daljnjim razvojem računalne numerike, na važnosti dobivaju i hibridni numerički modeli, pogotovo spajanje RANS i LES modela pri modeliranju turbulencije.

## Algebarski modeli

Ovu grupu čini skup semiempirijskih modela koji na različiti način aproksimiraju Reynoldsovo naprezanje i uglavnom koriste pojam *duljini miješanja*  $l_m$  (Prandtl). Koriste se pretežno u teoretskoj analizi turbulencije, a o čemu su neke postavke definirane u prethodnom poglavlju.

## Teorija kaosa

Teorija kaosa predstavlja relativno novu granu matematičke fizike i ona obuhvaća ponašanje nelinearnih dinamičkih sustava i njihovu osjetljivost na inicijalne i rubne uvjete. Pretpostavlja se da strujanje realnog fluida, koje se modelira Navier Stokesovim jednačbama, predstavlja takav nelinearni dinamički sustav. Pod pretpostavkom da Navier Stokesove jednačbe uključuju kaotično gibanje tada je i njihovo rješenje izuzetno osjetljivo na početne uvjete tj. minimalno različiti inicijalni uvjeti mogu producirati sasvim različita rješenja. Iako teorija kaosa na početku 21. stoljeća doživljava stagnaciju, ona može dati uvid u kompleksnost turbulencije.

## 4.7 Gubici pri strujanju realnog fluida u cijevima

### 4.7.1 Dimenzijska analiza gubitaka pri laminarnom i turbulentnom strujanju u cijevi

#### LAMINARNO STRUJANJE

Pri laminarnom strujanju fluida u horizontalnoj cijevi pad tlaka  $\Delta p$  je ovisan o srednjoj brzini strujanja  $v$ , duljini cijevi  $L$ , promjeru cijevi  $D$  i viskoznosti fluida  $\mu$ . Nije uključena gustoća fluida  $\rho$ , pošto za ovaj režim strujanja ona nije bitan parametar. Vrijedi

$$\Delta p = F(v, L, D, \mu).$$

Prema teoriji dimenzijske analize (izloženoj ranije), broj varijabli je  $n=5$  ( $\Delta p, v, L, D, \mu$ ), broj bazih dimenzija  $k=3$  ( $M, L, T$ ) pa je sukladno Buckinghamovom  $\Pi$  teoremu broj potrebnih  $\Pi$  varijabli  $n-k=2$ . Moguće je kreirati bezdimenzijske kvocijente

$$\frac{D \Delta p}{\mu v} = \phi\left(\frac{L}{D}\right)$$

Eksperimentalno je utvrđeno da su dvije gornje bezdimenzijske veličine direktno proporcionalne pa je moguće pisati

$$\frac{D \Delta p}{\mu v} = C \frac{L}{D}$$

Za cijev kružnog poprečnog presjeka utvrđena je vrijednost koeficijenta  $C=32$  te slijedi

$$\Delta p = 32 \mu L v / D^2.$$

Uvrštenjem varijable protoka  $Q = \frac{D^2 \pi}{4} v$  umjesto brzine, moguće je dobiti poznati izraz Hagen Poiseuilleove formule protoka (koja je prethodno izvedena u poglavlju o Navier Stokesovoj jednadžbi):

$$Q = \frac{\pi \Delta p D^4}{128 \mu L}.$$

Ako se izraz za pad tlaka  $\Delta p$  podijeli dinamičkim tlakom  $\rho v^2 / 2$  slijedi:

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho v^2} = \frac{32 \mu L v / D^2}{\frac{1}{2} \rho v^2} = 64 \left( \frac{\mu}{\rho v D} \right) \left( \frac{L}{D} \right) = \frac{64}{R_e} \left( \frac{L}{D} \right)$$

odnosno

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho v^2}{2}.$$

Gubitak tlaka  $\Delta p$  u gornjem izrazu moguće je izraziti gubitkom piezometrične visine  $h$  [m]. Uz pretpostavku  $\Delta p = \rho g h$  slijedi

$$h = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}.$$

Gornji izraz jest **Darcy Weisbachova** jednadžba kojom se računaju dužinski gubici u cijevi kružnog poprečnog presjeka gdje je  $\lambda$  koeficijent trenja (ili Darcyjev koeficijent trenja).

U slučaju strujanja u cijevima nekružnog porečnog presjeka (npr. kvadratnog, pravokutnog ...) potrebno je prethodno izračunati odgovarajuću vrijednost *hidrauličnog radijusa*  $R_h$  za pojedini

slučaj koji se onda može koristiti u nekom izrazu za cijev kružnog poprečnog presjeka umjesto radijusa  $R$  (odnosno promjera  $D$ ).

Za ovaj slučaj laminarnog strujanja dobiven je koeficijent trenja

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

Iz gornje jednačbe vidljivo je da je koeficijent trenja pri laminarnom strujanju ovisan samo o Reynoldosovom broju dok je samo u slučaju ekstremno hrapavih cijevi ( $e/D \lesssim 0.1$ ) koeficijent trenja ovisan o hrapavosti  $e$ .

## TURBULENTNO STRUJANJE

Pad tlaka za turbulentno, stacionarno, nestlačivo strujanje u horizontalnoj cijevi kružnog poprečnog presjeka promjera  $D$  moguće je odrediti u formi funkcionala na sljedeći način

$$\Delta p = F(v, L, D, \mu, e, \rho).$$

Usporedbom sa laminarnim slučajem uočljivo je da je lista varijabli nadopunjena sa hrapavošću  $e$  i gustoćom fluida  $\rho$ . Dimenzijskom analizom uz broj varijabli je  $n=7$ , broj bazih dimenzija  $k=3$  ( $M, L, T$ ) moguće je definirati  $n-k=4$  bezdimenzijskih  $\Pi$  varijabli:

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho v^2} = \tilde{\phi}\left(\frac{\rho v D}{\mu}, \frac{L}{D}, \frac{e}{D}\right).$$

Logičnom pretpostavkom da je pad tlaka proporcionalan dužini cijevi (što je dokazano i eksperimentalno) moguće je preurediti gornji izraz

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho v^2} = \frac{L}{D} \phi\left(R_e, \frac{e}{D}\right).$$

Osim Reynoldsovog broja, u analizu strujanja u cijevima uvedena je važna nova bezdimenzijska veličina – *relativna hrapavost*  $\frac{e}{D}$ . Kao i u laminarnom slučaju slijedi

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho v^2}{2},$$

odnosno uvođenem varijable gubitka piezometrične visine proizlazi Darcy Weisbachov izraz

$$h = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

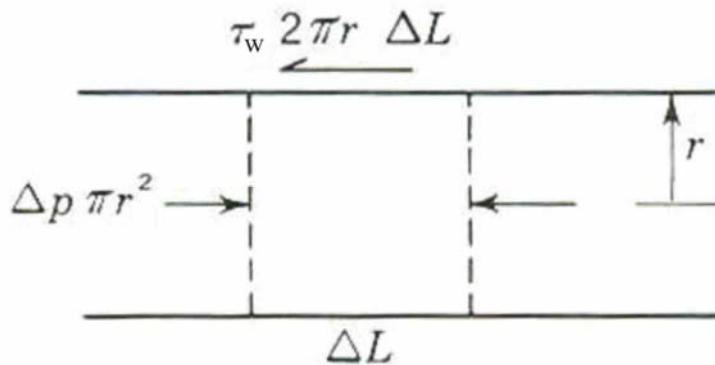
Iz provedene analize proizlazi

$$\lambda = \phi\left(R_e, \frac{e}{D}\right)$$

tj. da je koeficijent trenja u turbulentnom slučaju ovisan i o režimu strujanja tj. Reynoldsovom broju i o kvaliteti cjevovoda  $e/D$ . Ta ovisnost je kompleksna i definirana je dugogodišnjim eksperimentalnim radom niza znanstvenika Nikuradse (1933.), Moody, Colebrook i ostali, a što će biti izloženo u sljedećem poglavlju.

