

univerzitet u novom sadu

SADRŽAJ

PREDDGOVOR	XI
OZNAKE	XIII
GLAVA 1. FIZIČKA SVOJSTVA FLUIDA	
1.1. Međunarodni sistem mernih jedinica	1
1.2. Gustina i specifična težina tečnosti	2
1.3. Gustina i specifična težina gasova	4
1.4. Pritisak	7
1.5. Stišljivost	8
1.6. Brzina zvuka	17
1.7. Viskoznost	21
1.8. Površinski napon, kapilarnost, napon pare	30
1.9. Uticaj toplote	37
1.10. Međunarodna standardna atmosfera	41
1.11. Kontrolna pitanja	49
GLAVA 2. STATIKA FLUIDA	
2.1. Merenje pritiska	51
2.2. Pritisak tečnosti na ravne površine	70
2.3. Pritisak tečnosti na krive površine	87
2.4. Plivanje	105
2.5. Stablnost tela pri plivanju	114
2.6. Relativno mirovanje tečnosti	125
2.6.1. Relativno mirovanje pri translaciji	125
2.6.2. Relativno mirovanje pri rotaciji	132
2.7. Kontrolna pitanja	148

Ž. BUKUROV
P. CVIJANOVIC

MEHANIKA FLUIDA

zadaci

fakultet tehničkih nauka

novi sad 1982

GLAVA 3. KINEMATIKA FLUIDA, NAPONSKO STANJE

3.1. Lagranžov način	154
3.2. Ojlerov način	156
3.2.1. Skalarno polje	156
3.2.1.1. Element luka	158
3.2.1.2. Gradijent	161
3.2.2. Vektorsko polje	166
3.2.2.1. Polje brzine	166
3.2.2.1.1. Divergencija	169
3.2.2.1.2. Rotor, vrtlozi	175
3.2.2.1.3. Cirkulacija, Stoksova formula	181
3.2.2.1.4. Klasifikacija polja brzine	184
3.2.2.1.5. Jednačina kontinuiteta	187
3.2.2.2. Polje ubrzanja	194
3.3. Složeno kretanje	201
3.3.1. Brzina	201
3.3.2. Ubrzanje	203
3.4. Tenzorsko polje	213
3.4.1. Brzine deformisanja tečnih delića	213
3.4.1.1. Brzina linearne deformacije	214
3.4.1.2. Brzina ugaone deformacije	217
3.4.2. Tenzor brzina deformisanja delića	219
3.4.3. Opšte polje brzina	222
3.4.4. Tenzor napona	227
3.4.4.1. Definicija pritiska	229
3.4.4.2. Tenzor napona čiste viskoznosti	232
3.4.4.3. Veza napona sa brzinama deformisanja	233
3.5. Kontrolna pitanja	235

AVA 4. BERNULIJEVA JEDNAČINA

1. Podela pritiska prema karakteru i osnovni način za njihovo određivanje	239
2. Osnovni oblik Bernulijeve jednačine - - B.j. za nestišljiv fluid bez gubitaka	242
2.1. Korekcionni faktor kinetičke energije	256
3. Cevni problemi - oblik sa gubicima	257

Štampano po odluci Veća Mašinskog Fakulteta u Novom Sadu,
broj 01-15/1972.

Izdaje Odbor za izdavačku delatnost Instituta za mehanizaciju
Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu

ŠTAMPA FİN OOUR ŠTAMPARIJA ZA GRAFIČKU DELATNOST
Veljka Vlahovića br.3
TIRAŽ 500 primeraka

4.4. Metod približavanja	279
4.5. Gubitak trenja u cevima različitih poprečnih preseka	283
4.6. Cevovod sa turbomašinom, kritični pritisak, zatvoren cevni sistem	288
4.7. Energijski dijagram	300
4.8. Nikaradzeove jednačine	313
4.9. Složeni cevovodi	316
4.10. Isticanje kroz otvore i naglavke	329
4.10.1. Otvori	329
4.10.2. Naglavci	337
4.11. Merenje protoka	343
4.12. Isticanje sa promenljivim nivoom	354
4.13. Nestacionarno strujanje	367
4.14. Bernulijeva jednačina za složeno kretanje	375
4.15. Vrtložno kretanje i radijalna struja	379
4.16. Kontrolna pitanja	386

GLAVA 5. JEDNAČINA O PROMENI KOLIČINE KRETANJA

5.1. Osnovna definicija jednačine o promeni količine kretanja u mehanici fluida i primedbe u vezi njene primene	391
5.2. Nepokretni elementi	394
5.2.1. Nepokretni elementi sa jednim ulazom i jednim izlazom fluida	394
5.2.1.1. Nepokretne lopatice	409
5.2.1.2. Propeleri - sila potiska	413
5.2.2. Nepokretni elementi sa različitim brojem ulaza i izlaza fluida	422
5.3. Elementi koji se kreću konstantnom brzinom	431
5.3.1. Aktivna pokretačka sila	431
5.3.2. Reaktivna pokretačka sila	439
5.4. Opšti oblik jednačine	444
5.4.1. Nejednoliko kretanje lopatica	447
5.4.2. Promenljiva masa	453
5.5. Promena momenta količine kretanja	459
5.6. Kontrolna pitanja	462

GLAVA 6. DVODIMENZIJSKA STRUJANJA

6.1. Ravansko strujanje savršenog nestišljivog fluida	464
6.1.1. Renkinova metoda	513
6.1.2. Hidrodinamički singulariteti u ravanskom strujanju	517
6.1.2.1. Metod lika	526
6.1.3. Primena konformnog preslikavanja	542
6.1.4. Sile na telu u struji savršenog fluida	570
6.2. Osnosimetrično strujanje	578
6.3. Kontrolna pitanja	588

GLAVA 7. LAMINARNO STRUJANJE (VISKOZNOG FLUIDA)

7.1. Kontrolna pitanja	610
------------------------	-----

GLAVA 8. GRANICNI SLOJ

8.1. Kontrolna pitanja	627
------------------------	-----

GLAVA 9. STPUNJANJE KOMPRESIBILNOG FLUIDA

9.1. Jednačina kontinuiteta, brzina slabog elastičnog poremećaja, Mahov konus, osnovni zakoni kompresibilnog strujanja, zaustavni pritisak i zaustavna temperatura	629
9.2. Isticanje kroz konvergentan mlaznik	642
9.3. Strujanje kroz suženi presek	648
9.4. Strujanje kroz konvergentno divergentan mlaznik	651
9.5. Kontrolna pitanja	659

GLAVA 10. OPŠTA ENERGIJSKA JEDNAČINA

GLAVA 11. TEORIJA SLIČNOSTI I DIMENZIJSKA ANALIZA	667
---	-----

11.1. Teorija sličnosti	667
11.2. Dimenzijska analiza	686
11.3. Kontrolna pitanja	702

GLAVA 12. OTPORI KOJIM FLUID DEJSTUJE NA TELU

12.1. Otpor trenja	705
12.2. Otpor oblika, ukupan otpor	706
12.2.1. Otpori pri malim i umerenim Reynoldsovim brojevima	710
12.2.2. Sila uzgona	713
12.2.3. Otpor broda	726
12.2.4. Otpor u kompresibilnoj struji	735
12.3. Kontrolna pitanja	739
	741

LITERATURA

744

TABELICE

1. Gustina ρ nekih tehnosti i gasova	3
2. Koficijenti stišljivosti s za neke tehnosti pod normalnim atmosferskim uslovima	15
3. Vrednosti za gasnu konstantu R , eksponent adijabate κ , specifične toplote pri konstantnom pritisku c_p za neke gasove	15
4. Napon pare vode i žive	36
5. Medunarodna standardna atmosfera	47
6. Karakteristični elementi nekih površina i zapremina	151
7. Koficijent gubitka ξ za naglo suženje	260
8. Koficijent gubitka ξ za mlaznik	261
9. Koficijent gubitka ξ za račve	264
10. Koficijent gubitka ξ za zatvarač (leptir)	266
11. Koficijent gubitka ξ za slavinu	266
12. Koficijent gubitka ξ za zasun Ludlo	266
13. Koficijent gubitka ξ za zasun sa simetričnim suženjem	267
14. Koficijent gubitka ξ za ventil sa podebnim zidom od 450 i od 900	267

15. Apsolutna hrpavost e za razne cevi 270
 16. Funkcija $f(b/a)$ za pravougaoni presek ($2a \times 2b$) 286
 17. Koeficijent protoka μ za razne oblike otvora 333
 18. Koeficijenti ψ, ξ, ϕ i μ za razne vrste naglavaka 338
 19. Poređenje karakteristika u turbulentnom i laminarnom graničnom sloju 614
 20. Vrednosti ekspanzionog faktora γ 650
 21. Čeđe upotrebljavane bezdimenzijske karakteristike 671
 22. Koeficijenti otpora za cilindre, prizme, ravne ploče i ljske 717
 23. Koeficijent trenja broda u zavisnosti od dužine 736

DIJAGRAMI

1. Dinamička viskoznost u zavisnosti od temperature 38
 1a. Dinamička viskoznost u zavisnosti od temperature 39
 1b. Kinematička viskoznost u zavisnosti od temperature 40
 2. Temperatura vazduha u zavisnosti od visine 42
 3. Gustina vazduha u zavisnosti od visine 42
 4. Koeficijent gubitka ξ i stepen korisnosti η difuzora 259
 5. Koeficijent gubitka ξ za koleno do 90° i oštro koleno do 90° 262
 6. Koeficijent gubitka ξ za koleno od 90° 263
 7. Koeficijent gubitka ξ za oštro koleno od 90° sa skretnim lopaticama 263
 8. Koeficijent gubitka ξ za razlilito izvedene oblike račvanja i sučeljavanja fluidne struje pod 90° 265
 9. Mudijev dijagram 269
 10. Koeficijenti kontrakcije ψ , brzine ϕ i protoka μ za kružni otvor 331
 11. Koeficijent kontrakcije ψ za jedan slučaj delimične kontrakcije 332

12. Koeficijent protoka μ za konvergentno-divergentni naglavak 339
 13. Odstupanja P_s, P_t i P_d kod Prantlove cevi 343
 14. Koeficijent protoka μ za blendu 345
 15. Koeficijent protoka μ za blendu 346
 16. Koeficijent protoka μ za mlaznik 348
 17. Koeficijent protoka μ za Venturi-metar 349
 18. Koeficijent protoka μ za Venturi-metar $d/D = 0,5$ 350
 19. Raspored mogućih brzina u laminarnom i turbulentnom graničnom sloju 614
 20. Uticaj kompresibilnosti na zaustavni pritisak za vazduh 632
 21. Promene brzine i težinskog protoka pri isticanju kroz konvergentni mlaznik u zavisnosti od spoljašnjeg (okolnog) pritiska 644
 22. Promene koeficijenta otpora trenja za ravnu ploču u zavisnosti od Re broja 707
 23. Smanjenje koeficijenta otpora trenja za ravnu ploču sa povećanjem Re broja 707
 24. Koeficijenti otpora za lopte i druga obrtna tela 715
 25. Koeficijenti otpora za cilindre i ravne ploče 716
 26. Polara aeroprofila Clark-Y $\frac{l}{b} = 6$ 730
 27. Karakteristični rasporedi pritiska i udarni talasi pri opstrujavanju kompresibilnog fluida oko tela 740
 28. Koeficijenti otpora C_D u zavisnosti od Ma broja za neke karakteristične objekte (projektili) 740

PREDGOVOR

Ova Zbirka zadataka iz mehanike fluida namenjena je studentima mašinskih fakulteta kao uputstvo - i pomoć - za rešavanje numeričkih primera iz materije koju su proslušali na predavanjima. Ujedno, svojim sastavom, Zbirka omogućuje studentima da dobiju predstavu o raznolikosti problema iz ove grane tehnike, s kojima se često mogu suočiti u svojoj docnijoj inženjerskoj delatnosti.

Glave, poglavlja i delovi Zbirke označeni su po decimalnoj klasifikaciji, kojom se određuje mesto svakog dela u sklopu celine.

Svako poglavlje počinje s davanjem kraćeg uputstva za rad i nužnih formula, a katkad se u kratkim potezima izvode i potrebni analitički izrazi. Sve je to, razume se, učinjeno, radi toga da bi se olakšalo prilaženje rešavanju zadataka. Sačlasno tome se u Zbirci, prvo, rešavaju karakteristični problemi u svim fazama rada, dakle, počevši od tumačenja zahteva postavljenih zadatkom preko postavljanja plana rada sve do izbora matematičkog orudja i završavajući s rešenjem problema. Potom se nabrajaju zadaci koje sam čitalac treba da reši jer se u Zbirci navode samo rezultati.

Broj zadataka u ovoj Zbirci je srazmeran broju različitih karakterističnih elemenata iz određene oblasti, koje treba uočiti i naučiti način njihova analiziranja.

Na kraju svake glave navodi se niz pitanja na koje je student treba sebi da odgovori, kako bi na taj način proverio svoje znanje. Jer, krajnja svrha jeste da student bude u stanju da s uspehom rešava i drugačije zadatke od zadataka kakvi su uneseni u ovu Zbirku.

Zbirka je radjena u skladu sa odavno usvojenim Internationalnim sistemom mernih jedinica (SI), odnosno prema našem Zakonu o mernim jedinicama i mernilima, čiji se Izvod zbog svoje važnosti prilaže ovoj Zbirci.

Popratna objašnjenja i primeri treba očitovati da pokažu da je preko potrebno imati solidnu teorijsku osnovu za uspešno rešavanje praktičnih zadataka.

Izbor zadataka je napravljen najvećim delom prema literaturi datoj na kraju knjige, odabranih ispitnih zadataka i sopstvenih primera.

Opisani instrumenti za merenje, dijagrami i tablice koji se sadrže u tekstu daju ovoj Zbirci obeležje priručnika nešto šireg obima na što bi to imala Zbirka zadataka, u užem smislu.

Svaku primedbu u pogledu uočenih grešaka ili neslaganja sa izloženim tekstom primićemo sa zahvalnošću.

Zahvaljujemo Komisiji za naučno-izdavačku delatnost Mašinskog fakulteta u Novom Sadu koja je omogućila izdavanje ove Zbirke.

Za nesebično prenošenje znanja i iskustva tokom višegodišnjeg zajedničkog rada i za korisne savete pri izradi ove Zbirke dugujemo posebnu zahvalnost akademiku prof. Nikoli Obradoviću i prof. Radomiru Sovilju.

U Novom Sadu, oktobra 1971.

Z. Bukurov
P. Cvijanović

A	- površina, karakteristična površina
A ₁	- lameovi koeficijenti transformacije (1=1, 2, 3)
A _{min}	- suženi preseki (kontarkcija)
A _R	- karakteristična površina broda (poprečni preseki)
đ	- ubrzanje
B ₁	- lameovi koeficijenti transformacije (i=1, 2, 3)
C	- težište, konstanta, korekcionni faktor
Ca	- košijev broj
C _p	- koeficijent pritiska
c	- brzina zvuka, dužina profila rešetke
C _D	- koeficijent otpora
C _{Di}	- koeficijent indukovano otpora
C _{Dt}	- koeficijent otpora trenja
c _f	- koeficijent trenja (glatke) ravne površine
C _{Kr}	- kritična brzina zvuka
C _L	- koeficijent uzgona
C _{max}	- maksimalna brzina zvuka
C _p	- specifična toplota pri stalnom pritisku
C _R	- koeficijent otpora oblika
D	- napadna tačka sile pritiska (sile potiska), prečnik
D _n	- hidraulički prečnik
D _{min}	- suženi prečnik (kontrakcija)
d	- prečnik, diferencijal
E	- modul elastičnosti, energija
E _k	- kinetička energija
E _p	- potencijalna energija
E _{pr}	- energija pritiska
Eu	- Ojlerov broj
e	- apsolutna hrapavost, ekscentricitet, prirodni broj
F	- sila
F _D	- ukupna sila otpora
F _{Di}	- indukovani otpor
F _{Do}	- sila otpora na beskonačnom krilu
F _{Dp}	- otpor oblika
F _{Dt}	- otpor trenja
F _f	- otpor trenja
F _k	- otpor vrtloga na kraju broda

F_L	- sila uzgona	Pr	- Prantlov broj
Fo	- Furijev broj	P	- apsolutni pritisak
FR	- otpor oblika	Pa	- atmosferski pritisak (lokalni)
Fr	- Frudov broj	Pd	- dinamički pritisak
Ft	- otpor talasa	Pk	- napon pare
f	- funkcija, koeficijent trenja klizanja, univerzalna gravitacijska konstanta, frekvencija odvajanja vrtloga	Pm	- natpritisak ili manometarski pritisak
G	- težina, spoljašnja sila	Po	- normalni atmosferski pritisak
Gr	- Grashofov broj	Ps	- statički pritisak
g	- ubrzanje zemljine teže	Pt	- totalni pritisak
H	- visina, napor	Pv	- potpritisak ili vakuumetarski pritisak
Hp	- napor pumpe	Pkr	- kritični pritisak
H _T	- napor turbine	\bar{p}	- vektor napona
h	- visina, metacentarska visina	\bar{p}_n	- vektor normalnog napona
h ₁	- izgubljena energija (gubitak)	\bar{p}_s	- vektor tangencijalnog napona
I	- inercijska sila	Q	- zapreminski protok, protok
I _i	- moment inercije površine za osu i	q	- količina toplote jedinice mase
I _{ij}	- cintrifugalni moment inercije površine za ose i, j	Q _i	- generalisane koordinate (i=1,2,3)
i	- imaginarna jedinica, entalpija	R	- gasna konstanta, poluprečnik
it	- totalna entalpija	Re	- Reynoldsov broj
K	- koeficijent kretanja	R _h	- hidraulički radijus
k	- koeficijent oblika	r	- poluprečnik, metacentarsko rastojanje
L	- duž	S	- tenzor napona
l	- duž	Sh	- Struhalov broj
l _{poč}	- rastojanje formiranog laminarnog tečenja u cevi od ulaznog preseka	s	- koeficijent stišljivosti, korak rešetke, skliz (slip), duž
M	- moment sile, metacentar, molekulska masa, moment količine kretanja	T	- apsolutna temperatura, period, vreme, viskozna sila
Ma	- Mahov broj	T _{Kr}	- apsolutna kritična temperatura
m	- masa	T _t	- apsolutna totalna temperatura
ñ	- protok mase fluida	t	- temperatura, vreme, debljina profila rešetke
ñg	- težinski protok fluida	t _t	- totalna temperatura
(ñg) _{max}	- maksimalan težinski protok	u	- jednolika brzina van graničnog sloja, skalarna funkcija
Nu	- Nuseltov broj	v	- obimska brzina, prenosna brzina, unutrašnja energija, promenljiva brzina u graničnom sloju
Nw	- Njutnov broj	v	- zapremina
n	- broj obrtaja, normala na liniju ili površinu	v	- specifična zapremina, brzina
O	- okvašeni obim	V _{Kr}	- kritična brzina
P	- snaga, generalisani pritisak, sila pritiska	V _{max}	- maksimalna brzina
Pe	- Pekleov broj	V _{rel}	- relativna brzina

v _{sr}	- srednja brzina
v _t	- teorijska brzina
v _v	- brzina kojom se vrtlozi odvajaju od tela
v _{vr}	- prividna brzina
v̄(z)	- kompleksna brzina
W	- rad (energija)
We	- Weberov broj
W(z)	- kompleksni potencijal (analitička funkcija f(z))
X	- sila jedinične mase pravcem x-ose
Y	- sila jedinične mase pravcem y-ose, ekspanzioni faktor
Z	- sila jedinične mase pravcem z-ose
α	- napadni ugao, korekcionni faktor kinetičke energije
β	- zapreminski koeficijent toplotnog širenja fluida
Γ	- cirkulacija
Δ	- Laplasičan
δ	- relativna hrapavost, debljina graničnog sloja
δ ₁	- debljina izgubljenog protoka
δ ₂	- debljina izgubljene kolicične kretanja
ε	- modul stišljivosti, tenzor brzine deformisanja, izdašnost izvora ili ponora
ζ	- kompleksna promenljiva u preslikanoj ravni
η	- dinamička viskoznost, stepen korisnosti
κ	- eksponent adijabate
λ	- koeficijent trenja
μ	- koeficijent protoka, koeficijent trenja kotrljanja
ν	- kinematička viskoznost
ξ	- koeficijent lokalnog gubitka energije
η ₁	- bezdimenzijski monom
ρ	- gustina
ρ ₀	- gustina vazduha pri normalnim uslovima
ρ _r	- relativna gustina
ρ _t	- totalna gustina
σ ₁₁	- normalni naponi od viskoznosti (i=1,2,3)
τ _{ij}	- tangencijalni naponi (i,j=x,y,z ; i ≠ j)
φ	- koeficijent brzine, funkcija potencijala brzine
ψ	- koeficijent kontrakcije, strujna funkcija
ω	- ugaona brzina, vrtlog
v	- nabra

GLAVA 1

FIZIČKA SVOJSTVA FLUIDA

1.1. MEĐUNARODNI SISTEMI MERNIH JEDINICA

Kao rezultat brzog razvitka nauke i tehnike s jedne strane i širenja kulturnih i ekonomskih veza s druge, pojavila se potreba za jednoobraznim sistemom za merenje fizičkih veličina.

Zahvaljujući ogromnom trudu koji su uložile razne međunarodne metrološke organizacije i nacionalne naučno-istraživačke ustanove, oktobra 1960.godine u Parizu, na XI Generalnoj Konferenciji za mere i težine, ustanovljen je Međunarodni sistem jedinica (System International, skraćeni naziv SI), tj. određen je naziv sistema, spisak osnovnih, dopunskih i izvedenih jedinica, kao i predlozi o nazivima za obrazovanje množina i delova mernih jedinica. Porred toga, na istoj Konferenciji tačnije su definisani metar i sekunda, a na osnovu savršenijih etalona koji su nastali kao rezultat najnovijih dostignuća savremene nauke. Utvrđena je i Međunarodna praktična temperaturska skala.

Ovako ustanovljen Međunarodni sistem jedinica omogućuje dalju unifikaciju i preciziranje mernih jedinica za fizičke veličine.

Od sedam mernih jedinica, koje su po SI odabrane za osnovne, četiri jedinice i to:

- kg (kilogram) - jedinica za masu [M]
- m (metar) - jedinica za dužinu [L]
- s (sekunda) - jedinica za vreme [T]
- K (kelvin) - jedinica za temperaturu [θ]

upotrebljavaju se pri izučavanju mehanike fluida. Merne jedinice ostalih fizičkih veličina, koje srećemo u mehanici fluida (sila, pritisak, gustina itd) jesu izvedene jedinice od ove četiri osnovne.

Novembra 1961. godine proglašavanjem Zakona o mernim jedinicama i merilima, usvojen je i u našoj zemlji Međunarodni sistem jedinica. Tako se dopušta upotreba nekih mernih jedinica koje ne pripadaju Međunarodnom sistemu jedinica (zbog nedostatka tablica, dijagrama i merila sa jedinicama Međunarodnog sistema), ipak ovaj Zakon predstavlja prvi i najvažniji korak ka potpunom prelasku na novi sistem mera.

Od usvajanja 1961. godine do danas, Zakon o mernim jedinicama i merilima doživio je dve izmene zbog nastalih promena u našem društvenom razvitku. Prva izmena usledila je 1965. godine zbog usaglašavanja sa Ustavom SFRJ iz 1963. godine, a druga 1973. godine zbog usaglašavanja sa Ustavnim amandmanima iz 1971. godine. Tom prilikom unete su sve izmene i dopune, kako u pogledu vrste tako i u pogledu definicija mernih jedinica koje su nastale u ovom vremenskom razdoblju.

1.2. GUSTINA I SPECIFIČNA TEŽINA TEČNOSTI

Primeri

1. Merenjem na vagi ustanovljeno je da pet litara nafte imaju 4,25 kg. Naći gustinu ρ i specifičnu težinu ρ_g .

Rešenje. Po definiciji jeste

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4,25}{0,005} = 850 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_g = 850 \cdot 9,81 = 8338,5 \text{ N/m}^3$$

Specifična težina

2. Relativna gustina kerosina je $\rho_{rK} = 0,754$. Naći specifičnu težinu ρ_{rK} kerosina.

Rešenje. Po definiciji je

$$\rho_{rK} = \frac{\rho_K}{\rho_V}$$

gde je ρ_V - gustina vode i jednaka 1000 kg/m^3 , nalazi se

$$\rho_{rK} = \rho_K \rho_{rK} = 1000 \cdot 0,754 \cdot 9,81 = 7396,74 \text{ N/m}^3$$

3. Morska voda ima gustinu $\rho = 1028 \text{ kg/m}^3$. Naći njenu specifičnu težinu.

Rešenje. Specifična težina je

$$\rho_g = 1028 \cdot 9,81 = 10084,68 \text{ N/m}^3$$

4. Odrediti gustinu ρ_s smeše tečnosti, koja ima sastav: kerosina 40%, mazuta 60% (zapreminski procenti), ako je gustina kerosina $\rho_K = 790 \text{ kg/m}^3$ a mazuta $\rho_m = 890 \text{ kg/m}^3$.

Rešenje. Iz relacije

$$\rho_s \cdot 100 = \rho_K \cdot 40 + \rho_m \cdot 60 \quad \text{delenjem sa 100 dobija se}$$

$$\rho_s = 0,4 \rho_K + 0,6 \rho_m = 0,4 \cdot 790 + 0,6 \cdot 890 = 850 \text{ kg/m}^3$$

5. Odrediti gustinu tečnosti ρ_s sastava: kerosina 40%, mazuta 60% (količinski procenti), gustine kao u predhodnom primeru.

Rešenje. Iz

$$V_s = V_K + V_m$$

gde je V_s - zapremina smeše, V_K i V_m - zapremine pojedinih komponenta, dobija se - pošto se zapremine zamene odgovarajućim odnosima m/ρ :

$$\frac{m_s}{\rho_s} = \frac{m_K}{\rho_K} + \frac{m_m}{\rho_m}$$

Dalje je $m_K = 0,4 \cdot m_s$, $m_m = 0,6 \cdot m_s$ (količinski procenti) te znamo gvih vrednosti u gornji izraz postaje

$$\frac{m_s}{\rho_s} = \frac{0,4 m_s}{\rho_K} + \frac{0,6 m_s}{\rho_m}$$

$$\text{odnosno } p_s = \frac{\rho_k \rho_m}{0,4 \rho_m + 0,6 \rho_k} = \frac{790 \cdot 890}{0,4 \cdot 890 + 0,6 \cdot 790} = 847,1 \text{ kg/m}^3.$$

1.3. GUSTINA I SPECIFIČNA TEŽINA GASOVA

U menahici fluida gustina i specifična težina gasova se određuje pomoću jednakine stanja idealnih gasova

$$p v = R T,$$

gde su p - statički pritisak u Pa, $v = \frac{1}{\rho}$ - specifična zapremina u m^3/kg , R - gasna konstanta u J/kgK , T - apsolutna temperatura u K. Uvek se može odrediti jedna od veličina kad su ostale poznate.

Primeri

1. Odrediti gustinu ρ i specifičnu težinu ρ_g ugljendioksida na temperaturi $t = 500^\circ\text{C}$ i pritisku $p = 760 \text{ mmHg}$, ako je na temperaturi $t = 0^\circ\text{C}$ i istom pritisku gustina ugljendioksida $\rho_0 = 1,977 \text{ kg/m}^3$.

Rešenje. Iz jednakine stanja za idealne gasove i podataka $p_0 = 760 \text{ mmHg} = 101325 \text{ Pa}$; $t_0 = 0^\circ\text{C}$ (odnosno $T_0 = 273,15 \text{ K}$) i $\rho_0 = 1,977 \text{ kg/m}^3$, prvo se određuje gasna konstanta

$$R = \frac{p_0}{\rho_0 T_0} = \frac{101325}{1,977 \cdot 273,15} = 187,63 \text{ J/kg}\cdot\text{K}.$$

Zatim je $T = t + 273,15 = 773,15 \text{ K}$,

$$\text{i gustina } \rho = \frac{p}{R T} = \frac{101325}{187,73 \cdot 773,15} = 0,698 \text{ kg/m}^3.$$

Specifična težina kiseonika biće jednaka

$$\rho_g = 0,698 \cdot 9,81 = 6,847 \text{ N/m}^3.$$

2. Odrediti gustinu ρ i specifičnu težinu ρ_g vazduha za normalne uslove znajući da je srednja molekulska masa vazduha $M = 29 \text{ kg/kmol}$.

Rešenje. Zapremina jednog kilomola idealnog gasa iznosi $22,4 \text{ m}^3/\text{kmol}$ na temperaturi $t_0 = 0^\circ\text{C}$ i atmosferskom pritisku $p = 101325 \text{ Pa}$. Prema tome je gustina

$$\rho = \frac{M}{22,4} = \frac{29}{22,4} = 1,295 \text{ kg/m}^3,$$

a specifična težina

$$\rho_g = 1,295 \cdot 9,81 = 12,704 \text{ N/m}^3.$$

Zadaci

1. Znajući da je gasna konstanta vazduha $R = 287 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$, naći specifičnu zapreminu v , gustinu ρ i specifičnu težinu ρ_g vazduha na temperaturi $t = 15^\circ\text{C}$ i atmosferskom pritisku $p_0 = 101325 \text{ Pa}$.

Rešenje. $v = 0,816 \text{ m}^3/\text{kg}$; $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$; $\rho_g = 12,017 \text{ N/m}^3$

2. U podmornici, pre ronjenja, vazduh ima temperaturu $t_1 = 27^\circ\text{C}$ i pritisak $p_0 = 101325 \text{ Pa}$. Posle zaronjavanja, temperatura vazduha spadne na $t_2 = 15^\circ\text{C}$. Koliki je pritisak vazduha p_2 u podmornici ako se u njoj nije promenila zapremina ni količina vazduha?

Rešenje. $p_2 = 97,3 \text{ kPa}$

3. U automobilskoj gumi je vazduh temperature $t_1 = 25^\circ\text{C}$ i pritiska $p_1 = 200 \text{ kPa}$. Pretpostavljajući da se ne menja ni zapremina ni količina vazduha, sračunati pritisak p_2 vazduha u gumi kad se temperatura popne na $t_2 = 40^\circ\text{C}$.

Rešenje. $p_2 = 210 \text{ kPa}$

4. Rezervoar, određene zapremine, napunjen je u početku azotom pod pritiskom $p_1 = 105$ kPa i na temperaturi $t_1 = 21^\circ\text{C}$. Naknadno je dodato $m = 1,5$ kg azota. Krajnje stanje je: $p_2 = 175$ kPa i $t_2 = 24^\circ\text{C}$. Sračunati koliku zapreminu ima rezervoar. (Gasna konstanta azota $R = 296,75$ J/kg K).

Rešenje . $V = 1,916 \text{ m}^3$

TABLICA 1.

Gustina ρ [kg/m ³] nekih tečnosti i gasova	
živa (0°C)	13 595
glicerin	1 260
naftalin	1 145
katransko ulje iz kam. uglja	1 080
ulje za lož. (teško)	1 020 - 1 080
ulje za lož. (lako)	890 - 980
mleko	1 030
nafta	700 - 1 040
parafinsko ulje	900 - 1 020
ricinusovo ulje	959 - 974
ulje za cilindre	930
morska voda	1 020 - 1 030
mast	910 - 960
laneno ulje	940
maslinovo ulje	914 - 919
plinsko ulje iz katrana	880 - 900
terpentinsko ulje	860
petrolej	760 - 860
benzol	875
špiritus	830
alkohol (15°C)	790
benzin (teški)	760
benzin (lakti)	680 - 720
etar sumporni	730
azot (0°C; 101 325 Pa)	1,251

ugljiendioksid ($t=0^\circ\text{C}$; $p=p_0$)	1,977
vazduh	1,2928
kiseonik	1,429
vodonik	0,090
pare žive	9,02

1.4. PRITISAK

Osnovna jednačina za mirovanje fluida [1]

$$\frac{1}{\rho} dp = X dx + Y dy + Z dz$$

u polju zemljine teže svodi se na

$$\frac{1}{\rho} dp = -g dz$$

Tu je g - spoljašnja sila koja napada fluid po jedinici mase (ubrzanje teže); z - vertikalna osa orijentisana naviše.

Dalje je

$$dp = -\rho g dz$$

$$\int_{z_1}^{z_2} dp = -\int_{z_1}^{z_2} \rho g dz$$



Sa $\rho g = \text{const.}$ postaje

$$p_2 - p_1 = \rho g (z_1 - z_2)$$

Rezultat pokazuje da je statički pritisak direktno srazmeran visini stuba tečnosti, gustine ρ . Na ovom saznanju se i temelje mnogi instrumenti kojima se meri pritisak.

Na $z_2 = z_1$ je $p_2 = p_1 = \text{const.}$ što upravo predstavlja zakon po kojem pritisci fluida moraju biti isti na horizontalnoj ravni. Ovaj zakon važi i kad gustina ρ nije konstantna, tj. važi za sve stišljive i nestišljive fluide (tečnosti, gasove i gasne smеше), koje miruju.

Primer

Koliki je pritisak na morsko dno duboko 10921 m, ako je specifična težina morske vode konstantna, i jednaka $\rho_g = 10050 \text{ N/m}^3$, a normalni atmosferski pritisak je $P_0 = 101325 \text{ Pa}$?

Odgovor. Kad je osa z usmerena naniže važi

$$\frac{1}{\rho} dp = g dz$$

odnosno $dp = \rho g dz$

kad je $\rho g = \text{const.}$ postaje

$$\int_{P_0}^{P_H} dp = \rho g \int_0^H dz$$

pa je

$$P_H - P_0 = \rho g H$$

odnosno pritisak na dno $P_H = P_0 + \rho g H = 101325 + 10050 \cdot 10921$

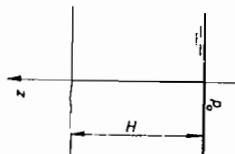
$P_H = 109,86 \text{ MPa}$

1.5. STIŠLJIVOST

Stišljivost je svojstvo materijalne sredine da masa menja svoju zapreminu pod uticajem promene pritiska.

Količnik promene zapremine ΔV i prvobitne zapremine V podeljen razlikom pritiska Δp , zbog koje se zapremina V promenila, naziva se koeficijentom stišljivosti s ; dakle

$$s = - \frac{\Delta V}{V} \frac{1}{\Delta p} \text{ [Pa}^{-1}\text{]}$$



$(\Delta V = V - V_1 \text{ u [m}^3\text{] i } \Delta p = p - p_1 \text{ u [Pa]})$. Znak "-" pokazuje da se zapremina smanjuje kad se pritisak povećava, i obrnuto. Fluid je stišljiviji kad je koeficijent stišljivosti veći.

Recipročna vrednost koeficijenta stišljivosti naziva se modulom stišljivosti e (ima dimenziju pritiska i analogan je modulu elastičnosti E čvrstih tela), dakle

$$e = \frac{1}{s} = - \frac{V}{\Delta V \Delta p} \text{ [Pa]}$$

Koeficijent stišljivosti se može izraziti ne samo mlim i konačnim promenama ΔV i Δp , nego još tačnije i diferencijalnim promenama dV i dp u vidu diferencijalne jednačine

$$s = - \frac{dV}{V} \frac{1}{dp}$$

Masa fluida se nikad ne menja, tj. uvek je $m = \rho V = \text{const.}$ pa se diferenciranjem $\rho V = \text{const.}$ dolazi do jednačine $V d\rho + \rho dV = 0$, tj. do odnosa

$$- \frac{dV}{V} = \frac{d\rho}{\rho}$$

Tako se koeficijent stišljivosti može izraziti kao

$$s = \frac{d\rho}{\rho} \frac{1}{dp}$$

ili

$$\frac{d\rho}{\rho} = s dp$$

te se integraljenjem od početne vrednosti

$$\int_{P_0}^P \frac{d\rho}{\rho} = s \int_{P_0}^P dp$$

dobija - pošto se zameni s - izraz koji pokazuje kako se menja gustina fluida u funkciji pritiska, i glasi

$$\rho = \rho_0 e^{s(p - P_0)}$$

Veličine ρ i p (bez indeksa) se odnose na bilo koje mesto u fluidu.

Ako se u

$$s = \frac{dp}{\rho} \frac{1}{dp}$$

zameni $dp = \rho g dz$, a osa z orijentirane naniže, dobija se

$$s = \frac{dp}{\rho} \frac{1}{g \rho^2 dz}$$

Oдавде se integraljenjem nalazi gustina ρ kao funkcija dubine z i to

$$\int_{z_0}^z \frac{dp}{\rho} = s \int_{z_0}^z dz$$

s rezultatom

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - s g (z - z_0)}$$

Ako se podje od izraza

$$s = - \frac{\Delta V}{V_0} \frac{1}{\Delta p}$$

gde je $\Delta V = V_0 - V_1$ a $\Delta p = p_0 - p_1$, i ako se izjednači masa jedinice fluida na oba mesta 0 i 1 biće $\rho_0 V_0 = \rho_1 V_1$. Time se poslednja jednačina za s preinačuje u

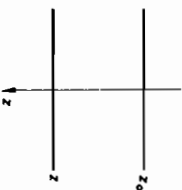
$$s = - \frac{V_0 - V_1}{V_0} \frac{1}{p_0 - p_1}$$

$$s = - \left(1 - \frac{V_1}{V_0}\right) \frac{1}{p_0 - p_1} = - \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right) \frac{1}{p_0 - p_1}$$

otkud opšti izraz za gustinu

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - s(p - p_0)}$$

Ovako određena vrednost gustine je približna ali se malo razlikuje od tačne vrednosti



$$\rho = \rho_0 e^{s(p - p_0)}$$

Izjednačavanjem izraza

$$\rho = \rho_0 e^{s(p - p_0)}$$

sa

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - s g \rho_0 (z - z_0)}$$

dovodi se dubina z u zavisnost od pritiska, jer sledi

$$z - z_0 = \frac{1 - e^{-s(p - p_0)}}{s g \rho_0}$$

Primeri

1. Sračunati modul stišljivosti vazduha pri izotermskoj i izentropskoj promeni stanja vazduha. Izložilac izentropije je $\kappa = 1,41$.

Rešenje. Za izotermsku promenu stanja, karakteristična jednačina može, logaritmovanjem i diferenciranjem, da se transformiše na sledeći način:

$$\frac{p}{\rho} = \text{const}$$

$$\ln p - \ln \rho = \text{const}$$

$$\frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho}$$

zamenjujući ovu relaciju u izraz za modul stišljivosti $e = \frac{\rho}{p} \frac{dp}{d\rho}$ dobija se

$$e = \frac{p}{\rho} \frac{dp}{d\rho} = p$$

Na isti način će biti za izentropsku promenu ($p v^\kappa = \text{const.}$):

$$e = \frac{dp}{dp} = \kappa \frac{P}{dp} = \kappa P$$

2. Za koliko se povisi pritisak vode preko atmosfere-
rskog pritiska, kad se njena zapremina V_0 smanji za 5% ?
(Modul stišljivosti vode iznosi $e = 2,23 \cdot 10^9$ Pa)

Odgovor. Polazi se od

$$e = - \frac{\Delta P V_0}{\Delta V}$$

zamenjujući $\Delta P = P_a - P$ i $\Delta V = 0,05 V_0$

dobija se rezultat

$$P - P_a = 0,05 e = 0,05 \cdot 2,23 \cdot 10^9 = 1115 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

3. Cev, unutrašnjeg prečnika d , kojom se transpor-
tuje nafta, negde se zagušila. U tu cev, na kraju, umetne
se klip istog prečnika d i pomeri za $l = 625$ mm. Time se
povećava pritisak nafte u cevi za $\Delta p = 150$ kPa. Odrediti pri-
bližnu razdaljinu L do zagušenog mesta, znajući da je koe-
ficient stišljivosti nafte $s = 0,755 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$,

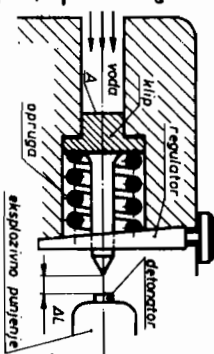
Rešenje. U izraz

$$s = - \frac{\Delta V}{V} \frac{1}{\Delta P}$$

unesu se poznata promena zapremine nafte $\Delta V = -l \frac{d^2 \pi}{4}$ i nepoz-
nata njena zapremina $V = l \frac{d^2 \pi}{4}$, pa se reši po

$$L = \frac{l}{s \Delta P} = \frac{0,623}{0,775 \cdot 10^{-9} \cdot 150 \cdot 10^3} = 5500 \text{ m} = 5,5 \text{ km}$$

4. Na kojoj će dubini eksplo-
dirati dubinska bomba koja se aktivira
pritiskom vode na mehanizam (vidi sli-
ku) ako voda treba da pomeri iglu s
klipom kojeg drži opruga za $\Delta L = 10$ mm,
a krutost opruge je $c = 50$ N/mm. Dodi-
rna površina klipa i vode ima 1 cm^2 .
Morsku vodu smatrati stišljivošću, koe-
ficienta stišljivost $s = 0,5 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$
specifična težina vode na površini je
 $\rho_0 g = 10050 \text{ N/m}^3$.



Rešenje. Radi aktiviranja bombe mora voda pritisnu-
ti klip silom

$$F = P_m A = c \Delta L$$

gde je $P_m = P_H - P_a$; P_H = statički pritisak na dubinu H ;
 P_a = atmosferski pritisak.

Iz jednačine sledi

$$P_m = \frac{c \Delta L}{A} = \frac{50 \cdot 10}{1 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 5 \text{ MPa}$$

Ako se sada u osnovnom izrazu

$$z - z_0 = \frac{1 - e^{-s(p - p_0)}}{s \rho_0 g}$$

zameni $z - z_0$ sa H , a $p - p_0$ sa P_m , promena dubine biće

$$H = \frac{1 - e^{-s P_m}}{s \rho_0 g} = \frac{1 - e^{-0,5 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^6}}{0,5 \cdot 10^{-9} \cdot 10050} = 496 \text{ m}$$

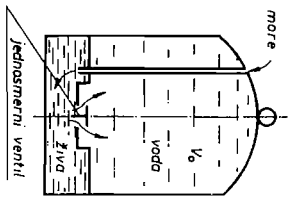
Ukoliko bi se morska voda smatrala nestišljivošću on-
da bi bomba eksplodirala na dubini H_1 koja se jednostavno
dobija iz

$$H_1 \rho_0 g = P_m$$

Kao $H_1 = \frac{P_m}{\rho g} = \frac{5000000}{10050} = 498 \text{ m}$.

Podešavanjem napregnutosi opruge podešava se i du-
bina na kojoj će se bomba aktivirati.

5. Za merenje dubine morskog dna služi pribor prikazan na slici.
U gornjem delu zapremine $V_0 = 800 \text{ cm}^3$ je destilovana voda, a u donjem delu je živa. Koliko će žive preći u gornji deo suda na dubini $H = 10 \text{ km}$? Specifična težina morske vode na površini je $\rho_0 = 10050 \text{ N/m}^3$; koeficijent stišljivosti destilovane i morske vode je $s = 0,5 \cdot 10^{-9} [\text{Pa}]^{-1}$, a žive $s_z = 0,038 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$.



Rešenje: Zamenjujući u

$$z - z_0 = \frac{1 - e^{-s(P - P_0)}}{s \rho_0}$$

$z - z_0$ sa H , a $P - P_0 = P_m - P_a$ (P_H = statički pritisak na dubini H , P_a = atmosferski pritisak) i posle sredjivanja dolazi se do izraza za natpritisak

$$P_m = - \frac{1}{s} \ln(1 - s \rho_0 H)$$

to je

$$P_m = - \frac{1}{0,5 \cdot 10^{-9}} \ln(1 - 0,5 \cdot 10^{-9} \cdot 10050 \cdot 10000) = 103,2 \text{ MPa}$$

Pomoću koeficijenta stišljivosti vode određuje se zapremina žive koja je zbog povećanog pritiska ušla kroz jednosmerni ventil u gornji deo suda.

$$\Delta V = V_z = V_0 \cdot P_m \cdot s = 800 \cdot 103,2 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-9} = 41,27 \text{ cm}^3.$$

Ovu zapreminu žive treba svesti na normalne uslove ($P_0 = 101325 \text{ Pa}$ i $t = 15^\circ\text{C}$), pomoću koeficijenta stišljivosti žive

$$\frac{V_1 z}{V_z} = \frac{1}{1 - P_m s z}$$

$$V_1 z = \frac{1 - 1031,7 \cdot 10^6 \cdot 0,038 \cdot 10^9}{41,27} = 41,44 \text{ cm}^3.$$

Količina potisnute žive, koja ostaje u gornjem delu suda i pošto se sud izvadi, iznosi

$$m_z = V_1 z \rho_z = 41,44 \cdot 10^{-6} \cdot 13,6 \cdot 10^3 = 0,564 \text{ kg}.$$

TABLICA 2.

Koeficijenti stišljivosti s [GPa^{-1}] za neke tečnosti pod normalnim atmosferskim uslovima	
etar	1,948
alkohol	1,122
benzen (benzoi)	0,966
karbontetrahlorid	0,907
nafta	0,755
ulje	(0,484-0,637)
voda	(0,419-0,479)
morska voda	(0,50-0,51)
glicerin	0,230
živa	0,038

TABLICA 3.

Vrednost za gasnu konstantu R , eksponent adijabate κ i specifične toplote c_p pri konstantnom pritisku za neke gasove		
R	κ	c_p
J/kg K		J/kg°C
ugljeni dioksid	1,30	820,61
kiseonik	1,40	916,91
vazduh	1,40	1004,83
azot	1,40	1038,33
metan	1,32	2160,39
helijum	1,66	5233,50
vodonik	1,41	14235,12

Zadaci

1. 0,3 m³ azota sabije se od temperature 50°C i pritiska 3,5 bar adijabatski na 0,06 m³. Odrediti temperaturu t₂ na kraju sabijanja i module stišljivosti ε₁ i ε₂ pre i posle sabijanja. EkspONENT adijabate K za azot iznosi K=1,4.

Rešenje. t₂ = 342°C; ε₁ = 490 Pa; ε₂ = 4664 Pa

2. Zapremina tehnosti se smanjila za 0,03 procenta, kad je pritisak porastao za 750 KPa. Naći modul stišljivosti tehnosti.

Rešenje. ε = 2500 MPa

3. Za koliko treba sniziti pritisak da bi se zapremina vode povećala za 2%? Koefficient stišljivosti vode je s = 4,7 · 10⁻¹⁰ Pa⁻¹

Odgovor. Δp = 42,55 MPa

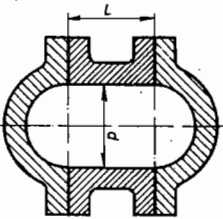
4. Valjčasti autoklav, prečnika d = 1 m i dužine L = 2 m ima poklopce oblika polulopte. Koliko bi vode trebalo dosuti da se pritisak u autoklavu poveća za 10 MPa? Koefficient stišljivosti vode s=0,42 GPa⁻¹

Promenu zapremine suda zanemariti.

Odgovor: V = 8,83 l

5. Najveća izmerena dubina mora je 10921 m (Batiškaf "Trst", ostrvo Gvam-Pacifik). Zabeleženi pritisak na toj dubini jeste 116,4 MPa. Ako je specifična masa vode na površini ρ₀ = 1 025 kg/m³, koliki je koefficient stišljivosti i gustina vode ρ₁ na dnu?

Odgovor. s=0,48 GPa⁻¹ ; ρ₁ = 1084 kg/m³



1.6. BRZINA ZVUKA

Mali poremećaji se rasprostiru kroz homogenu sredinu brzinom zvuka, koja se označava sa c [1]

$$c = \sqrt{\frac{dp}{dp}}$$

Ovde su dp i dp elementarne promene pritiska i gustine sredine kroz koju se prenosi zvučni talas.

Primeri

1. Odrediti izraz za brzinu zvuka ako se zvučni talas, koji je izazvan poremećajem uzastopne kompresije i ekspanzije, može smatrati: a) izentropskim i b) izotermnim.

Rešenje. a) Jednačina za izentropske promene stanja idealnog gasa glasi

$$pV^\kappa = \text{const.}$$

Otud se logaritmovanjem i diferenciranjem po p i v dobija

$$\frac{dp}{p} = \kappa \frac{dv}{v}$$

pa je $\frac{dp}{dp} = c^2 = \kappa \frac{p}{\rho}$

Idealni gas zadovoljava opštu jednačinu stanja p=ρRT (R-gasna konstanta, T-statička temperatura sredine kroz koju se zvuk prenosi) pa se može napisati da je brzina zvuka

$$c = \sqrt{\kappa RT}$$

b) Kad bi se stanja sredine kroz koju se zvuk rasprostire menjala po izotermi

$$pv = \text{const.}$$

onda bi se logaritmovanjem i diferenciranjem po p i v dobilo da je

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho} = \frac{P}{\rho}$$

$$c = \sqrt{RT}$$

tj.

U oba ova izraza za brzinu zvuka su pojedine veličine izražene jedinicama: c - brzina zvuka - u m/s, k - koeficijent izentropije - bez dimenzije, R - gasna konstanta - u J/Kg K i T - statička temperatura - u K.

2. Postaviti izraz za rasprostiranje zvučnog talasa kroz tečna i čvrsta tela.

Rešenje. Brzina zvuka može da se izrazi pomoću koeficijenta stišljivosti na sledeći način. Proširi se jednačina

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho} \quad \text{na} \quad c^2 = \frac{dP}{d\rho} \frac{\rho}{P}$$

Znajući ranije izvedeni izraz

$$s = \frac{d\rho}{dP} \frac{1}{\rho}$$

i zamenjujući ga u proširenu jednačinu dobija se

$$c^2 = \frac{1}{s\rho} = \frac{E}{\rho}$$

Otgledno je da brzina zvuka može poslužiti za merenje stišljivosti tela. Ukoliko je fluid stišljiviji utoliko je brzina zvuka manja, i obratno.

Za određivanje brzine prostiranja zvučnog talasa kroz čvrsta tela služi obrazac

$$c^2 = \frac{E}{\rho}$$

gde je E - modul elastičnosti - u Pa, a ρ - gustina sredine kroz koju se zvuk prenosi - u kg/m³.

3. Stišljivost fluida koji se kreće obično se ocenjuje prema Mahovom broju Ma koji pokazuje odnos brzine strujanja i lokalne brzine zvuka. Postaviti vezu između koeficijenta stišljivosti s i Mahovog broja Ma .

Rešenje. Ako se u Mahov broj

$$Ma = \frac{V}{c}$$

zameni brzina zvuka

$$c^2 = \frac{1}{s\rho}$$

lako se dobija rezultat

$$s = \frac{Ma^2}{\rho V^2}$$

Koeficijent stišljivosti je direktno srazmeran kvadratu Mahovog broja.

4. Po površini mora se zvuk prenosi brzinom $c_0 = 1428$ m/s. Na kojoj dubini H će brzina zvuka biti $c = 1400$ m/s?

Odgovor. Polazeći od

$$c^2 = \frac{1}{s\rho}$$

i zamenjujući

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - g s \rho_0 H}$$

postaje

$$c^2 = \frac{1 - g s \rho_0 H}{s \rho_0}$$

Tako se dođazi do zavisnosti između brzine zvuka i dubine mora

$$c^2 = \frac{1}{s \rho_0} - g H$$

otkud

$$H = \frac{c_0^2 - c^2}{g} = \frac{1428^2 - 1400^2}{9,81} = 8060 \text{ m}$$

Zadaci.

1. Kolikom se brzinom rasprostire zvuk kroz

- a) vazduh na temperaturi $t = 15^{\circ}\text{C}$
- b) živu $s = 0,038 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$
- c) vodu $s = 0,479 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$
- d) čelik $\rho = 7,85 \text{ kg/dm}^3$, $E = 2,06 \cdot 10^8 \text{ kPa}$.

- Odgovor. a) $c = 342 \text{ m/s}$; b) $c = 1360 \text{ m/s}$; c) $c = 1445 \text{ m/s}$
 d) $c = 5120 \text{ m/s}$

2. Koliko je puta vazduh ($\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$) stišljiviji od vode ako važe gornje vrednosti za brzinu zvuka c ?

Odgovor. $\frac{S_{\text{vaz}}}{S_{\text{vode}}} = 13838$

3. Brzina aviona na raznim visinama iznosi $0,8 \text{ Ma}$.

Sračunati brzine leta aviona na visinama

- a) $H = 10500 \text{ m}$ $t = -53,25^{\circ}\text{C}$
- b) $H = 500 \text{ m}$ $t = 11,75^{\circ}\text{C}$
- c) $H = 0 \text{ m}$ $t = 0^{\circ}\text{C}$.

- Rešenje. a) $v = 238,2 \text{ m/s} = 859,0 \text{ km/h}$;
 b) $v = 271,0 \text{ m/s} = 975,5 \text{ km/h}$; c) $v = 273,5 \text{ m/s} = 984,2 \text{ km/h}$

4. Vazduh 15°C i početnom pritisku $101,3 \text{ kPa}$ sabija se izentropski, tako da mu se zapremina smanji na polovinu. Izračunati pritisak i temperaturu na kraju sabijanja, i brzinu zvuka pre i posle sabijanja.

Rešenje. $p = 268 \text{ kPa}$; $t = 109^{\circ}\text{C}$; $c_0 = 342 \text{ m/s}$;
 $c = 390 \text{ m/s}$

1.7. VISKOZNOST

Viskoznost je prirodno svojstvo fluida zbog kojeg se u dodirnoj površini dva fluidna sloja proizvodi napon smicanja (tangenti). Prema Njutnu su naponi smicanja u dodirnim slojevima (latinski: laminae) jednaki

$$\tau = \eta \frac{\partial v}{\partial y}$$

gde je η - koeficijent dinamičke viskoznosti [$\text{Pa}\cdot\text{s}$] a $\partial v / \partial y$ - promena brzine v fluida po pravcu y normalnom na strujanje [$\frac{\text{m/s}}{\text{m}}$]. (Tangenti napon τ je tačno definisan u poglavlju 3.4).

Izraz $\nu = \eta / \rho$ [m^2/s] naziva se kinematička viskoznost. Eksperimentalno se viskoznost određuje viskozimetrom, a izražava stepenima Englera [$^{\circ}\text{E}$]. Kinematička viskoznost izražena u $^{\circ}\text{E}$ se preračunava u jedinicu cm^2/s po obrascu

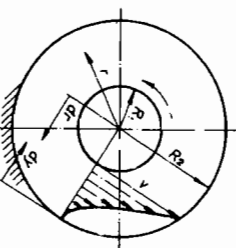
$$\nu = 0,0731^{\circ}\text{E} - \frac{0,0631}{^{\circ}\text{E}} \text{ [cm}^2/\text{s}]$$

Osnovna jednačina $\tau = \eta \partial v / \partial y$ važi samo za laminarna kretanja tzv. Njutnovskih fluida kod kojih je (prema jednacini) tangenti napon srazmeran gradijentu intenziteta brzine. U mirnom fluidu se tangenti naponi ne primećuju.

Primeri i zadaci ovog poglavlja pripadaju oblasti laminarnog viskoznog strujanja.

Primeri.

1. Cilindar poluprečnika $R_1 = 76,3 \text{ mm}$, i dužine $L = 610 \text{ mm}$, okreće se u nepomičnom cilindru iste dužine i poluprečnika $R_2 = 91,6 \text{ mm}$. Glicerini viskoznosti $\eta = 0,861 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ispunjava prostor između oba cilindra. Na unutrašnji cilindar prenosi se stalan obrtni moment $M = 0,35 \text{ Nm}$. Sraču-



nati gradijente intenziteta brzina na zidovima, broj obrtaja cilindra i utrošenu snagu usled fluidnog otpora.

Rešenje. Obrtni moment koji se preda je pokretnom cilindru prenosi se kroz sve slojeve fluida nepromenjen sve do spoljašnjeg cilindra, jer nema nikakve prepreke, u vidu čvrstog tela ili veštačkog poremećaja, koja bi na njega uticala. Tako, na omotaču valjka bilo kojeg poluprečnika između oba cilindra, deluje moment sile od smicajnog napona, koji je po intenzitetu isti kao i moment sa kojim se deluje na unutrašnji cilindar ali je suprotnog smera. Izjednačavanjem ova dva momenta dobija se veza između spoljašnjih i unutrašnjih sila koje deluju na fluid. Prvi je, dakle

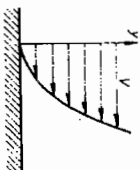
$$M = r(2\pi rL)r$$

$$\text{otkud } \tau = \frac{M}{2\pi r^2 L} = \frac{0,35}{6,28 \cdot 0,610r^2} = \frac{0,0914}{r^2}$$

S druge strane je Njutomovom jednačinom određena veza između tangencnog napona i gradijenta intenziteta brzine $\partial v / \partial y$ u vidu

$$\tau = \eta \frac{\partial v}{\partial y}$$

Osa Y označava, po dogovoru, pravac normalan na brzinu sa smerom u kojem rastu brzine v.



Ako se sa U_1 i U_2 označe brzine glicerina na zidovima cilindra onda se gradijenti intenziteta brzina U_1 i U_2 nalaze po obrascu

$$\tau = 0,861 \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{0,0914}{r^2}$$

$$\text{otkud } \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{0,106}{r^2}$$

$$\text{Tako je } \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{R_1} = \frac{0,106}{0,0763^2} = 18,21 \frac{\text{m/s}}{\text{m}}$$

$$i \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{R_2} = \frac{0,106}{0,0916^2} = 12,63 \frac{\text{m/s}}{\text{m}}$$

Obimska brzina manjeg cilindra nalazi se integraljenjem diferencijalne jednačine

$$\frac{dv}{dy} = \frac{0,106}{r^2}$$

gde diferencijal dy treba zameniti sa -dr jer brzine opadaju u tom pravcu.

$$\int_0^{U_1} dv = 0,106 \int_{R_2}^{R_1} r^{-2} dr$$

$$\text{sledj } U_1 = 0,106 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = 0,106 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$\text{s rezultatom } U_1 = 0,106 \left(\frac{1}{0,0763} - \frac{1}{0,0916} \right) = 0,232 \text{ m/s}$$

Unutrašnji cilindar se obrće na minutu

$$n = 30U_1 = \frac{30 \cdot 0,232}{3,14 \cdot 0,0763} = 29,1 \text{ puta}$$

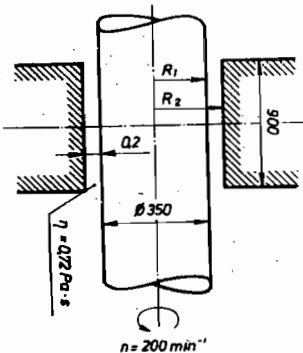
$$a \text{ tražena snaga je } P = M\omega = 0,35 \cdot 3,14 \cdot 29,1 / 30 = 1,066 \text{ W}$$

Od utrošene snage postaje toplota, i povećava se temperatura fluida. Zbog ovog se smanjuje viskoznost i da bi se stanje ustalilo morala bi se tečnost hladiti.

Gradijenti intenziteta brzina na zidovima cilindra omogućavaju da se nacrtu raspored brzina glicerina između oba cilindra (videti sliku).

2. Izračunati približnu

snagu utrošenu zbog savladivanja trenja u ležištu pokazanom na slici. Svi potrebni podaci su upisani na slici.



Rešenje. Snaga

$$P = M\omega = \frac{Mn}{30}$$

će se znati pošto se sračuna moment M .

$$M = r D r L \frac{D}{2} = r \left(\frac{0,35^2}{2} \right) 3,14 \cdot 0,9 = 0,173 r$$

Obimska brzina vratila je

$$U_1 = R_1 \frac{\omega}{30} = \frac{0,35 \cdot 3,14 \cdot 200}{30}$$

$$U_1 = 3,665 \text{ m/s}$$

Pretpostavljajući da se brzine između vratila i ležišta menjaju linearno zbog vrlo malog procepa, dobija se za gradijent intenziteta brzine na vratilu

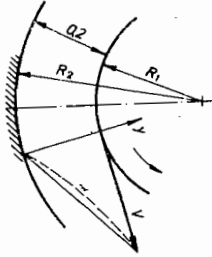
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{U_1}{R_2 - R_1} = \frac{3,665}{0,0002} = 18325 \frac{\text{m/s}}{\text{m}}$$

$$\text{Sa tim je } \tau = \eta \frac{\partial v}{\partial y} = 0,72 \cdot 18325 = 13194 \text{ Pa}$$

$$\text{pa moment } M = 0,173 \cdot 13194 = 2283 \text{ Nm}$$

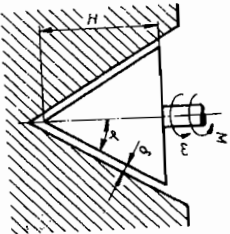
$$\text{Na kraju je snaga } P = 2283 \frac{3,14 \cdot 200}{30} = 47,8 \text{ kW}$$

Velik utrošak snage je posledica jake promene brzine po jedinici dužine što je prouzrokovano malim zazorom između vratila i posteljice ležišta.



3. Ulje viskoznosti η is-

punjava procep δ koji je vrlo mali pa se može uzeti da se gradijent brzine menja linearno. Količina je obrtni moment potreban da se telo oblika kuje okreće konstantnom ugaonom brzinom ω (podaci su dati uz sliku).



Odgovor. Momentna jednačina glasi

$$M = \int_0^H r dF$$

Ovde je $dF = r dA$ - elementarna sila trenja koja deluje na elementarnu površinu dA kuje. Rastojanje od ose obrtanja do težišta elementarne površine dA označeno je sa r .

$$\text{Dalje je } M = \int_0^H r r dA$$

zbog malog procepa δ može se uzeti da je $\partial v / \partial y = \omega r / \delta$ pa je tangenti napon

$$\tau = \eta \frac{\partial v}{\partial y} = \eta \frac{\omega r}{\delta}$$

Elementarna površina dA jednaka je

$$dA = \frac{2\pi r}{\cos \alpha} dh$$

$$\text{Tako je } M = \int_0^H \eta \frac{\omega r}{\delta} \frac{2\pi r}{\cos \alpha} dh = \frac{2\eta \omega \pi}{\cos \alpha} \int_0^H r^3 dh$$

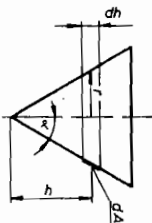
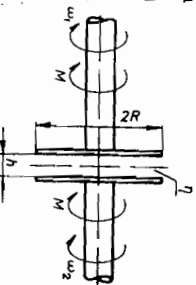
iz jednakosti $\text{tga} = r/h$ se izražava r i zamenjuje u izraz za M

$$M = \frac{2\eta \omega \pi}{\cos \alpha} \text{tga}^3 \int_0^H h^3 dh = \frac{2\eta \omega \pi \text{tga}^3}{15} H^4$$

$$M = \frac{\eta \omega \pi \text{tga}^3}{20 \cos \alpha} H^4$$

4. Pri konstantnim ugaonim

brzinama ω_1 i ω_2 ulje viskoznosti η (Teconst) prenosi obrtni moment M pomoću diskova prečnika $2R$. Za poznato i vrlo malo rastojanje između diskova h naći klizanje ($\omega_1 - \omega_2$).



Rešenje. $M = \int_0^R r df = \int_0^R r \tau da$

Tangentni napon se dobija pod pretpostavkom da se brzine menjaju linearno u procepu, tj

$$\tau = \eta \frac{\partial v}{\partial y} = \eta \frac{\omega_1 r - \omega_2 r}{h}$$

jer izraz $r(\omega_1 - \omega_2)$ predstavlja promenu brzine izmedju oba diska na istom poluprečniku r .

Dalje je

$$M = \eta \int_0^R \frac{\omega_1 - \omega_2}{h} r^2 2\pi r dr$$

ili

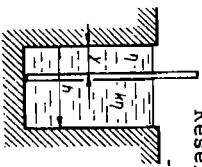
$$M = \eta \frac{\omega_1 - \omega_2}{h} 2\pi \int_0^R r^3 dr$$

$$M = \frac{1}{2} \eta \frac{\pi R^4}{h} (\omega_1 - \omega_2).$$

Rezultat glasi $\omega_1 - \omega_2 = \frac{2Mh}{\pi R^4}$.

Na drugo vratilo se prenosi isti obrtni moment ali ne i snaga. Snaga je manja zato što je $P_1 = M\omega_1$ i $P_2 = M\omega_2$. Razlika snaga $P_1 - P_2$ se utroši na savladjivanje trenja i prelazi u toplotu kojom se fluid zagreva.

5. Kroz vrlo uzan procep h , kreće se tanka ploča velikih dimenzija - konstantnom brzinom v . S jedne strane ploče je ulje viskoznosti η a sa druge strane ulje viskoznosti η_1 . Na kojem rastojanju od zidova bi trebalo postaviti ploču da bi se kretala uz najmanji otpor. Trenje ploče o dno procepa zanemariti.



Rešenje. Sila potiče od trenje ploče o razne fluide te je ravna zbiru

$$F = \tau_1 A + \tau_2 A = A(\tau_1 + \tau_2)$$

$$\text{Sa } \tau_1 = \eta \frac{\partial v}{\partial y} = \eta \frac{v}{y} \text{ i } \tau_2 = \eta_1 \frac{v}{H-y}$$

dobija se rešenje

$$F = Anv \left(\frac{1}{y} + \frac{k}{h-y} \right).$$

Uvodjenjem skraćenice f za konstantni proizvod Anv određiće se ekstremna vrednost sile otpora na poznati način izjednačavanjem prvog izvoda $dF/dy = 0$. Dakle je

$$\frac{dF}{dy} = f \left[-\frac{1}{y^2} + \frac{k}{(h-y)^2} \right] = 0$$

otkud

$$(k-1)y^2 + 2hy - h^2 = 0$$

s rešenjem za $k > 1$

$$y = \frac{h(\sqrt{k} - 1)}{k - 1}.$$

Da je ekstremalna vrednost minimum za $k > 1$ potvrđuje drugi izvod

$$\frac{d^2 F}{dy^2} = f \left[\frac{2}{y^3} + \frac{2k}{(h-y)^3} \right] > 0.$$

Zadaci

1. U jednoj tački viskozne struje gustine $\rho = 930 \text{ kg/m}^3$ zna se koliki je tangentni napon $\tau = 7 \text{ kPa}$ i gradijent intenziteta brzine $\partial v / \partial y = 600 \text{ m/s}$. Odrediti kinematičku viskoznost fluida.

Rešenje. $\nu = 0,0125 \text{ m}^2/\text{s}$

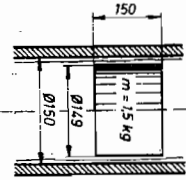
2. Koliki je gradijent intenziteta brzine na zidu cevi, i na rastojanjima $y_1 = 0,75 \text{ mm}$ i $y_2 = 1,5 \text{ mm}$ od zida, ako se brzine menjaju kao $v = 1,2y^2$, m/s ?

Odgovor. $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y_1} = 8,805 \frac{\text{m/s}}{\text{m}}$; $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y_2} = 6,990 \frac{\text{m/s}}{\text{m}}$
 $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$

3. Raspored brzine je određen izrazom $v = 5y + 10y^2$ (v u m/s ; y u m). Koliki je gradijent intenziteta brzine na podlozi (zidu) i na $0,02 \text{ m}$ od zida? Koliki je tangentni napon na zidu za "standardan vazduh" viskoznosti $\eta = 0,0174 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$?

Odgovor. $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y=0} = 5 \frac{\text{m/s}}{\text{m}}$; $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y=0,02} = 5,4 \frac{\text{m/s}}{\text{m}}$;

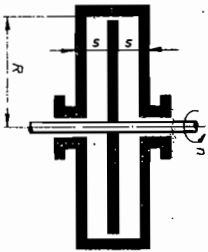
$\tau = 8,7 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$



4. Klip propada vertikalno kroz cilindar sa uljnim filmom konstantnom brzinom $v = 0,0457 \text{ m/s}$. Kolika bi bila približna viskoznost tog ulja? Podaci su dati sa slikom. Smatrači da se brzina ulja između zidova cilindra i klipa menja linearno.

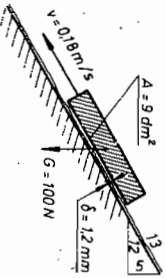
Odgovor. $\eta = 2,294 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

5. Tanak kolut (disk), prečnika 200 mm, nalazi se u okrugloj kutiji, dubokoj $2s = 2 \text{ mm}$, poluprečnika $R=100 \text{ mm}$. Kutija je napunjena uljem kinematičke viskoznosti $0,3 \text{ St}$ i gustine 800 kg/m^3 . Pretpostavljajući da se disk ustaljeno obrće 270 puta na minutu, i zanemarujući debljinu diska i vratila, traži se snaga koju kolut troši pri svojem obrtanju. Brzina fluida duž rastojanja koluta i poklopca menja se linearno.



Odgovor. $P = 6 \text{ W}$

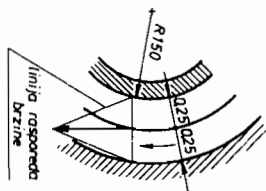
6. Sračunati približnu viskoznost ulja kada je poznata brzina klizanja ploče na sloju ulja niz strmu ravan. Podaci su dati na slici. Smatrači da je promena brzine između ravni i donje površine ploče linearna.



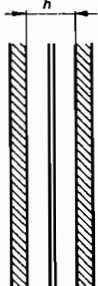
Rešenje. $\eta = 2,85 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

7. Za obrtanje tankog cilindra 30 puta na minutu između dva nepokretna cilindra potreban je moment od 4 Nm . Kolika je viskoznost ulja ako su cilindri dugački po 450 mm ?

Odgovor. $\eta = 16,61 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$



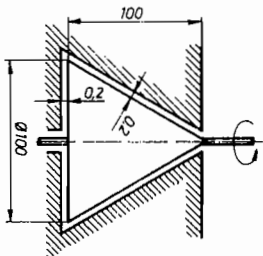
8. Tanka ploča velike površine kreće se sredinom i paralelno kroz procep širine $h=1 \text{ mm}$ konstantnom brzinom $v=0,35 \text{ m/s}$. Nad pločom se nalazi ulje nepoznate viskoznosti η a ispod ploče ulje upola manje viskoznosti. Srednji tangenti napon iznosi 24 Pa . Odrediti viskoznost ulja zanemarujući uticaj krajeva ploče. Računati da se brzina linearno menja po širini procepa.



Rešenje. $\eta = 22,86 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

9. Kupasto telo se obrće oko uzdužne ose konstantnom ugaonom brzinom 10 rad/s . Sloj ulja deo $0,02 \text{ cm}$ potpuno i ravnomerno opkoljava telo. Koliki se moment troši pri obrtanju znajući da je viskoznost ulja $\eta=1,95 \text{ P}$? Dimenzije tela su upisane na slici.

Odgovor. $M = 0,3078 \text{ Nm}$



1.8. PОВRŠINSKI NAPON, KAPILARNOST, NAPON PARE

Slobodni nivo mirne tečnosti ne ostaje horizontalan na mestu gde se dodiruje sa čvrstim zidom. Iz iskustva se, na primer, zna da se voda penje u staklenoj kapilarnoj cevčici (vrlo malog prečnika) iznad nivoa slobodne površine, i da obrazuje krivu površinu prema okolnom vazduhu. Uzrok deformisanju površine se pripisuje površinskim naponima. Njih ima i u svim površinama po kojima se dodiruju fluidi koji se međusobno ne mešaju.

U tehničkim sredinama je rastojanje između molekula mnogo manje nego kod gasova. Zbog toga je uzajamno dejstvo između molekula najvažniji faktor kod tečnosti. U površinskom sloju tečnosti manifestuje se nesimetričnost između molekularnih sila; na čestice tečnosti, koje se nalaze u tom sloju, deluju privlačne međumolekularne sile osatalog dela tečnosti. Posledica je veliki unutrašnji (molekularni) pritisak u površinskom sloju koji dostiže vrednosti i do jednog megapaskala. Ogromni unutrašnji pritisak je razlog male stišljivosti tečnosti tako da pod dejstvom vrlo velikog spoljašnjeg pritiska, čak i od nekoliko desetina megapaskala, gustina se praktično ne menja.

Tečnost u stanju stacionarne ravnoteže mora imati minimalnu potencijalnu energiju. Zbog toga svako tečno telo na koje ne deluju spoljašnje sile, mora imati takav oblik pri kome će površina njegovog omotača biti najmanja. Odnosno, za nestišljivu tečnost uslov stacionarne ravnoteže je minimalni količnik površine omotača i odgovarajuće zapremine. Poznato je da taj uslov zadovoljavaju tela sferičnog oblika.

Pri deformisanju slobodne površine (A) vrši se rad (W). Izvod

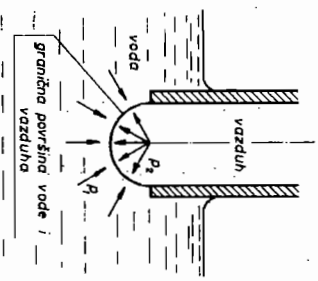
$$\frac{dW}{dA} = \gamma$$

naziva se jačinom površinskog napona ili koeficijentom

površinskog napona. Po dimenziji ovog napona N/m vidi se da predstavlja silu po jedinici dužine makakve linije na graničnoj površini. Zato je $\gamma = \text{const}$, za svaki linijski element površine, ali se dejstvo površinskog napona meri u pravcu upravnom na element linije, isto kao i pritisak. Površinski naponi proizvede na krivoj površini normalne napone čiji je pravac uvek uperen ka središtu poluprečnika krivine površine. Stoga mogu biti pozitivni (pritisak) ili negativni (zatezanje). Intenzitet normalnih napona računa se po obrascu

$$p_2 - p_1 = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

gde je p_1 - pritisak sa konveksne (ispupčene) strane granične površine.
 p_2 - pritisak sa konkavne (izdubljene) strane granične površine.

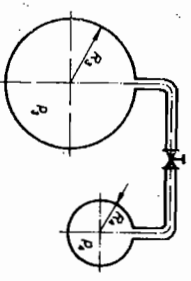


R_1 i R_2 - uzajamno normalni poluprečnici krivine granične površine.
 Za slobodnu površinu sfernog oblika važi

$$p_2 - p_1 = \frac{2\gamma}{R}$$

Primer

Jedan sapunični mehur ima dvaput veći poluprečnik od drugoga ($R_2 = 2R_1$). Koliki je odnos nadpritisaka u mehurčićima? Odrediti, zatim, nove pritiske i poluprečnike pošto se spoji unutrašnjost mehurčića.



Rešenje. Postoje, u stvari, dve granične površine sapunice sa vazduhom i to unutrašnja i spoljašnja. Opšta formula za određivanje normalnog napona $p_2 - p_1$ biće stoga

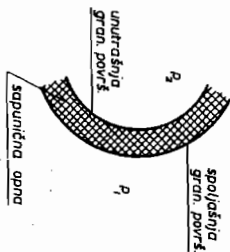
$$p_2 - p_1 = 4Y/R.$$

Kada se ova formula primeni za mehurice dobija se

$$p_3 - p_a = \frac{4Y}{R_3}$$

i

$$p_4 - p_a = \frac{4Y}{R_4} = \frac{4Y}{\frac{R_3}{2}}.$$



Njihovom deobom se određuje traženi odnos nadpritisaka vazduha u mehurićima

$$\frac{p_3 - p_a}{p_4 - p_a} = \frac{1}{2}.$$

Vidi se da je $p_4 > p_3$, pa će vazduh prelaziti iz manjeg mehurica u veći pošto se ventil otvori. Usled toga će poluprečnik R_4 rasti a R_3 se smanjivati dok se ne izjednače po veličini a tad su u njima i pritisci jednaki. Ovaj srednji pritisak $p - p_a$, i odgovarajući poluprečnik R ne mogu se odrediti iz jednačine koja važi za promenu gasnog stanja, jer promeni pritiska ne odgovara, zbog uticaja površinskog napona, promena zapremine prema jednačini stanja idealnih gasova. Srednji pritisak jednak je aritmetičkoj sredini

$$p - p_a = \frac{(p_3 - p_a) + (p_4 - p_a)}{2} = \frac{3}{2}(p_3 - p_a).$$

Poluprečnik R se određuje iz

$$p - p_a = 4Y/R$$

odnosno

$$R = \frac{4Y}{p - p_a} = \frac{4Y}{\frac{3}{2}(p_3 - p_a)} = \frac{2}{3} R_3.$$

Zadaci.