#### 4.7.2 Ovisnost koeficijenta trenja o režimu strujanja i hrapavosti stijenke

Uravnoteženje sila za stacionarno strujanje (bez ubrzanja) u horizontalnoj cijevi (*Sl.4.7.1*) daje



*Sl.4.7.1 Uravnoteženje sila za stacionarno strujanje u cijevi*

$$\Delta p \pi r^2 = \tau_w 2 r \pi \Delta L$$

što vrijedi i za laminarno i za turbulentno strujanje. Darcy Weisbachova jednačba gubitaka za segment cijevi  $\Delta L$  prikazan na prethodnoj slici jest

$$\Delta p = \lambda \frac{\Delta L}{2r} \rho \frac{\bar{u}^2}{2}.$$

Eliminacija  $\Delta p$  u dvije gornje jednačbe daje izraz ovisnosti smičnog naprežanja na stijenci  $\tau_w$  i srednje brzine  $\bar{u}$ :

$$\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \bar{u}.$$

Gornji izraz uvršten umjesto srednje brzine u logaritamski zakon zida dan u prethodnom poglavlju daje izraz za koeficijent trenja oblika

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = K_1 + K_2 \ln(R_e \sqrt{\lambda}).$$

Uz korištenje laboratorijskih podataka hrapavosti prema Nikuradse-u za hidraulički glatke cijevi slijedi

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0.869 \ln(R_e \sqrt{\lambda}) - 0.8$$

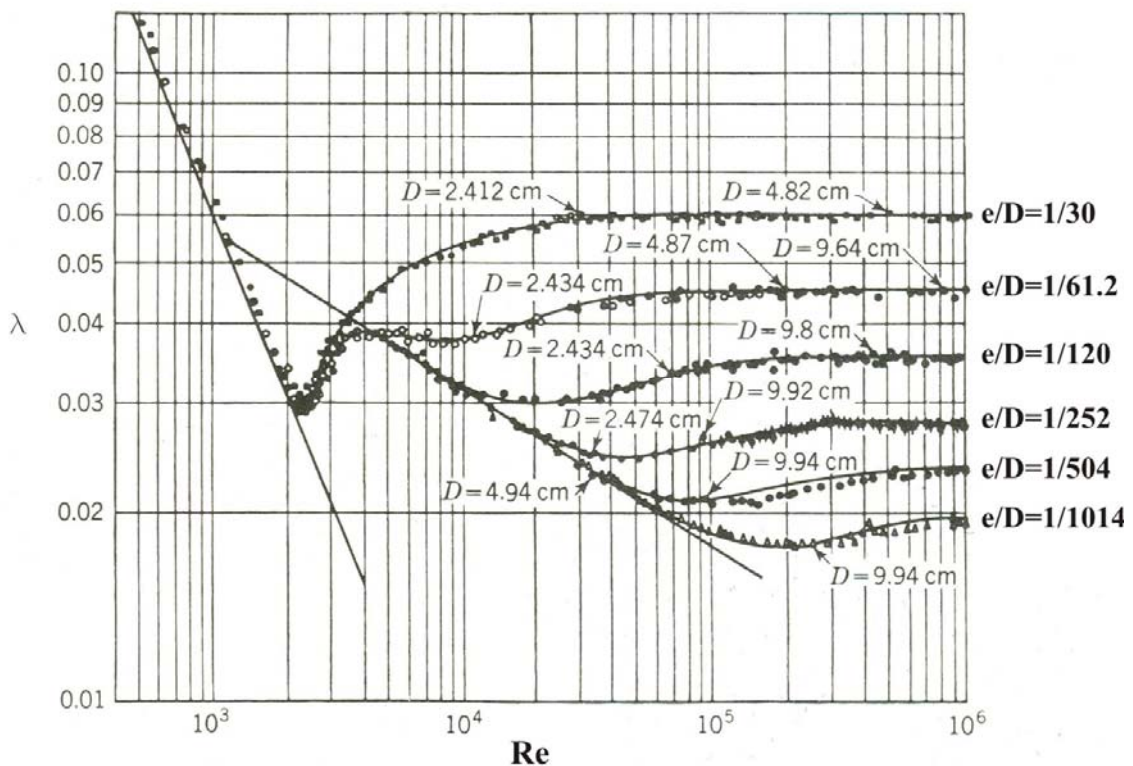
te za potpuno hrapave cijevi

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.14 - 0.869 \ln \frac{e}{D}.$$

Gornji izraz se u literaturi često naziva *Von Karmanova* formula. Gornja dva izraza dobivena za laboratorijske uvjete hrapavosti za hidraulički glatke i ekstremno hrapave cijevi direktno vrijede i za komercijalne cijevi.

U eksperimentima s gubicima strujanja u hrapavim cijevima (Nikuradse) lijepljena su zrnca pijeska tri različita promjera  $e$  na unutarnje stijenke cijevi tri različita promjera  $D$  na način da je zadržan konstantan kvocijent  $\frac{e}{D}$  (*relativna hrapavost*). Eksperimenti su pokazali važnost termina relativne

hrapavosti  $\frac{e}{D}$  pošto je za cijevi različitih promjera dobivena glatka neprekinuta  $\lambda$ - $R_e$  krivulja (SI.4.7.2). Mjerena je razlika tlaka potrebna kako bi se ostvario željeni protok te je pomoću tih podataka upotrebom



SI.4.7.2 Nikuradseovi testovi hrapavosti

Darcy Weisbachovog izraza izračunavan koeficijent trenja  $\lambda = \Delta p / \left( \frac{L}{D} \frac{\rho v^2}{2} \right)$ . Testovi su ponavljani za široki raspon  $R_e$  i  $e/D$  kako bi se dobila tražena ovisnost  $\lambda = \lambda(R_e, e/D)$ . U realnim cijevima hrapavost nije uniformna kao u spomenutim laboratorijskim testovima, ali je ipak moguće korelirati ekvivalentnu visinu neravnina komercijalnih cijevi s laboratorijskom hrapavošću. Neke približne vrijednosti dane su u sljedećoj tablici.

CIJEV – materijal	APSOLUTNA HRAPAVOST $e$ [mm]
Čelik sa zakovicama	0.9 - 9
Beton	0.3 – 3
Drvo	0.18 – 0.9
Lijevano željezo	0.26
Galvanizirano željezo	0.15
Komercijalni čelik	0.045
Plastika, staklo	0.0

**Tablica 4.7.1** *Apsolutna hrapavost za neke vrste cijevi*

Radom L.F. Moodyja i C.F. Colebrooka korelirani su podaci laboratorijski ohrapavljenih cijevi s komercijalnim cijevima. Eksperimentalno je utvrđeno da se u području gdje hrapavost ovisi i o  $R_e$  i  $e/D$  podaci za umjetno ohrapvljene cijevi i realne komercijalne cijevi ne poklapaju kao u slučaju ekstremno hrapavih cijevi i hidraulički glatkih cijevi te je stoga u najširem prijelaznom području trebalo posebno pažljivo korelirati podatke iz eksperimenata na komercijalne cijevi.

Na slici u dodatku A (**SLA1**) prikazan je *Moodyjev dijagram* koji daje ovisnost koeficijenta trenja  $\lambda$  o relativnoj hrapavosti  $e/D$  i Reynoldsovom broju  $Re$  za čiste, nove komercijalne cijevi. Moodyjev dijagram pokriva široko područje. Laminarno područje do približne vrijednosti  $R_e \approx 2100 \dots 2300$ , prijelazno područje i turbulentno područje pokriveno je za raspon  $R_e \approx 4000$  do  $R_e = 10^8$ . Na dijagramu je potrebno primijetiti da i za  $e=0$  koeficijent trenja nije jednak nuli pošto i u takvim *hidraulički glatkim* cijevima fluid neposredno uz stijenku zbog tzv. *no-slip* uvjeta miruje. Uvijek postoji barem mikroskopska površinska hrapavost koja uzrokuje takvo lijepljenje fluida uz stijenku. Cijelo turbulentno područje Moodyjevog dijagrama definira *Colebrookova formula*

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0.869 \ln \left( \frac{e/D}{3.7} + \frac{2.523}{R_e \sqrt{\lambda}} \right).$$

koja je zbog svojeg implicitnog oblika ( $\lambda$  i s lijeve i desne strane jednakosti) nepogodna za praktičnu upotrebu pa je češće u upotrebi *približna Colebrookova formula* koja daje vrijednost koeficijenta hrapavosti uz približnu grešku od 1%.

Potrebno je napomenuti da su u Moodyjevom dijagramu dane vrijednosti koeficijenta trenja za nove cijevi, a da se upotrebom kroz duže vrijeme u cijevima zbog korozije i naslaga može znatno povećati hrapavost ili čak smanjiti unutarnji presjek, što u primjeni treba uzeti u obzir.

### **4.7.3 Računanje gubitaka strujanja u komercijalnim cijevima**

Gubici se klasificiraju kao dužinski (glavni) i lokalni.

#### **DUŽINSKI GUBICI**

U ovom poglavlju dan je pregled izraza koji se koriste u računanju gubitaka strujanja realnog fluida u komercijalnim cijevima. Osim Colebrookovih izraza koji definiraju cijelo turbulentno područje Moodyjevog dijagrama dani su i izrazi koji definiraju samo određena područja dijagrama za određene raspone  $Re$  i hrapavosti.

Dužinski gubici nastaju zbog trenja i proporcionalni su dužini cijevi, približno proporcionalni kvadratu brzine, obrnuto proporcionalni unutarnjem dijametru cijevi, ovise o površinskoj hrapavosti unutarnje stijenke cijevi, ovise o gustoći i viskoznosti fluida i neovisni su o tlaku.



### Pregled izraza za računanje dužinskih gubitaka u realnom cjevovodu

Gubici pri strujanju u cijevi  $h_g$  dijele se na dužinske i lokalne gubitke tj.  $h_g = h_{duz} + h_{lok}$ .

Dužinski gubici računaju se pomoću Darcy-Weisbachove formule (izvedena u prethodnom poglavlju):

$$h_{duz} = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} [m] \quad \text{ili} \quad h_{duz} = \lambda \frac{8LQ^2}{g\pi^2 D^5} [m]$$

gdje je  $\lambda$  koeficijent hrapavosti,  $D$  promjer cijevi,  $L$  dužina cijevi,  $v$  brzina strujanja i  $Q$  protok.

Često se za proračun dužinskih gubitaka koriste i drugi empirijski izrazi (npr. Hazen-Williamsova formula). Koeficijent trenja  $\lambda$  određuje se u ovisnosti o režimu strujanja ( $Re$ ) ili kvaliteti cjevovoda (relativna hrapavost  $e/D$ ) pomoću Moodyjevog dijagrama (**SLA.1**) ili pomoću sljedećih empirijskih izraza:

a. Pri laminarnom strujanju  $\lambda = \lambda(Re)$   $\lambda = \frac{64}{Re}$ .

b. Pri turbulentnom strujanju

b1. Za cijelo turbulentno područje uz  $\lambda = \lambda(Re, e/D)$ , vrijedi Colebrookova implicitna formula

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0,869 \cdot \ln \left( \frac{e}{3,7 \cdot D} + \frac{2,523}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} \right)$$

dok se najčešće koristi (greška unutar 1%) približna Colebrookova formula

$$\lambda = \frac{1,325}{\left[ \ln \left( \frac{e}{3,7 \cdot D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2};$$

b2. Za jako hrapave cijevi  $\lambda = \lambda(e/D)$  vrijedi von Karmanov izraz (spomenut u prethodnom poglavlju)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,14 - 0,869 \cdot \ln \frac{e}{D};$$

b3. Za hidraulički glatke cijevi  $\lambda = \lambda(Re)$  koristi se Blasiusova formula uz ograničenje  $Re < 100000$ .

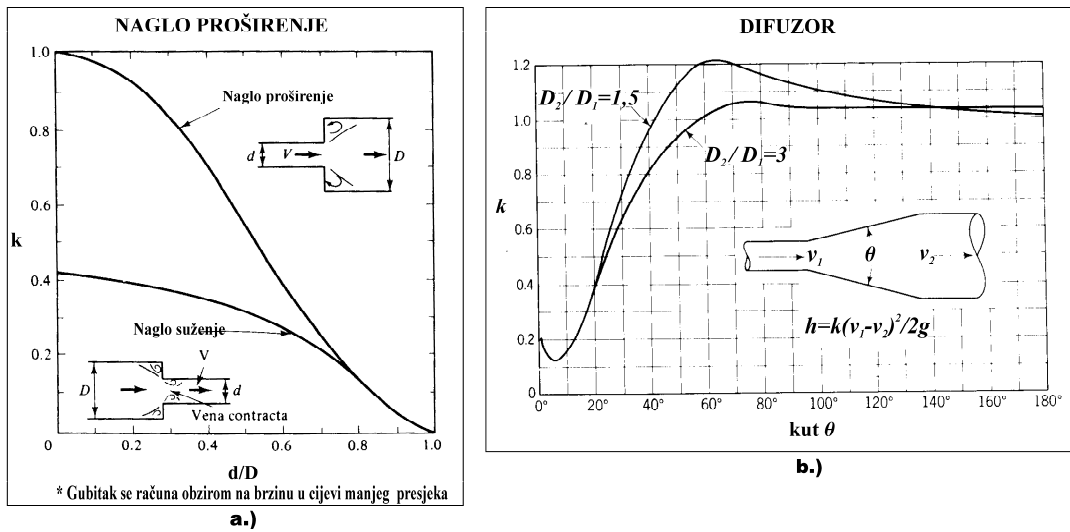
$$\lambda = \frac{0,316}{Re^{0,25}}$$

ili Karman-Prandtllova formula

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \log(Re \cdot \sqrt{\lambda}) - 0,8$$

U gornjim izrazima  $e$  [m] je visina neravnina stijenke cijevi,  $D$  [m] je promjer cijevi.

## LOKALNI GUBICI



Sl.4.7.3 a,b Lokalni gubici

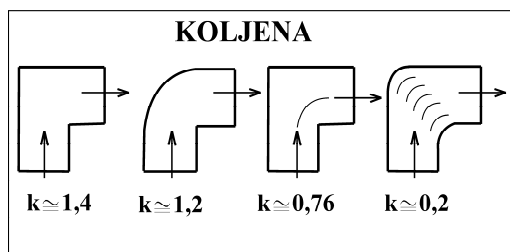
Lokalni gubici nastaju zbog odvajanja struje (separacija) od stijenke cijevi i stvaranja tzv. mrtvih zona u kojima se fluid vrtloži i crpi energiju iz glavne struje. Lokalni gubici dijele se na

- lokalne gubitke uslijed *promjene presjeka* struje fluida (naglo proširenje/suženje, ulazna ušća i otvori, izlazni otvori, prigušnice, sapnice, difuzor – postupno proširenje, konfuzor – postupno suženje, venturijska cijev, ventili, slavine, zasuni, zaklopke ...) (Sl.4.7.3 a,b,c,e);

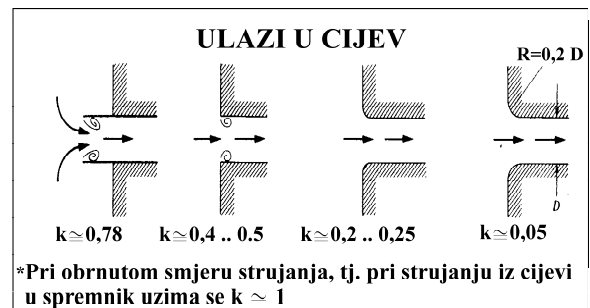
**POSTUPNO SUŽENJE**

$A_2/A_1$	Kut $\theta$						
	10	15–40	50–60	90	120	150	180
0.50	0.05	0.05	0.06	0.12	0.18	0.24	0.26
0.25	0.05	0.04	0.07	0.17	0.27	0.35	0.41
0.10	0.05	0.05	0.08	0.19	0.29	0.37	0.43

c.)



d.)



e.)

Sl 4.7.3 c,d,e Lokalni gubici

- lokalne gubitke uslijed *promjene smjera* struje fluida (nagla promjena smjera - koljeno, blaga promjena smjera - luk) (Sl.4.7.3d).

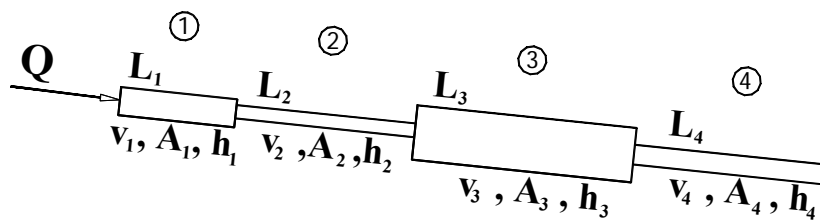
Postoje i lokalni otpori koji objedinjuju dvije gornje grupe i nastaju zbog promjene smjera i presjeka (račve, bifurkacije, sastavci ...)