1. Koliki je pritisak u mehuru sapunice prečnika 5 cm ako je koeficijent površinskog napona $\gamma = 0,025 \text{ N/m}$?

Odgovor. $p_2 = p_a + 4 \text{ Pa}$

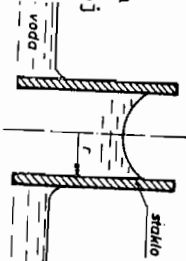
2. Koliki mora biti prečnik kapljice vode čiji je površinski napon $\gamma = 0,071 \text{ N/m}$ ako je natpritisak koji vlada u njoj 650 Pa?

Odgovor. $d = 0,44 \text{ mm}$

KAPILARNOST - Usled različitih intenziteta sila adhezije i kohezije nivo tečnosti u uzanim cevima (r<1 mm) može biti viši ili niži nego što odgovara zakonu o spojenim sudovima. Kapilarno izdizanje ili spuštanje nivoa tečnosti dovodi se u vezu s površinskim naponima.

Primeri.

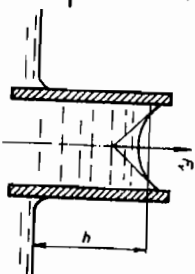
1. Na koliko bi se visinu popela voda usled kapilarnog dejstva u cevi od čistog stakla. Rezultat uporediti s onim što se dobija u slučaju kad se u srebrnoj cevi nalazi voda i kad je živa u staklenoj cevi istog prečnika. Ugao nagiba tečnosti prema zidu cevi jeste $\theta = 0^\circ$ za čisto staklo i vodu; $\theta = 90^\circ$ za srebro i vodu i $\theta = 140^\circ$ za staklo i živu.



Rešenje. Od površinskih napona duž linije $2\pi r$, dodira tečnosti sa cevi, postaje sila

$$F = 2\pi r \gamma.$$

Njena vertikalna komponenta se uravnotežava težinom stuba izdignute vode u kapilarnoj cevi. Ako se stub obeleži



sa h, diće

$$F_y = F \cos \theta = r^2 \pi h \rho g$$

odnosno

$$2r \pi h \cos \theta = r^2 \pi h \rho g$$

Rešena po h jednačina daje

$$h = \frac{2 \gamma \cos \theta}{r \rho g}$$

za vodu i staklo

$$h = \frac{2 \gamma}{r \rho g}$$

za vodu i srebro

$$h = 0$$

za živu i staklo

$$h = -0,766 \frac{2 \gamma}{r \rho g}$$

2. Pretpostavljajući da je granična površina tečnosti u kapilari konveksna, ili konkavna, sračunati visinu na koju se tečnost diže, ili spušta, u kapilari.

Rešenje. Uopšte je

$$P_2 - P_1 = 2\gamma/R$$

gde je: P_1 - pritisak sa izdatkijene strane ($P_2 + \rho g h$)

P_2 - pritisak sa izdatkijene strane razdelne površine

u u datom slučaju

$$P_2 - P_1 = \rho g h$$

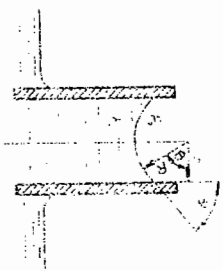
Δ - poluprečnik krivine vaskulne površine ($R = \frac{r}{\cos \theta}$)

Posle zamene u gornju jednačinu diće

$$P_2 - (P_1 + \rho g h) = \frac{2 \gamma \cos \theta}{R}$$

otkud

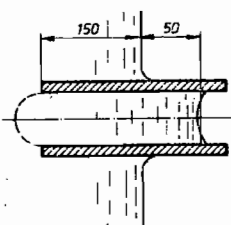
$$h = \frac{2 \gamma \cos \theta}{\rho g R}$$



Zadaci

1. Donji kraj kapilarne cevi

$r = 0,5$ mm završava se na dubini 150 mm ispod nivoa vode. U cevi se voda popodne za 5 cm iznad nivoa vode. Ugao dodira jednak je nuli. Naći pritisak vazduha koji je potreban da na donjem kraju cevi izazove vazdušni mehur oblika polulopte.



Rešenje. $p = 103287$ Pa

2. Sračunati površinski napon vode γ koja se u čistoj staklenoj kapilari ($r = 0,5$ mm) popela za $h = 29,2$ mm iznad horizontalnog slobodnog nivoa.

Rešenje. $\gamma = 0,0716$ N/m

3. Kolika je najveća visina na koju se popne voda između dve vertikalne (čiste) staklene ploče razmaknute za 1 mm? Koefficient površinskog napona je $\gamma = 0,07$ N/m.

Odgovor. $h = 14,27$ mm

4. Sračunati maksimalnu kapilarnu depresiju žive u staklenoj cevi poluprečnika 0,5 mm, ako je koefficient površinskog napona žive $\gamma = 0,52$ N/m.

Rešenje. $h = 11,94$ mm

NAPON PARE - P_K je onaj pritisak iznad nivoa tečnosti, pri kome se uspostavlja ravnotežno stanje između broja molekula tečnosti koji isparavaju i onih što se vraćaju u tečnost, i zavisi od temperature tečnosti. Ukoliko je pritisak u tečnosti manji od napona pare za tu tečnost, i na toj temperaturi, tečnost će intenzivno isparavati. Proizvedena para odlazi sa strujom tečnosti kroz cevovod,

što lako može dovesti do toga da se prekine tok tečnosti.

TABLICA 4.

Napon pare P_K vode i žive u [Pa]				
temp. [°C]	-40	-30	-20	-10
voda	-	-	-	-
živa	$2,3904 \cdot 10^{-4}$	$8,9271 \cdot 10^{-4}$	$2,9330 \cdot 10^{-3}$	$8,9778 \cdot 10^{-3}$
temp. [°C]	0	10	20	30
voda	610,4723	1227,744	2337,766	4242,775
živa	$2,5304 \cdot 10^{-2}$	$6,6273 \cdot 10^{-2}$	$1,6265 \cdot 10^{-1}$	$3,7343 \cdot 10^{-1}$
temp. [°C]	40	50	60	70
voda	7375,795	12333,43	19864,60	31156,88
živa	$8,1565 \cdot 10^{-1}$	1,6958	3,3677	6,4242
temp. [°C]	80	90	100	150
voda	47341,93	70094,32	101325	$475,952 \cdot 10^3$
živa	11,8188	21,0112	36,1697	369,029
temp. [°C]	200	250	300	350
voda	$155,504 \cdot 10^5$	$397,747 \cdot 10^5$	$859,140 \cdot 10^5$	$1286,41 \cdot 10^5$
živa	2282,44	9881,67	32870,04	$(330) \cdot 89631,03$

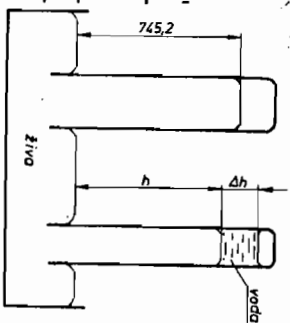
Zadaci:

1. U vertikalnom cilindru, prečnika $d = 30$ cm, koji je potpuno ispunjen vodom nalazi se dobro zaprtiven klip. Odrediti najmanju vertikalnu silu na klip koja će dozvoliti isparavanje vode temperature 32°C ($P_K = 4870$ Pa). Težinu klipa zanemariti. Atmosferski pritisak $p_a = 101325$ Pa.

Rešenje. $\uparrow F_z = 6817,73$ N

2. Za određivanje napona

para, pomoću pipete pušta se voda u pravu barometarsku cev koja se prethodno napuni živom. Kada je voda stigla u "Toricielijev vakuum" (do tada napunjen parama žive) nivo žive je pokazivao $h = 713$ mm a visina stuba vode nad živom je iznosila $\Delta h = 200$ mm. Atmosferski pritisak $p_a = 745,2$ mmHg. Pri temperaturi eksperimenta $t = 20^\circ\text{C}$ gustine vode i žive su $\rho_v = 998,2$ kg/m³ i $\rho_z = 13550$ kg/m³. Odrediti napon pare vode zanemarujući parcijalni pritisak živinih para.



Rešenje. $P_K = 2321,73$ Pa

1.9. UTICAJ TOPLIOTE

Zapremina nestišljive tečnosti menja se s temperaturom po obrascu

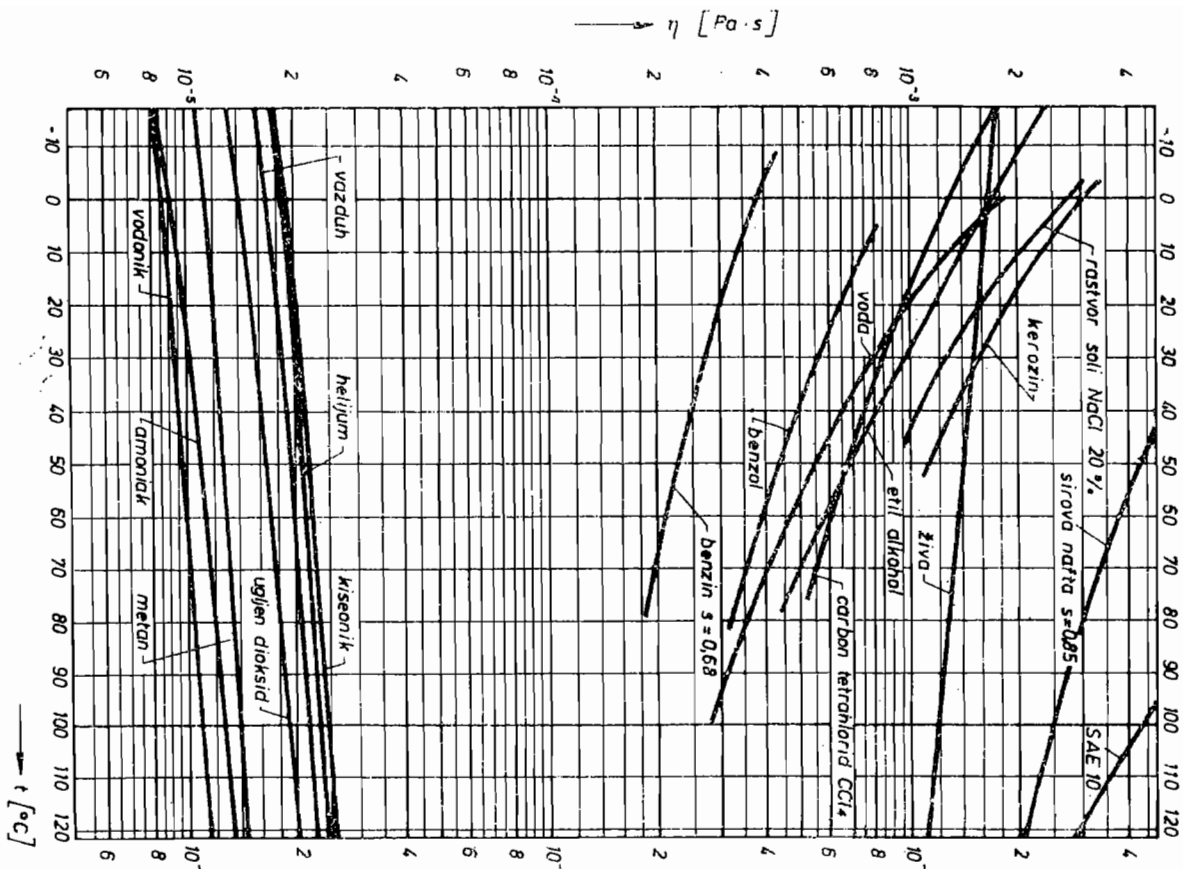
$$V_t = V_0 [1 + \beta(T - T_0)]$$

gde je V_0 - početna zapremina a β - koeficijent toplotnog širenja.

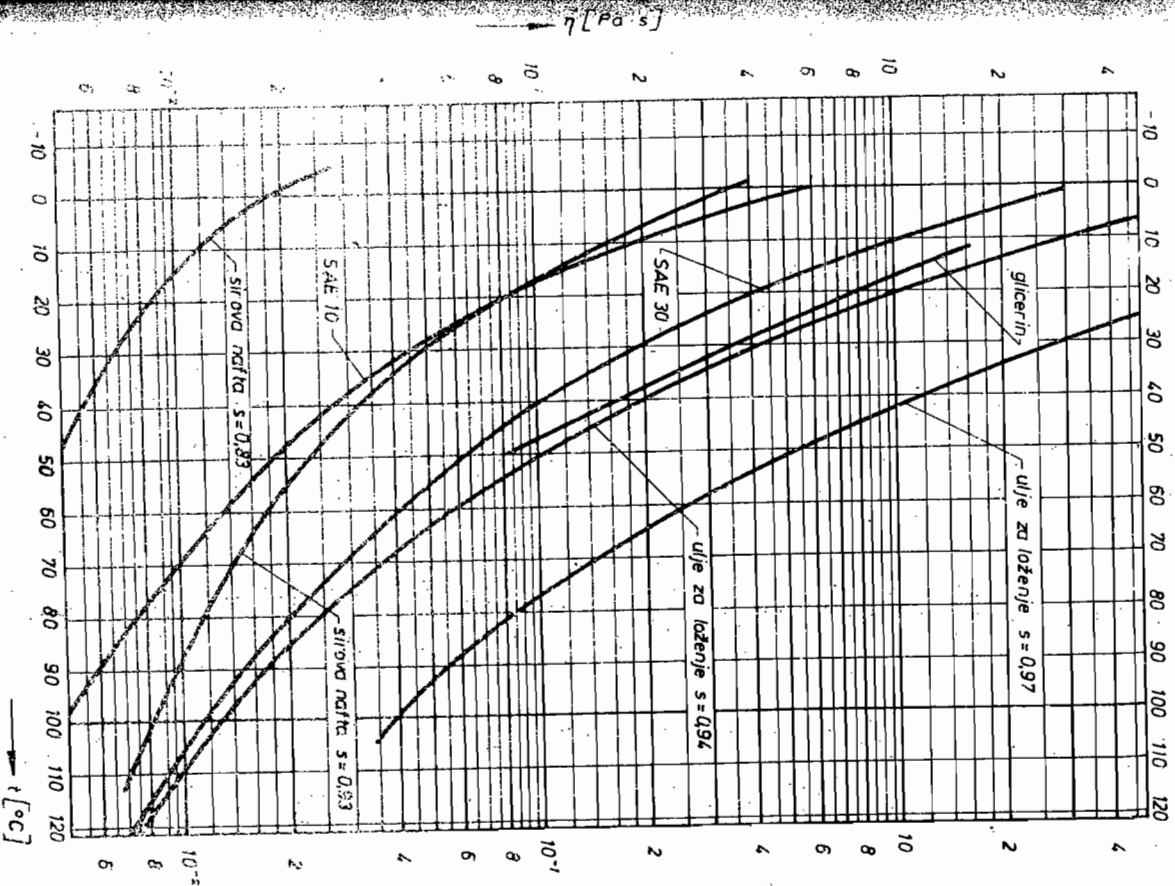
Za gustinu važi

$$\rho_t = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T - T_0)}$$

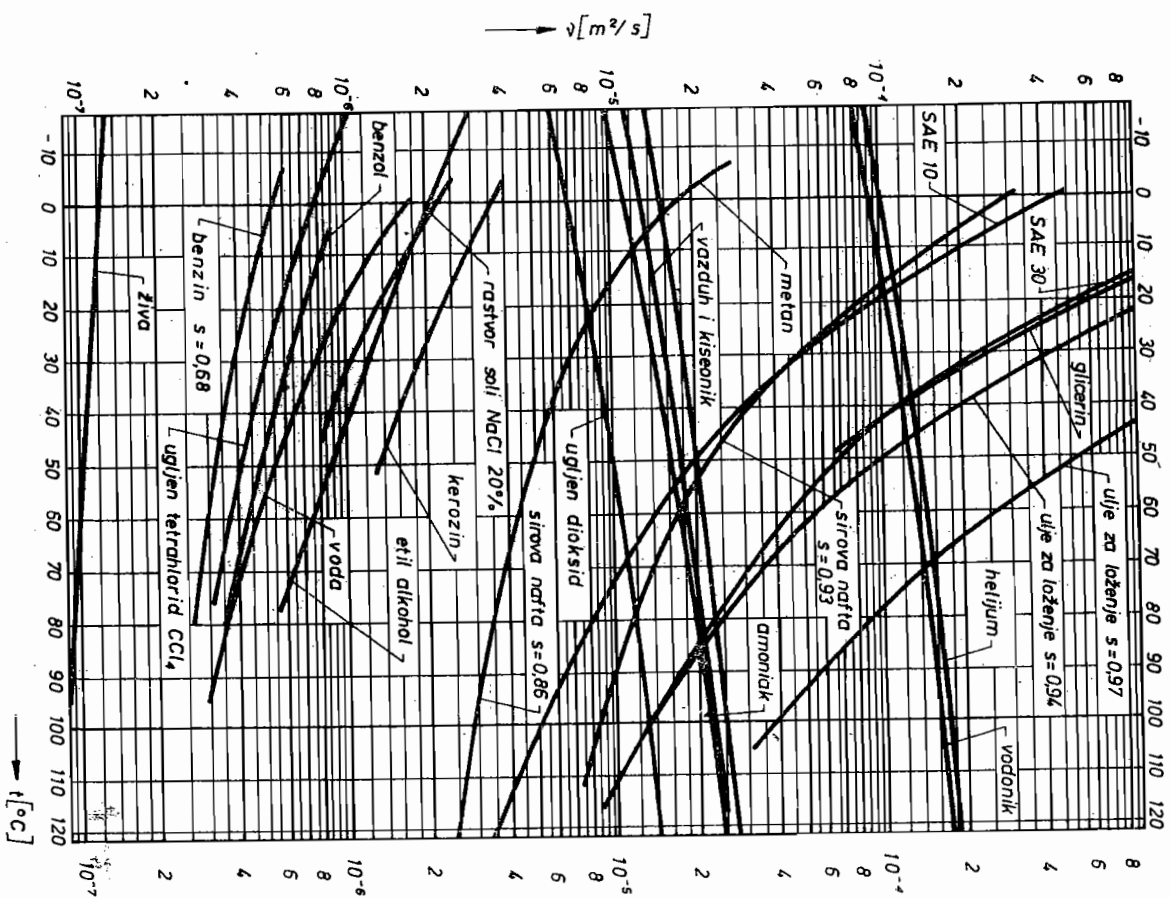
Viskoznost gasova raste a tečnosti opada s porastom temperature. Na dijagramima je data promena dinamičke viskoznosti η , kao i kinematičke viskoznosti ν , za neke tečnosti i gasove u funkciji temperature. Promena viskoznosti s temperaturom određuje se prema raznim eksperimentalnim formulama. Date su neke od njih za vazduh i vodu;



DIJAGRAM 1. Dinamička viskoznost u zavisnosti od temperature



DIJAGRAM 1a. Dinamička viskoznost u zavisnosti od temperature



DIJAGRAM 1b. Kinematička viskoznost u zavisnosti od temperature

Za vazduh $\eta = \eta_0 (1 + 0,00278 t)$

gde je t - temperatura u $^{\circ}\text{C}$ i $\eta_0 = 0,0172 \text{ cP}$ - viskoznost na 0°C .

Za vodu ($T \text{ K}$) $\nu = \frac{1,78 \cdot 10^{-6}}{1 + 0,0337 \cdot T + 0,00022T^2} \text{ m}^2/\text{s}$.

Zadatak.

Autoklav, zapremine $V_0 = 10 \text{ l}$ pun je vode i hermetički zatvoren. Za koliko se poveća pritisak kad se temperatura vode povisi za 40°C , ako je koeficijent toplotnog širenja vode $\beta = 0,00318 \text{ 1/}^{\circ}\text{C}$, a koeficijent širenja vazduha $\beta = 4,19 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$? Zanemariti promenu zapremine autoklava.

Odgovor. $\Delta p = 17183 \text{ kPa}$

1.10. MEĐUNARODNI STANDARDNA ATMOSFERA

Stanje atmosfere, vazdušnog omotača Zemlje određuje se pritiskom, temperaturom i gustinom vazduha na svakom mestu. Sve te veličine se menjaju u prilično velikim granicama jer zavise od mnogih faktora (geografske širine i dužine mesta, visine, godišnjeg doba, perioda dana itd.). Za praktične potrebe je važno da se zna, makar i približno, kako se menjaju osnovni parametri vazduha sa geodezijskom visinom. Tako je stvorena "Međunarodna standardna atmosfera" koja na najbolji način predstavlja stvarnu atmosferu.

U Međunarodnoj standardnoj atmosferi (MSA) visine se računaju iznad površine mora, a na samoj površini se utvrđuju sledeći normalni uslovi:

- atmosferski pritisak $p_0 = 101325 \text{ Pa}$ (760 mmHg)
- temperatura $T_0 = 288,15 \text{ K}$ ($t_0 = 15^{\circ}\text{C}$)
- gustina $\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$

Promena temperature od visine vazduha Medjunarodne standardne atmosfere određena je eksperimentalnim putem.

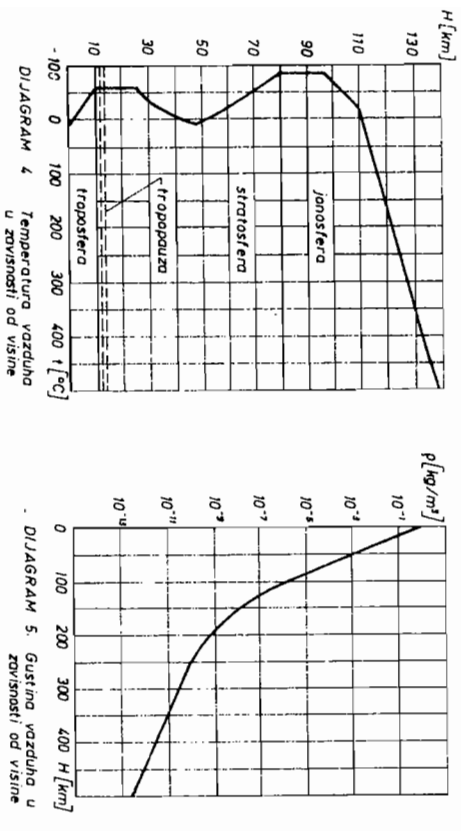
Za troposferu, (visina do 10 km) važi

$$t = 15 - 6,5 \cdot H [^{\circ}C]$$

gde je H - visina u km.

Za visinu od 11 do 25 km temperatura se smatra konstantnom i jednakom $T = 216,66 \text{ K} (-56,49 \text{ } ^{\circ}C)$.

Fizička svojstva Zemljinog vazdušnog omotača su vezana i za oblast mirovanja stišljivog fluida.



Primer.

Na morskoj površini je temperatura vazduha $t=15^{\circ}C$ a pritisak $P_0=101325 \text{ Pa}$. Koliki su pritisak i gustina na visini 2000 m, pretpostavljajući: a) da se temperatura vazduha ne menja, b) adijabatsku atmosferu, c) da temperatura vazduha opadne za svakih hiljadu metara visine za $6,5 \text{ } ^{\circ}C$? Uporediti rezultate sa podacima iz Medjunarodne standardne atmosfere.

Odgovor. a) Polazi se od diferencijalne jednačine za ravnotežu gasova u polju teže.

$$\frac{dP}{\rho} = -g dz \quad (\text{z-osa usmerena naviše})$$

ili

$$\int_0^1 \frac{dP}{\rho} = -g \int_0^1 dz \quad (\text{indeks 1 je vezan za 2000 m}).$$

Zavisnost gustine od pritiska se dobija iz jednačine promene idealnog gasa po izotermi

$$\frac{P_0}{P_0} = \frac{P}{P} \quad \text{tj.} \quad P = \frac{P_0}{P_0} P$$

zamena u integralu daje

$$\frac{P_0}{P_0} \int_0^1 \frac{dP}{P} = -g \int_0^1 dz$$

$$\text{odnosno} \quad \frac{P_0}{P_0} \ln \frac{P_1}{P_0} = -gH$$

$$\text{Odatle je} \quad P_1 = P_0 e^{\frac{P_0 g H}{P_0}}$$

$$P_1 = 101325 e^{-\frac{1,225}{101325} \cdot 9,81 \cdot 2000}$$

$$P_1 = 79941 \text{ Pa.}$$

Gustina ρ_1 se dobija iz jednačine gasnog stanja

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{80006}{287 \cdot 288} = 0,967 \text{ kg/m}^3.$$

b) Za adijabatsku promenu $\kappa=1,4$ slično ranijem

$$\int_0^1 \frac{dP}{\rho} = -g \int_0^1 dz$$

$$\frac{P_0}{\rho_0} = \frac{P}{\rho} \quad \text{tj. } \rho = \rho_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

zamena u integralu daje

$$\frac{P_0}{\rho_0} \frac{1}{\kappa} \int_0^H P_1^{\frac{1}{\kappa}} dP = -g \int_0^H dz$$

$$\frac{P_0}{\rho_0} \frac{1}{\kappa} \left[\frac{P_1^{\frac{1}{\kappa} + 1}}{\frac{1}{\kappa} + 1} \right]_{P_0}^{P_1} = -gH$$

odnosno

$$\frac{P_0}{\rho_0} \frac{1}{\kappa} \left[\frac{P_1^{\frac{1}{\kappa} + 1}}{\frac{1}{\kappa} + 1} - \frac{P_0^{\frac{1}{\kappa} + 1}}{\frac{1}{\kappa} + 1} \right] = -gH$$

zamenom ρ_0 iz jednadžine gasnog stanja

$$\rho_0 = \frac{P_0}{RT_0}$$

dobija se

$$\frac{1 - \kappa}{\kappa} \frac{P_0}{RT_0} \left[\frac{P_1^{\frac{1}{\kappa} + 1}}{\frac{1}{\kappa} + 1} - \frac{P_0^{\frac{1}{\kappa} + 1}}{\frac{1}{\kappa} + 1} \right] = -gH$$

Sredjivanje dovodi do $\frac{P_1}{P_0} \left[\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{\kappa} - 1} - 1 \right] = -gH$

$$\text{ili } \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{\kappa} - 1} = 1 - \frac{gH}{RT_0} \frac{\kappa}{\kappa - 1}$$

Najzad

$$P_1 = P_0 \left(1 - \frac{gH}{RT_0} \frac{\kappa}{\kappa - 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$

$$P_1 = 101325 \left(1 - \frac{1,4 - 1}{1,4} \frac{9,81 \cdot 2000}{287 \cdot 288}\right)^{\frac{1,4}{1,4 - 1}} = 79256 \text{ Pa}$$

Gustina ρ_1 se određuje iz jednadžine adijabatske promene $\kappa = 1,4$

$$\frac{P_0}{\rho_0} = \frac{P_1}{\rho} \quad \rho_1 = \rho_0 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = 1,225 \left(\frac{79256}{101325}\right)^{\frac{1}{1,4}} = 1,028 \text{ kg/m}^3$$

c) Pri postojanju temperaturnog gradijenta temperatura vazduha opada konstantno sa visinom i na 2000 m iznosi

$$T_1 = T_0 - \frac{6,5}{1000} H = 288 - \frac{6,5}{1000} 2000 = 275 \text{ K}$$

Gustina ρ može se izraziti preko visine z na sledeći način:

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{P}{R(T_0 - \alpha z)}$$

gde je $\alpha = \frac{6,5}{1000}$

Zamenom gustine u jednadžinu

$$\int_1^2 \frac{dP}{P} = -g \int_0^z dz$$

dobija se

$$R \int_{P_0}^{P_1} \frac{dP}{P} = -g \int_0^H \frac{dz}{(T_0 - \alpha z)}$$

ili

$$\ln \frac{P_1}{P_0} = \frac{g}{\alpha R} \ln \frac{T_0 - \alpha H}{T_0}$$

Odatle je

$$\frac{P_1}{P_0} = \left(\frac{T_0 - \alpha H}{T_0}\right)^{\frac{g}{\alpha R}}$$

i najzad

$$P_1 = P_0 \left(\frac{T_0 - \alpha H}{T_0}\right)^{\frac{g}{\alpha R}}$$

$$P_1 = 101325 \left(\frac{288 - \frac{6,5}{1000} 2000}{288}\right)^{\frac{9,81}{\frac{6,5}{1000} 287}} = 79449 \text{ Pa}$$

Iz izraza za gustinu nalazi se

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{79449}{287 \cdot 275} = 1,0066 \text{ kg/m}^3$$

Pritisak, gustina i temperatura na visini od 2000 m prema Međunarodnoj standardnoj atmosferi i dobijenim rezultatima glase

MSA	$p=79497,2$ Pa;	$\rho=1,007$ kg/m ³ ;	$T=275,14$ K
izoterma	$p=79941$ "	$\rho=0,967$ "	$T=288$ "
adijabatska promena	$p=79256$ "	$\rho=1,028$ "	$T=269$ "
promena sa temperaturskim gradijentom	$p=79449$ "	$\rho=1,0066$ "	$T=275$ "

Iz uporedjenja se vidi da promena sa temperaturnim gradijentom α odgovara MSA dok, pri izotermnoj promeni dolazi do najvećeg odstupanja, što se i moglo očekivati.

Zadaci.

1. Odrediti nadmorsku visinu mesta u kojem je barometrom izmeren pritisak 650 mmHg. Pritisak na morskome nivou je $P_0=101325$ Pa, gustina $\rho_0=1,225$ kg/m³. Rezultat odrediti u odnosu na adijabatske uslove $\kappa=1,4$.

Rešenje. $H = 1290,6$ m

2. Pred samo poletanje balona, u njegovu gondolu stavljen je termos s toplom vodom 65°C. Na nekoj visini voda u termosu proključa. Kolika je ta visina ako je na zemljinoj površini temperatura vazduha 10°C, i pritisak 760 mmHg? Smatrati da je promena stanja vazduha izoterma. Voda ključa na 65°C ako je pritisak 24938 Pa. Gasna konstanta vazduha je 287 J/kg K.

Odgovor. $H = 11610$ m

MEDJUNARODNA STANDARDNA ATMOSFERA (IZVOD)

TABLICA 5

visina H [m]	temperatura T [K]	barometarski pritisak p [Pa]	gustina ρ [kg/m ³]	$\Delta = \frac{\rho}{\rho_0}$	brzina zvuka c [m/s]	kinematič. viskoznost v [m ² /s]	ubrzanje zem. tež. g [m/s ²]
0	288,15	101324,73	1,2250	1,0000	340,28	1,4607·10 ⁻⁵	9,80665
1000	281,65	89872,53	1,1170	9,0751·10 ⁻¹	336,43	1,5812·10 ⁻⁵	9,80357
2000	275,14	79497,20	1,0066	8,2171·10 ⁻¹	332,52	1,7146·10 ⁻⁵	9,80049
3000	268,64	70125,03	9,0940·10 ⁻¹	7,4237·10 ⁻¹	328,56	1,8624·10 ⁻⁵	9,79742
4000	262,13	61656,05	8,1942·10 ⁻¹	6,6891·10 ⁻¹	324,56	2,0271·10 ⁻⁵	9,79435
5000	255,63	54045,15	7,3653·10 ⁻¹	6,0125·10 ⁻¹	320,51	2,2103·10 ⁻⁵	9,79128
6000	249,13	47212,89	6,6021·10 ⁻¹	5,3895·10 ⁻¹	316,41	2,4163·10 ⁻⁵	9,78820
7000	242,63	41097,50	5,9010·10 ⁻¹	4,8171·10 ⁻¹	312,25	2,6452·10 ⁻⁵	9,78514
8000	236,14	35647,97	5,2590·10 ⁻¹	4,2931·10 ⁻¹	308,05	2,9030·10 ⁻⁵	9,78207
9000	229,64	30782,91	4,6711·10 ⁻¹	3,8132·10 ⁻¹	303,78	3,1942·10 ⁻⁵	9,77900
10000	223,15	26490,57	4,1356·10 ⁻¹	3,3761·10 ⁻¹	299,45	3,5232·10 ⁻⁵	9,77594
11000	216,66	22689,53	3,6484·10 ⁻¹	2,9784·10 ⁻¹	295,07	3,8966·10 ⁻⁵	9,77287
12000	216,66	19390,59	3,1180·10 ⁻¹	2,5453·10 ⁻¹	295,07	4,5595·10 ⁻⁵	9,76981
13000	216,66	16572,17	2,6647·10 ⁻¹	2,1753·10 ⁻¹	295,07	5,3351·10 ⁻⁵	9,76675
14000	216,66	14163,67	2,2776·10 ⁻¹	1,8593·10 ⁻¹	295,07	6,2420·10 ⁻⁵	9,76369
15000	216,66	12107,23	1,9467·10 ⁻¹	1,5891·10 ⁻¹	295,07	7,3029·10 ⁻⁵	9,76063
16000	216,66	10347,92	1,6640·10 ⁻¹	1,3584·10 ⁻¹	295,07	8,5437·10 ⁻⁵	9,75758
17000	216,66	8845,47	1,4223·10 ⁻¹	1,1611·10 ⁻¹	295,07	9,9952·10 ⁻⁵	9,75452

MEDJUNARODNA STANDARDNA ATMOSFERA - nastavak

visina	tempe- ratura	barometarski pritisak	gustina		brzina zvuka	kinematična viskoznost	ubrzanje zem. tež.
H	T	p	ρ	$\Delta = \frac{\rho}{\rho_0}$	c	ν	g
[m]	[K]	[Pa]	[kg/m ³]		[m/s]	[m ² /s]	[m/s ²]
18000	216,66	7561,87	1,2159·10 ⁻¹	9,9257·10 ⁻²	295,07	1,1692·10 ⁻⁴	9,75146
19000	216,66	6467,07	1,0395·10 ⁻¹	8,4857·10 ⁻²	295,07	1,3676·10 ⁻⁴	9,74842
20000	216,66	5526,90	8,8870·10 ⁻²	7,2547·10 ⁻²	295,07	1,5997·10 ⁻⁴	9,74537
25000	216,66	2526,18	4,0621·10 ⁻²	3,3160·10 ⁻²	295,07	3,4998·10 ⁻⁴	9,73014
30000	230,35	1183,56	1,7901·10 ⁻²	1,4613·10 ⁻²	304,25	8,3565·10 ⁻⁴	9,71494
35000	244,01	580,2369	8,2841·10 ⁻³	6,7626·10 ⁻³	313,14	1,8929·10 ⁻³	9,69978
40000	257,66	295,8553	4,0003·10 ⁻³	3,2656·10 ⁻³	321,78	4,0956·10 ⁻³	9,68466
45000	271,28	156,4054	2,0086·10 ⁻³	1,6397·10 ⁻³	330,17	8,4977·10 ⁻³	9,66957
50000	274,00	84,5809	1,0754·10 ⁻³	8,7788·10 ⁻⁴	331,82	1,5997·10 ⁻²	9,65452
54000	274,00	51,7798	6,5835·10 ⁻⁴	5,3744·10 ⁻⁴	331,82	2,6130·10 ⁻²	9,64250
60000	253,40	24,1213	3,3162·10 ⁻⁴	2,7071·10 ⁻⁴	319,11	4,8749·10 ⁻²	9,62452
65000	236,26	12,1650	1,7937·10 ⁻⁴	1,4642·10 ⁻⁴	308,13	8,5151·10 ⁻²	9,60957
70000	219,15	5,8343	9,2747·10 ⁻⁵	7,5712·10 ⁻⁵	296,76	1,5475·10 ⁻¹	9,59466
75000	202,06	2,6383	4,5489·10 ⁻⁵	3,7135·10 ⁻⁵	284,95	2,9463·10 ⁻¹	9,57978
80000	185,00	1,1141	2,0979·10 ⁻⁵	1,7126·10 ⁻⁵	272,66	5,9202·10 ⁻¹	9,56494
85000	185,00	4,5302·10 ⁻¹	8,5303·10 ⁻⁶	6,9635·10 ⁻⁶	272,66	1,4560·10 ⁻²	9,55013
90000	185,00	1,8444·10 ⁻¹	3,4733·10 ⁻⁶	2,8354·10 ⁻⁶	272,66	3,5759·10 ⁻²	9,53536
95000	185,00	7,5203·10 ⁻²	1,4170·10 ⁻⁶	1,1567·10 ⁻⁶	-	-	9,52061
100000	209,22	3,2411·10 ⁻²	5,3993·10 ⁻⁷	4,4075·10 ⁻⁷	-	-	9,50591

48

- 49 -

1.11. KONTROLNA PITANJA

1. Kakve oblasti se proučavaju u mehanici fluida?
2. U čemu je razlika između tečnosti i gasova?
3. Šta je masa, a šta gustina tela?
4. Da li su gustina i specifična težina spregnute veličine?
5. Šta se naziva relativnom gustinom?
6. Kako glasi jednačina stanja idealnih gasova?
7. Kakvih ima promena stanja idealnih gasova?
8. Kakva je razlika u pogledu elastičnosti tečnosti i gasova?
9. Šta je brzina zvuka i kako se određuje?
10. U kakvoj je vezi brzina zvuka sa koeficijentom stišljivosti tela?
11. Šta je viskoznost?
12. Šta je površinski napon, a šta kapilarnost?
13. Šta je napon pare?
14. Šta su agregatna stanja vode i pod kakvim uslovima se mogu menjati?
15. Šta se podrazumeva pod koeficijentom temperaturnog širenja tečnosti ili gasova?
16. Kakvim se jedinicama izražavaju dinamička i kinematička viskoznost?
17. Šta je standardna atmosfera i koje su njene glavne karakteristike?
(Određiti netačan odgovor)
18. Očigledno je da tangencijalne sile
 - a) ne mogu nikada da se pojave kada je fluid u miru
 - b) mogu da se pojave, usled kohezije, i kada je fluid u miru
 - c) zavise od unutrašnje promene molekularnog kretanja
 - d) zavise od kohezivnih sila
 - e) nikad se ne javljaju u fluidu bez trenja, bez obzira na njegovo kretanje.

(Određiti tačan odgovor)

19. U izotermnom gasu
- a) pritisak se menja sa temperaturom
 - b) temperatura se menja direktno sa visinom
 - c) pritisak se menja linearno sa visinom
 - d) pritisak se menja inverzno sa kvadratom visine
 - e) pritisak se menja direktno sa gustinom.
20. Modul stišljivosti
- a) je nezavisan od temperature
 - b) povećava se sa porastom pritiska
 - c) ima dimenziju $1/p$
 - d) je veći ukoliko je fluid stišljiviji
 - e) ne zavisi od pritiska i viskoznosti.

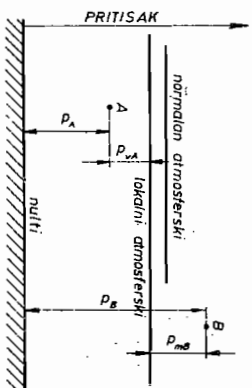
GLAVA 2 STATIKA FLUIDA

Zadaci ove oblasti rešavaju se pomoću jednačina koje opisuju ravnotežu fluida. Fluidi, kao i tela, su u ravnoteži kada je rezultanta spoljašnjih sila jednaka nuli i kada su momenti spoljašnjih sila za ma koju tačku jednaki nuli.

2.1. MERENJE PRITISKA

Zavisno od toga da li se pritisak meri od nule ili od atmosferskog pritiska razlikuju se:

- manometarski pritisak ili natpritisak
- vakuumetarski pritisak ili potpritisak
- apsolutni pritisak.



Zbir atmosferskog pritiska i natpritisaka ili razlika atmosferskog pritiska i vakuumetarskog pritiska jednaki su apsolutnom pritisku.

Pritisci se označavaju na sledeći način:

p_A, p_B - su apsolutni pritisci ili samo: pritisci u tačkama A i B,

p_{vA} - je vakuumetarski pritisak (potpritisak) u tački A,

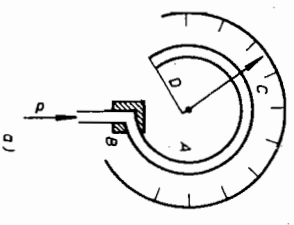
u tački A,

p_{mB} - je manometarski pritisak u tački B,

p_a - je atmosferski pritisak sredine u kojoj se nalaze tačke A i B, a zove se još i lokalni atmosferski pritisak ili barometarski pritisak,

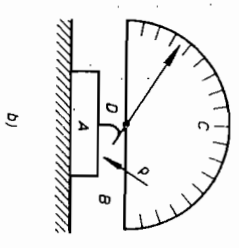
p_0 - je atmosferski pritisak pri normalnim atmosferskim uslovima ($p_0 = 101325 \text{ Pa}$).

Standardni mehanički instrumenti za merenje statičkog pritiska su manometar sa Burdonovom cevi (a) i aneroid-



ni barometar (b). Manometar sa Burdonovom cevi se sastoji iz tanke elastične cevi elipsastog oblika koja je učvršćena u tački B. Slobodan kraj povezan sa kazaljkom D. Usled dejstva pritiska fluida koji se uvodi u cev, cev teži da zauzme kružni oblik što se odražava na pokazivanje kazaljke. Kako sa spoljašnje strane cevi deluje obično atmosferski pritisak, to kazaljka pokazuje samo relativan pritisak odnosno natpritisak. Kazaljka je na nulatom podeoku kada su pritisci u cevi i oko nje jednaki.

Osnovni element aneroidnog barometra (v.sl. b) jeste kratak cilindar A sa elastičnom membranom B. U cilindru nema vazduha. Ako je oko-lni prostor takodje bez vazduha, onda kazaljka pokazuje nulu, što odgovara nulom apsolutnom pritisku. Pri svakom povećanju spoljašnjeg pritiska, kazaljka se pomera udesno (vidi sliku).

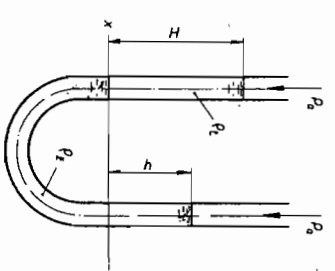


Instrumenti, kod kojih se pritisak meri stubom tečnosti su različite vrste U- cevi, pomoću kojih se određuje relativan pritisak, i dobro poznat živin barometar kojim se određuje apsolutni pritisak.

U unutrašnjosti homogenog fluida, koji miruje, pritisak se ne menja u tačkama iste horizontalne ravni. Zato se tečnost penje do iste visine u otvorenim kracima U- cevi, kada je cev postavljena u prostoru konstantnog pritiska (t.zv. "zakon o spojenim sudovima").

Važi i obrnuto, tj. istim visinama neke tečnosti, koja miruje u U cevi, odgovaraju isti pritisci i kad nisu oba tečna stuba iste visine.

Preporučuje se da se visine mere nad horizontalnom ravni (horizont) koja se provlači kroz nivo nižeg stuba tečnosti u U cevi. Na slici je horizont obeležen slovima x-x. U levom kraku se nalazi tečnost specifične težine $\rho_f g$ i visine H (m), a u desnom kraku je živa (koja se ne meša s tečnošću). Njen stub nad horizontom x-x visok je h (m), a specifična težina je $\rho_z g$. Neka je presekok levog kraka cevi $A_1 = \text{const.}$ i



desnog $A_2 = \text{const.}$ računajući po visini kraka. Nivo žive u levom kraku u U cevi trpi pritisak p od težine stuba tečnosti (H) i atmosferskog pritiska. Sila od pritiska jednaka je, naravno,

a uravnotežava se težinom stuba tečnosti $\rho_f g H A_1$ i silom atmosferskog pritiska $p_a A_1$. Jednačina za ravnotežu zahteva da je

$$p A_1 = \rho_f g H A_1 + p_a A_1 \quad (1)$$

$$p = \rho_f g H + p_a \quad (2)$$

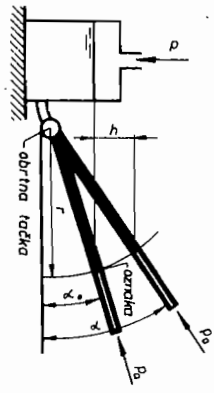
Slično ovom sledi jednačina za isti pritisak p na horizont x-x desnog kraka

$$p = \rho_z g h + p_a \quad (3)$$

Prvo se ističe da nije važno da li su presecci krakova U cevi jednaki ili ne, važno je da se presekok istog kraka ne menja. Jasno je da se pritisak p kod horizonta može sračunati bilo pomoću jednačine (2) bilo (3). Kad se jednačine (2) i (3) izjednače, što predstavlja jednačinu ravnoteže za tečnost u U cevi koja se praktično uvek upotrebljava, nalazi se odnos visina stubova različitih tečnosti

$$\frac{H}{h} = \frac{\rho_z}{\rho_f}$$

Princip ovakve metode (u pojedinim elementima je podudarna sa prethodnim pojmovima) se može objasniti pomoću crteža.

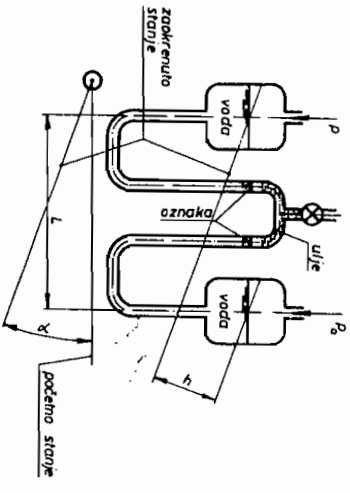


Kosa kapilarna cev može da se obrće oko nepokretne ose. U početnom položaju kojem odgovara ugao nagiba α_0 , nivo - fluida kojim se vrši merenje - poklapa se sa oznakom na cevi. Početni položaj odgovara trenutku kad atmosferski pritisak dejstvuje na nivo tečnosti u sudu i cevčici. Kad pritisak u sudu poraste, kapilarnu cev treba podizati dok se nivo tečnosti ne dovede ponovo do znaka na cevi. Ovom položaju odgovara ugao nagiba α koji se meri. Jednačina za ravnotežu glasi

$$p = p_a + \rho g h, \quad \text{sa} \quad h = r(\sin \alpha - \sin \alpha_0).$$

Definitivno je $p - p_a = \rho g r(\sin \alpha - \sin \alpha_0)$.

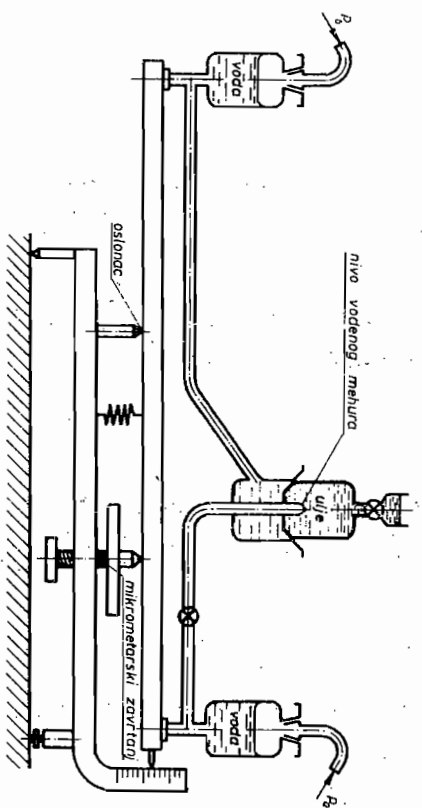
Razlika pritisaaka $p - p_a$ zavisi od kraka r koji, zbog zamearljive zapremine tečnosti u kapilarnoj cevi, može biti dovoljno velik. Prema ovom principu je napravljen vrlo osetljiv diferencijalni manometar. Šema takvog manometra se vidi na



slici. Na vodene površine u dva suda sa vodom dejstvuju različiti pritisci koji se prenose do obrnuto postavljene u cevi sa uljem. Za početni položaj ($p=p_a$) i položaj merenja ($p \neq p_a$) razdelnu površinu vode i ulja u cevi treba dovesti do crte označene na

cevi. Da bi se to učinilo mora se ceo instrument obrnuti oko nepokretne ose za neki ugao α u odnosu na početni položaj. Ugao α koji se čita, i poznata dužina L , omogućavaju da se odredi razlika pritisaaka $p - p_a$.

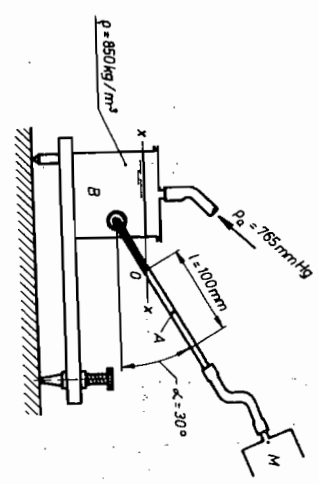
Potpuni instrument za merenje vrlo malih razlika pritisaaka ima dva suda s vodom i sud sa uljem, koji leže na horizontalnom postolju (v. sliku). Mikrometerskim zavrtanjem



postolje se može obrtiti u vertikalnoj ravni. U početnom položaju ($p_b = p_a$) se otvara slavina sa uljem i podesi se vodeni meniskus (razdelna površina vode i ulja) tako da bude na vrhu kapilarne cevi. Pri jačem pritisku p_b potiskuje se voda niže u kapilarnu cev. Da bi se vodeni mehur ponovo pojavio na vrhu kapilare treba mikrometerskim zavrtanjem podizati desni deo instrumenta. Položaj vodenog mehura se ocenjuje gledanjem kroz durbin. Razlika pritisaaka se čita na ugraivanoj skali u mm VS. Tačnost instrumenta je 1/1000 mmVS a mogu se izmeriti razlike pritisaaka od približno 20 mm VS.

5. Odrediti natpritisak p_{mm} gasa u rezervoaru M pomoću kombinovanog manometra na ulje ($\rho_u = 860 \text{ kg/m}^3$) i zivu ($\rho_z = 13600 \text{ kg/m}^3$). Kad se manometar priključi onda pritisak gasa donekle potisne nivo ulja niže u sud $D=20 \text{ mm}$

reda), čini se greška koja je često zanemarljivo mala.



2. Odrediti pritisak gasa u tački M pomoću diferencijalnog manometra s kosom cevi, i objasniti princip rada. (Diferencijalni manometar s kosom cevi služi za merenje malih razlika pritiska.)

Rešenje. Tečnost specifične težine ρg usuta je u merni sud B i u kosu cev do (nulte) oznake 0 na cevi. Posle spajanja kose cevi A s rezervoarom u kome vlada pritisak nivo tečnosti u cevi se pomeri za dužinu l . U sudu B spadne tečnost za neku malu vrednost koja se može zanemariti. Jednaka ravnoteže tečnosti za nivo u sudu i za nulti položaj tečnosti u cevi, dakle za nivo $x-x$ biće

$$P_a = P_M + \rho g l \sin \alpha$$

Oдавде је

$$P_{VM} = P_a - P_M = \rho g l \sin \alpha = 850 \cdot 9,81 \cdot 0,1 \cdot 0,5 = 417 \text{ Pa}$$

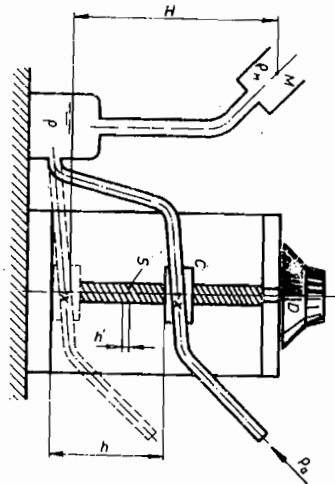
ili

$$P_M = P_a - P_{VM} = 101573 \text{ Pa}$$

Velikina suda sa tečnošću specifične težine ρg je takva da se pri svim merenjima nivo tečnosti u sudu B praktično ne menja. Upotreba kapilare sa potpuno istim unutrašnjim prečnikom smanjuje dimenzije suda i povećava tačnost čitanja. (Pri rešavanju je zanemarena visina gasnog stuba od tačke M do nivoa tečnosti).

3. Odrediti pritisak gasa u tački M pomoću mikro-manometra na alkohol. Opis rada: Po vrlo finom zavrtnju S

pomera se nosač C na kome je kosa staklena cev sa obeleženim mestom x. Kada je natpritisak u rezervoaru nula, onda se nosač C spusti u najniži položaj što je i za dugme D granični položaj. Nivo alkohola za taj početni položaj treba da je na obeleženom mestu x. Pri porastu pritiska nivo alkohola u kosoj cevi raste, pa da bi se on zadržao na mestu x potrebno je nosač C podizati. Kada se nivo alkohola dovede opet do mesta x onda broj obrtaja dugmeta D pomnožen visinom hoda zavrtnja S daje traženi natpritisak izražen visinom stuba alkohola. Obim dugmeta D je podeljen na 100 delova tako da je tačnost merenja 1/100 deo hoda zavrtnice, ukoliko je nivo alkohola u staklenoj cevčici moguće tačno poklopiti sa na cevčici označenim mestom x. Ovakvo precizan instrument se upotrebljava pri istraživačkim radovima.



$n = 20,53 \text{ obrt}$
 $h = 1 \text{ mm}$
 $H = 100 \text{ mm}$
 $\rho = 850 \text{ kg/m}^3$
 $\rho_M = 1,25 \text{ kg/m}^3$
 $P_0 = 101325 \text{ Pa}$

Rešenje. Jednaka ravnoteže tečnosti za nivo u rezervoaru i početni položaj x daje

$$P_M + H \rho_M g = P_0 + h \rho g$$

$$P_M = P_0 + h \rho g - H \rho_M g = 101325 + 20,53 \cdot 0,001 \cdot 850 \cdot 9,81 - 100 \cdot 1,1 \cdot 25 \cdot 9,81 = 101570 \text{ Pa}$$

ili

$$P_M = 101570 \text{ Pa}$$

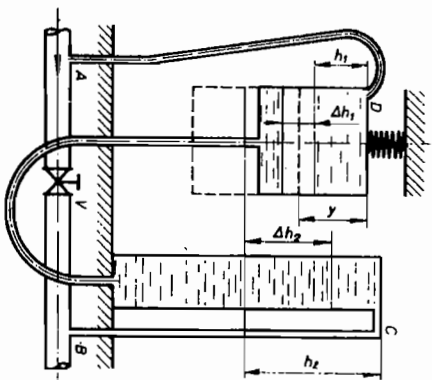
4. U vazdušnim tunelima za određivanje sporog vazdušnog strujanja potrebno je meriti male razlike pritiska, a u tu svrhu se koriste mikromanometri s "nultim čitanjem".

(Kao na slici)?

- b) Koliki teret nosi opruga F ?
- c) Da li će se ravnoteža pokvariti kad se pritvo-ri ventil V da statički pritisak u B bude $0.28p_{mA}$ stalnog pritiska $p_{mA}=1,5$ at u tački A. šta će se dešavati sa sudom 1 i tečnostima u njemu dok se ne uspostavi ravnoteža?
- d) Kakav će položaj imati sud 1 pošto se ravno-teža vrati ako u tom položaju sud 1 sadrži samo vodu?
- e) Koliki teret snosi opruga, i kolika je njezina krutost ako je sila opruge F jednaka cy, tj. srazmerna je promeni dužine (y) opruge?

Rešenje.

a) Pod statičkim pritiskom popela bi se voda iznad A kao i iznad B, na visinu $\frac{p_m}{\rho g}$ (ρ gustina vode). Kako se



razdelna površina vode i žive nalazi na istoj horizontalnoj površini očigledno je da se tečnosti u sistemu 1, 2 nalze u ravnoteži.

b) Opruga nosi samo težinu vode i žive u sudu 1. Dakle, prema slici jeste

$$G = \frac{d_1^2 \pi}{4} h_1 \rho g (1 + \frac{\rho_z}{\rho}) = \frac{0,1^2 \pi}{4} \cdot 3,14 \cdot 0,1 \cdot 9810 \cdot 1,4,6 = 112,43 \text{ N}.$$

c), d) Snižavanjem pritiska na nivo vode u sudu 2 kvvari se ravnoteža da će jači pritisak na nivo vode u sudu 1 potisnuti na niže deo vode i deo žive. Živa će pri tome prelaziti u sud 2. Ujedno se smanjuje malopredjašnji teret opruge, koja će podizati sud 1 (za visinu y).

Pošto se uspostavi ravnoteža među tečnostima mora pritisak na horizont x-x biti jednak i ispod suda 1 i ispod suda 2. Za proizvoljno snižavanje nivoa žive u sudu 1 (Δh_1) biće

$$p_{x-x} = p_{mA} - \rho g (h_D + y) + \rho g (h_1 + \Delta h_1) + \rho_z g (h_D + y - h_1 - \Delta h_1).$$

Natpritisak na nivou x-x ispod suda 2 biće

$$p_{x-x} = p_{mB} - \rho g h_C + \rho g (h_2 - \Delta h_2) + \rho_z g (h_2 + \Delta h_2)$$

ovde je Δh_2 povećanje nivoa žive u sudu 2 i srazmerno je sa

$$\Delta h_2 = \left(\frac{D}{D_2} \right)^2 \Delta h_1.$$

Zamenjujući sve poznate vrednosti izuzev Δh_1 , gornje dve jednačine se svode na

$$y = 6,72 - 63,0 \Delta h_1.$$

Kad voda zauzme celokupnu zapreminu suda 1 (uslovijeno zadatkom pod d), pomeranje suda 1 naviše biće

$$y = 6,72 - 63,0 h_1 = 0,42 \text{ m}.$$

e) Težina vode u sudu 1 iznosi

$$G = \frac{d^2 \pi}{4} 2h_1 \rho g = \frac{0,1^2 \cdot \pi \cdot 3,14}{4} \cdot 2 \cdot 0,1 \cdot 9810 = 15,4 \text{ N}.$$

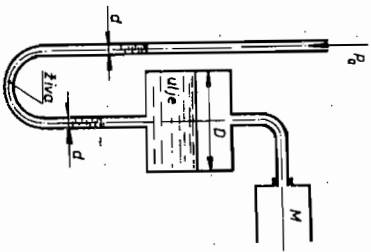
Krutost c opruge sledi iz jednačina:

$$112,43 = cy_1 \quad \text{i} \quad 15,4 = cy_2 \quad \text{stim što je}$$

$$y_1 - y_2 = 0,42 \text{ m} \quad c = \frac{112,43 - 15,4}{y_1 - y_2} = \frac{97,03}{0,42} = 231 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Zadaci.

1) Na rezervoar, napunjen benzinom ($\rho = 700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) do visine V_2 , priključena su tri različita instrumenta za merenje pritiska. Na vrhu rezervoara je manometar, pri dnu leve bočne strane je pijezometar i na desnoj strani postavljen



i živu u cevi $d = 4$ mm za 20 mm.

Rešenje. Raspoložive jednačine su: a) jednačina za ravnotežu u U cevi za krajnje stanje (osnovna jednačina)

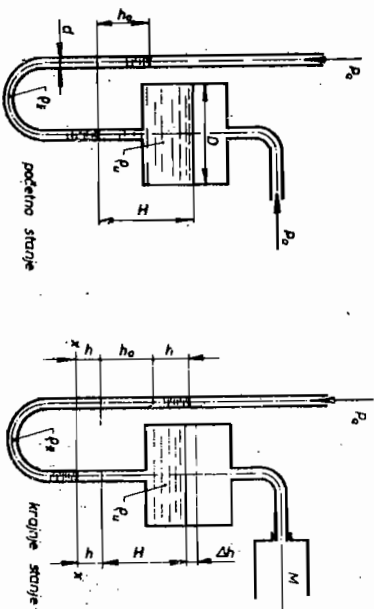
$$P_M + (H+h-Dh)\rho_u g = P_a + (h_0 + 2h)\rho_z g.$$

b) jednačina ravnoteže za U cev za početno stanje

$$P_a + h_0 \rho_z g = P_a + H \rho_u g;$$

c) Jednakost zapremine ulja koje je prešlo iz suda prečnika D u cev prečnika d

$$\Delta h \frac{D^2 \pi}{4} = h \frac{d^2 \pi}{4}.$$



Nepoznate veličine su P_M , h_0 , H , Δh ; međutim zamena jednačine (b) u jednačinu (a) eliminiše dve nepoznate h_0 i H , što znači da nije važno koliki će nivo žive biti u U cevi.

Jednačina (a) pre zamene jednačine (b)

$$P_M + P_a = (h_0 + 2h)\rho_z g - (H+h-Dh)\rho_u g$$

i posle zamene jednačine (b)

$$P_M + 2h\rho_z g - (h-Dh)\rho_u g = P_a$$

Iz jednačine (c) je

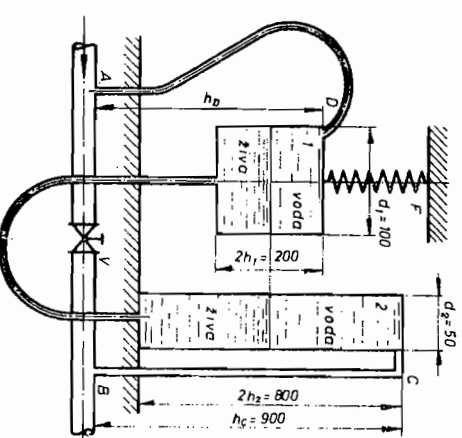
$$\Delta h = h \left(\frac{D}{d}\right)^2$$

tako da je konačno

$$P_M + h \left[2\rho_z g - \left[1 - \left(\frac{D}{d}\right)^2 \right] \rho_u g \right]$$

$$P_M = 0,02 \{ 2 \cdot 13600 \cdot 9,81 - [1 - \left(\frac{4}{20}\right)^2] 860 \cdot 9,81 \} = 5174,66 \text{ Pa.}$$

6. Širi ($d_1 = 100$ mm), a kraći ($2h_1 = 200$ mm) sud i uži ($d_2 = 50$ mm), ali duži ($2h_2 = 800$ mm) napunjeni su do polovine živom (Hg, 13,6 puta težom od iste zapremine vode) a potom vodom, do vrha (v.sliku). Sud 1 je pokretan jer se vezuje savitljivim cevima za sud 2 i za magistralnu vodovodnu cev AB; sud 2 stoji nepomično na podu, čija se ravan uzima za horizont x-x. Kroz cev AB teče voda, ali kad je ventil V potpuno otvoren

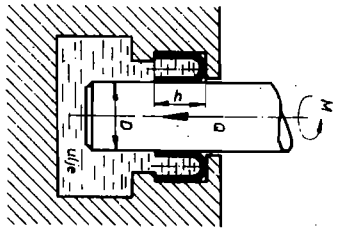


ventil V potpuno otvoren onda su statički pritisci u A i B cevi praktično isti. Pokretni sud 1 obešen je o oprugu (dinamometar) F.

Težinu sudova i savitljivih cevi s tečnošću u njima - zanemariti.

Pita se:

a) Da li se tečnosti u sistemu 1, 2 nalaze u ravnoteži kad se ventil V potpuno otvori a nivoi žive u oba suda leže na istoj horizontalnoj ravni



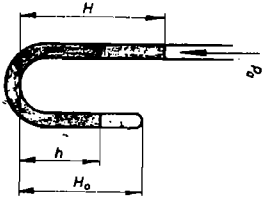
$D = 30 \text{ cm}$. Odrediti moment trenja M_t kojim hidraulična manžeta, visine $h = 0,2 D$, deluje na vratilo. Koefficient trenja kože o vratilo je $f = 0,2$. Koliki moment M_u deluje na vratilo?

Rešenje.

$$M_t = 2400 \text{ Nm} ; \quad M_u = 27400 \text{ Nm}$$

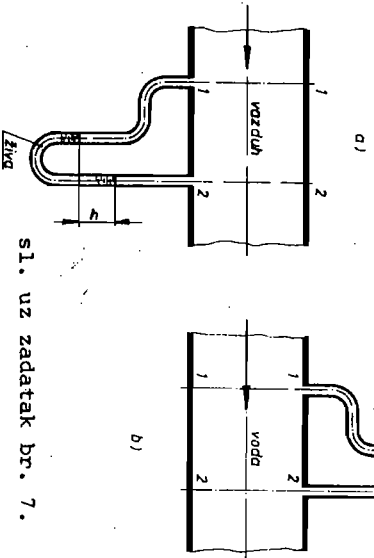
6. U vertikalno postavljenu,

nu, i s jedne strane zatvorenu U cev, usuta je živa. U kakvom su međusobnom odnosu visine H i h u kracima U cevi. Smatrati da se stanje vazduha u cevi menja po izotermi.



Rešenje.

$$P_a \frac{H}{\rho_0} - h = \rho_0 g (H-h)$$



sl. uz zadatak br. 7.

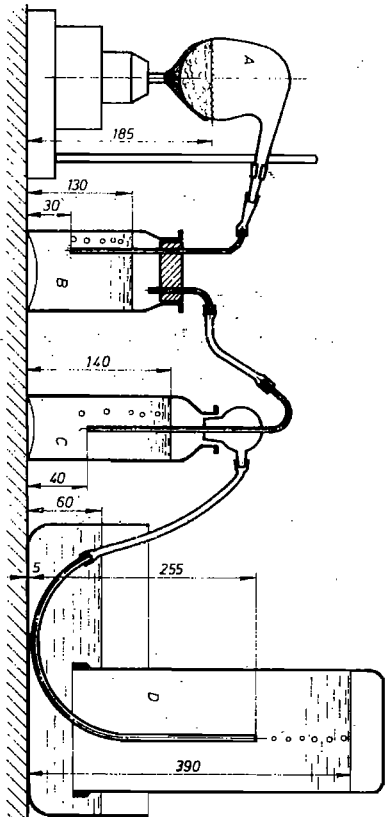
7. Odrediti razliku pritiska u presecima 1-1 i 2-2 cevi kroz koju struji fluid. Razliku pritiska računati prema razlici visina tečnosti u cevčicama diferencijalnog manometra koja iznosi $h = 100 \text{ mm}$, ako je diferencijalni manometar a) napunjen živom, b) iznad vode se nalazi vazduh.

Rešenje.

a) $P_1 - P_2 = 13342 \text{ Pa}$

b) $P_1 - P_2 = 981 \text{ Pa}$

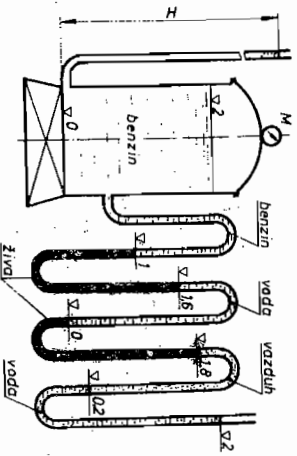
8. Usled hemijske reakcije, gas se izdvaja iz reortorte A i kreće se kroz sudove B i C, pune rastvora ($\rho_{rB} = 1,03$ i $\rho_{rC} = 1,05$), do zvona s vodom gde se skuplja. Odrediti pritiske u sudovima A, B, C i u skupljaču D za date dimenzije upisane na crtežu (mm). Zanimariti pad pritiska gasa pri strujanju kroz cevi.



Rešenje.

$$P_{vD} = 3280 \text{ Pa} ; \quad P_{vC} = 1960 \text{ Pa} ; \quad P_{vB} = 930 \text{ Pa} ;$$

$$P_{mA} = 78,5 \text{ Pa}$$

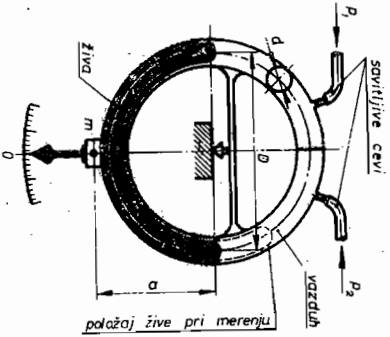


je tročlani U manometar sa živom
 $(\rho_z = 13600 \frac{kg}{m^3})$, vodom
 $(\rho_v = 1000 \frac{kg}{m^3})$ i vazduhom
 $(\rho_{vaz} = 0)$.

Šta će pokazati manometar M i jezometar H, kada se u tročlanom U manometru

niivoi tehnosti nalaze na visinama (izraženim u metrima) označenim na slici.

Rešenje. $M=315 \text{ kPa}$; $H=48 \text{ m}$

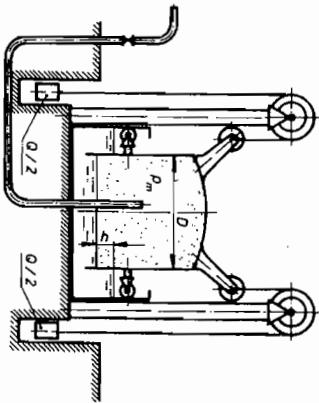


2. Sračunati ugao za koji će seokrenuti prstenasti manometar, prečnika cevi $d=20 \text{ mm}$ i prečnika prstena $D=200 \text{ mm}$, ako su pritisci vazduha u priključcima $P_1=90 \text{ kPa}$ i $P_2=80 \text{ kPa}$, a masa celokupnog instrumenta $m=0,533 \text{ kg}$ na kraku $a=120 \text{ mm}$.

Rešenje. $\phi=30^\circ$

3. Rezervoar za gas,

tankih zidova, prečnika $D=12,5 \text{ m}$ i težine $G=450 \text{ kN}$, napunjen je gasom za osvetljenje. Zanimajući trenje, odrediti težinu tegova Q koji su potrebni da bi se ostvario natpritisak gasa $P_m=2 \text{ kPa}$, obrazujući, pri tome, razliku nivoa h između vode u rezervoaru i u okolnom sudu. Koliki je maksimalni natpritisak P_m koji se može postići u rezervoaru za gas.



Rešenje. $Q=205 \text{ kN}$; $h=0,2 \text{ m}$; $P_m=3,67 \text{ kPa}$

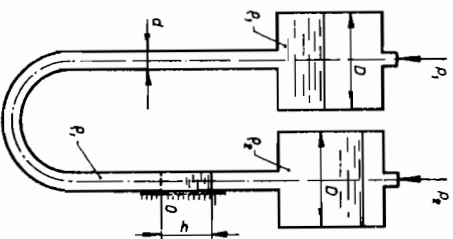
4. Precizan U manometar (pokazan na slici) sastoji se iz providne U cevi konstantnog prečnika $d = 5 \text{ mm}$. Cev se na krajevima širi u dva jednaka okrugla suda istog prečnika ($D = 50 \text{ mm}$). Dodirna površina tečnosti (koje se ne mešaju),

gustina - vodenog rastvora etil alkohola $\rho_1 = 870 \text{ kg/m}^3$ i kerosina $\rho_2 = 830 \text{ kg/m}^3$ - kojima su na punjeni sudovi - nalazi se u početku (kad je pritisak iznad slobodnih površina tečnosti u oba suda jednak atmosferskom pritisku) u crti 0 obeleženoj na desnom kraju U cevi. a) Odrediti zavisnost izmerene mikromanometarske razlike pritiska gasa ($\Delta P = P_1 - P_2$) i pomeranja dodirne površine tečnosti h . Odrediti ΔP za $h=280 \text{ mm}$. b) Pokazati koliko puta se smanjuje tačnost čitanja položaja nivoa, za isto ΔP , ako se U cev ne širi na krajevima.

Rešenje. a)

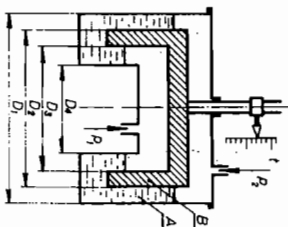
$$\Delta P = h[(\rho_1 - \rho_2)g + \frac{d^2}{D^2}(\rho_1 + \rho_2)g] ; \quad \Delta P = 157 \text{ Pa}$$

b) 30 puta



5. Vertikalno vratilo sa aksijalnim hidrauličnim ležištem nosi koristan moment $M = 25000 \text{ Nm}$. Vratilo trpi aksijalnu silu $Q = 100 \text{ kN}$. Prečnik rukavca vratila je

9. Instrument za merenje



naajući da su prečnici (v. sliku) $D_1=200$ mm, $D_2=180$ mm, $D_3=160$ mm, $D_4=140$ mm.

Primebda. Trebalo bi prvo označiti (za $p_1=p_2$) sa a dubinu plivanja zvana u živi. Nek se pod dejstvom raznih pritiska popne zvono za t , a nivo žive u zvonu spusti za x , dok se sa spoljašnje strane popne za y .

Rešenje se dobije pošto se postave sledeće tri jednačine:

a) jednačina za ravnotežu žive

$$p_1 = p_2 + \rho_z g(x+y)$$

b) jednačina za ravnotežu zvana

$$p_1 \frac{\pi D_3^2}{4} + [p_1 + \rho_z g(a-x-t)] \frac{\pi(D_2^2 - D_3^2)}{4} = G + p_2 \frac{\pi D_2^2}{4}$$

gde je $G = \rho_z g a \frac{\pi}{4} (D_2^2 - D_3^2)$ težina zvana,

c) jednačina za postojanost zapremine žive u instrumentu

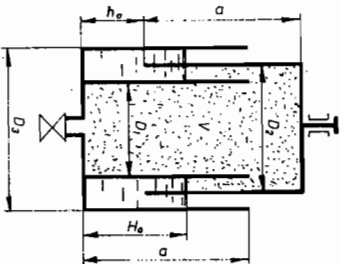
$$\frac{\pi(D_3^2 - D_4^2)}{4} x = \frac{\pi(D_2^2 - D_3^2)}{4} t + \frac{\pi(D_1^2 - D_2^2)}{4} y$$

Rešenje.

$$t = \frac{D_3^2 D_1^2 - D_2^2 D_4^2}{(D_1^2 - D_2^2)(D_2^2 - D_3^2)} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\rho_z g} = 2,8 \frac{p_1 - p_2}{\rho_z g}$$

10. Za proizvo-

djenje malih pritiska, koji su preko potrebni radi baždarenja mikromanometara, primenjuje se instrument pokazan na slici. Instrument se sastoji iz tri cilindra tankih zidova i jedne visine $a=250$ mm. Nepokretni cilindri prečnika $D_1=100$ mm i $D_3=200$ mm su koncentrični. Prostor između njih sve do nivoa H_0



je ispunjen vodom. Cilindar prečnika $D_2=150$ mm uvodi se u taj prostor okretanjem specijalnog zavrtnja, čime se menja izolovana zapremina vazduha V i pritisak p u njoj. Odrediti: a) koliki se najveći pritisak može ostvariti ovakvim uređajem, b) koliki bi trebalo da je početni nivo vode, H_0 , i početni položaj gornjeg cilindra, h_0 , da bi u tom položaju zapremina V bila na atmosferskom pritisku. Voditi računa da pri radu uređaja treba ostvariti maksimalno mogućni pritisak iz (a).

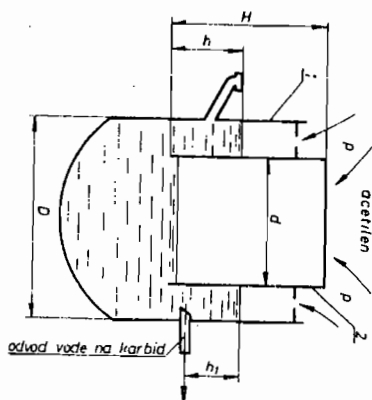
Primebda. 1) Najveći natpritisak se postiže kada je pokretni cilindar u krajnjem donjem položaju, a sva voda iz njega je istisnuta i nalazi se u pretenastom prostoru $D_3 - D_2$ koga sasvim ispunjava. 2) Promena zapremine vazduha V sledi zakon izoterme.

Rešenje. a) $p_m \max = \rho g a = 2,45$ kPa

b) $H_0 = a \frac{D_3^2 - D_2^2}{D_2^2 - D_1^2} = 146$ mm ; $h_0 = a \left(\frac{\rho g a}{p} + \frac{(D_3^2 - D_2^2)(D_2^2 - D_1^2)}{D_2^2(D_3^2 - D_1^2)} \right)$;

za $p_a = 100$ kPa je $h_0 = 87$ mm.

11. Automatski regulator generatora acetilena visokog pritiska isključuje dovod vode na karbid pri natpritisaku 1,5 at. Regulator je šematski prikazan na slici, a



sastoji se iz: 1. suda s vodom, ulivnim otvorom i odvodom vode ka karbidu, 2. nepokretnog zvana (pričvršćenog za sud). Acetilen (gas proizveden vezivanjem vode i karbida) napada površinu vode koja se nalazi između suda i zvana, kao i na površinu zvona. Karakteristične veličine predstavljene na slici date su za početno stanje ka-

da se još acetilen ne proizvodi, te su generator i regulator pod atmosferskim pritiskom. Odrediti prečnik D suda da bi pri natpritisaku 1,5 at voda prestala oticati ka karbidu. Smatrati da se vazduh sabija izotermijski. Podaci: $d=0,5$ m ; $H=0,7$ m ; $h=0,4$ m ; $h_1=0,3$ m ; $\rho_v=1000 \frac{kg}{m^3}$; $P_a=101,4$ kPa.