Općenit izraz za računanje većine lokalnih gubitaka jest

$$h_{lok} = k \frac{v^2}{2 \cdot g} [m] \quad \text{ili} \quad h_{lok} = k \frac{8 \cdot Q^2}{D^4 \cdot g \cdot \pi^2} [m]$$

gdje je  $k$  koeficijent koji se određuje eksperimentalno (SI.4.6).

#### 4.7.4 Serijski spojene cijevi



SI.4.7.4 Serijski spojene cijevi

Kod serijskih (u nizu) spojenih cijevi (SI.4.7.4) ukupni gubitak  $h_g$  jednak je sumi dužinskih i lokalnih gubitaka

$$h_{UK} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \frac{v_i^2}{2 \cdot g} + \sum_{j=1}^n k_j \frac{v_j^2}{2 \cdot g}$$

Za protok kroz cjevovod vrijedi

$$Q = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_i = \dots = Q_n$$

pa je za računanje ukupnih gubitaka pogodno koristiti i varijablu protoka umjesto brzine

$$h_{UK} = \sum_{i=1}^m \lambda \frac{8 \cdot L_i \cdot Q_i^2}{g \cdot \pi^2 \cdot D_i^5} + \sum_{j=1}^n k_j \frac{8 \cdot Q_j^2}{g \cdot \pi^2 \cdot D_j^5} [m]$$

#### 4.7.5 Paralelno spojene cijevi

Kod paralelno spojenih cijevi (SI.4.8) gubici u svim paralelnim granama su jednaki, a ukupni protok kroz cjevovod jednak je zbroju svih protoka u pojedinim granama:

$$h_{UK} = h_1 = h_2 = \dots = h_i = \dots = h_n$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_i + \dots + Q_n$$

Ukupne (dužinske i lokalne) gubitke po pojedinim granama (izraz 6d) moguće je izraziti u obliku

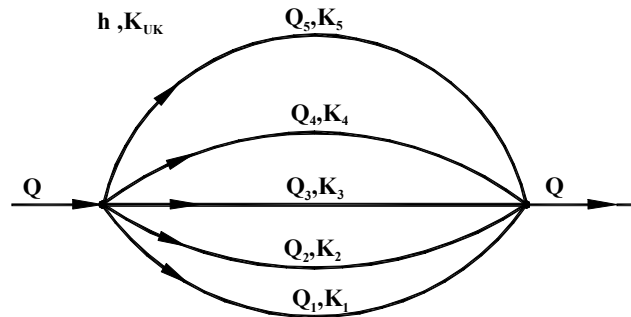
$$h_i = K_i \cdot Q_i^2, \text{ za } i=1 \dots n$$

gdje je  $K$  koeficijent ukupnih gubitaka. Uzevši u obzir izraz prethodna dva izraza vrijedi

$$\sqrt{\frac{h_{UK}}{K_{UK}}} = \sqrt{\frac{h_1}{K_1}} + \sqrt{\frac{h_2}{K_2}} + \dots + \sqrt{\frac{h_i}{K_i}} + \dots + \sqrt{\frac{h_n}{K_n}},$$

odnosno slijedi izraz za ukupni koeficijent gubitaka za paralelni spoj  $K_{UK}$

$$\frac{1}{\sqrt{K_{UK}}} = \frac{1}{\sqrt{K_1}} + \frac{1}{\sqrt{K_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{K_i}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{K_n}}.$$



SI.4.7.5 Paralelno spojene cijevi

#### 4.7.6 Gradijentne linije

Pri analizi strujanja kompleksnih cjevovoda često se koriste gradijentne linije cjevovoda (SI.4.7.6). Bernoullijeva jednačba za stacionarno strujanje je poznatog oblika

$$H_E = \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = \text{const. duž strujnice}$$

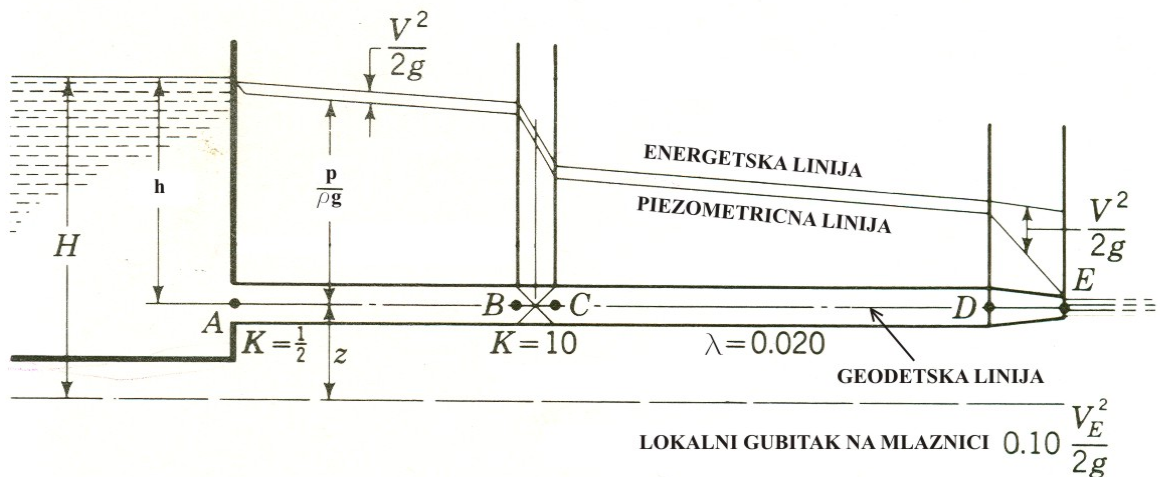
gdje je  $H_E$  visina ukupne mehaničke energije. Dimenzija gornje jednačbe je metar [m]. Korisno je pri opisu strujanja u cjevovodu nacrtati grafove visina pojedinih članova Bernoullijeve jednačbe:

$z$  predstavlja **geometrijsku ili geodetsku liniju sustava (GL)** odnosno liniju potencijalne energije;

$\frac{p}{\rho g} + z$  predstavlja hidrauličnu gradijentnu liniju odnosno **piezometričnu liniju (HGL)**;

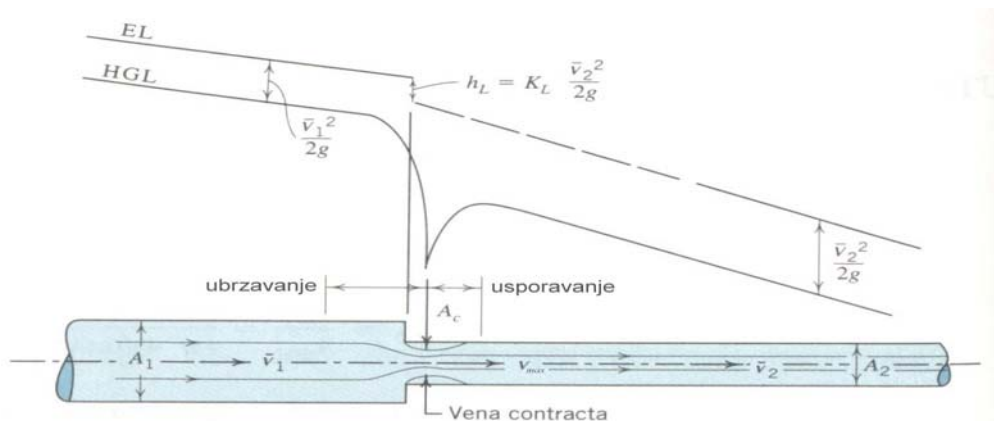
$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z$  predstavlja **energetsku liniju (EL)**.