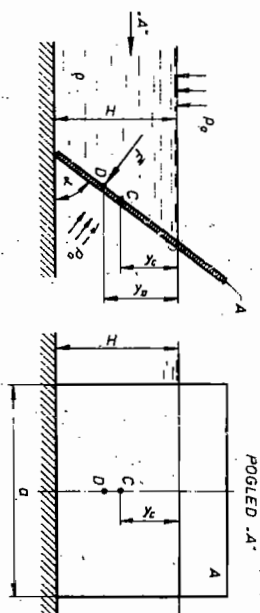
Rešenje. $D = 0,756$ m

2.2. PRITISAK TEČNOSTI NA RAVNU POKRŠTINE

Na površinu tela, potopljenih u tečnosti koja miruje, dejstvuju statički pritisci proizvođači konačnu silu. Kao vektor i ova sila je određena kad se zna njezin intenzitet, pravac, smer i napadna tačka. Ako se tečnost i telo dodiruju po ravnoj površini, onda se zna pravac i smer sile jer su pritisci uvek normalni na površinu, tako da je i sila normalna na površinu i usmerena ka površini. Tine se zadatak donekle olakšava.

Ravna, čvrsta ploča može razdvajati dve tečnosti nejednake gustine. U takvom slučaju, svaka strana ploče trpi nejednake pritiske, pa treba naći rezultatnu silu.

Intenzitet sile, koja potiče od pritiska mirne tečnosti na ravnu površinu A (v. sliku), jednaka je



$$F = P_C A = \rho g y_C A \quad [N]$$

gde je: $A = \frac{H}{\sin \alpha} a$ [m²] - ukupna površina koju kvasi tečnost;

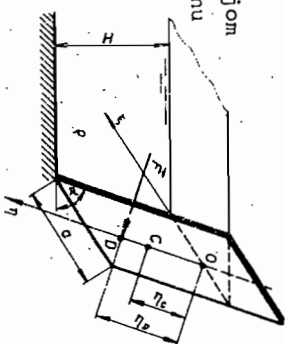
y_C [m] - vertikalno rastojanje težišta okvašene površine A od nivoa slobodne površine (slobodna površina je pod atmosferskim pritiskom);

ρ [kg/m³] - gustina tečnosti.

Napadna tačka sile kojom tečnost pritiskuje ravnu površinu određuje se prema formulama

$$\eta_D = \frac{I_{\xi}}{A n_C}$$

$$\xi_D = \frac{I_{\xi n}}{A n_C}$$



gde je: I_{ξ} [m⁴] - moment inercije okvašene površine prema osi ξ ;

$I_{\xi n}$ [m⁴] - centrifugalni moment inercije za ose ξ i n ;

η_C [m] - rastojanje po osi n do težišta C okvašene površine. Ose ξ, n leže na ravnoj površini. Ako površina ima osu simetrije onda bi osu n trebalo postaviti u osu simetrije. Koordinatni početak ξ, n postavljen je na slobodnoj površini. Napominje se da površina kojoj pripada koordinata

tni početak može biti u tečnosti ili iznad tečnosti što zavisi od veličine pritiska na razdelnoj površini tečnosti i gasa (primer 2). Kad je osa n ujedno i osa simetrije tada je $I_{\eta n} = 0$, pa se i napadna tačka D nalazi na osi simetrije ($\xi_D = 0$).

Napomena 1. Sila pritiska i njena napadna tačka se mogu naći i računajući projekcije sile u vertikalnom i horizontalnom pravcu. Dakle kao $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$. Komponenta F_x i njena napadna tačka se određuju prema

$$F_x = \rho g V_c A_x x$$

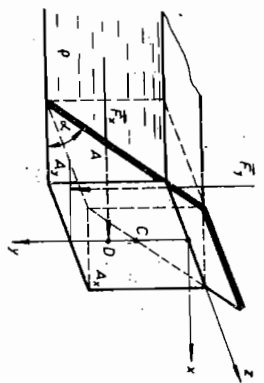
$$I_z = \frac{I_{yz}}{A_x V_c} ; z_D = \frac{I_{yz}}{A_x V_c}$$

gde je: A_x - projekcija ravne površine A na ravan normalnu na osi x ,

I_z - moment inercije površine A_x za osu z koja leži na slobodnoj površini,

I_{yz} - centrifugalni moment inercije za ose yz . Vertikalna komponenta sile, F_y ima intenzitet

$$F_y = \rho g V$$

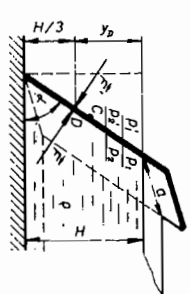


gde je $\rho g V$ težina zapremine V tečnosti iznad ravne površine do slobodne površine. Napadna tačka vertikalne sile (težine tečnosti) poklapa se s težištem zapremine tečnosti iznad ravne površine.

Napomena 2. Intenzitet sile pritiska i njezina napadna tačka se katkad lakše određuje preko dijagrama pritiska koji deluju na posmatranu ravnju površinu. Ovak način rešavanja zadataka izložen je u primeru 4.

Napomena 3. Ukoliko se tečnost nalazi ispod ravne

površine postupak oko određivanja vektora sile pritiska može se sprovesti na sledeći način. Ploča ispod koje se nalazi tečnost, ne nalazi se u ravnotežnom stanju. Uslov da ta ploča, čija se debljina zanemaruje, bude u ravnoteži biće ispunjen kada su pritisci jednaki u npramnom paru tačaka, sa gornje i donje strane ploče, na istoj horizontali. Taj



uslov će se postići kad se zamisli da se iznad ploče nalazi tečnost iste visine kao i ispod ploče. Tad je sila pritiska \vec{F} , koja deluje odozgo naniže (od te zamišljene tečnosti) jednaka - prema ranije datim izrazima

$$F' = \rho g V_c A = \rho g V_c a \frac{H}{\sin \alpha} \quad \text{sa} \quad y_D = \frac{2}{3} H$$

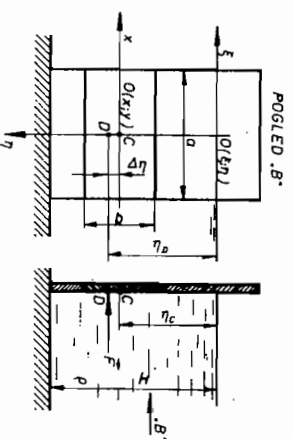
Ove vrednosti predstavljaju i intenzitet, i napadnu tačku, stvarne sile pritiska \vec{F} tečnosti samo što ova sila ima suprotan smer; dakle, odozdo naviše.

Napomena 4. Položaj napadne tačke se može odrediti i relativno prema težištu površine koju tečnost pritiskuje.

U slučaju prikazanom na slici određuje se mesto napadne tačke koja se nalazi ispod težišta površine. Površina na koju pritisak deluje označena je sa $A = ab$; sledi

$$\eta_D = \frac{I_{\xi}}{A \eta_c} = \frac{I_x + \eta^2 A}{A \eta_c} = \eta_c + \frac{I_x}{A \eta_c}$$

gde je:

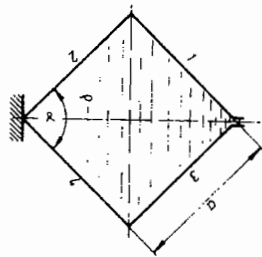


$$I_{n_c} = \frac{I_x}{A n_c} = \frac{b^3 a}{12 a b n} = \frac{1}{12} \frac{b^2}{n}$$

Kad se koristi ova formula treba obratiti pažnju na veličinu n_c - tj. na rastojanje težišta površine A od slobodne površine. (Voditi računa o definiciji slobodne površine.)

Primeri.

1. Sračunati moment kojim tečnost gustine ρ teži da deformiše prizemni ugao kocke α . Smatrati da na deformaciju ne utiču momenti od sila pritiska s prednje i sa zadnje strane kocke (strane 5 i 6 nisu označene na slici).



Rešenje. Rezultantni moment svih sila pritiska, koje djeluju na četiri strane kocke i zbog kojih se deformiše ugao α je

$$\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \vec{M}_4$$

Momenti \vec{M}_1 , \vec{M}_3 , kao i \vec{M}_2 i \vec{M}_4 su istog intenziteta i imaju suprotno dejstvo tako da je zbir njihovih ukupnih intenziteta - intenzitet momenta kojim voda djeluje na donju ivicu kocke

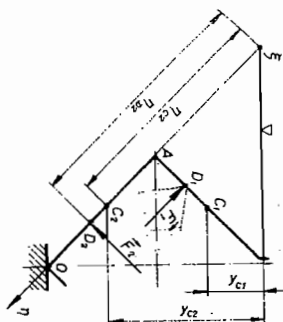
$$M_O = 2(M_1 + M_2)$$

Momenti M_1 i M_2 mogu se odrediti na jedan od sledećih načina:

a) Izvedene formule za određivanje intenziteta i napaadne tačke sila pritiska se koriste posebno za strane 1 i 2 kocke.

$$F_1 = \rho g V_{C_1} a^2 = \rho g \frac{a^2}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \rho g a^3$$

$$F_2 = \rho g V_{C_2} a^2 = \rho g (1 + \frac{1}{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} a^3 = \frac{3\sqrt{2}}{4} \rho g a^3$$



$$\overline{AD}_1 = \frac{1}{3} a$$

$$n_{D_2} = \frac{1}{A n_{C_2}}$$

I_G je moment inercije strane 2 za osu ξ koja je normalna na ravan crteža. Ovaj moment inercije je određen zbirom težišnog i dodatnog momenta inercije, odnosno

$$I_G = \frac{a^4}{12} + (\frac{2}{3}a)^2 a^2 = a^4 (\frac{1}{12} + \frac{4}{9}) = \frac{7}{3} a^4$$

Za n_{D_2} se dobija

$$n_{D_2} = \frac{\frac{7}{3} a^4}{a^2 \frac{3}{2} a} = \frac{14}{9} a$$

Kralj sile \vec{F}_2 za momentnu tačku O je $\overline{OD}_2 = 2a - \frac{14}{9}a = \frac{4}{9}a$.

Izrazi za intenzitete momenata \vec{M}_1 i \vec{M}_2 su dati sa

$$M_1 = F_1 \overline{AD}_1 = \frac{\rho g a^3 \sqrt{2}}{4} \frac{1}{3} a = \frac{\rho g a^4 \sqrt{2}}{12}$$

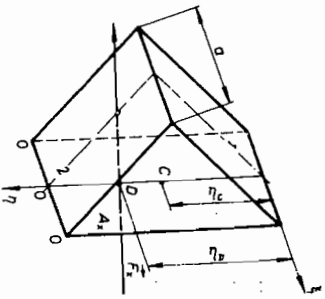
$$M_2 = F_2 \overline{OD}_2 = \frac{3}{4} \rho g a^3 \sqrt{2} \frac{4}{9} a = \frac{\rho g a^4 \sqrt{2}}{3}$$

Rezultantni moment

$$M_O = 2(M_1 + M_2) = \frac{2 \rho g a^4 \sqrt{2}}{3} (\frac{1}{4} + 1) = \frac{5}{6} \rho g a^4 \sqrt{2}$$

b) Određivanjem momenta horizontalne i vertikalne komponente sila pritiska na strane 1 i 2 kocke. Horizontalna sila pritiska tečnosti na površine 1 i 2 zajedno, je po veličini

$$F_x = \rho g V_{C_x} a = \rho g a \frac{\sqrt{2}}{2} 2a \frac{\sqrt{2}}{2} a = \rho g a^3$$



a njena napadna tačka

$$\eta_D = \frac{I_F}{A \cdot x^2} = \frac{\frac{a(a\sqrt{2})^3}{3}}{aa\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{3} a\sqrt{2}.$$

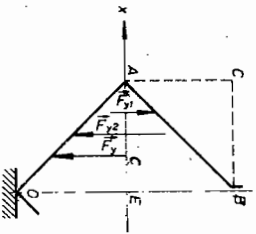
Krac sile \vec{F}_x za momentnu tačku

$$O \text{ je } \overline{ON} = \frac{1}{3} a\sqrt{2}.$$

Vertikalna sila \vec{F}_y se sastoji iz dve komponente: \vec{F}'_{y1} sile

koja deluje na stranu 1, i \vec{F}_{y2} sile koja deluje na stranu 2

kočke. Iznos sile \vec{F}'_{y1} jednak je težini zapremine tečnosti čija je osnova trougao ABC a visina \underline{a} . Intenzitet sile \vec{F}'_{y2} odgovara težini zapremine tečnosti čija je osnova OBCA a visina \underline{a} . Smer sile je označen na crtežu. Napadne tačke ovih komponenta prolaze kroz težište odgovarajućih osnova.



$$F_{y1} = \frac{1}{2} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \rho g \cdot \frac{1}{4} a^3 \cdot \rho \quad ; \quad F_{y2} = \frac{3}{4} a^3 \cdot \rho g$$

$$F_y = F_{y2} - F_{y1} = \frac{1}{2} a^3 \cdot \rho g$$

Rezultantna vertikalna sila na površine 1 i 2 jednaka je težini tečnosti između tih površina. Napadna tačka sile \vec{F}_y je u težištu površine AOB; tj. krak sile \vec{F}_y za momentnu tačku O jeste $\overline{OE} = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Izupan moment od vertikalnih i horizontalnih sila iznosi

$$M_0 = 2(F_x \overline{MD} + F_y \overline{CF}) = 2 \left(\rho g a^3 \frac{1}{3} a\sqrt{2} + \frac{1}{2} a^3 \rho g \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{5}{6} a^4 \rho g \sqrt{2}.$$

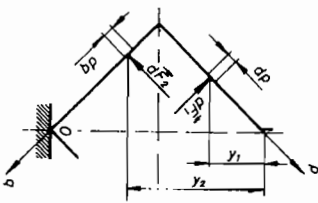
c) Postavljajući koordi-

natni sistem kako je pokazano na slici, problem se najjednostavnije rešava integraljenjem. Moment sile pritiska vode na površinu 1 je

$$M_1 = \int_0^a dF_1 \cdot p$$

odnosno

$$M_1 = \int_0^a \rho g y_1 dA_1 p = \int_0^a \rho g (a-p) \frac{\sqrt{2}}{2} a dp \cdot p = \frac{1}{12} \rho g a^4 \sqrt{2}$$



$$M_2 = \int_0^a \rho g y_2 (a-q) = \int_0^a \rho g y_2 dA_2 (a-q) = \int_0^a \rho g (a+q) \frac{\sqrt{2}}{2} a dq (a-q)$$

$$M_2 = \frac{\rho a \sqrt{2}}{2} a \int_0^a (a+q)(a-q) dq = \rho g \frac{\sqrt{2}}{2} a (a^3 - \frac{a^3}{3}) = \frac{4}{12} \rho g a^4 \sqrt{2}$$

Izupan moment

$$M_0 = 2(M_1 + M_2) = \frac{5}{6} \rho g a^4 \sqrt{2}.$$

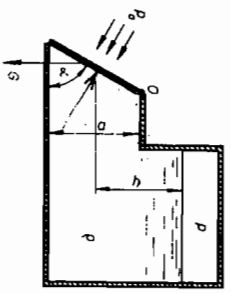
2) Kraj cevovoda kvadratnog preseka zatvara se teškim poklopcem koji se može obrtati oko svoje gornje ivice. Odrediti pritisak p , koji treba da vlada u prostoru iznad vodene površine rezervoara, da bi se poklopac pokrenuo. Podaci: težina poklopcu $G = 3600 \text{ N}$; $a = 6 \text{ dm}$; $\alpha = 60^\circ$; $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\gamma = 1,2 \text{ m}$.

Rešenje. Intenzitet sile koja pritiskuje poklopac

$$F = (p + \rho g h) \frac{a}{\sin \alpha}$$

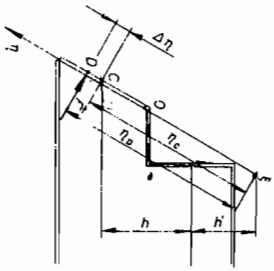
Napadna tačka se određuje prema pretpostavci da

je traženi pritisak p veći od atmosferskog pritiska tako da se nivo slobodne površine nalazi iznad nivoa vode za visinu $h' = \frac{p_m}{\rho g}$. Nek je p_m taj pretpostavljeni natpritisak, sledi



$$\Delta M_{Og} = \frac{1}{2} \frac{p_m}{\rho g} = M_C + \frac{1}{2} \frac{p_m}{\rho g}$$

$$M_C = \frac{\left(\frac{a}{\sin \alpha}\right)^3 \frac{a^2 + a^2 (h+h')^2}{12 \sin \alpha}}{a^2 \frac{h+h'}{\sin \alpha}} = \frac{a^2 (h+h')^2}{12 (h+h') \sin \alpha} + \frac{a^2}{12 (h+h') \sin \alpha}$$



Rezultantni moment sile pritiska vode na poklopac i težine poklopa za obrtnu tačku (osu) O- obrazuje jednačina

$$F(\Delta n + \frac{a}{2 \sin \alpha}) - G \frac{a}{2 \sin \alpha} = 0$$

$$tj. \quad \rho g (h+h') \frac{a^2}{\sin \alpha} \left[\frac{a^2}{12 (h+h') \sin \alpha} + \frac{a}{2 \sin \alpha} \right] - G \frac{a}{2 \sin \alpha} = 0$$

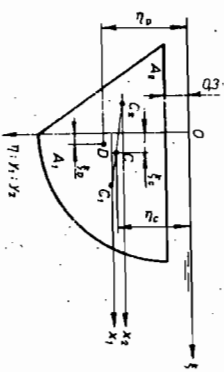
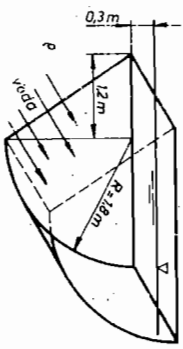
Odatle sledi

$$h+h' = \left(\frac{G \sin \alpha}{\rho g a^2} - \frac{a}{6} \right) ; \quad h' = -0,79 \text{ m}$$

Znak "-" znači da je pritisak manji od pretpostavljenog, tako da se iznad vodene površine nalazi prostor u kome vlada potpritisak $p_v = 0,79 \text{ mVS}$. Da je sračunati vakuumetarski pritisak bio veći od 0,9 mVS morala bi se potražiti sila pritiska zavisno i od spoljašnjeg- atmosferskog pritiska (sa odgovarajućom napadnom tačkom), jer bi nivo slobodne površine ležao ispod gornje ivice poklopa.

3. Odrediti ve-

ličinu, pravac i mesto dejstva sile kojom voda pritiskuje prednju stranu pontona pokazanoj na crtežu; gustina vode je $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.



Rešenje. Sila pritiska ima dve komponente: silu F_1 na ravan četvrtine kruga i silu F_2 na ravan trougla. Obe komponente su normalne na površinu. Površina četvrtine kruga (A_1) i trougla (A_2)

$$A_1 = \frac{1}{4} R^2 \pi = \frac{1}{4} 1,8^2 \cdot 3,14 = 2,5434 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2} 1,2R = 0,6 \cdot 1,8 = 1,08 \text{ m}^2.$$

Koordinate težišta C_1 i C_2 odgovarajućih površina A_1 i A_2 jesu:

$$C_1 - \xi_1 = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} = \frac{4}{3} \frac{1,8}{3,14} = 0,764 \text{ m}$$

$$\eta_1 = 0,3 + \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} = 1,064 \text{ m}$$

$$C_2 - \xi_2 = -\frac{1}{3} 1,2 = -0,4 \text{ m}$$

$$\eta_2 = 0,3 + \frac{1}{3} R = 0,3 + \frac{1,8}{3} = 0,9 \text{ m}.$$

Sile pritiska F_1 i F_2 su redom

$$F_1 = \rho g \eta_1 A_1 = 1000 \cdot 9,81 \cdot 1,064 \cdot 2,5434 = 26547,6 \text{ N}$$

$$F_2 = \rho g \eta_2 A_2 = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,9 \cdot 1,08 = 9535,3 \text{ N}.$$

Rezultantna sila jednaka je

$$F = F_1 + F_2 = 26547,6 + 9535,3 = 36082,9 \text{ N}$$

Težište cele površine $A = A_1 + A_2$ ima koordinate

$$\xi_C = \frac{\sum \xi_i A_i}{\sum A_i} = \frac{\xi_1 A_1 + \xi_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0,764 \cdot 2,5434 + 0,4 \cdot 1,08}{2,5434 + 1,08} = 0,417 \text{ m}$$

i

$$\eta_C = \frac{\sum \eta_i A_i}{\sum A_i} = \frac{\eta_1 A_1 + \eta_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{1,064 \cdot 2,5434 + 0,9 \cdot 1,08}{2,5434 + 1,08} = 1,015 \text{ m}$$

$$A = A_1 + A_2 = 2,5434 + 1,08 = 3,6234 \text{ m}^2$$

Napadna tačka (D) rezultantne sile pritiska vode $F = F_1 + F_2$ na površinu A određuje se prema ranije datim izrazima

$$\xi_D = \frac{I_{\xi n}}{A \eta_C} \quad i \quad \eta_D = \frac{I_{\eta}}{A \eta_C}$$

Sledi

$$I_{\xi n} = I_{\xi n}'' + I_{\eta n}''$$

$$I_{\xi n}'' = \int_{0,3}^{2,1} \int_{0,3}^{3,15} \xi n d\xi d\eta = \int_{0,3}^{2,1} \left[\frac{\xi^2 n}{2} \right]_{0,3}^{3,15} d\eta = \int_{0,3}^{2,1} n \left(\frac{3,15^2 - 0,3^2}{2} \right) d\eta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0,3}^{2,1} (3,15n - n^3 + 0,6n^2) d\eta = \frac{1}{2} \left(3,15 \frac{n^2}{2} - \frac{n^4}{4} + 0,6 \frac{n^3}{3} \right) \Big|_{0,3}^{2,1}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{3,15}{2} (2,1^2 - 0,3^2) - \frac{1}{4} (2,1^4 - 0,3^4) + \frac{0,6}{3} (2,1^3 - 0,3^3) \right] = 1,9 \text{ m}^4$$

$$I_{\eta n}'' = - \int_{0,3}^{2,1} \int_{0,3}^{3,15} \eta n d\xi d\eta = - \int_{0,3}^{2,1} \left[\frac{\eta^2 n}{2} \right]_{0,3}^{3,15} d\eta = - \frac{1}{2} \int_{0,3}^{2,1} n (\eta^2 - 0,9) d\eta$$

$$= - \frac{1}{2} \int_{0,3}^{2,1} n^3 d\eta + \frac{4,2}{2} \int_{0,3}^{2,1} n^2 d\eta - \frac{4,2 \cdot 41}{2} \int_{0,3}^{2,1} n d\eta =$$

$$= -1,08 + 2,8728 - 2,1168 = -0,324 \text{ m}^4$$

i

$$I_{\xi} = I_{x_1} + \eta_1^2 A_1 + I_{x_2} + \eta_2^2 A_2 =$$

$$= 0,0549 \cdot 1,8^4 + 1,064^2 \cdot 2,5434 + \frac{1}{36} 1,2 \cdot 1,8^3 + 0,9^2 \cdot 1,08 = 0,5763 + 2,8794 + 0,1944 + 0,8748 = 4,5249 \text{ m}^4$$

Sada je

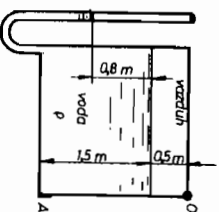
$$\xi_D = \frac{I_{\xi n}}{A \eta_C} = \frac{0,7452}{3,6234 \cdot 1,015} = 0,203 \text{ m}$$

$$\eta_D = \frac{I_{\eta}}{A \eta_C} = \frac{4,5249}{3,6234 \cdot 1,015} = 1,230 \text{ m}$$

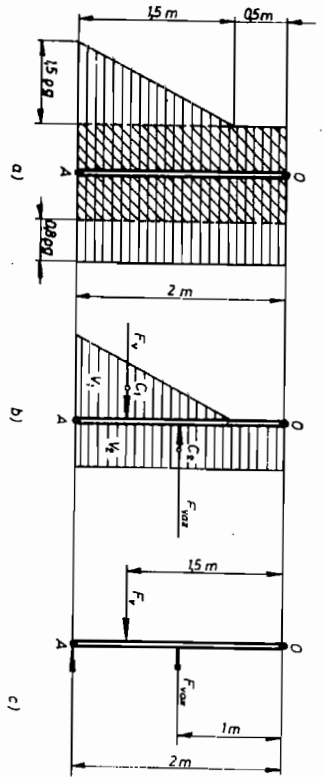
Sila pritiska F je dakle, normalna na površinu A u tački D(ξ_D, η_D).

4. Sračunati silu koju prenosi zatvarač OA, širok 1 m, na oslonac u A. Gustina vazduha se zanemaruje.

Rešenje. Preko dijagrama pritiskazadatak se rešava na sledeći način:



Nacrta se dijagram apsolutnih pritiska koji deluju s jedne i druge strane vratã (slika a). Pošto se odbiju jednake i simetrične površine (tačnije zapremine, jer je dijagram prostor) s jedne i druge strane vrata jer one daju sile koje se poništavaju dobija se



upročćeni dijagram (slika b) koji definiše sile koje deluju na vrata zbog delovanja pritiska vazduha i vode na njih. Naime zapremina prostornog dijagrama pritiska predstavlja intenzitet sile, a pravac sile prolazi kroz težište zapremine prostornog dijagrama pritiska koja definiše silu. Na kraju tražena sila F dobija se iz uslova (slika c)

$$\sum M_O = 2F - 1,5F_v + F_{vaz} = 0$$

$$F = \frac{1,5F_v - F_{vaz}}{2}$$

odakle je

Iz zapremina V_1 i V_2 dobija se

$$F_v = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \rho g \cdot 1,5 \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 1,5 \cdot 1 = 11036 \text{ N}$$

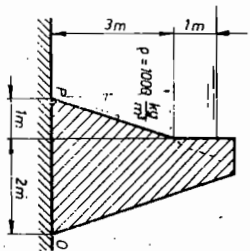
$$F_{vaz} = 0,8 \rho g \cdot 2 \cdot 1 = 0,8 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot 1 = 15696 \text{ N}$$

tako da je konačno

$$F = \frac{1,5 \cdot 11036 - 15696}{2} = 429 \text{ N}$$

Zadaci.

1) Odrediti veličinu i napadnu tačku sile pritiska vode na nagnuti deo zida širokog 1 m. Kolikim momentom dejstvuje ukupna sila pritiska vode u odnosu na tačku O?



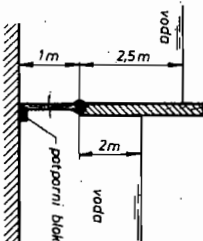
Rešenje:

$$F = 77555 \text{ N}; \quad PD = 1,26 \text{ m}; \quad M_O = 40875 \text{ Nm}$$

2) Brana kvadratnog oblika, široka 1 m, obešena je oko gornje ivice. Kolika se sila prenosi na potporni blok?

Pešenje:

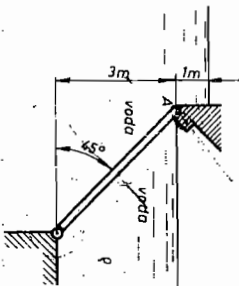
$$F = 2,45 \text{ kN}$$



3) Sračunati silu kojom deluje bestežinski zatvarač, širok 1 m, na oslonac u A.

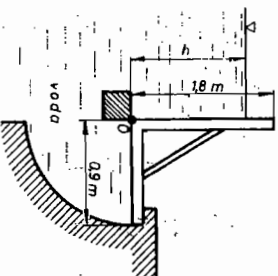
Rešenje:

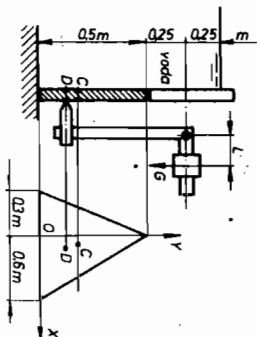
$$F_A = 20,81 \text{ kN}$$



4) Zavisno od visine vode levo od pravougaonog zatvarača, širokog 1 m, zatvarač se otvara automatski. Zanimajući težinu zatvarača odrediti visinu vode pri kojoj će se to dogoditi.

Rešenje. $h = 1,56 \text{ m}$



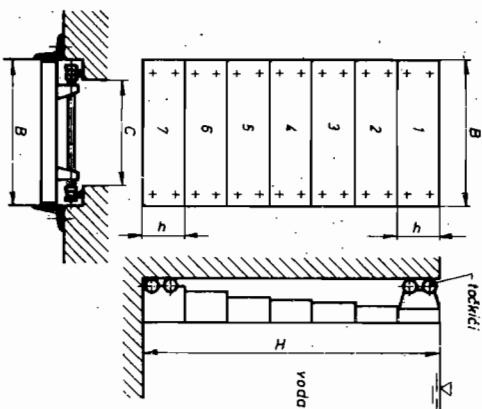


5. Sračunati moment $G \cdot L$ i odrediti tačku D u kojoj treba podupreti trouglasti zatvarač, da se ne bi morao podupirati u najmanje tri tačke.

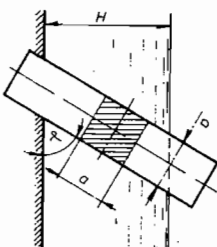
Rešenje.

$G \cdot L = 1103 \text{ Nm}$; $x_D = 0,105 \text{ m}$;
 $y_D = 0,15 \text{ m}$

6. Pravougaoni otvor, dimenzija $H \times C$ ostavljen je u nasipu da služi za propuštanje vode ka turbinskom postrojenju. Pri redovnim pregledima postrojenja ovaj otvor se zatvara specijalnim drvenim talpama. Dimenzije svake talpe su $h \times b = 1,2 \times 3,4 \text{ m}^2$. Talpe imaju po dva para točkica. Odrediti: 1) Silu pritiska vode F_1 i F_7 na prvu i sedmu talpu i momente savijanja tih greda, kad su točkici postavljani na samim krajevima talpa. 2) Na kojim vertikalnim rastojanjima Δh_1 i Δh_7 od težišta C_1 i C_7 , prve i sedme talpe, treba postaviti samo po jedan par točkica a da se pri tome ne promeni ravnotežni položaj ovih talpi.



Rešenje. $F_1 = 24 \text{ kN}$; $F_7 = 312 \text{ kN}$; $M_1 = 10200 \text{ Nm}$;
 $M_7 = 133000 \text{ Nm}$; $\Delta h_1 = 200 \text{ mm}$; $\Delta h_7 = 15 \text{ mm}$

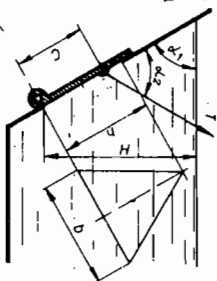


7. Odrediti rezultujuće dejstvo sile pritiska vode na stub kvadratnog preseka prikazan na slici. Podaci: $a = 25 \text{ cm}$
 $H = 5 \text{ m}$ i
 $\alpha = 45^\circ$.

Rešenje.

Spreng $M = 10839 \text{ Nm}$

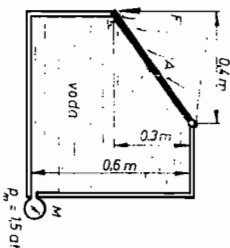
8. Odrediti maksimalnu neopodnu silu T u užetu i silu reakcije F_0 na osi obrtanja O poklopca, koji zatvara trouglasti otvor na ravnom zidu. Podaci: $H = 3 \text{ m}$; $h = 2 \text{ m}$;
 $b = 1,6 \text{ m}$; $c = 1,8 \text{ m}$ i $\alpha_1 = \alpha_2 = 60^\circ$.



Rešenje.

$T = 14,3 \text{ kN}$; $F_0 = 26,6 \text{ kN}$

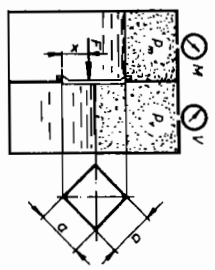
9. Kolika je najmanja vertikalna sila F pod kojom bi poklopac A rezervoara vode (v. sliku) bio zatvoren. Poklopac je širok 1 m .



Rešenje.

$F = 44758 \text{ N}$

10. Zatvoren rezervoar s naftom ($\rho = 920 \text{ kg/m}^3$) podeljen je na dva dela ravnom pregradom na kojoj se nalazi kvadratni otvor stranice $a = 1 \text{ m}$. Nad nivoom nafte u levom delu rezervoara vlada natpritisak $p_m = 15 \text{ kPa}$, a u desnom

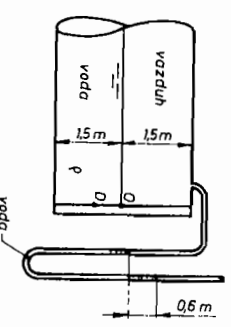


vlada potpritisak $P_v = 10 \text{ kPa}$. Nivoi nafte prikazani su na slici. Naći intenzitet F i položaj x rezultantne sile pritiska na poklopac, koji zatvara otvor na pregradi.

Rešenje.

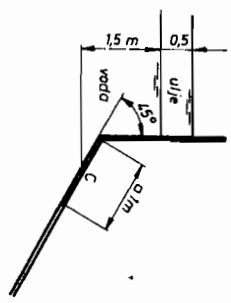
$F = 30,4 \text{ kN}$; $x = 0,7 \text{ m}$

11. Izračunati veličinu i napadnu tačku sile kojom voda i vazduh pritiskuju navan bok valjkastog rezervoara prikazanog na crtežu.



Rešenje.

$F = 63,68 \text{ kN}$; $\overline{OD} = 0,306 \text{ m}$

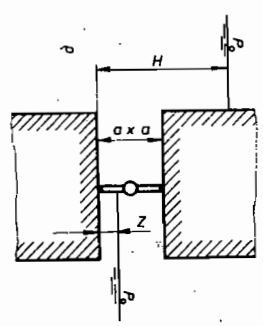


12. Odrediti intenzitet i napadnu tačku sile od pritiska sloja ulja ($\rho_u = 800 \text{ kg/m}^3$) i vode na otvor kvadratnog preseka.

Rešenje.

$F = 18,64 \text{ kN}$; $\overline{CD} = 3,1 \text{ cm}$

13. Kvadratni zatvarač, dimenzija $a \times a$, izložen je pritisku vode sa obe strane. S leve strane je nivo vode isti (H), a sa desne strane je promenljiv (z). Izraziti zavisan od z ukupnu silu pritiska F vode na zatvarač i moment M prema osi obrtanja zatvarača, koja se nalazi u težištu zatvarača. Odrediti najveće vrednosti za F i M u intervalu $0 \leq z \leq H$.



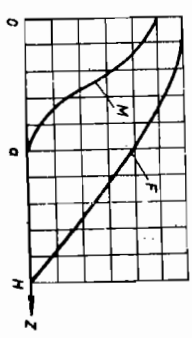
Rešenje

Za $z < a$ $F = \rho g a^2 H (1 - \frac{a}{2H} \frac{z^2}{aH})$;

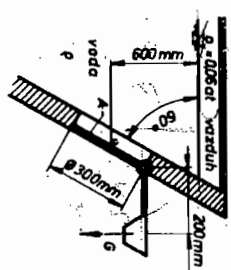
za $z > a$ $F = \rho g a^2 H (1 - \frac{z}{H})$

za $z < a$ $M = \rho g \frac{a^4}{12} (1 - 3\frac{z^2}{a^2} + 2\frac{z^3}{a^3})$;

za $z > a$ $M = 0$; (videti i dijagram F, M)



14. Koliko mora biti težak teg G da bi se vrata A otvorila? Težina samih vrata se zanemaruje.



Rešenje.

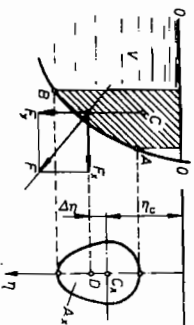
$G = 16,9 \text{ N}$

2.3. PRITISAK TEČNOSTI NA KRIVE PLOŠTINE

Delovanje tečnosti na krive površine može se sve-
sti na glavni vektor i glavni moment. Glavni vektor se određuje preko tri komponente (obično preko jedne vertikalne i dve međusobno normalne horizontalne komponente). Glavni moment - preko sume momenata ovih komponentata.

Za krive površine koje imaju vertikalnu ravan simetrije (najveći broj praktičnih zadataka) suma elementarnih

sila pritiska svodi se na jednu rezultantnu silu, koja leži u ravni simetrije, ili na par sila koje leže u istoj ravni. Veličina i pravac rezultantne sile \vec{F} određuje se preko njenih komponentata, obično horizontalne i vertikalne, kao što je pokazano na slici.



Horizontalna komponenta sile pritiska koja deluje na krivu površinu, jednaka je sili pritiska na vertikalnu projekciju ove površine normalnu na ravan simetrije, a određuje se po formuli

$$F_x = \rho g n_c A_x$$

gde je: ρ - gustina tečnosti,
 g - ubrzanje zemljine teže,
 n_c - dubina težišta C_x vertikalne projekcije krive površine od slobodne površine,
 A_x - površina vertikalne projekcije krive površine.

Linija dejstva komponente \vec{F}_x , koja prolazi kroz centar pritiska vertikalne projekcije krive površine (tačka D), leži u ravni simetrije i pomena je (ispod, ako je $n_c > 0$, ili iznad, ako je $n_c < 0$) u odnosu na težište vertikalne projekcije, za rastojanje

$$\Delta n = \frac{I_c}{A_x n_c}$$

gde je I_c - sopstveni moment inercije vertikalne projekcije.

Vertikalna komponenta ukupne sile pritiska, koja deluje na krivu površinu, jednaka je težini tečnosti zapremine V koju ograničavaju kriva površina, slobodna površina i vertikalne površine konstruisane po konturi krive površine, a određuje se po formuli

$$F_y = \rho g V$$

Komponenta \vec{F}_y prolazi kroz težište zapremine V i usmerena je na dole ako se zapremina V konstruiše sa ovlazene strane krive površine, odnosno na gore, ako se zapremine V konstruiše na neovlaženoj strani krive površine.

U formulama za F_x i F_y pretpostavljeno je da se tečnost nalazi s jedne strane krive površine i da na neovlaženoj strani krive površine deluje atmosferski pritisak. Isti atmosferski pritisak deluje i na slobodnoj površini tečnosti.

Ukupna sila pritiska na krivu površinu predstavlja geometrijski zbir sila F_x i F_y i jednaka je

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

Linija delovanja sile \vec{F} prolazi kroz tačku preseka linija delovanja sila \vec{F}_x i \vec{F}_y .

Ugao ϕ nagiba sile \vec{F} prema horizontalnoj ravni određuje se iz formule

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{F_y}{F_x}$$

Kod krivih površina sa konstantnom krivinom (cilindrične i sferne površine) ukupna sila pritiska prolazi kroz centar ili osu krivine, tj. u tački delovanja ukupna sila pritiska je normalna na površinu. Za ostale krive površine ukupna sila pritiska u tački delovanja ne mora biti normalna na površinu. Samo je elementarna sila pritiska u-

vek normalna na elementarnu površinu.

U slučaju natpritisaka sa ovlažene strane krive površine sve komponente i ukupna sila pritiska tečnosti usmerene su od tečnosti ka površini - iznutra prema spolja. U slučaju potpritisaka sa ovlažene strane krive površine sile su usmerene spolja prema unutra.

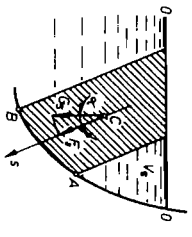
Pri dvostranom delovanju tečnosti na krivu površinu prvo se određuju horizontalne i vertikalne komponente sa svake strane krive površine uz pretpostavku jednostranog delovanja tečnosti, a zatim ukupne horizontalne i vertikalne komponente zbog delovanja obe tečnosti.

U nekim slučajevima za nalaženje komponentata ukupne sile pritiska tečnosti na krivu površinu, potrebno je krivu površinu podeliti na posebne delove, odrediti odgovarajuće sile za svaki deo krive površine i onda ih sabrati (vidi prvi primer).

U nizu zadataka silu pritiska na krivu površinu pogodnije je odrediti preko njenih komponentata u pravcu kosih osa.

Sila pritiska tečnosti na krivu površinu u proizvoljno zadanom pravcu s (vidi sliku) jednaka je

$$F_s = G_s \cos \alpha = \rho g V_s \cos \alpha$$



gde je : G_s - težina tečnosti u zapremini V_s , ograničena krivom površinom, slobodnom površinom i projektnim površinama paralelnim sa datim pravcem, α - ugao između zadatog pravca i vertikale.

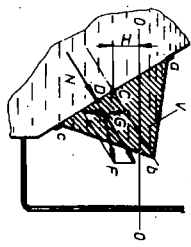
Linija delovanja sile F_s prolazi kroz težište tečnosti u zapremini V_s .

Mogući prilaz određivanja sile pritiska, koji

često uprošćava rešavanje zadataka, predstavlja razmatranje ravnoteže zapremine tečnosti, koju ograničavaju kriva površina i ravan preseka koji prolazi kroz graničnu konturu krive površine.

Neka je, npr. potrebno da se odredi sila F pritiska tečnosti na konusnu površinu (vidi sliku). Uslovi ravnoteže zapremine tečnosti koja ispunjava konus predstavljani su vektorskom jednačinom

$$\vec{N} + \vec{G} + \vec{F} = 0,$$



gde je \vec{N} - sila pritiska tečnosti na izdvojenju zapreminu tj. na ravan preseka ac , jednaka $N = \rho g H A_{ac}$ i prolazi normalno na presek kroz centar pritiska (tačka D), \vec{G} - težina izdvojene zapremine tečnosti ($G = \rho g V$), \vec{F} - sila kojom konus deluje na tečnost.

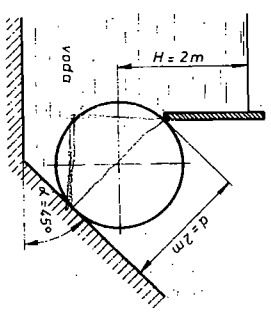
Kako je tražena sila \vec{F} jednaka sili \vec{R} ali suprotnog smera, dolazi se do jednačine

$$\vec{F} = \vec{N} + \vec{G},$$

iz koje može da se odredi sila pritiska \vec{F} ili ma koja njena komponenta.

Primeri.

1. Odrediti horizontalnu i vertikalnu silu pritiska vode i odgovarajuće napadne tačke na cilindar dugačak 1 m, pokazan na slici. ($\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$)



Rešenje. Horizontalne sile pritiska na delu konture od G do H se poništavaju si-

Lama na delu konture od H do I jer na istoj horizontalali vladaju isti pritisci; npr. $P_S = P_K$. Tako horizontalan pritisak vode stvara silu

$$F_x = \rho g y_C A_x = \rho g H d \cos \alpha \cdot 1$$

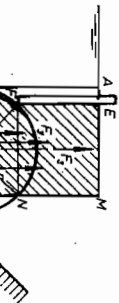
$$F_x = 1000 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 27664,2 \text{ N}$$

Napadna tačka horizontalne sile F_x leži prema tački C na dužini

$$\Delta n = \frac{I(A_x)_z}{A_x \cdot n_C} = \frac{(d\sqrt{2})^3 \cdot 1}{12 \frac{d\sqrt{2}}{2} \cdot H} = \frac{d^2}{24H}$$

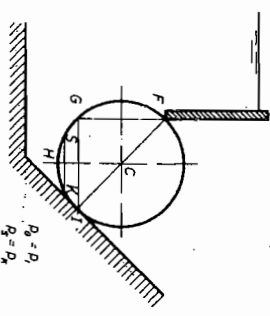
$$\Delta n = \frac{2^2}{24 \cdot 2} = \frac{1}{12} \text{ m}$$

Da bi se odredila vertikalna sila treba povući vertikalnu tangentu na krug u tački B. Na deo od B do F napada sila opterećenja vode - opterećenje (vertikalna sila uperena naniže i jednaka površini ABFE $\cdot 1 \cdot \rho g$). Na konturi BI deo opterećenja vode - rasterećenje (vertikalna sila usmerena naviše i jednaka površini ABIM $\cdot 1 \cdot \rho g$).



Rezultantna sila jednaka je razlici obeju sila odnosno srazmerna je površini FFBIM osenčenoj na crtežu i iznosi

$$F_y = (\text{površina FFBIM}) \cdot 1 \cdot \rho g = \left(\frac{d^2 \pi}{8} + \frac{d\sqrt{2}}{2} \right) 1000 \cdot 9,81 = 42869,7 \text{ N}$$



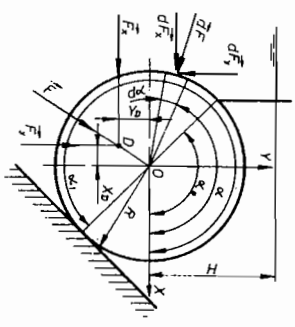
Napadna tačka sile F_y prolazi kroz težište osenčene površine (FFBIM) $\equiv F_y$. Težište se određuje iz momentne jednačine za tačku O te površine sastavljene od polovine kruga $F_1 = (F_{F1})$, trougla $F_2 = (F_{T1})$ i pravougaonika $F_3 = (F_{FM})$. Momentna jednačina glasi

$$F_y \cdot \Delta x = F_1 \frac{4R}{3\pi} \cos \alpha - F_2 \frac{1}{2} d \cos \alpha = \frac{d^3 \pi}{8} \frac{d\sqrt{2}}{3\pi} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\sqrt{2}}{2} \right)^2 \frac{1}{6} \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

Odatle je

$$\Delta x = \frac{\frac{d^3 \sqrt{2}}{24} (1 - \frac{1}{2})}{\frac{d^2 \pi}{8} + \frac{d\sqrt{2}}{2} H} = \frac{d^2 \sqrt{2}}{24 (\frac{d\pi}{4} + \sqrt{2} H)}$$

$$\Delta x = \frac{2^2 \sqrt{2}}{6 (2\pi + 4\sqrt{2} \cdot 2)} = 0,05353 \text{ m}$$



Horizontalna i vertikalna sila sa njihovim napadnim tačkama mogu biti određene i integraliranjem. Komponente sile \vec{F} se određuju sledećim postupkom,

$$dF_x = (H - R \sin \alpha) \rho g R d \alpha \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$F_x = \int_0^{\alpha_1} (H - R \sin \alpha) \rho g R d \alpha \cdot 1 \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$F_x = -\rho g R^2 \int_0^{\alpha_1} \cos \alpha d\alpha + \rho g R^2 \int_0^{\alpha_1} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha$$

$$F_x = -\rho g R^2 (\sin \alpha) \Big|_0^{\alpha_1} + \rho g R^2 \left[\frac{2\pi}{3\pi} \right] = \rho g R^2 \sqrt{2}$$

$$F_x = 1000 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 27664,2 \text{ N}$$

$$dF_y = -(H - R \sin \alpha) \rho g R d \alpha \sin(180^\circ - \alpha)$$

Znak "-" je zbog smera elementarne sile dF_y

$$F_y = - \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} (H-R\sin\alpha) \rho g R d\alpha \cdot 1 \cdot \sin(180^\circ - \alpha) =$$

$$= \rho g H R (\cos\alpha) \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} + \rho g R^2 \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\sin 2\alpha \right) \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} = \rho g H R \sqrt{2} + \frac{\rho g R^2 \pi}{2} =$$

$$F_y = 1000 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot \pi}{2} = 42859,7 \text{ N}.$$

Napadne tačke komponentata F_x i F_y se određuju iz odgovarajućih momentnih jednačina za tačku O

$$-F_x \cdot Y_D = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} dF_x R \sin(180^\circ - \alpha) =$$

$$= \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} (H-R\sin\alpha) \rho g R \cos(180^\circ - \alpha) \sin(180^\circ - \alpha) R d\alpha$$

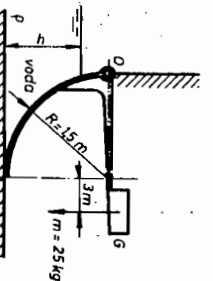
$$Y_D = \frac{1}{F_y} \rho g R^2 \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} (H-R\sin\alpha) (-\cos\alpha) \sin\alpha d\alpha$$

$$Y_D = \frac{\rho g R^3 \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \sin^2 \alpha \cos \alpha d\alpha}{\rho g H R \sqrt{2}} = \frac{r^2}{3\sqrt{2}H} \sin^3 \alpha \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} = -\frac{r^2}{5H} = -\frac{1}{12} \text{ m}$$

$$F_y \cdot x_D = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} -dF_y R \cos(180^\circ - \alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} (H-R\sin\alpha) \rho g R^2 \frac{1}{2} \sin^2(180^\circ - \alpha) d\alpha$$

$$x_D = \frac{\rho g R^3 \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \sin^2 \alpha \cos \alpha d\alpha}{\rho g R (H\sqrt{2} + \frac{R\pi}{2})} = \frac{-r^2 \sqrt{2}}{6(H\sqrt{2} + \frac{R\pi}{2})} = -0,05352 \text{ m}.$$

2. Ne vodeći računa o težini vrata (v. sliku) sračunati minimalnu visinu vode h pod kojom će se vrata otvoriti. Normalno na ravan slike data je širina vrata a = 1 m. ($\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)



Rešenje.

Vrata će se otvoriti

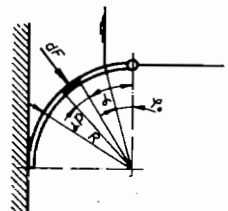
kada moment sile pritiska vode za zglobnu vezu O nadvlada moment teža G za istu momentnu tačku. Ova jednačina određuje traženu dubinu vode h.

Moment od vodenog pritiska

je

$$M = \int_{\phi_0}^{\pi} dF \cdot R \sin\phi$$

gde je



$$dF = [h - (R - R\sin\phi)] \rho g R d\phi$$

$$M = \int_{\phi_0}^{\pi} \rho g [h - R(1 - \sin\phi)] R^2 \sin\phi d\phi$$

$$M = \rho g R^2 h \int_{\phi_0}^{\pi} \sin\phi d\phi - \rho g R^3 \int_{\phi_0}^{\pi} \sin\phi d\phi + \rho g R^3 \int_{\phi_0}^{\pi} \sin^2\phi d\phi$$

$$M = -\rho g R^2 h (\cos\phi) \Big|_{\phi_0}^{\pi} + \rho g R^3 (\cos\phi) \Big|_{\phi_0}^{\pi} + \rho g R^3 \left(\frac{1}{2}\phi - \frac{1}{4}\sin 2\phi \right) \Big|_{\phi_0}^{\pi}$$

$$M = \cos\phi_0 \left[\rho g R^2 (h - R) \right] + \rho g R^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\phi_0 + \frac{1}{4}\sin 2\phi_0 \right)$$

zamenom $h = R(1 - \sin\phi_0)$ i manjim sredjivanjem se dobija

$$M = \rho g R^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \phi_0 - \frac{\sin 2\phi_0}{4} \right)$$

Ugao ϕ_0 se određuje izjednačavanjem momenata

$$\rho g R^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \phi_0 - \frac{\sin 2\phi_0}{4} \right) = G(R+R)$$

$$\frac{1}{2} \phi_0 - \frac{\sin 2\phi_0}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{G(R+R)}{\rho g R^3}$$

$$\frac{1}{2} \phi_0 - \frac{\sin 2\phi_0}{4} = 0,453$$

Ova jednačina se rešava uzastopnim pretpostavljanjem rešenja. Zadovoljena je za vrednost $\phi_0 = 28^\circ$. Tražena dubina vode h se lako određuje iz

$$\sin \phi_0 = \frac{R-h}{R}$$

$$0,46947 = \frac{1,5-h}{1,5}$$

$$h = 1,5 - 0,704 = 0,796 \text{ m}$$

3. Odrediti sile zatezanja

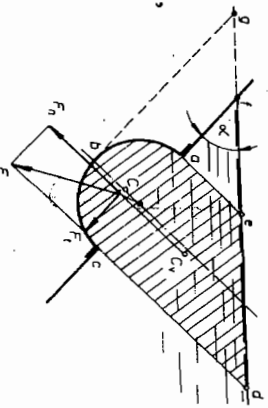
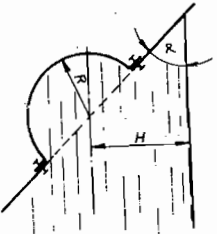
i smicanja kao i ukupnu silu kojom tečnost gustine ρ napada zavrtnjeve koji su ravnomerno raspoređeni po obodu polusferične površine poluprečnika R , ako je poznata dubina H i ugao α nagiba zida rezervoara prema horizontu.

Rešenje.

Sila zatezanja F_n ,

normalna na zid rezervoara, zaklapa sa vertikalom ugao α i određuje se iz

$$F_n = \rho g V_n \cos \alpha$$



gde je V_n - zapremina, prikazana u preseku na slici šrafiranom površinom abcdea i jednaka je

$$V_n = \frac{2}{3} \pi R^3 + \pi R^2 \frac{H}{\cos \alpha} = \pi R^2 \left(\frac{2}{3} R + \frac{H}{\cos \alpha} \right)$$

Sada je

$$F_n = \rho g \pi R^2 \left(\frac{2}{3} R + \frac{H}{\cos \alpha} \right)$$

Sila smicanja F_t , paralelna sa zidom rezervoara, zaklapa sa vertikalom ugao $90^\circ - \alpha$ i određuje se iz

$$F_t = \rho g V_t \cos \beta$$

gde je V_t - zapremina tečnosti abca, a predstavlja razliku zapremine bcfg i abgf za delove polusfere bc i ab i jednaka je zapremini polusfere, tj.

$$V_t = \frac{2}{3} \pi R^3$$

tako da je

$$F_t = \frac{2}{3} \rho g \pi R^3 \sin \alpha$$

Napominje se, da sila smicanja F_t ne zavisi od veličine pritiska u rezervoaru.

Kako su sile F_n i F_t međusobno ortogonalne komponente, to se ukupna sila pritiska dobija kao

$$F = \sqrt{F_n^2 + F_t^2} = \rho g \pi R^2 \sqrt{H^2 + \frac{4}{3} R^2 \cos^2 \alpha + \frac{4}{9} R^2}$$

a njen pravac u ovom slučaju prolazi kroz centar polusfere.

Isti zadatak se može rešiti na drugi način, posmatrajući ravnotežu zapremine tečnosti koja ispunjava polusferu (vidi sliku).

Rešavajući zadatak na ovaj način, prvo se nalazi sila N kojom tečnost koja ispunjava rezervoar deluje na ravan presek ac, i težina G izdvojene polusferne zapremine

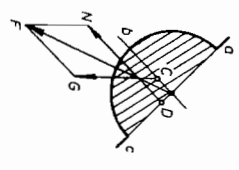
tečnosti:

$$N = \rho g H r R^2,$$

normalna na presek ac i prolazi kroz centar pritiska (tačka D) ;

$$G = \frac{2}{3} \rho g r R^3,$$

vertikalna sila koja prolazi kroz težište polusferične zapremine.



Pošto je, u ovom slučaju, ukupna sila pritiska data vektorskom jednačinom

$$\vec{F} = \vec{N} + \vec{G},$$

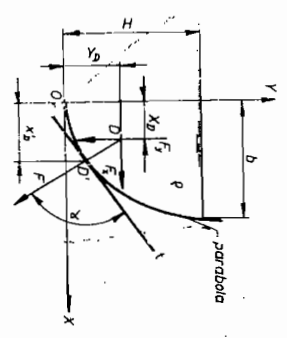
to se, projektovanjem nadjernih sila \vec{N} i \vec{G} na pravce delovanja sile zatezanja i smicanja, dobija

$$F_n = N + G \cos \alpha = \rho g r R^2 (H + \frac{2}{3} R \cos \alpha),$$

$$F_t = G \sin \alpha = \frac{2}{3} \rho g r R^3 \sin \alpha.$$

Napomena. U slučaju da tečnost napada suprotnu - ispučenu stranu polusferične površine (ili, u opštem slučaju, ispučenu stranu složene krive površine - vidi 13-i zadatak) onda, da bi se takav problem rešio na ovaj način, postupa se na sledeći način: pretpostavi se da je tečnost sa suprotne - udubljene strane krive površine, tako da se opet može posmatrati ravnoteža izdvojene zapremine tečnosti. Zbog učinjene pretpostavke jedino će biti pogrešno u rezultatu smer delovanja sile \vec{N} i \vec{G} . Prema tome, dovoljno je na kraju promeniti smer delovanja ovih sila, pa da se problem u potpunosti reši tačno, jer promena smera sile uzima u obzir stvarno delovanje tečnosti na krivu površinu, tj. eliminiše učinjenu neopходnu pretpostavku na početku rešavanja problema.

Zadaci.



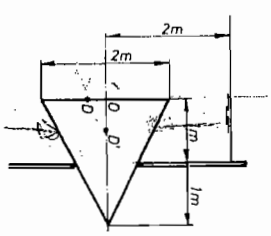
Rešenje.

$$F_x = \rho g \frac{H^2}{2}; \quad F_y = \frac{2}{3} \rho g H^2; \quad y_D = \frac{1}{3} H; \quad x_D = \frac{3}{8} H;$$

$$x_D = \frac{H}{3} (\sqrt{11} - 2); \quad \alpha = 94,4^\circ$$

1. Betonska brana

na širine 1 m dodiruje se sa vodom po površini čiji je presek pokazan na slici. Odrediti intenzitet, napadnu tačku i pravac sile u odnosu na površinu brane za $H = b$. ($\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$)



2. Odrediti vrednost, pravac, smer i napadnu tačku sile kojom voda pritiskuje kupasti čep. ($\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$)

Rešenje.

$$F_y = 17978 \text{ N}; \quad F_x = 15410 \text{ N}$$

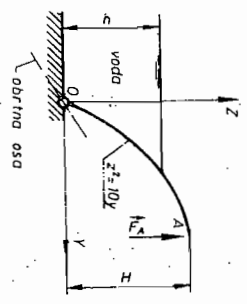
$$\overline{OD}_y = \frac{11}{28} \text{ m}; \quad \overline{OD}_x = \frac{1}{32} \text{ m}$$

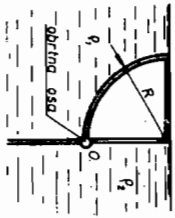
3. Kolika mora biti vertikalna sila F_A da bi se kapak

profila parabole, širok 1 m, zadržao u položaju prikazanom na slici.

Rešenje.

$$F_A = \frac{\rho g h^3}{H^2} \left(\frac{5}{3} + \frac{h^2}{100} \right)$$





4. Ako se prikazani beste-
žinski deo cilindra nalazi u ravnoteži
naći odnos gustina tečnosti koje se
nalaze levo i desno od cilindra. Veza
cilindra i pregradnog zida u tački O
je zglobna.

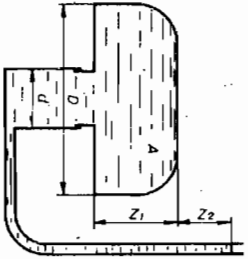
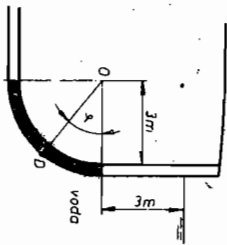
Rešenje.

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 3$$

5. Odrediti silu vode-
nog pritiska i njenu napadnu tač-
ku na deo brodskog korita (v.sli-
ku - osenčen lim) po dužini od 1 m.
($\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$)

Rešenje.

$$F = 205,9 \text{ kN} \quad , \quad \phi = 50^\circ$$



6. U kakvom su
medjusobnom odnosu prečni-
ci D i d kad je $z_2 = 5z_1$, a
klip A se nalazi u rav-
noteži. Težinu klipa A za-
nemariti. U sudovima i ce-
vi se nalazi tečnost gus-
tine ρ .

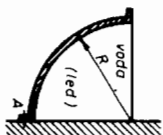
Rešenje.

$$\left(\frac{D}{d}\right)^2 = 6$$

7. Napisati izraz za najmanju debljinu zidova cevi
ako je cev po celoj svojoj dužini izložena dejstvu konstant-
nog pritiska p_m a dozvoljeni napon na istezanje materijala
cevi je σ .

Rešenje.

$$\delta = \frac{p_m D}{2\sigma}$$



8. Odrediti momente kojim dej-
stvuju voda i led, koji se nalaze u olu-
ku dužine 1 m, na presjek A. Gustinu vo-
de i leda smatrati istom - ρ .

Rešenje.

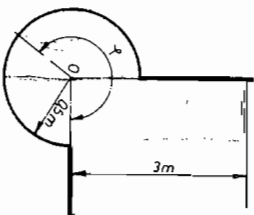
$$M_x = \frac{1}{3}\rho g R^3 \quad ; \quad M_y = \frac{1}{2}\rho g R^3$$

9. Na horizontalnoj

glatkoj ravni leži kupasti deo
cevi. Do koje visine h treba
sipati vodu u cev da bi se ova,
pod dejstvom pritiska vode, od-
vojila od površine. Velicine m,
D, d, H i ρ su poznate.

Rešenje.

$$h = 1 \text{ m}$$

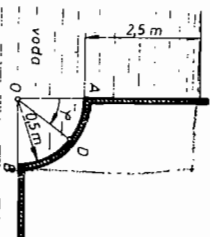
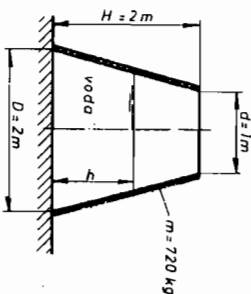


10. Sračunati
silu kojom voda napada t-
ročetvrtinski cilindar du-
gačak 5 m. Odrediti njenu
napadnu tačku i moment za
tačku O. ($\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$)

Rešenje.

$$F = 122,7 \text{ kN};$$

$$M_O = 0; \quad \phi = 237^\circ$$

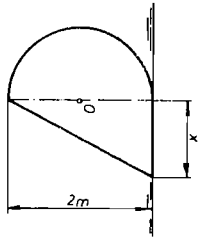


11. Naći veliči-
nu, pravac i napadnu tač-
ku sile pritiska vode na
deo cilindra dužine 5 m,
prikazanog na slici.
($\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$)

Rešenje.

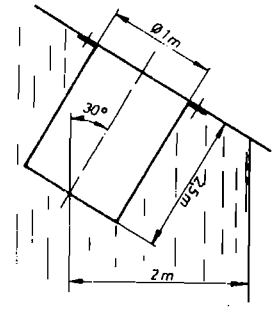
$F = 93 \text{ KN}$; $\phi = 46,5^\circ$

12. Čvrsto telo bez težine i proizvoljne dužine, čiji je presek predstavljen na crtežu može da se obrće oko oslonca u tački O. Kolika treba da je dimenzija x da bi telo ostalo u prikazanom položaju ravnoteže.



Rešenje. $x = \sqrt{2} \text{ m}$

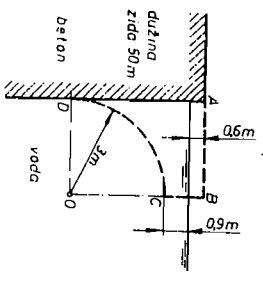
13. Odrediti veličinu i pravac sile kojom voda pritiskuje: a) dno cilindra, b) omotač cilindra.



- a) $F = 15,41 \text{ KN}$
- b) $F = 16,68 \text{ KN}$

Rešenje.

14. Ako se za betonski zid 50 m dugačak veže konzola ABCD koliku će dopunsku silu (veličina i pravac) trpeti osnovni betonski zid. Gustina betona je $3000 \frac{\text{KG}}{\text{m}^3}$.



Rešenje.

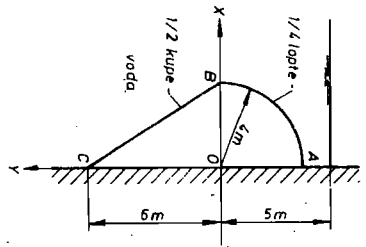
$+F_v = 7,2 \text{ MN}$
 $F_h = 0$

15. Izračunati intenzitete i napadne tačke vertikalne i horizontalne sile kojom voda pritiskuje krivu povr-

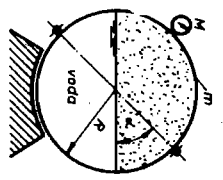
sinu ABC;

Rešenje.

$F_x = 2,46 \text{ MN}$
 $F_y = 1,15 \text{ MN}$
 $x_D = 1,40 \text{ m}$; $y_D = 1,08 \text{ m}$



16. Odrediti sile smicanja i zatezanja u zavrtnjevima koji su ravnomerno raspoređeni po obodima dva polusferična suda poluprečnika $R = 0,4 \text{ m}$. Unutrašnja zapremina ovih, povezanih,

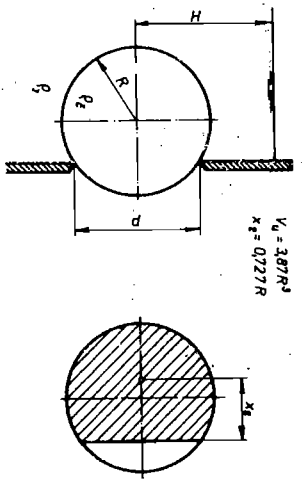


sile smicanja su $2,31 \text{ KN}$ sile zatezanja su $8,04 \text{ KN}$

Rešenje.

17. Pri

kolikoj se najmanjoj visini vode H čelična kugla ($\rho_g = 8000 \frac{\text{KG}}{\text{m}^3}$) poluprečnika $R = 100 \text{ mm}$ nalazi u ravnoteži na okruglom otvoru prečnika $d = 1,5 \text{ R}$ u vertikalnom zidu. x_2 je razdaljina težišta (osene) zapremine V_u od zida.

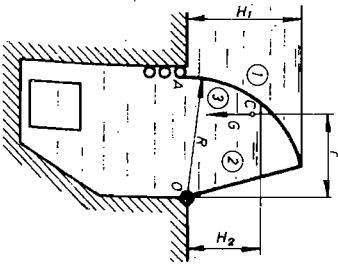


$V_u = 3,87R^3$
 $x_2 = 0,727R$

Rešenje.

$$H = 1,48 \text{ m}$$

18. Slika pokazuje sek-

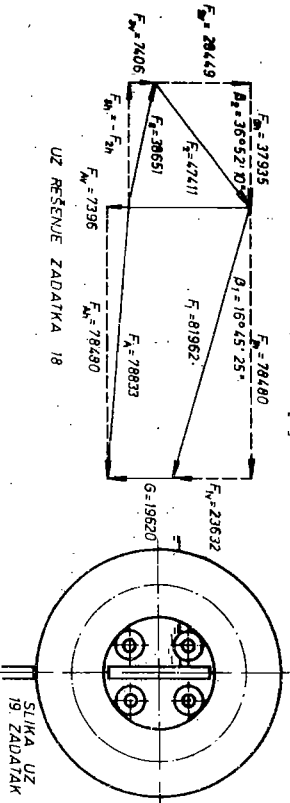


torsku branu koja može da zadržava vodu do visine $H_1 = 4$ m. Težina brane, sa težištem u tački C, po jednom metru širine je $G = 19620$ N, a krak do obrtne tačke O je $r = 2,8$ m. Potrebno je odrediti nivo vode H_2 koji se pušta sa unutrašnje strane brane da bi prikazani položaj brane bio u ravnoteži. Trenje u vodjicama i ležištu brane zanemariti. Takođe odrediti i vektor rezultujuće sile reakcije kojom ležište i pokretni oslonac A deluju na celokupnu branu.

Rešenje.

$$H_2 = 2,78 \text{ m}$$

PLAN SILA u [N]



19. Objasniti zašto se napumpana automobiliska gu-

ma - prebačena preko četiri pokretna valjka i provučena kroz pregradu suda u kome se nalazi voda - ne može obrnuti sama od sebe. Otvor pregrade je potpuno zapliven; trenje zanemariti.

2.4. PLIVANJE

Telo pliva po tečnosti kad je njegova težina G manja od iznosa površinskog integrala $p d\vec{A}$ obrazanog po površini A tela.

$$\vec{G} < - \int_A p d\vec{A}$$

Kad je težina tela jednaka tom integralu telo lebdi, kad je veća telo tone. U zadacima je često pogodno ovaj površinski integral rastaviti na dva dela

$$- \int_A p d\vec{A} = - \int_{A_2} p_2 d\vec{A}_2 - \int_{A_1} p_1 d\vec{A}_1$$

gde je površina A_2 ona na koju deluje vertikalna sila pritiska tečnosti usmerena naviše tj. sila rasterećenja, a A_1 je površina na koju deluje vertikalna sila pritiska tečnosti usmerena naniže tj. sila opterećenja. Površine A_1 i A_2 se lako određuju za svaki problem posebno. Kada telo slobodno pliva na površini tečnosti jednčina ravnotežnog stanja se predstavlja sa

$$\vec{G} = V \cdot \rho g$$

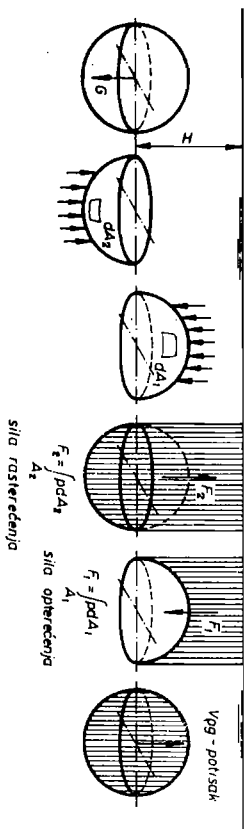
gde je V - zapremina istisnute tečnosti a ρg - specifična težina tečnosti.

Ako se intenziteti sila rasterećenja i opterećenja označe sa F_2 i F_1 , njihova razlika $F_2 - F_1$ za proizvoljan slučaj plivanja i proizvod $V\rho g$ za slučaj kada je telo sasvim potopljeno u tečnosti ili slobodno pliva na njoj se naziva silom potiska. Vektor težine \vec{G} je usmeren vertikalno naniže i deluje u težištu tela, dok je vektor sile potiska usmeren vertikalno naviše i deluje u težištu zapremine koja je obuhvaćena razlikom integrala

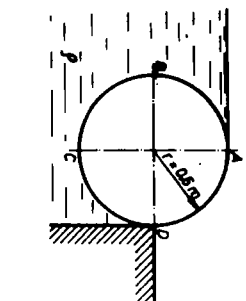
$$\int_{A_1} p_1 dA_1 - \int_{A_2} p_2 dA_2$$

odnosno u težištu istisnute zapremine. Prema tome, istisnuta zapremina je zapremina koja je obuhvaćena gornjom razlikom integrala.

Ovi osnovni pojmovi su prikazani za slučaj lopte potpuno potopljene u tečnosti.



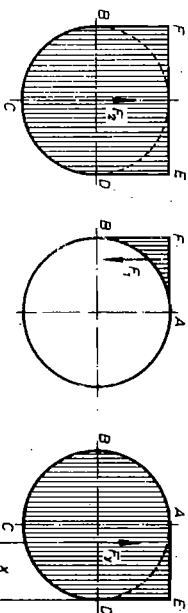
Primeri.



1. Valjak cilindarske brane slobodno se naslanja na zid i zadržava vodu kao što je pokazano na slici. Treba odrediti: a) težinu valjka po dužini od 1 m, b) silu kojom valjak pritiskuje zid i c) moment kojim sila pritiska vode djeluje na branu za tačku D.

Rešenje.

a) Kad bi cilindar bio sav u vodi, trpeo bi potisak $\pi r^2 \cdot \rho g$ po jedinici dužine. Međutim, na gornjoj četvrtini obima svojeg preseka cilindar ne prima pritisak vode (atmosferski pritisak se ne računa jer je const, djeluje svugde po omotaču cilindra i poništava se), zbog čega otpada deo sile koja bi inače valjak terala ka dnu. Zato će potisak valjka u datom slučaju biti jači. Potisak valjka je jednak razlici sile rasterećenja F_2 i opterećenja F_1 , odnosno težini cilindra G.



$$G = F_2 - F_1$$

gde su F_2 i F_1 sile kojima voda djeluje na površinu BCD odnosno AB valjka i srazmjerne su osenčenim površinama na crtežu. Istisnuta zapremina koja je takodje srazmerna razlici sila $F_2 - F_1$ je srazmerna i osenčenoj površini BCDEA. Jednčina ravnoteže je data sa

$$G = V\rho g = \left(\frac{2}{3}r^2\pi + r^2\right) \cdot 1 \cdot \rho g$$

$$G = \left(\frac{2}{3}0,6^2\pi + 0,6^2\right) \cdot 1 \cdot 1000 \cdot 9,81 = 111848 \text{ N}$$

b) Sila kojom cilindar djeluje na zid je različita horizontalnih sila na konturama ABC i CD. Kako se horizontalne sile na konturama BC i CD poništavaju, sila na zid je

$$F_H = F_{AB} = p_C A_x = \frac{r^2 \rho g}{2} \cdot 1 = \frac{0,6^2 \cdot 1000 \cdot 9,81}{2} = 1765,8 \text{ N}$$

c) Napadna tačka vertikalne sile je u težištu ABCDE, a horizontalne sile na $\frac{2}{3}r$ od slobodnog nivoa vode

$$M_D = G \cdot r - F_H \cdot \frac{1}{3}r - F_V \cdot x$$

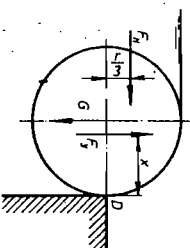
gde je

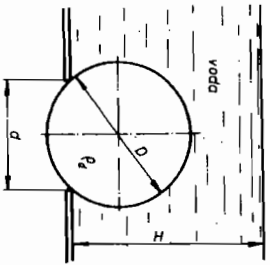
$$x = \frac{r \left(\frac{5}{6} + \frac{3\pi}{4} \right)}{\left(\frac{3\pi}{4} + 1 \right)}$$

pa je

$$M_D = \left(\frac{2}{3}r^2\pi + r^2 \right) \rho g \cdot x + \frac{r^2}{2} \rho g \cdot \frac{1}{3}r - \left(\frac{2}{3}r^2\pi + r^2 \right) \rho g \cdot r$$

$$M_D = 0$$

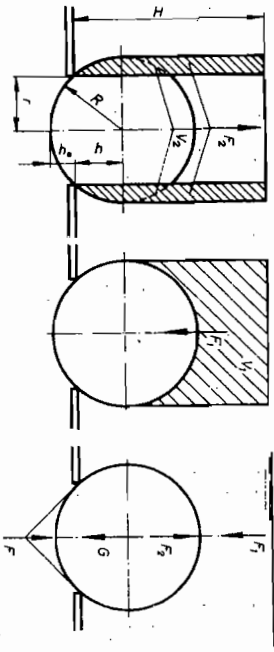




2. Drvena lopta prečnika $D=430$ mm, $\rho_d=260 \frac{kg}{m^3}$ potopljena je u vodi gde zatvara otvor na dnu prečnika $d=300$ mm. Kolikom silom lopta pritiskuje ivicu ravnog dna koje je na dubini $H=6$ m. Da li će se lopta odići ako ova sila postane jednaka nuli.

Rešenje.