Na sljedećim slikama prikazani su odnosi linija za realne sustave s dužinskim i realnim gubicima koji uključuju spremnik, ventil, suženje cijevi – mlaznicu (SI.4.9), detaljni



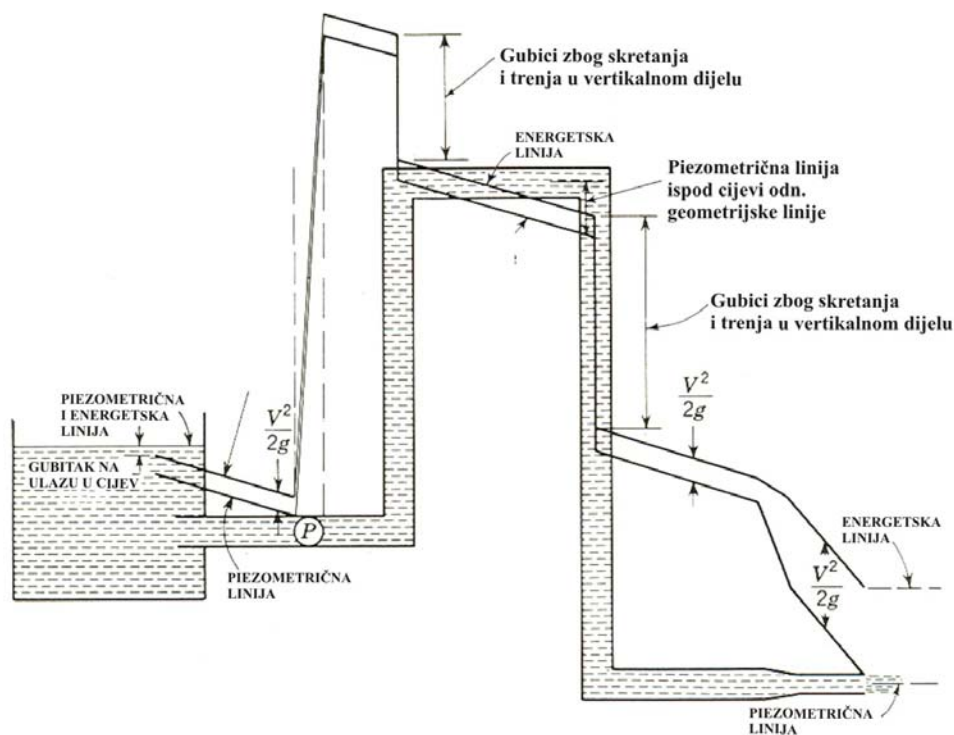
**Sl.4.7.6 Energetska linija i piezometrična linija za sustav sa spremnikom, ventilom i mlaznicom**

tok energetske i piezometrične linije na suženju cijevi (Sl.4.7.7). Vidljiv je položaj energetske linije koja se nalazi iznad piezometrične linije za  $v^2/2g$  tj. za iznos dinamičkog tlaka.



**Sl.4.7.7 Tok energetske i piezometrične linije na suženju cijevi**

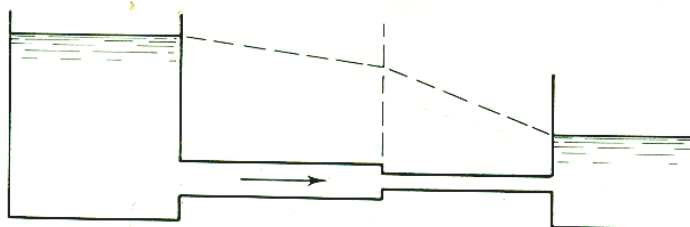
Na slici (Sl.4.7.8) prikazan je sifonski sustav cijevi sa ugrađenom pumpom. Gradijentne linije crtane su iznad horizontalnih dijelova sustava.



**Sl.4.7.8 Energetska i piezometrična linija za sifon sa ugrađenom pumpom**

#### EKVIVALENTNA DULJINA CIJEVI

Pojam ekvivalentne duljine cijevi koristi se pri analizi kompleksnih cjevovoda kako bi se pojednostavila globalna shema sustava. Tako se sustav od više serijski povezanih cijevi različitih promjera može zamijeniti s jednom cijevi određenog ekvivalentnog promjera koja će dati isti protok za isti dužinski gubitak. Također niz lokalnih gubitaka u nekoj cijevi moguće je *eliminirati* iz analize sustava tako da se produži duljina cijevi kako bi se lokalni gubici nadoknadili povećanim dužinskim gubicima. Ekvivalentna cijev tada će hidraulički biti ista kao i prvobitna (kraća) cijev sa nizom lokalnih gubitaka. Na sljedećoj slici prikazan je sustav cijevi gdje su lokalni gubici uključeni u obliku ekvivalentnih duljina.

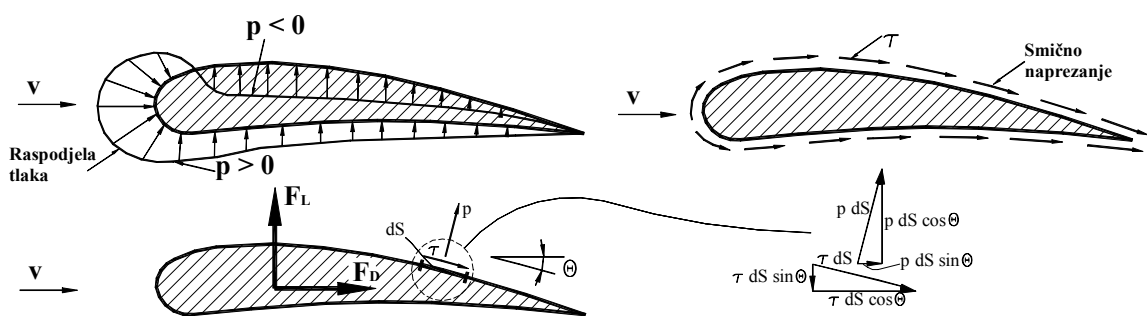


**Sl.4.7.9 Energetska linija za sustav ekvivalentnih cijevi**

## 5. OPTJECANJE TIJELA

Gibanje tijela kroz fluid (odn. gibanje fluida oko tijela) uzrokuje naprezanja i to smična tangencijalna naprezanja na stijenku tijela  $\tau$  i normalna tlačna naprezanja na stijenku  $p$ . Ukupno dobivenu silu fluida na tijelo moguće je razložiti na dvije međusobno okomite komponente, silu otpora  $F_D$  ("drag") i dinamički uzgon  $F_L$  ("lift"). Sila otpora  $F_D$  je komponenta ukupne sile fluida na gibajuće tijelo paralelna s relativnom brzinom  $v$  nastrojavanja prema tijelu, a dinamički uzgon  $F_L$  je komponenta ukupne sile okomita na relativnu brzinu približavanja fluida  $v$ . Općenito, smična i normalna naprezanja sudjeluju i u sili otpora i u dinamičkom uzgonu.

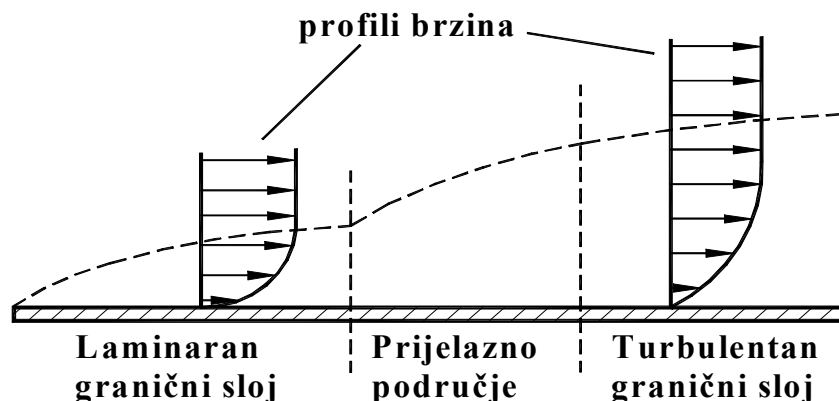
$$F_D = \int p \sin \theta dS + \int \tau \cos \theta dS \quad \text{i} \quad F_L = \int p \cos \theta dS - \int \tau \sin \theta dS$$



Sl.5.1 Viskozne i tlačne sile na avionsko krilo

### Granični sloj

Dio struje fluida koja je pod utjecajem smičnih sila naziva se *granični sloj*. *Granični sloj* i njegove karakteristike te način opstrujavanja tijela, utječu na intenzitete sila dinamičkog uzgona i otpora. Ako je na uzvodnoj površini nastrojavanja fluida na tijelo stijenka glatka, početni granični sloj je laminaran (Sl.5.2), zatim granični sloj sve više deblja, u njemu strujanje postaje nestabilno, i konačno se transformira u *turbulentan granični sloj*.