Sila nastereneđenja F_2 je srazmerna obrtnoj zapremeni V_2 a sila opterećenja F_1 je srazmerna obrtnoj zapremeni V_1 .



$$V_2 = R^2 \pi (H-h) + \frac{4}{3} R^3 \pi - r^2 \pi H - V_{kalote}$$

gde je $V_{kalote} = \frac{\pi h}{6} (3r^2 + h^2) = 0,002253 \text{ m}^3$

$$h_0 = R - \sqrt{R^2 - r^2} = 0,061 \text{ m}$$

$$h = R - h_0 = 0,154 \text{ m}$$

i $V_1 = R^2 \pi (H-h) - \frac{4}{3} R^3 \pi = 0,8277 \text{ m}^3$

Jednačina ravnoteže je

$$F_1 + G - F_2 - F = 0$$

Sila sa kojom se zid odupire pritisku lopte je

$$F = F_1 + G - F_2 = V_1 \rho_w g + G - V_2 \rho_w g$$

$$F = [R^2 \pi (H-h) - \frac{4}{3} R^3 \pi] \rho_w g + \frac{4}{3} R^3 \pi \rho_d g - [R^2 \pi (H-h) + \frac{4}{3} R^3 \pi - r^2 \pi H - \frac{\pi h}{6} (3r^2 + h^2)] \rho_w g$$

$$F = 3806,2 \text{ N}$$

Za koliku visinu h_1 bi trebalo da se smanji nivo vode, pa da sila kojom je lopta pritiskivala ivicu otvora bude jednaka nuli, određuje se iz izraza $r^2 \pi h \rho_w g$, jedinog u kome figuruje h . Ovaj izraz predstavlja deo sile kojom voda pritiskuje loptu na ivicu otvora, pa da bi ova sila bila jednaka nuli treba smanjiti nivo vode na visinu h' prema jednačini

$$h' = \frac{\frac{4}{3} R^3 \pi (1 - 0,260) - V_{kal} \rho_w g}{r^2 \pi} = 1,235 \text{ m}$$

odnosno

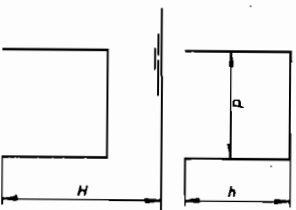
$$h_1 = 4,765 \text{ m}$$

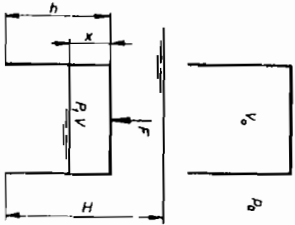
Prvi nasteravljenom smanjenju dubine vode H podigla bi se lopta sa otvora a potisak bi od prvobitne vrednosti $(V_2 - V_1) \rho_w g$ postao $\frac{4}{3} R^3 \pi \rho_w g$ što bi loptu dovelo u položaj plivanja.

3. Prazan i okrugao sud je zaronjen otvorenim krajem u vodu do dubine h (v. sliku). Kolika je sila F potrebna da bi se održao u ovom položaju, pretpostavljajući da vazduh u sudu ostaje na istoj temperaturi i da se debljina zida i težina suda mogu zanemariti?

Rešenje.

Jednačinu ravnoteže treba postaviti za gornju površinu su-





da jer je to jedina površina koja je izložena raznim pritiscima sa donje i gornje strane. Sa donje strane pritiskuje je vazduh silom $P = \frac{d^2 \pi}{4} \rho g$, dokle sa gornje strane napadaju sile (v. Sliku)

$$F + (H-h) \rho g \frac{d^2 \pi}{4} + P_a \frac{d^2 \pi}{4}$$

Da bi sud bio u ravnoteži mora biti

$$F = P \frac{d^2 \pi}{4} - [(H-h) \rho g + P_a] \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{d^2 \pi}{4} [P - P_a - (H-h) \rho g] \quad (1)$$

sila F je pretpostavljena da deluje naniže prema slici.

Pritisak p se određuje pomoću jednačine izoterme $p v = \text{const}$, za dva prikazana karakteristična položaja.

$$P = P_a \frac{V_0}{V} = P_a \frac{h}{x} \quad (2)$$

Nepoznata duž x sledi iz jednakosti pritiska na istoj horizontalnoj ravni, tj.

$$P = P_a + [H - (h-x)] \rho g \quad (3)$$

$$x = \frac{P - P_a}{\rho g} - H + h$$

uneseno u (2) vodi ka

$$P = P_a \frac{h \rho g}{P - P_a - (H+h) \rho g}$$

i kvadratnoj jednačini

$$P^2 - P [P_a + (H+h) \rho g] - P_a h \rho g = 0$$

Upotrebljiv je samo koren

$$P = \frac{P_a + (H+h) \rho g + \sqrt{[P_a + (H+h) \rho g]^2 + 4 P_a h \rho g}}{2}$$

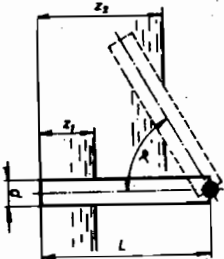
Zamenjujući p u (1) dobija se krajnji rezultat po kojem je tražena sila jednaka

$$F = \frac{d^2 \pi}{4} \left\{ \frac{P_a + (H+h) \rho g + \sqrt{[P_a + (H+h) \rho g]^2 + 4 P_a h \rho g}}{2} - P_a - (H-h) \rho g \right\} > 0$$

Sila ima pretpostavljeni pravac - pravac teže.

Zadaci.

1. Drvena greda konstantnog preseka (relativne gustine $\rho_r = 0,75$) dužine $L = 2m$, obešena je preko zglobne veze bez trenja i nalazi se zagnjurenata u vodi do dubine z . Odrediti: a) najveću dubinu z_1 pri kojoj će se greda u vertikalnom položaju još uvek nalaziti u stabilnoj ravnoteži. b) Dubinu z_2 pri kojoj će greda da zaklapa sa vertikalom ugao $\alpha = 60^\circ$?



Rešenje.

a) $z_1 = L(1 - \sqrt{1 - \rho_r}) = 1 \text{ m}$

b) $z_2 = L(1 - \cos \alpha \sqrt{1 - \rho_r}) = 1,5 \text{ m}$

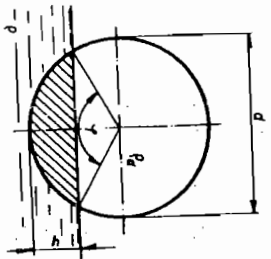
2. Do koje dubine će potonuti drveni balvan, relativne gustine $\rho_r = 0,425$, prečnika $d = 2,44 \text{ m}$, a dužina $L = 4,56 \text{ m}$ ako se potopi u vodi?

Rešenje.

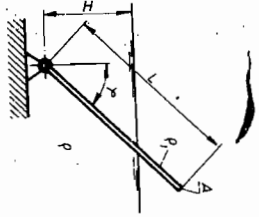
Potrebno je iteracijom naći rešenje jednačine $\phi^0 = 153^\circ + 57,3 \sin \phi$ ($\phi = 166,5^\circ$), odakle sledi

$$h = 1,077 \text{ m}$$

3. Homogena greda dužine L konstantnog preseka A, gustine ρ_1



pliva u tečnosti gustine ρ ($\rho_1 < \rho$) ali tako da je donja tačka grede zglobno učvršćena na dubini H ispod slobodne površine ($H < L$). Treba odrediti: a) površine ($H < L$). Treba odgovara stabil- koliki ugao nagiba ϕ odgovara stabil- nom ravnotežnom položaju grede u tečnosti i za koji odnos $\frac{H}{L}$ će se greda umiriti u vertikalnom položaju, b) Koliki je otpor zglobne veze R za ravnotežni položaj grede?

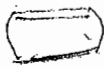


Rešenje.

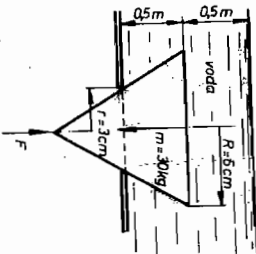
a) $\cos\phi = \frac{H}{L} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_1}}$; $\phi = 0$ za $\frac{H}{L} \leq \sqrt{\frac{\rho}{\rho_1}}$

b) $R = \rho_1 g A L (\sqrt{\frac{\rho}{\rho_1}} - 1)$ za $\frac{H}{L} > \sqrt{\frac{\rho}{\rho_1}}$;

$R = \rho_1 g A L (\frac{H}{L} \frac{\rho}{\rho_1} - 1)$ za $\frac{H}{L} \leq \sqrt{\frac{\rho}{\rho_1}}$



4. Odrediti najmanju silu F kojom treba delovati na kupastu ventil da bi se ventil odigao od sedišta.

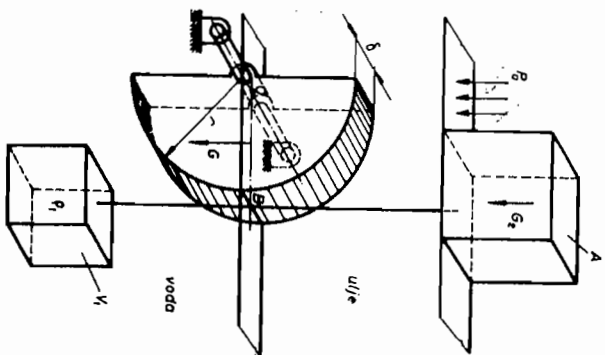


Rešenje.

$F = 290 \text{ N}$

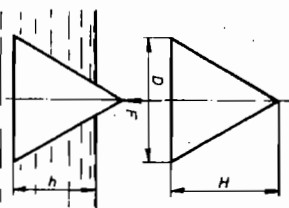
5. Poludisk težine G obrće se bez trenja oko osorvine koja se nalazi na razdelnoj površini vode (gustine ρ) i ulja (gustine ρ_u). Donji teg gustine ρ_1 i zapremine V_1 i gornja kocka težine G_2 sa površinom strane A, su pričvršćeni tankom elastičnom žicom bez težine za poludisk u tački B. Kad se gornja kocka svojom donjom površinom nalazi baš na površini ulja tačka B je tačno na razdelnoj površini vode i

ulja. Ako se iz tog položaja pusti ceo uređaj i dozvoli mu se da predje u položaj ravnoteže, za taj položaj napisati momentnu jednačinu za osu obrtanja, iz koje se može odrediti ugao α između linije OB i razdelne površine. Ostali podaci su dati na slici.



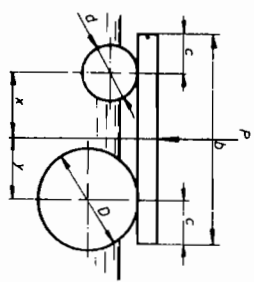
Rešenje.

$$M_O = \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho \right) g R \sin^3 \delta - (\rho_u + \rho) \frac{4}{3} \pi R^3 \delta + (\rho_1 - \rho) g R V_1 \cos \alpha - \rho_u g R^2 A \cdot \alpha + G_2 r$$



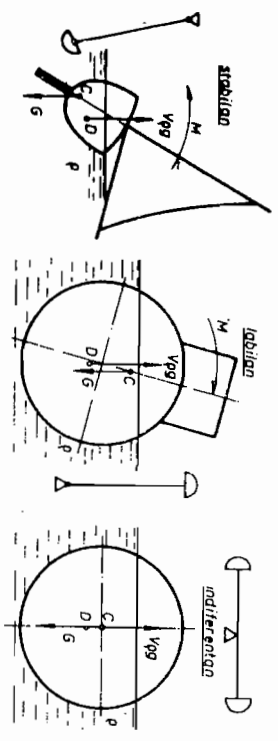
6. Šuplje kupasto telo zagnjureneno je silom F u vodu prema pokazanoj slici. Navesti jednačine iz kojih se može odrediti h. Zanimariti težinu tela i debljinu njegovih zidova. Razmotriti fizički smisao svih pretpostavki koje bi trebalo usvojiti za dobijanje aproksimativnog rešenja.

7. Na dva drvena balvana prečnika D i d dužine L, položena je drvena greda iste dužine L, širine b i težine G sa preputima c. Navesti jednacine iz kojih se može odrediti napadna tačka dodatne težine P kako bi greda zauzela horizontalan položaj.

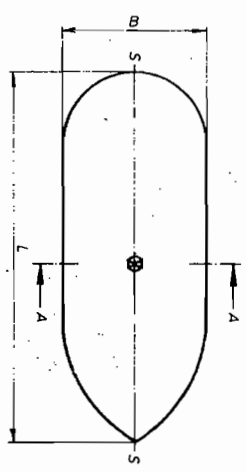


2.5. STABILNOST TELA PRI PLIVANJU

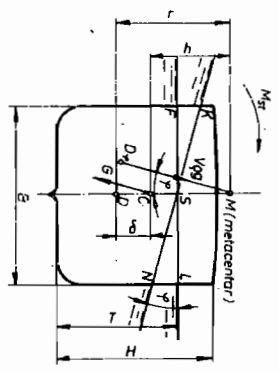
Telo koje pliva može biti u stabilnoj, labilnoj ili indiferentnoj ravnoteži, što zavisi od položaja težišta tela i napadne tačke sile potiska. Sva tri moguća položaja ravnoteže tela koja slobodno plivaju na površini tečnosti, sa položajem karakterističnih tačaka prikazani su na slici.



Ukratko će se navesti šta utiče na plovnost tela, uzimajući za primer brod. Posmatraće se stabilnost kretanja broda u odnosu na njegovu uzdužnu osu, tzv. ljuljanje broda. Moment stabilnosti ostvaruje spreg sila potiska Vpg i težine broda G (iz zakona plivanja obe sile su iste); on deluje na brod i biće koristan (pozitivan) ako se pod njegovim delovanjem brod vraća u ravnotežni položaj. Zato je potrebno ispuniti uslov



PRESEK A-A
h - metacentarsko visina
r - metacentarsko rastojanje

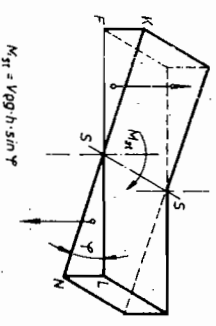


Taj uslov će uvek biti zadovoljen ako se tačka M nalazi iznad težišta tela C. Presek sile potiska, koja deluje u bilo kojoj napadnoj tački D (za dozvoljene uglove nagiba ϕ), i vertikalne ose naziva se tačkom metacentra, tj. metacentar M.

Moment stabilnosti je određen izrazom

$$M_{st} = Vpg \cdot r \cdot \sin \phi$$

$$= Vpg \cdot h \cdot \sin \phi$$

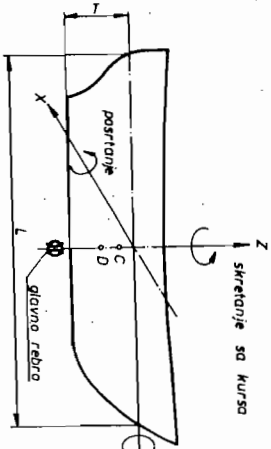


Metacentarsko rastojanje r se određuje iz uslova da je moment stabilnosti jednak zbiru momenata uronjenog SKF i ironjenog SLM klina pri nekom nagnutom položaju (ϕ), i iznosi

$$r = \frac{I}{V}$$

gde je I - moment inercije za osu S-S površine plivanja koja se dobija presekom okvašene površine tela sa slobodnom površinom tečnosti; V - zapremina istisnute tečnosti; δ - rastojanje između težišta tela C i tačke delovanja sile uzgona (potiska) u ravnotežnom položaju (kad na brod ne de-

luje nikakav spoljni moment) D. Tačka D se nalazi u težištu istisnute zapremine.



Od tri moguća obrtanja tela (broda) oko tri koordinatne ose, stabilnost tela treba proveriti za onu osu za koju je moment inercije površine plivanja najmanji. Pošto je moment

inercije najmanji za uzdužnu osu Y, provera stabilnosti za ovu osu garantuje stabilnost i za druge dve ose. U slučaju kad je površina plivanja složena površina, obrtanje će se vršiti oko njene težišne ose za koju i treba odrediti moment inercije.

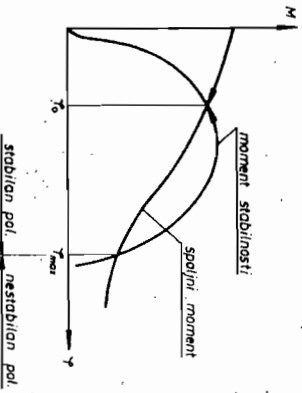
Pri rešavanju zadataka ovog poglavlja treba imati u vidu dva uslova. Prvi je da telo pliva kad je njegova težina jednaka potisku, dakle kad je

$$G = V\rho g,$$

i drugi uslov jeste da telo pliva stabilno kad je metacentarska visina veća od nule, tj. kada je

$$r > \delta, \text{ gde je } r = \frac{I}{V}.$$

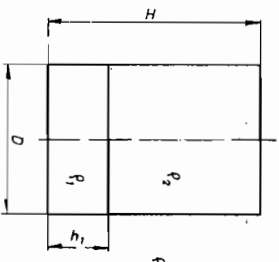
Kombinovanjem ova dva uslova obično se dolazi do rešenja problema.



Za određivanje ravnotežnog položaja plivanja potrebno je pored momenta stabilnosti poznavati i spoljni moment kojim spoljni uticaji deluju na telo koje pliva. Ovi momenti se nanose na isti dijagram u funkciji od ugla nagiba ϕ i njihova presečna tačka određuje maksimalni mogućni

ugao nagiba ϕ_{max} , pri stabilnom plivanju. Za prikazani dijagram spoljnog momenta (npr. od vetra) i momenta stabilnosti telo će plivati stabilno u nekom nagnutom položaju za ugao ϕ_0 u odnosu na horizont, jer za bilo koji trenutni ugao nagiba ϕ na telo deluje ili moment stabilnosti ($\phi > \phi_0$) ili spoljni moment ($\phi < \phi_0$). Ako je trenutni ugao nagiba $\phi > \phi_{max}$, prozrokovan npr. dodatnim udarom vetra, spoljni moment postaje veći od momenta stabilnosti i pod njegovim dejstvom telo prelazi u zonu nestabilnog plivanja.

Primeri.



Uslov plivanja je

$$\frac{D^2 \pi}{4} [(H-h_1)\rho_2 + h_1\rho_1] = \frac{D^2 \pi}{4} h_1 \rho$$

pošto гранични uslov može da se predstavi sa $h \leq H$ sledi

$$\frac{D^2 \pi}{4} [(H-h_1)\rho_2 + h_1\rho_1] \leq \frac{D^2 \pi}{4} h_1 \rho$$

ili

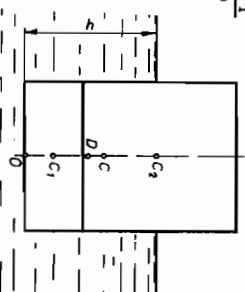
$$H \geq (H-h_1) \frac{\rho_2}{\rho} + h_1 \frac{\rho_1}{\rho}$$

odnosno

$$\frac{H}{h_1} \geq \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho - \rho_2} = 13.$$

Za uslov stabilnog plivanja treba naći težište tela C.

Iz momentne jednačine sledi



$$\frac{D^2 \pi \cdot h \cdot \overline{OC} \cdot \rho}{4} = \frac{\pi^2 \pi}{4} \left[(H-h_1) \rho_2 \cdot \overline{OC}_2 + h_1 \rho_1 \cdot \overline{OC}_1 \right]$$

$$\overline{OC} = \frac{h^2 \rho_1 + (H^2 - h^2) \rho_2}{2 \rho h}$$

Napadna tačka sile uzgona deluje na polovini visine gaza h

$$\overline{OD} = \frac{h}{2}$$

Za stabilno plivanje treba zadovoljiti relaciju $r > \delta$, gde je

$$r = \frac{I}{V} = \frac{D^4 \pi^4}{64 D^2 \pi h} = \frac{D^2}{16 h}, \quad \delta = \overline{CD} = \overline{OC} - \overline{OD} = \frac{h^2 \rho_1 + (H^2 - h^2) \rho_2}{2 \rho h} - \frac{h}{2}$$

Znači

$$\frac{D^2}{16 h} > \frac{h^2 \rho_1 + (H^2 - h^2) \rho_2}{2 \rho h} - \frac{h}{2}$$

$$8 h^2 + D^2 > 56 h^2 + 4 (H^2 - h^2) \rho_1$$

Ako se h zameni relacijom plivanja

$$h = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho} h_1 + \frac{\rho_2}{\rho} H$$

dobija se

$$8(6,5 h_1 + 0,5 H)^2 + 0,25^2 > 52 h_1^2 + 4 H^2$$

$$H^2 - 26 h_1 H - 143 h_1^2 - \frac{1}{32} < 0$$

$$\left(\frac{H}{h_1}\right)^2 - 26\left(\frac{H}{h_1}\right) - 193 < 0$$

$$\left(\frac{H}{h_1}\right) < 32,$$

Krajnji rezultat može da se predstavi nejednakosti-

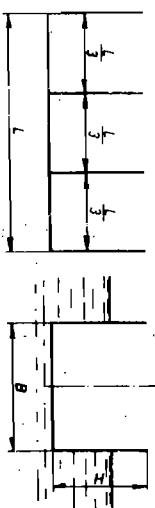
$$13 \leq \frac{H}{h_1} < 32$$

ili

$$325 \text{ mm} \leq h_1 < 300 \text{ mm}$$

Prva nejednakost se odnosi na neophodnu minimalnu visinu plovka koja je potrebna da bi on plivao, a druga na maksimalnu visinu plovka koja je granična u odnosu na željeni položaj plivanja.

2. Ponton dužine $l=30$ m, širine $B=6$ m, visine $H=4$ m i mase $m=360$ t počinjen je sa dve nepropusne pregrade na tri jednaka dela.



Potrebno je proveriti uzdužnu i poprečnu stabilnost plivanja, ako se desio prodor vode u srednju komoru pontona.

Uporediti metacentarske visine oštećenog i neoštećenog pontona. Težište pontona je u tački

$$\left(\frac{l}{2}; \frac{B}{2}; \frac{H}{2}\right); (\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}).$$

Rešenje.

Dubina gaza h neoštećenog pontona se određuje iz uslova plivanja

$$mg = V \rho g$$

gde je V - istisnuta zapremina a ρ - poznata gustina vode.

Odatle je
$$V = \frac{360000}{1000} = 360 \text{ m}^3$$

i dalje
$$L \cdot B \cdot h = 360$$

odnosno
$$h = \frac{360}{L \cdot B} = \frac{360}{30 \cdot 6} = 2 \text{ m}.$$

Određivanje stabilnosti pontona dok je neoštećen za njegovu uzdužnu osu.

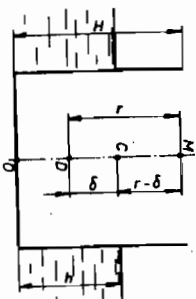
Metacentarsko rastojanje se određuje iz

$$r = \frac{I}{V} = \frac{L \cdot B^3}{12 \cdot L \cdot B \cdot h} = \frac{B^2}{12 h} = \frac{6^2}{12 \cdot 2} = \frac{2}{3} \text{ m}$$

gde je I - moment inercije površine plivanja ($L \cdot B$) za uzdužnu osu.

Rastojanje između težišta pontona C i tačke dejstvovanja sile uzgona D je

$$\delta = \overline{OC} - \overline{OD} = 2 - 1 = 1 \text{ m}$$



Metacentarska visina

$r - \delta$ je veća od nule, obezbedjuje je stabilno plivanje i iznosi

$$r - \delta = 1,5 - 1 = 0,5 \text{ m.}$$

Određjivanje stabilnosti plivanja neoštećenog pontona za njegovu poprečnu osu.

Metacentarsko rastojanje se određuje prema

$$r_1 = \frac{I_1}{V} = \frac{B \cdot L^3}{12 \cdot L \cdot B \cdot H} = \frac{L^2}{12H} = \frac{30^2}{12 \cdot 2} = 37,5 \text{ m}$$

gde je I_1 - moment inercije površine plivanja ($L \cdot B$) za poprečnu osu.

Pošto je rastojanje δ ostalo nepromenjeno, metacentarska visina iznosi

$$r - \delta = 37,5 - 1 = 36,5 \text{ m}$$

i pokazuje da je i moment stabilnosti daleko veći za poprečnu osu.

Dubina gaza h' oštećenog pontona se određuje iz uslova plivanja kada je srednja komora napunjena s vodom do visine gaza h' .

$$\frac{2}{3} LBh' = V$$

odakle sledi

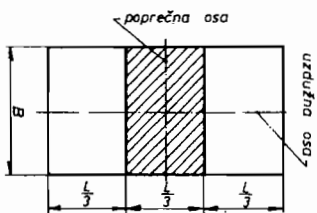
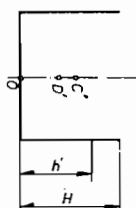
$$h' = \frac{3V}{2LB} = \frac{3 \cdot 360}{2 \cdot 30 \cdot 6} = 3 \text{ m}$$

Određjivanje stabilnosti plivanja oštećenog pontona za njegovu uzdužnu osu.

Metacentarsko rastojanje se određuje iz

$$r_1' = \frac{I_1'}{V} = \frac{\frac{2}{3} \frac{LB^3}{12}}{\frac{2}{3} LBh'} = \frac{B^2}{12h'} = \frac{6^2}{12 \cdot 3} = 1 \text{ m}$$

gde je I_1' - moment inercije neosenčene površine plivanja za uzdužnu osu.



Rastojanje između težišta pontona C' i tačke delovanja sile uzgona D' , je

$$\delta' = OC' - OD' = \frac{H}{2} - \frac{3}{2} = 0,5 \text{ m.}$$

Metacentarska visina je i u ovom slučaju veća od nule, još uvek obezbedjuje stabilno plivanje i iznosi

$$r_1' - \delta' = 1 - 0,5 = 0,5 \text{ m}$$

Određjivanje stabilnosti plivanja oštećenog pontona za njegovu poprečnu osu.

Metacentarsko rastojanje se određuje prema

$$r_1' = \frac{I_1'}{V} = \frac{2 \left[\left(\frac{L}{3}\right)^3 \frac{B}{12} + \left(\frac{L}{3}\right)^3 B \right]}{\frac{2}{3} LBh'} = \frac{2 \left[10^3 \frac{1}{2} + 10^3 \cdot 6 \right]}{20 \cdot 6 \cdot 3} = 36,1 \text{ m}$$

gde je I_1' - moment inercije neosenčene površine plivanja za poprečnu osu.

Pošto je rastojanje δ' već ranije dobijeno, metacentarska visina iznosi

$$r_1' - \delta' = 36,1 - 0,5 = 35,6 \text{ m}$$

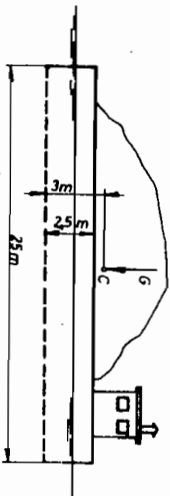
odnosno, moment stabilnosti oštećenog pontona za njegovu poprečnu osu je, kako se to moglo i očekivati, pozitivan.

Zadaci.

1. Drvena greda (talpa) dimenzije 0,1x0,3x0,5 m gustine $\rho = 0,7 \frac{t}{m^3}$; je položena u vodu. Odrediti dubinu uranjanja i položaj stabilnog plivanja.

Rešenje.

Stabilan položaj plivanja grede je kada je njena površina plivanja 0,3x0,5 m², i za taj položaj dubina uranjanja iznosi 0,07 m.



2. Barža

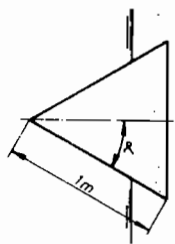
oblika paralelopipeda ima dimenzije 10x25x2,5 m³. Masa natovarene barže je 500 t i njeno težište se nalazi na vertikalnoj osi simet-

rije barže na visini 3 m od dna. Odrediti metacentarsku visinu za obrtanje oko uzdužne ose i odrediti da li barža stabilno pliva. Ako se barža obrnula za 5° oko ove ose, koji je moment stabilnosti koji baržu vraća u ravnotežni položaj?

Rešenje.

$$\overline{MC} = h = 2,17 \text{ m} ; \quad M_{st} = 926300 \text{ Nm}$$

3. Naći minimalni ugaon α pri kome će drvena ravnokraka prizma dužine 1 m plivati stabilno u predstavljenom položaju. Gustina vode $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$, gustina drveta $\rho_d = 400 \frac{kg}{m^3}$.



Rešenje.

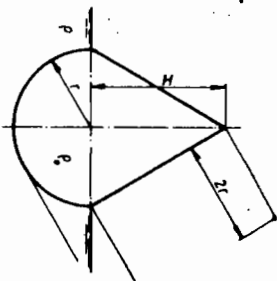
$$\alpha > 37,34^\circ$$

4. Homogeno telo sastavljeno iz poluvaljka r, visine 2r i ravnokrake prizme visine H postavljene na poluljku pliva u vodi. Ravan plivanja prolazi kroz osu poluva-

ljka. Odrediti odnose $\frac{\rho}{\rho_0}$ i $\frac{H}{r}$ za prikazan položaj stabilnog plivanja.

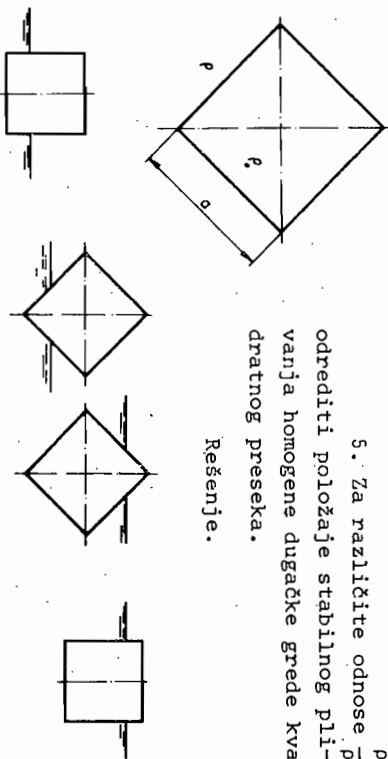
Rešenje.

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{2H}{r\pi} ; \quad 0 < \frac{H}{r} < \sqrt{2}$$



5. Za različite odnose $\frac{\rho}{\rho_0}$ odrediti položaje stabilnog plivanja homogene dugačke grede kvadratnog preseka.

Rešenje.



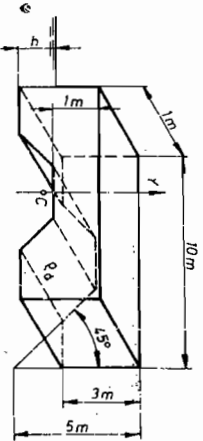
$$0 < \frac{\rho}{\rho_0} < 0,212 ; \quad 0,281 < \frac{\rho}{\rho_0} < 0,713 ; \quad 0,788 < \frac{\rho}{\rho_0} < 1$$

6. Za homogen

drveni objekt prikazan na slici treba odrediti da li se nalazi u položaju stabilnog plivanja. Telo pliva u vodi gustine $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$; njegovo težište se nalazi ispod ravnje površine za $y_G = 1,5 \text{ m}$; gustina tela je $\rho_d = 320 \frac{kg}{m^3}$. Ostali potrebni podaci su dati na slici.

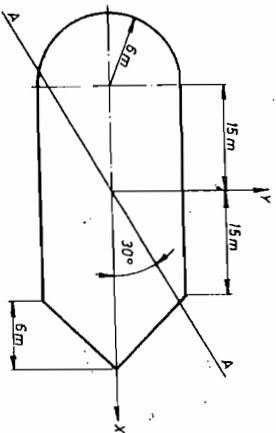
Rešenje.

$h = 1 \text{ m}$; metacentarska visina za obrtanje oko poprečne ose



iznosi $h_p = 8,09$ m; metacentarska visina za obrtanje oko uzdužne ose iznosi $h_u = -1,2225$ m, telo je u nestabilnom položaju plivanja (obrnucе se oko uzdužne ose).

7. Na slici



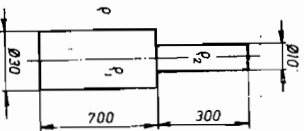
je prikazana vodena površina od broda čija je masa 1500 t. Centar dejsstva sile uzgona je 1,5 m ispod slobodne površine, a težište broda se nalazi 0,6 m iznad slobodne površine. Izračunati metacentarsku visinu za ose x i y i za osu A-A koja je nagnuta za ugao 30° prema x-osi.

Rešenje.

$$h_x = 1,263 \text{ m}; \quad h_y = 34,624 \text{ m}; \quad h_A = 9,603 \text{ m}$$

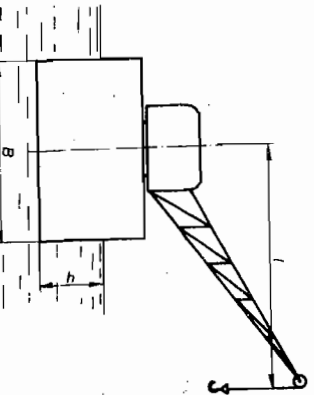
8. Drveni cilindar gustine $\rho_1 = 450 \text{ kg/m}^3$ učvršćen je na metalni cilindar gustine $\rho_2 = 7500 \text{ kg/m}^3$. Da li ovo telo u vertikalnom položaju stabilno pliva u vodi gustine $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

Rešenje.
nestabilno ($h = -0,288 \text{ m}$)



9. Za pontonu

dimenzije $l \times B = 60 \times 10 \text{ m}^2$ i gaza $h = 1,5$ m postavljen je kran nosivosti 50 kN na maksimalnom braku strelu $l = 15$ m. Odrediti udio nativna plivajuće dizalice pri punom optere-



ćenju ako je težište na 4,25 m iznad dna pontona.

Rešenje.

$$\phi = 2^\circ 23'$$

2.6. RELATIVNO MIROVANJE TEČNOSTI

Tečnost, u sudu koji se kreće jednoliko (konstantnim ubrzanjem), nalazi se u stanju relativnog mirovanja. Stanje relativnog mirovanja se razlikuje od stanja mirovanja, jer na tečnost pored gravitacione sile, dejstvuju i druge sile, zavismo od vrste kretanja suda.

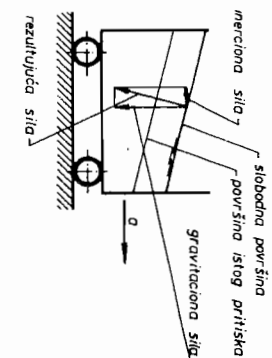
Problemi ovog poglavlja se rešavaju primenom osnovne jednačine za statiku fluida koja glasi

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} p = Xdx + Ydy + Zdz$$

Ovde je označeno sa: ρ - gustina tečnosti; dp - elementarna promena pritiska u tečnosti; dx, dy, dz - elementarna pomeranja u pravcima osa Dekartovog koordinatnog sistema; X, Y i Z - sile jedinične mase koje dejstvuju na tečnost (dimenzija sile X, Y, Z je jednaka dimenziji ubrzanja).

Prema vrsti kretanja suda sa tečnošću, razlikuje se relativno mirovanje pri translaciji i relativno mirovanje pri rotaciji.

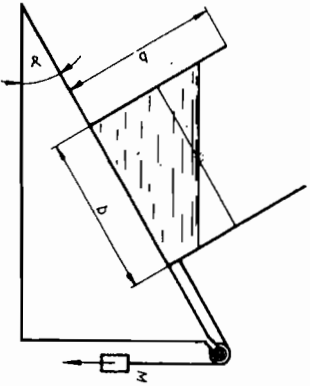
2.5.1. RELATIVNO MIROVANJE PRI TRANSLACIJI



Na tečnost koja se sa sudom u kome se nalazi kreće translatorno konstantnim ubrzanjem (ili usporenjem) pored gravitacione, dejstvuje još i inerciona sila. Pošto je tečnost u mirovanju prema sudu njena slobodna površina, odnosno površina istog pritiska

ska, se postavlja normalno na pravac dejstvovanja rezultujuće sile. (Tangencijalna sila bi izazvala pomeranje tečnosti). Najčešće je potrebno odrediti ugao nagiba slobodne površine i pritisak na nekom mestu u tečnosti. Do rešenja se dolazi integracijom osnovne jednačine. Integraciona konstanta se određuje iz poznatog graničnog uslova, npr. poznatog pritiska u nekoj tački tečnosti. Tok rešavanja jednog karakterističnog problema iz ove oblasti je dat u primeru.

Primer.



Kutija oblika kocke, sa stranom $b=1$ m, do polovine je napunjena vodom i preko nepomičnog kotura je povezana sa tegom mase $M=300$ kg. Kutija klizi bez trenja po strmoj ravni čiji je ugao nagiba $\alpha=30^\circ$. Naći raspored pritiska duž dna i duž bočnih strana kocke. Tre-
nje u koturu zanemariti. Ku-

tija je bez težine. Pretpostaviti da nema prosipanja vode.

Rešenje.