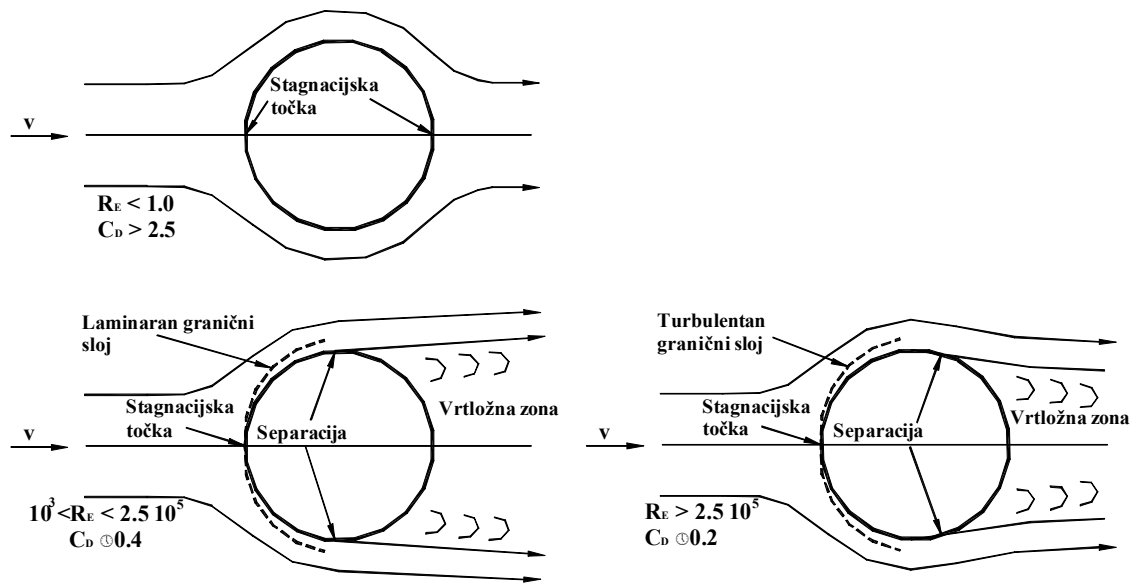


Sl.5.2 Rast graničnog sloja. Optjecanje ravne ploče.

Granični sloj ovisan je o gradijentu tlaka. U slučaju pada tlaka u *nizvodnom* smjeru, granični sloj postaje sve tanji, a u slučaju porasta tlaka u *nizvodnom* smjeru granični sloj naglo dobiva na debljini. Porast tlaka u smjeru strujanja i smična naprezanja smanjuju količinu gibanja u graničnom

sloju te konačno uzrokuju odvajanje graničnog sloja od stijenke tijela – *separaciju* **SI5.3** . Porastom tlaka u smjeru strujanja, nizvodno od točke separacije javlja se protustrujanje fluida u *vrtložnoj zoni* (“wake”) u blizini stijenke. Hidrodinamično i aerodinamično oblikovana tijela eliminiraju odn. reduciraju efekte separacije, dok npr. nehidrodinamična tijela razvijaju jaku *silu otpora* (“drag”) zbog niskog tlaka u *vrtložnoj zoni* (wake).

Režim strujanja u graničnom sloju (laminarno, turbulentno) važan je za mjesto pojave separacije, tj. odvajanja graničnog sloja od stijenke tijela. Mnogo veća izmjena količine gibanja unutar turbulentnog graničnog sloja, u usporedbi s laminarnim, uzrokuje dužu *slijepljenost* graničnog sloja uz stijenku tijela, tj. kasniju točku separacije nizvodno. Na **SI5.3** vidljivo je da je pri laminarnom graničnom sloju točka separacije više uzvodno na stijenci kugle nego što je u slučaju turbulentnog graničnog sloja.



**SI.5.3 Optjecanje kugle (malen  $R_E$ , turbulentan i laminaran granični sloj)**

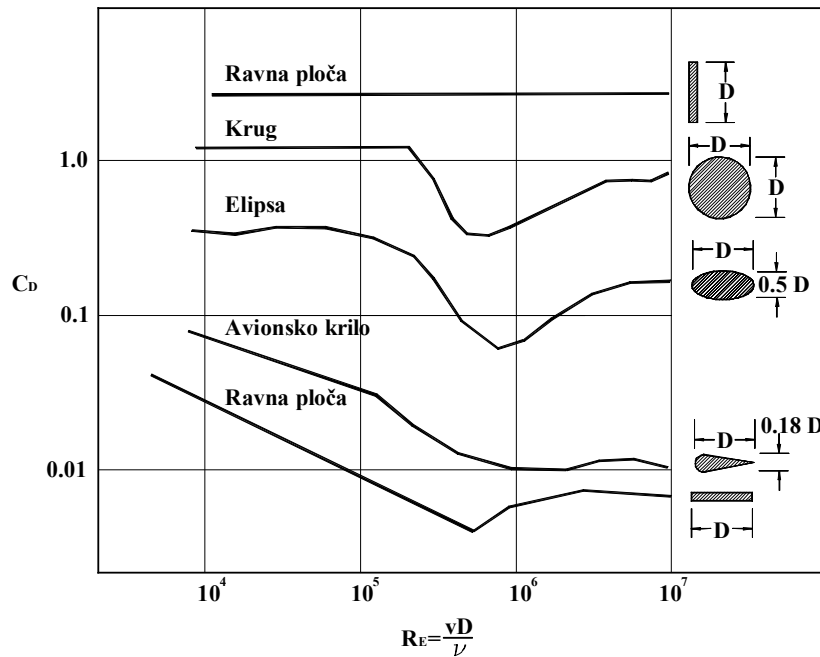
### **Koeficijenti sile otpora $C_D$ i sile dinamičkog uzgona $C_L$**

Iako izrazi za silu otpora  $F_D$  i dinamičkog uzgona  $F_L$  (dani na početku poglavlja) vrijede za bilo koje tijelo, njihova je primjenjivost jako limitirana. Općenito, za većinu opstrujanih tijela nemoguće je točno izračunati distribuciju smičnih i tlačnih naprežanja na stijenci tijela. Alternativa jest u približnom određivanju dvaju bezdimenzijskih parametara (eksperimentalno, numerički) *koeficijenta sile otpora  $C_D$*  i *koeficijenta dinamičkog uzgona  $C_L$* , kako bi se izračunale sile otpora  $F_D$  i dinamičkog uzgona  $F_L$ :

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho v^2 A \qquad F_L = \frac{1}{2} C_L \rho v^2 A$$

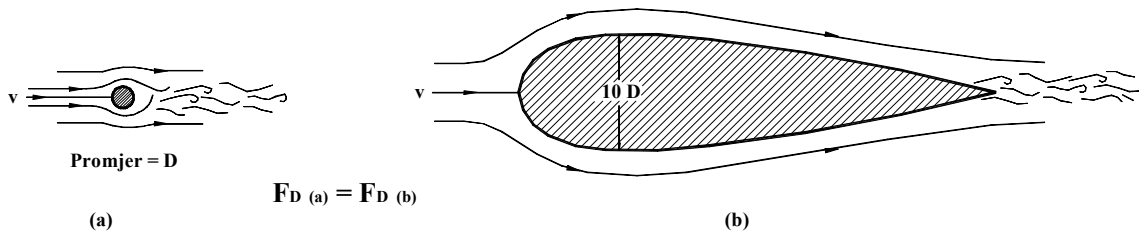
gdje je  $A$  neka karakteristična površina tijela, a najčešće je to površina projekcije tijela na ravninu okomitu na vektor brzine nastrijavanja.





**Sl.5.4 Koeficijent otpora strujanja  $C_D$  za više dvodimenzijskih likova**

Brojevi  $C_D$  i  $C_L$  jesu funkcije oblika, kuta nastrojavanja i bezdimenzijskih veličina npr. Reynoldsovog broja, Machovog broja, Froudeovog broja, relativne hrapavosti stijenke tj.  $C_D=f(\text{oblika, kuta nastrojavanja, } Re, M_a, Fr, e/D)$ . Primjer ovisnosti sile otpora o obliku ilustriran je na (Sl.5.5) gdje se kod dva tijela velike razlike u veličini javlja ista sila otpora  $F_D$ .



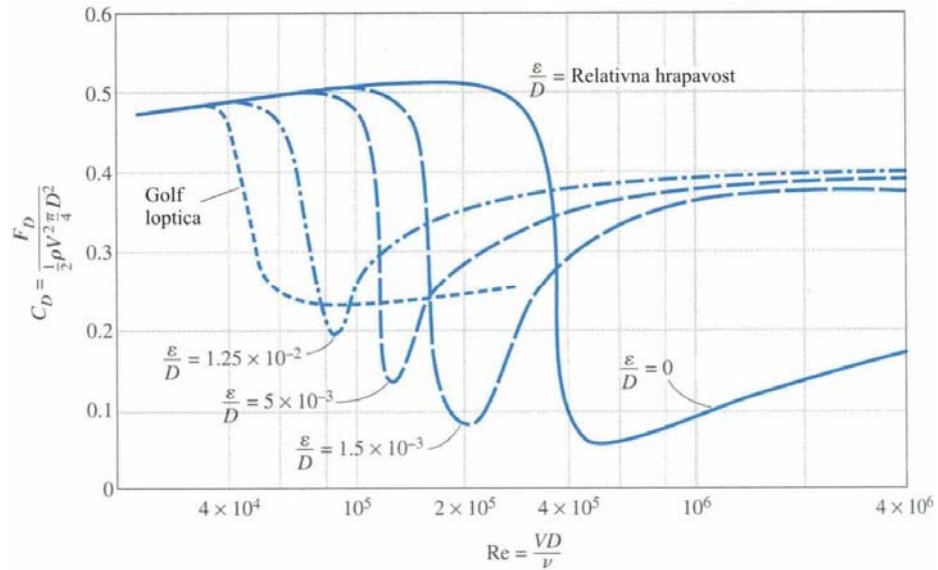
**Sl.5.5 Dva tijela različitih dimenzija koja imaju istu silu otpora  $F_D$ . Koeficijent otpora strujanja za a.) cilindar  $C_D=1.2$ ; b.) aerodinamičan oblik  $C_D=0.12$**

Kod analize utjecaja oblika na koeficijent otpora  $C_D$  važna je i veličina Reynoldsovog broja. Što je Reynoldsov broj veći to je efekt hidrodinamičnosti tijela snažniji, odnosno kod velikog Reynoldsovog broja hidrodinamičnost tijela jako reducira silu otpora. Kod umjerenih vrijednosti Reynoldsovog broja kod hidrodinamičnih tijela koeficijent otpora  $C_D$  se blago smanjuje s povećanjem Reynoldsovog broja.

Kod ekstremno nehidrodinamičnih tijela, npr. ravna ploča okomita na smjer nastrojavanja fluida Sl.5.4, točka separacije graničnog sloja je na samom rubu ploče neovisno o režimu strujanja u graničnom sloju, tj. koeficijent otpora pokazuje izrazito malenu ovisnost o Reynoldsovom broju.

Hrapavost površine, u općenitom smislu, povećava koeficijent otpora i silu otpora, a što je pogotovo slučaj sa hidrodinamičnim tijelima. Kod nehidrodinamičnih tijela, kao što su npr. kugla i valjak naprotiv, povećanjem površinske hrapavosti moguće je smanjiti koeficijent otpora i silu otpora. Taj efekt se postiže induciranjem prijelaza u turbulentni režim strujanja već kod manjih vrijednosti Reynoldsovog broja, a što se postiže hrapavošću površine. Na dijagramu Sl.5.4, Sl.5.6 to bi uzrokovalo pomak udubine na dijagramu za npr. krug (ili valjak, kuglu), koja se javlja u

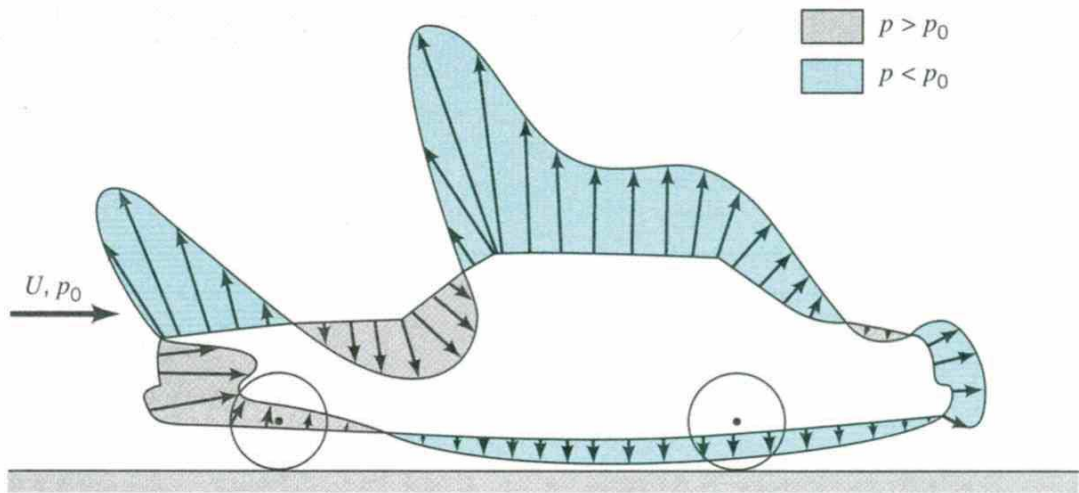
rasponu  $10^5 < Re < 10^6$ , ulijevo na područje nižih vrijednosti Reynoldsovog broja. Imajući u vidu prije spomenutu činjenicu da je pri turbulentnom graničnom sloju točka separacije više nizvodno i npr. golf loptica koja ima neravnu površinu i moguće ju je poistovijetiti sa trećim slučajem na slici **SI.5.3**, imati će zbog formiranog turbulentnog graničnog sloja i kasnije točke separacije, veći domet u letu nego npr. neka glatka kuglica. Smanjenje sile otpora povećanjem hrapavosti površine treba činiti pažljivo i za ciljani raspon Reynoldsovog broja, pošto takav postupak može biti i kontraproduktivan, a što je očigledno i iz dijagrama **SI.5.4**, **SI.5.6**. Putanje npr. loptice za stolni tenis su kratke te ona nikad ne dostiže brzine u turbulentnoj zoni pa je njena površina glatka jer bi povećanje hrapavosti bilo kontraproduktivno.



**SI.5.6** Utjecaj hrapavosti površine kugle na koeficijent otpora  $C_D$

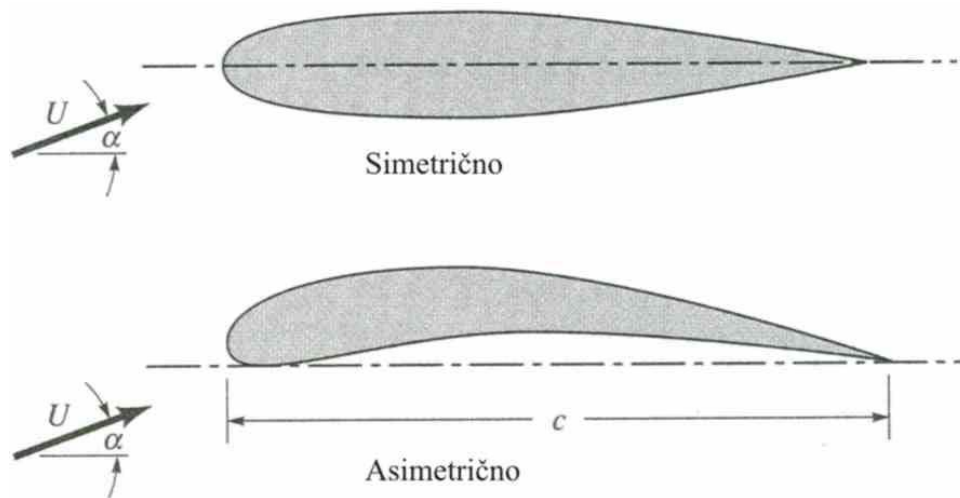
Kod konstruiranja tijela kod kojih je važna sila dinamičkog uzgona kao što su avionska krila, lopatice turbostrojeva itd., važno je dobiti što veću silu dinamičkog uzgona  $F_L$  i istovremeno minimizirati silu otpora  $F_D$ .

Većina optjecanih tijela koja služe za generiranje sile dinamičkog uzgona  $F_L$  (avionska krila, ventilatori, spojleri na automobilu ...) imaju radno područje pri visokim vrijednostima Reynoldsovog broja. Kod takvog strujanja smično naprezanje  $\tau$  (**SI.5.1**) malo pridonosi ukupnoj sili dinamičkog uzgona  $F_L$ , a većina sile dinamičkog uzgona dolazi od distribucije tlaka po površini  $p$  (**SI.5.1**). Tipična raspodjela tlaka po površini automobila koji se giba dana je na slici (**SI.5.7**). Distribucija tlaka je uglavnom konzistentna s jednostavnim Bernoullijevim načelom – područja s visokim brzinama strujanja (iznad krova i prednje haube) imaju nizak tlak dok su područja s nižim brzinama strujanja (rešetke hladnjaka motora i prednje staklo) područja visokog tlaka.



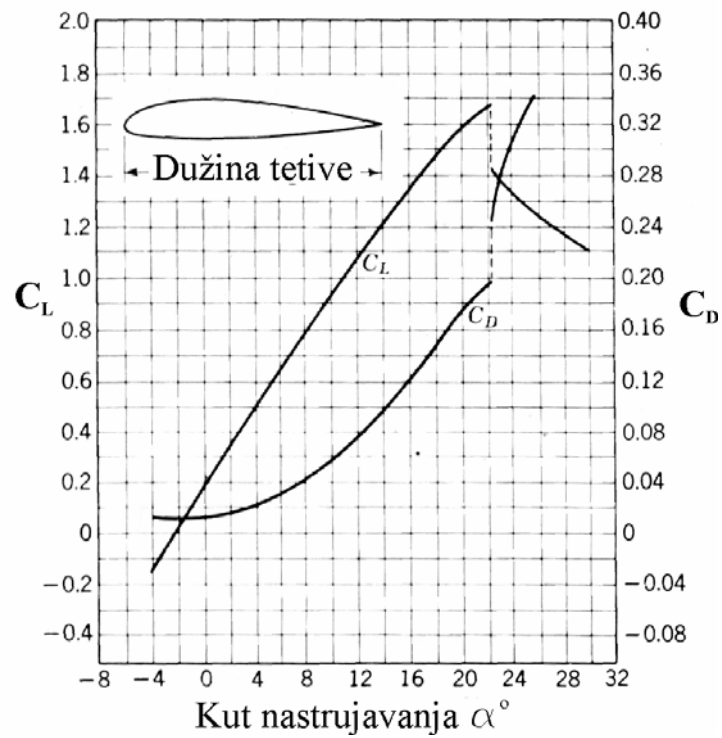
**Sl.5.7 Raspodjela tlaka na površini automobila koji se giba**

Od izuzetne je važnosti i kut vektora brzine nastujavanja, a na (Sl.5.9) prikazana je ovisnost koeficijenata  $C_D$  i  $C_L$  o tom kutu. Za avionsko krilo javlja se sila dinamičkog uzgona i pri kutu nastujavanja od  $0^\circ$  pošto su ona u pravilu asimetrična (Sl.5.8 dolje). Simetrično krilo uz kut nastujavanja  $0^\circ$  ne stvara silu dinamičkog uzgona (Sl.5.8 gore), nego ona nastaje tek povećanjem kuta nastujavanja.



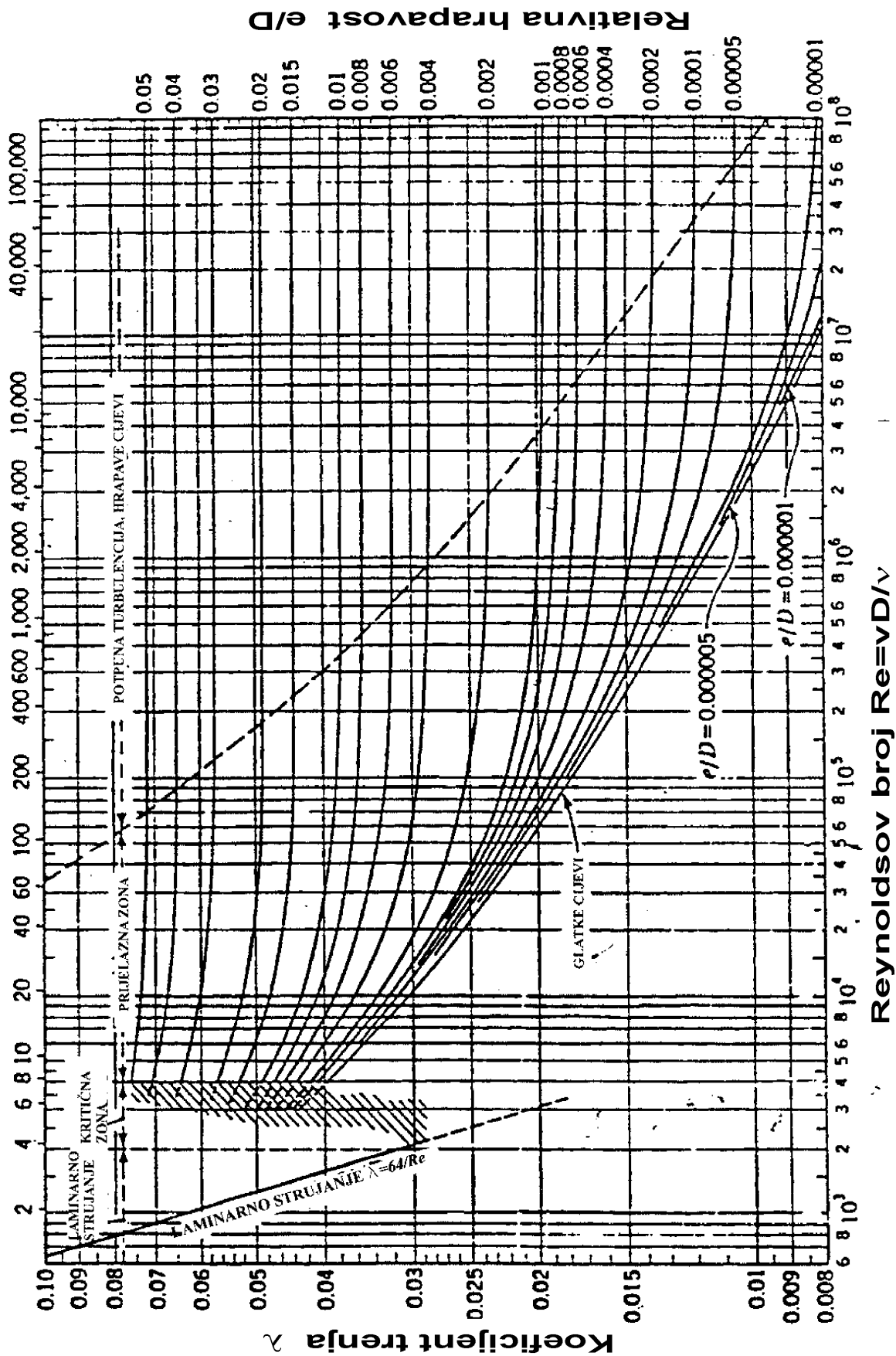
**Sl.5.8 Simetrično i asimetrično avionsko krilo**

Povećanjem kuta nastujavanja obrnuti gradijent tlaka na gornjoj površini krila se povećava i točka separacije se pomiče nizvodno. Maksimalna sila dinamičkog uzgona doseže se pri određenom kutu nastujavanja koji varira za različita avionska krila u rasponu od  $\approx 12^\circ$  do  $\approx 20^\circ$  (Sl.5.9). Daljnje povećanje kuta nastujavanja uzrokuje nagli pad dinamičkog uzgona i povećanje sile otpora. To stanje se zove *zastoj* i jasno je vidljivo na dijagramu (Sl.5.9) (promjena kuta nastujavanja postiže se npr. zakretanjem avionskih krilaca).



*Sl.5.9 Koeficijenti  $C_L$ ,  $C_D$  u ovisnosti o kutu nastrojavanja. U izrazima za  $C_L$  i  $C_D$  vrijednost specifične površine  $A$  se za ovaj slučaj računa kao umnožak dužine tetive krila (prema slici) i dužine krila. Kut nastrojavanja  $\alpha^\circ$  je kut kojeg čini vektor brzine slobodne struje i tetiva krila.*

## ***A. DODATAK***



Sl.A.1 Moodyjev dijagram