Dinamička jednačina ravnoteže za sud koji se kreće po strmoj ravni određuje vektor ubrzanja suda

$$mgsin\alpha + ma - N(\mu - a) = 0$$

gde je m - masa vode u kutiji

$$a = \frac{M}{M+m} \sin\alpha = \frac{300}{500} (300 - 500 \cdot \frac{1}{2}) = 0,1 \text{ g}$$

Za određivanje ugla nagiba slobodne površine najbolje je koordinatni sistem postaviti u težište slobodne površine, zbog najjednostavnijih graničnih uslova. Za tako usvojen koordinatni sistem osnovna jednačina za statiku fluida glasi

$$\frac{1}{\rho} dp = X dx + Y dy + Z dz$$

gde je, $X = 0$; $Y = -g \cos\alpha$;
 $Z = -g \sin\alpha$

$$\frac{1}{\rho} dp = -g \cos\alpha dy - (g \sin\alpha) dz$$

Kako je $p = \text{const}$. integracijenjen se dobija

$$p = -g \cos\alpha y - (g \sin\alpha) z + C$$

Integraciona konstanta C

se određuje iz graničnih uslova za $x=y=z=0$, $p=p_a$ i iznosi $p_a = C$, tako da je

$$p - p_a = -g \cos\alpha y - (g \sin\alpha) z$$

Jednačina slobodne površine se dobija iz uslova da je pritisak u svakoj njenoj tački jednak atmosferskom, odnosno $p = p_a$, pa je

$$-g \cos\alpha y - (g \sin\alpha) z = 0$$

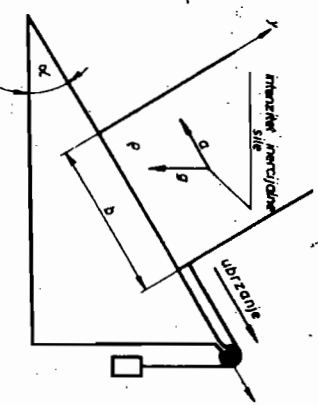
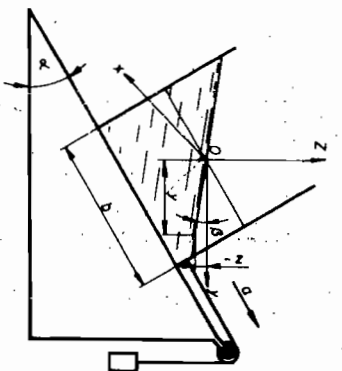
$$\text{ili} \quad \text{tg} \beta = \frac{-z}{y} = \frac{\cos\alpha}{g \sin\alpha} = \frac{0,1 \frac{\sqrt{3}}{2}}{g + 0,1 \frac{1}{2}} = 0,0825$$

$$\beta = 4,72^\circ$$

Za određivanje rasporeda pritiska duž dna i bočnih

strana kocke pogodnije je uzeti koordinatni sistem koji prolazi kroz te površine. Za ovaj, novi, koordinatni sistem granični uslovi za određivanje integracione konstante su nešto komplikovaniji, ali se zato lako dobija raspored pritiska u funkciji jedne promenljive,

$$X = -g \sin\alpha; \quad Y = -g \cos\alpha$$



$$\frac{1}{\rho} dp = X dx - Y dy$$

$$\frac{1}{\rho} p = -(a + g \sin \alpha) x - g \cos \alpha y + C$$

Za $x = \frac{b}{2}, y = \frac{b}{2}, p = p_a$

$$\frac{1}{\rho} p_a = -(a + g \sin \alpha) \frac{b}{2} - g \cos \alpha \frac{b}{2} + C$$

$$C = \frac{1}{\rho} p_a + (a + g \sin \alpha) \frac{b}{2} + g \cos \alpha \frac{b}{2}$$

$$\frac{1}{\rho} (p - p_a) = -(a + g \sin \alpha) \left(x - \frac{b}{2}\right) - g \cos \alpha \left(y - \frac{b}{2}\right)$$

raspored pritiska duž dna se dobija za $y=0$

$$p = p_a - \rho (a + g \sin \alpha) \left(x - \frac{b}{2}\right) + \rho g \frac{b}{2} \cos \alpha$$

raspored pritiska duž zadnje strane ($x=b$)

$$p = p_a + \rho g \frac{b}{2} \sin \alpha - \rho g \cos \alpha \left(y - \frac{b}{2}\right)$$

raspored pritiska duž prednje strane ($x=0$)

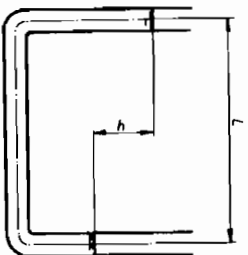
$$p = p_a - \rho (a + g \sin \alpha) \frac{b}{2} - \rho g \cos \alpha \left(y - \frac{b}{2}\right)$$

Napomena. Sile po jedinici mase, koje ulaze u osnovnu jednačinu za statiku fluida, treba prvo ucrtati na karakterističnoj skici vezanoj za problem, pa zatim ih sa odgovarajućim predznakom unositi u osnovnu jednačinu, prema ranije usvojenoj orijentaciji koordinatnog sistema.

Zadaci.

1. Pokazati da je slobodna površina tečnosti u sudu, koji slobodno (bez trenja) klizi niz strmu ravan, paralelna strmoj ravni.

2. Za merenje ubrzanja na električnim lokomotivama služi U cev napunjena vodom. Rastojanje između vertikalnih cevi je $L = 200$ mm. Odrediti ubrzanje "a" električnog voza koji se kreće jednako ubrzano i paralelno ravni u kojoj leži osa cevi, ako je razlika nivoa vode $h = 100$ mm.



3. Pri kretanju automobila uz brdo nagiba $\alpha = 30^\circ$ treba odrediti ubrzanje pomoću U cevi. Prilikom izvođenja ogle- da meri se ugaon θ . a) Postaviti obrazac za ubrzanje a u kojem će figurisati merena veličina θ .

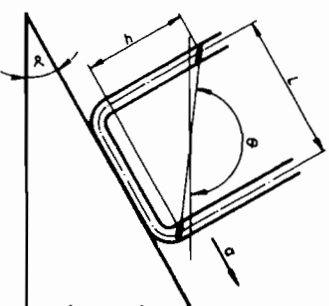
Rešenje.

$$a = 0,5 g$$

b) Ako je $L = 50$ mm, $\theta = 150^\circ$ pita se kolika je visina h i koliko je ubrzanje a izraženo preko g . c) Da li visina h zavisi od gustine upotrebljene tečnosti.

Rešenje.

a) $a = -g \sin \alpha + g \cos \alpha \tan(180^\circ - \theta + \alpha)$; b) $a = g$; $h = 86,6$ mm; c) ne zavisi

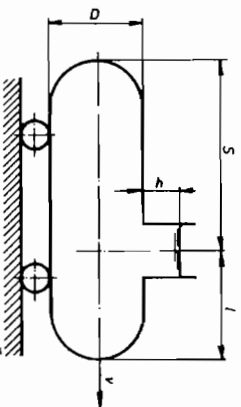


4. Vagon - cisterna kreće se po horizontalnom putu brzinom $v = 36$ km/h. Dimenzije cisterne prema slici su: $D = 2$ m; $h = 0,3$ m; $l = 4$ m. U jednom trenutku vož počinje da koči i cisterna se zaustavlja na putu dužine $L = 100$ m. Smatrajući ovo kretanje

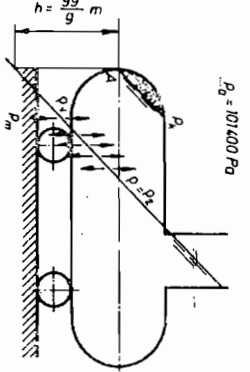
jednoliko usporenim, odrediti silu pritiska vode na prednji bočni zid cisterne. Gustina vode je $\rho = 1000$ kg/m³.

Rešenje.

$$F = 50,22 \text{ kN}$$



5. Koliko usporenje treba da bude u prethodnom zadatku da bi za vrednost $S=6\text{ m}$ i $P_a = 101400\text{ Pa}$ u tački A voda počela da isparava. Napon pare vode je $P_K = 2400\text{ Pa}$. Objasniti po-našanje vode kad je pritisak u tački A manji od P_K .



Rešenje.

$$- a = 18,63 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Sa porastom usporenja linija slobodne površine postaje strmija, a pritisak u tački A sve manji. Kada pritisak u tački A postane kritičan, tj. $p=P_K$, nastaje intenzivno isparavanje vode. Nastale pare zauzimaju prostor koji je napustila voda. Sa daljim porastom usporenja parni prostor se povećava ali pritisak u njemu ostaje konstantan i jednak P_K . (Treba naglasiti da je ceo ovaj proces složeniji jer se menja temperatura vode i okoline, što utiče na veličinu P_K .)

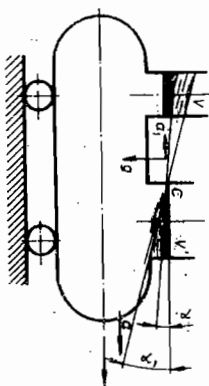
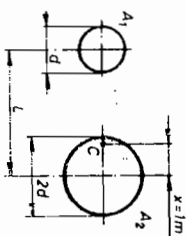
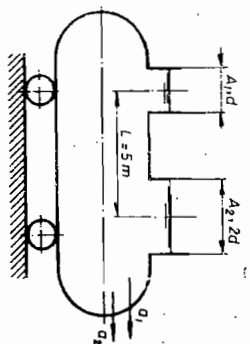
6. Odrediti liniju slobodne površine za cisternu koja se ubrzano krećala ubrzanjem a_1 , a zatim dodatnim ubrzanjem a_2 .

Rešenje.

Linija atmosferskog pritiska prolazi kroz težište slobodnih površina A_1 i A_2 odnosno kroz tačku C. Ovaj uslov zadovoljava uslov jednakosti zapremina ($V=V'$). Za ubrzanje a_1 ,

$$\text{tg } \alpha = \frac{a_1}{g}$$

Težište oko koga se vrši zakaoženje slobodne površine, kako je već rečeno, nalazi se u tački C ($x=1\text{ m}$), težištu po-



vršine A_1 i A_2 .

Kada na tečnost deluje veće ubrzanje, u ovom slučaju $a_1 + a_2$, ugao nagiba slobodne površine iznosi

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{a_1 + a_2}{g}$$

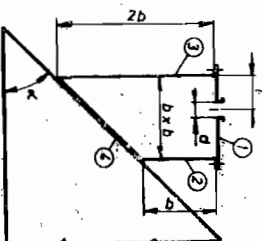
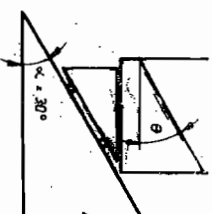
a tačka oko koje će se vršiti zakaoženje slobodne površine će se nalaziti u položaju težišta slobodnih površina A_1 i A_2 koje su sada, pri nagibu α_1 , elipsastog oblika; a to je ista tačka C ($x=1\text{ m}$).

7. Otvoren rezervoar s vodom ubrzava se niz strmu ravan konstantnim ubrzanjem $a=4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Koliki je ugao nagiba slobodne površine prema horizontu? Nagib strme ravni je 30° .

Rešenje.

$$\theta = 23,9^\circ$$

8. Po strmoj ravni, čiji je ugao nagiba $\alpha=45^\circ$, klizi sud potpuno napunjen vodom. Na sudu se nalazi poklopac sa malim otvorom



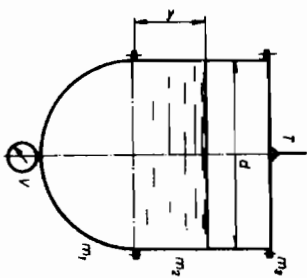
Koji je od prednjeg zida suda udaljen za $\lambda=0,5$ m. Masa praznog suda je 150 kg, $b=1$ m, koeficijent trenja dna suda o površinu strme ravni $\mu=0,278$. Odrediti silu pritiska vode na poklopac, dno i zidove suda.

Rešenje.

$$a=5 \frac{m}{s^2}; \quad F_1=0; \quad F_2=4,905 \text{ kN}; \quad F_3=9,013 \text{ kN};$$

$$F_4=13,31 \text{ kN}$$

9. Cilindrični sud sa



tača $m_2=30$ kg i masa poklopa $m_1=20$ kg.

Rešenje.

$$F = 16,12 \text{ kN};$$

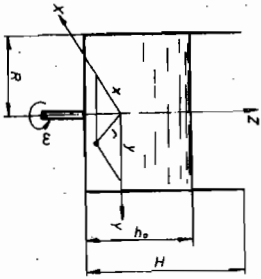
$$T = 7,62 \text{ kN}$$

2.6.2. RELATIVNO MIROVANJE PRI ROTACIJI

Usled rotacije tečnosti kon-

stantnom ugaonom brzinom oko nepokretne ose, na tečnost, pored gravitacione sile, dejstvuje i centrifugalna sila. Pod dejstvom tih sila slobodna površina tečnosti zauzima specifičan oblik koji se određuje iz osnovne jednačine za statiku fluida. Osnovna jednačina je

$$\frac{1}{\rho} dp = X dx + Y dy + Z dz,$$



gde su $X=x\omega^2$; $Y=y\omega^2$; $Z=-g$ - sile po jedinicama mase. Zamena u gornju jednačinu i integracija daju

$$\frac{1}{\rho} p = \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) - gz + C.$$

Ova jednačina pokazuje da su površine istog pritiska obrtni paraboloidi. Za određivanje konstante C najpogodnije je koordinatni početak postaviti u teme obrtnog paraboloida na kome je pritisak jednak atmosferskom. Zamena graničnih vrednosti za tačku postavljenu koordinatni sistem je: za $r=z=0$ $p=p_a$; tako da se dobija $C = \frac{1}{\rho} p_a$, odnosno

$$\frac{1}{\rho}(p-p_a) = \frac{r^2\omega^2}{2} - gz.$$

Jednačina slobodne površine se dobija za $p=p_a$, tj.

$$r^2\omega^2 = 2gz,$$

i ona ne zavisi od gustine tečnosti nego samo od ugaone brzine.

Pritisak tečnosti je

srazmeran dubini tečnosti što se konstatuje iz izraza za pritisak, koji može da se napiše npr. u tački $A(r_A, z_A)$ kao

$$p_A = p_a + \frac{\rho}{2} r_A^2 \omega^2 - \rho g z_A.$$

Površina istog pritiska npr.

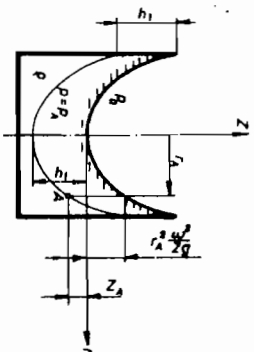
$p=p_A = \text{const.}$ je površina obrtnog paraboloida

$$r^2\omega^2 = 2g(z+h_1),$$

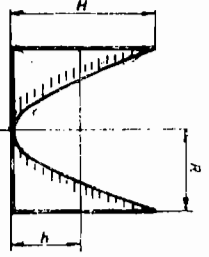
gde je

$$h_1 = |z_A| + \frac{r_A^2 \omega^2}{2g},$$

odnosno, površina istog pritiska je površina podudarna sa slobodnom površinom. (Podudarna površina konstantnog pritiska p se poklapa sa slobodnom površinom ako se pomeri verti-



Kalno naviše za visinu h_1).



paraboloid, dobija se

$$R^2 \omega^2 h = \frac{1}{2} R^2 \omega^2 h^2,$$

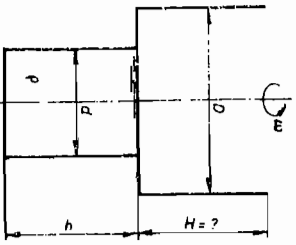
tj.

$$h = \frac{1}{2} H$$

- visina za koju se podignu krajevi paraboloida jednaka je visini za koju se spusti teme paraboloida, što važi samo za slučaj kada je zapremina tečnosti pre i za vreme obrtanja ostala nepromenjena.

Osnovni izrazi za rešavanje problema ovog pođlavlja su jednačine slobodne površine i odnos zapremine pre i za vreme obrtanja. Jednačina slobodne površine može da se napiše više puta što zavisi od broja poznatih i traženih veličina.

Primeri.



1. Donji deo suda koji se sastoji iz dva koaksijalna cilindra prečnika D i d je napunjen tečnošću (ρ). Za obrtanje konstantnom ugaonom brzinom ω oko ose suda, pri kome slobodna površina dodiruje dno suda, potrebno je odrediti visinu gornjeg dela suda, tako da ukupna količina tečnosti ostane u sudu.

Rešenje.

Neo tečnosti iz donjeg dela suda usled obrtanja prelazi u

gornji deo, gde zauzima položaj prikazan na slici. Obe ucertane parabole su podudarne ali pomerene po vertikali za visinu h_1 . Visina H se određuje iz uslova da se zapremina tečnosti koja nedostaje u donjem sudu nalazi u gornjem

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \pi}{4} h = \int_{h_1+h}^{h_1+H} \pi (R^2 - r^2) dz \quad (1)$$

Zamenom $r^2 = \frac{2gz}{\omega^2}$ u (1) gde je ω^2 određeno iz uslova da slobodna površina tečnosti dodiruje dno suda

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 \omega^2 = 2gh \quad \text{tj.} \quad \omega^2 = \frac{2gh}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} \quad (2)$$

$$\frac{d^2 \pi}{2 \cdot \frac{d^2}{4}} h = \pi \int_{h_1+h}^{h_1+H} \left(R^2 - \frac{d^2}{4H^2} z^2 \right) dz$$

$$\frac{d^2}{8} h = R^2 H - \frac{d^2}{8H} \left[H^2 + 2(h_1+H)H \right] \quad (3)$$

Ako se ponovo iskoristi jednačina obrtnog paraboloida

$$R^2 \omega^2 = 2g(h_1+h+H)$$

odnosno

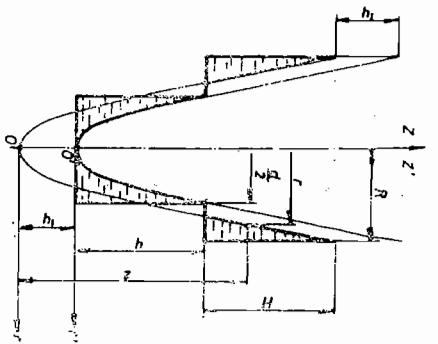
$$\frac{R^2 2gH}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 2g(h_1+h+H)$$

R^2 može da se zameni u (3) sa

$$R^2 = \frac{d^2}{4H} (h_1+h+H)$$

te se dobija

$$\frac{d^2}{8} h = \frac{d^2 H}{4H} (h_1+h+H) - \frac{d^2}{8H} H \left[H + 2(h_1+h) \right]$$



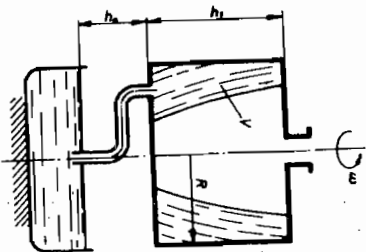
tj.

$$h = H$$

Napomena. U ovom problemu jednačina obrtnog paraboloida je iskorišćena tri puta. Dvaput je upotrebljena da bi se veličine r i R izrazile preko z i $(h+h_1+H)$, a jedanput da bi se odredilo ω^2 . Zadržaj jednačina

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 \omega^2 = 2gh,$$

napisana je u koordinatnom sistemu r',z' , dok su prve dve jednačine predstavljene sa r,z koordinatama.

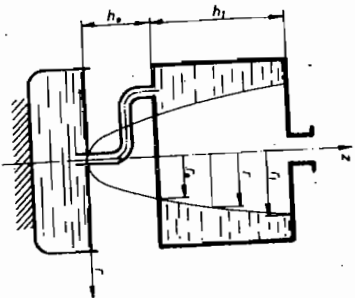


2. U cilindričnom sudu poluprečnika $R=250$ mm i visine $h_1=300$ mm nalazi se $V=45$ dm³ tečnosti. Sud se obrće oko središnje ose, a na dno je priključena savijena cev čiji se kraj nalazi u osi obrtanja i zagnjuren je u nepokretnu tečnost. Nivo donje tečnosti je na dubini $h_0=460$ mm ispod dna suda. Odrediti ugaonu brzinu ω^* sa kojom treba obrtati sud pa da sva tečnost ostanu u njemu. Objasniti smer kretanja tečnosti pri ω^* . Gustina tečnosti je 1000 kg/m³.

Rešenje.

Obrtni paraboloid je ucrtan na slici. Teme obrtnog paraboloida se nalazi u osi cevi na nivou nepokretne tečnosti u donjem sudu. Da bi zapremina V ostala u sudu, sud se mora obrtati ugaonom brzinom ω^* . Ona se određuje izjednačavajući zapreminu tečnosti za vreme obrtanja sa V .

$$V = \int_0^{h_0+h_1} \pi(R^2-r^2)dz$$



ako se r^2 zameni sa

$$r^2 = \frac{2gz}{\omega^{*2}}$$

dobija se

$$V = \pi \int_0^{h_0+h_1} R^2 z - \frac{2g}{\omega^{*2}} \frac{z^2}{2} dz$$

tj.

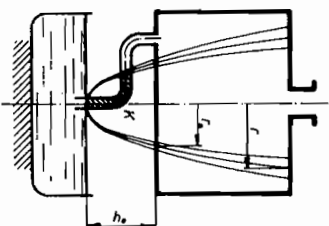
$$\omega^{*2} = \frac{g(2h_0+h_1)}{R^2 - \frac{V}{\pi h_1}} = \frac{9,81(2 \cdot 0,46 + 0,3)}{0,25^2 - \frac{0,0045}{\pi \cdot 0,3}} = 812,505$$

odnosno

$$\omega^* = 28,5 \text{ rad/s}$$

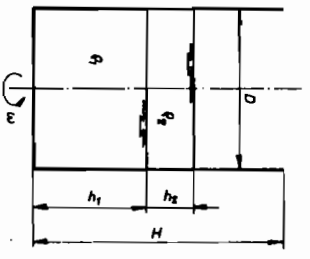
Pri povećanju ugaone

brzine $\omega > \omega^*$ obrtni paraboloid postaje uži i zapremine tečnosti u sudu se povećava, odnosno kroz spojnu cev tečnost se penje u gornji sud. Pri smanjenju ugaone brzine $\omega < \omega^*$ paraboloid se širi, zapremine tečnosti u sudu se smanjuje, odnosno tečnost kroz spojnu cev ističe u donji rezervoar.



Promena ugaone brzine izaziva kretanje tečnosti kroz spojnu cev. Pri tome se tečnost kreće kroz osenčenu zonu u kojoj dejstvuje potpritisak. Najniži pritisak u cevni je u tački K, ali je on prema datim podacima ($h_0=460$ mm) daleko iznad mogućnog napona pare P_K tečnosti.

3. Cilindričan sud visine $H=1,6$ m i prečnika $D=1$ m napunjen je do visine $h_1=0,7$ m vodom gustine $\rho_1=1000$ kg/m³, a odatle do visine $h_2=0,3$ m uljem gustine $\rho_2=0,8$ g/cm³. a) Naći oblik razdelne površine vode i ulja, ako se cilindar obrće konstantnom ugaonom brzinom tako da slobodna površina dodiruje dno suda. b) - Za ustaljeno obrtanje naći za-



preminu ulja koja je istekla. c) -
 Maci raspored pritiska na dno suda.
 Rešenje.

Polazeći od osnovne jednačine zaključuje se da razdelna površina mora da je poudarna sa slobodnom površinom tj. da ima oblik obrtnog paraboloida, jer na toj površini pritisak mora da bude konstantan; u protivnom bi došlo do mešanja fluida. Nije realno da se

predpostavi mešanje fluida jer se tečnost nalazi u stanju mirovanja prema sudu.

$$\frac{1}{\rho} dp = Xdx + Ydy + Zdz$$

$$X = x\omega^2; Y = y\omega^2; Z = -g$$

$$\frac{1}{\rho} dp = \frac{\omega^2}{2} \cdot r^2 - gz + C$$

$$P_0 = \frac{1}{2}(r^2\omega^2 - 2gz) + C$$

$$\frac{P - P_0}{\rho} = \frac{1}{2}(r^2\omega^2 - 2gz) \quad (1)$$

Iz uslova da sva

voda ostaje u sudu određuje se visina h_0 - za koliko se paraboloid razdelne površine nalazi ispod paraboloida slobodne površine.

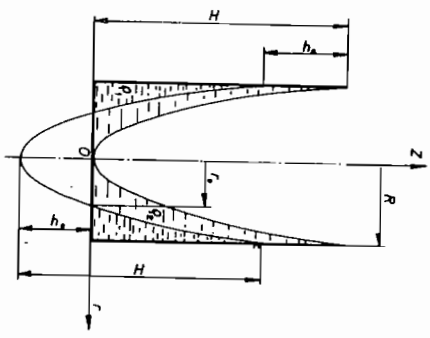
$$h_1 - \frac{D^2\pi}{4} = \frac{1}{2}H - \frac{D^2\pi}{4} - (h_0 - \frac{D^2\pi}{4} - \frac{1}{2}r_0^2\pi h_0)$$

Ako se u ovoj jednačini r_0^2 zameni iz relacija

$$r_0^2\omega^2 = 2gh_0 \quad \text{i} \quad R^2\omega^2 = 2gH$$

sa

$$r_0^2 = \frac{D^2}{4} \frac{h_0}{H}$$



određjuje se h_0 kao

$$h_1 = \frac{1}{2}H - h_0 + \frac{1}{2} \frac{h_0^2}{H}$$

odnosno

$$h_0^2 - 2Hh_0 + H^2 - 2Hh_1 = 0$$

$$h_0 = \frac{2H \pm \sqrt{4H^2 - 4(H^2 - 2Hh_1)}}{2}$$

$$= \frac{2 \cdot 1,3 \pm \sqrt{4 \cdot 1,3^2 - 4(1,3^2 - 2 \cdot 1,3 \cdot 0,7)}}{2} = 0,1 \text{ m}$$

r_0 se određjuje iz

$$r_0 = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{h_0}{H}} = 0,5 \sqrt{\frac{0,1}{1,3}} = 0,125 \text{ m}$$

Sada može da se napiše jednačina razdelne površine

$$r^2\omega^2 = 2g(z + h_0)$$

$$r^2 = \frac{R^2}{H}(z + h_0)$$

$$r^2 = 0,1563(z + 0,1)$$

Zapremina ulja koja je iscurila iz suda se određjuje

je tako što se do prvobitne zapremine ulja oduzme zapremina ulja koje se nalazi u sudu pri obrtanju. Ova druga zapremina se dobija ako se od ukupne količine ulja i vode u sudu oduzme zapremina vode koja je nepromenjena.

Zapremina ulja u sudu pri obrtanju

$$\frac{1}{2} \frac{D^2\pi H}{4} - \frac{D^2\pi h_1}{4} = \frac{D^2\pi}{4} (\frac{1}{2}H - h_1) = \frac{D^2\pi}{4} (0,8 - 0,7) = 0,1 \frac{D^2\pi}{4}$$

Tražena zapremina ulja je

$$\frac{D^2\pi h_2}{4} - \frac{D^2\pi}{4} \cdot 0,1 = \frac{\pi}{4} (0,3 - 0,1) = 0,157 \text{ m}^3$$

Raspored pritiska ulja duž dna se dobija iz jednačine (1) zamenom ω^2 i stavljanjem $z=0$.

za $0 < r < r_0$

$$P = P_a + \frac{1}{2} \rho r^2 \cdot \frac{2gH}{R^2} + \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot r^2 \cdot \frac{2g \cdot 1,3}{0,25}$$

$$P = P_a + 62784 r^2 \text{ [Pa]}$$

Raspored pritiska ulja i vode duž dna se određuje

prema

za $r_0 < r < R$

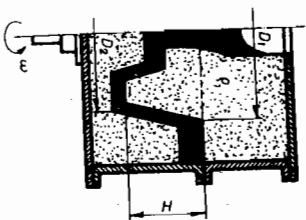
$$p = p_a + \rho_2 g h_0 + \frac{1}{2} \rho_1 (r^2 \omega^2 - 2gh_0)$$

$$p = p_a + \rho_2 g h_0 + \rho_1 g H \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - h_0 \right]$$

$$p = p_a + 800 \cdot g \cdot 0,1 + 1000 \cdot g \cdot 1,6 \left(\frac{1}{0,25} r^2 - 0,1 \right)$$

$$p = p_a + 62784 r^2 - 784,8 \text{ [Pa]}$$

ili



4. Odrediti minimalnu ugaonu brzinu kalupa za livenje pri kojem će lakše primese u livu imati mogućnost da se izdvoje iz istopljenog materijala prema osi obrtanja. Poznati podaci su, $D_1 = 300 \text{ mm}$, $D_2 = 200 \text{ mm}$, $H = 300 \text{ mm}$.

Rešenje.

Delić primese zapremine V i gustine ρ_2 se relativno kreće pod dejstvom vertikalne sile $V(\rho_1 - \rho_2)g$ i hori-

zontalne sile $V(\rho_1 - \rho_2)r\omega^2$. Ukoliko se lakše primese budu kretale niz spoljni kanal one će i dospeti do ose obrtanja. Uslov za to je da postoji projekcija rezultujuće sile niz kanal.

$$F_x \cos \alpha > F_y \sin \alpha$$

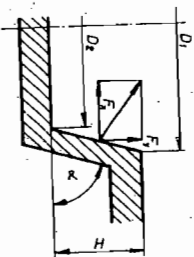
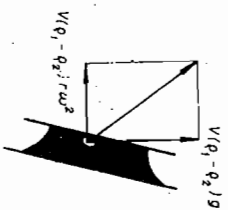
$$V(\rho_1 - \rho_2)r\omega^2 > V(\rho_1 - \rho_2)g \tan \alpha$$

$$r\omega^2 > g \tan \alpha$$

$$\omega^2 > \frac{g(D_1 - D_2)r_{\min}}{2H}$$

$$= 9,81 \frac{2 \cdot 0,3}{(0,3 - 0,2) \cdot 0,1}$$

$$\omega^2 > 588,6 \quad ; \quad \omega > 24 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



5. Odrediti silu pritiska na gornju polovinu loptastog suda poluprečnika $R = 0,6 \text{ m}$, napunjenog vodom do nivoa $h = 1,2 \text{ m}$ u pijezometru, za sledeće slučajeve:

- sud je nepokretan, b) sud se okreće oko vertikalne ose ugaonom brzinom $\omega = 12 \text{ rad/s}$, c) sud slobodno pada u polju zemljine težie, d) sud slobodno pada i okreće se oko vertikalne ose ugaonom brzinom $\omega = 12 \text{ rad/s}$.

Rešenje.

Sila pritiska na gornju

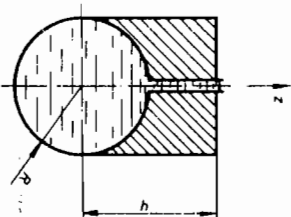
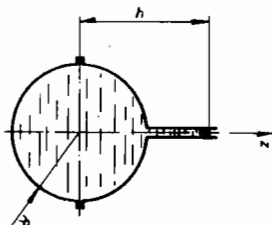
polovinu suda je jednaka težini vode iznad suda do slobodne površine.

$$a) \quad F = \rho \cdot g \cdot V = \rho \cdot g \cdot (R^2 \pi h - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} R^3 \pi)$$

$$F = \rho \cdot g R^2 \pi (h - \frac{2}{3} R)$$

$$F = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,6^2 \cdot 3,14 (1,2 - \frac{2}{3} \cdot 0,6)$$

$$F = 8,87 \text{ kN}$$



b) Slobodna površina se dobija iz osnovne jednačine za mirovanje fluida

$$\frac{dp}{\rho} = Xdx + Ydy + Zdz$$

$$\frac{dp}{\rho} = \omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz$$

$$X = \omega^2 x, \quad Y = \omega^2 y, \quad Z = -g$$

$$p = \frac{\omega^2 (x^2 + y^2)}{2} - g z + C$$

$$\text{za } x=y=z=0 \quad p = p_a \quad + \quad C = \frac{p_a \rho}{\rho}$$

$$\frac{p - p_a}{\rho} = \frac{\omega^2 r^2}{2} - g z$$

za

$$z = z_R \quad p = p_a \quad i \quad r = R$$

$$z_R = \frac{R^2 \omega^2}{2 \cdot g} = \frac{0,6^2 \cdot 1,2^2}{2 \cdot 9,81} = 2,64 \text{ m}$$

$$F = \rho \cdot g \cdot V = \rho \cdot g \cdot [R^2 \pi (h + \frac{z_R}{2}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} R^3 \pi]$$

$$F = 1000 \cdot 9,81 \cdot [0,6^2 \cdot 3,14 (1,2 + \frac{2,64}{2}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 0,6^3 \pi]$$

$$F = 23,5 \text{ kN}$$

c) $X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = g - g = 0$

$$F = 0$$

d) Istim postupkom kao i pod b) sledi:

$$\frac{p - p_a}{\rho} = \frac{r^2 \omega^2}{2}$$

Jednačina slobodne površine

$$p = p_a \Rightarrow r = 0 \quad (\text{z-osa})$$

$$df = p_m \cdot dA$$

$$F = \int_0^R \frac{\rho}{2} \cdot r^2 \omega^2 2\pi r dr$$

$$F = \rho \omega^2 \pi \int_0^R r^3 dr$$

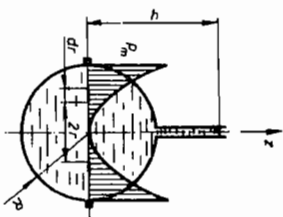
$$F = \frac{\rho \omega^2 \pi R^4}{4}$$

$$F = \frac{1000 \cdot 1,2^2 \cdot 3,14 \cdot 0,6^4}{4}$$

$$F = 14,65 \text{ kN.}$$

Zadaci.

1. Prava cev dužine $L=1,2$ m zatvorena je na jednom kraju i ispunjena vodom, nagnuta je za 30° u odnosu na vertikalnu osu, i obrće se oko te ose kroz svoju središnju tačku, ugaonom brzinom $\omega=3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, kao što je pokazano



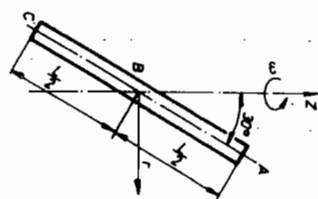
na slici. Potrebno je nacrtati paraboloid nulnog natpritisaka i odrediti pritiske na dnu i srednjoj tački cevi.

Rešenje.

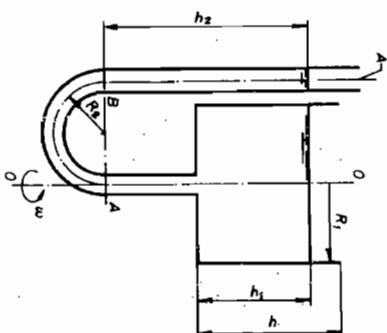
$$r^2 = \frac{2R}{g} (z-1,174);$$

$$p_{mC} = 10,2 \text{ kPa;}$$

$$p_{mB} = 5,1 \text{ kPa}$$



2. Nepokretna cilindrična posuda, poluprečnika R_1 i proizvoljne (dovoljne) visine ($h \gg h_1$), napunjena je do visine h_1 vodom. Na dnu posude zaverena je U cev čiji su izgled i dimenzije dati na slici. Ako posuda rotira oko svoje sopstvene vertikalne ose 0-0 konstantnom ugaonom brzinom ω naći pritisak vode u tačkama A i B nivo vode u otvorenom kraku U cevi smatrati ravnim tj. zanemariti krivinu slobodne površine vode u ovom kraku zbog malog poprečnog preseka cevi. Brojni podaci: $R_1 = 0,1$ m; $R_2 = 0,2$ m; $h_1 = 0,3$ m; $h_2 = 0,5$ m; $\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$; $A = 5 \text{ cm}^2$

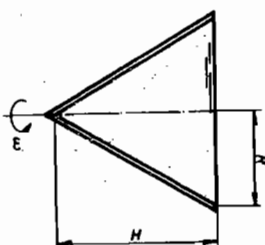


Rešenje.

$$p_{mB} = 12,52 \text{ kPa;}$$

$$p_{mA} = 4,53 \text{ kPa}$$

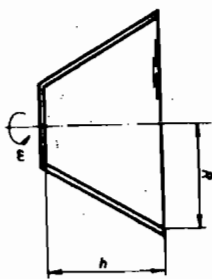
3. Sud oblika pravilnog konusa, poluprečnika R i visine H (prema crtežu), do gore napunjen vodom obrće se oko vertikalne ose. Odrediti ugaonu brzinu suda tako, da slobodna površina vode tangencijalno dodiruje sud po na-



više prečniku. Naći zapreminu vode koja se prosula iz suda. ($\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$).

Rešenje.

$$\omega = \frac{\sqrt{gH}}{R} ; V_1 = \frac{\pi R^2 H}{4}$$



4. Odrediti visinu h suda oblika zarubljenog konusa i ugaonu brzinu ω , da bi na poluprečniku R (prema slici) zid suda tangirao slobodnu površinu, a time slobodne površine dodirivalo dno suda. Zapremina težnosti koja se zadržava u sudu iznosi

$$V = \frac{1}{12} R^3 \pi.$$

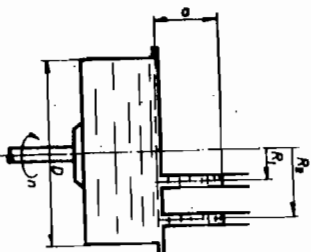
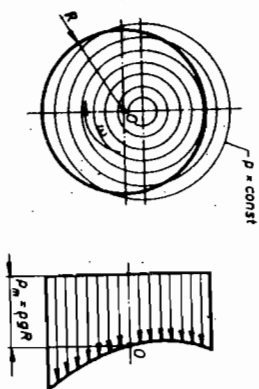
Rešenje.

$$h = R ; \omega^2 = \frac{2g}{R}$$

5. Cilindrični doboš poluprečnika R napunjen vodom, obrće se oko horizontalne ose konstantnom brzinom ω . Odrediti površine istog pritiska uzduž vertikalnog prečnika ako je $\omega^2 = g$.

Rešenje.

$$x^2 + (y-1)^2 = \text{const.}$$



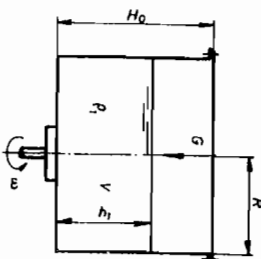
6. Cilindrični sud prečnika $D = 1,2 \text{ m}$, napunjen je vodom do visine $a = 0,6 \text{ m}$ u pijezometrima istih prečnika, koji su postavljeni na poklopac suda na rastojanjima $R_1 = 0,2 \text{ m}$ i $R_2 = 0,4 \text{ m}$ od ose obrtanja, oko koje se sud okreće sa $n = 60 \text{ min}^{-1}$. Odrediti silu F (intenzitet, pravac i smer) kojom voda deluje na poklopac suda

i ukazati kako će se one menjati u slučajevima:
a) ako postoji samo pijezometar na rastojanju R_1 od ose obrtanja;
b) ako postoji samo pijezometar na rastojanju R_2 od ose obrtanja.

Rešenje.

$$+F = 8450 \text{ N}$$

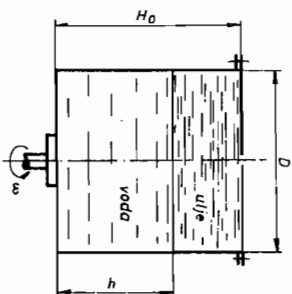
7. U cilindru poluprečnika $R = 0,4 \text{ m}$ i visine $H_0 = 0,7 \text{ m}$ nalazi se $V = 0,25 \text{ m}^3$ vode. Cilindar se obrće oko vertikalne ose konstantnom ugaonom brzinom $10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Izračunati silu koja deluje na zavrtnje poklopa. Pritisak vazduha u sudu je atmosferski, a težina poklopa suda je $G = 50 \text{ N}$.



Rešenje.

$$F = 124 \text{ N}$$

8. Cilindrični sud prečnika $D = 600 \text{ mm}$ i visine $H_0 = 500 \text{ mm}$, napunjen je vodom do visine $h = 400 \text{ mm}$. Preostala zapremina suda je ispunjena uljnom relativne gustine $0,8$. Na sudu se nalazi poklopac sa otvorom u centru i zajedno sa njim se obrće oko vertikalne ose. Odrediti s kolikom ugaonom brzinom ω treba da se obrće sud da bi razdelna površina ulja i vode dodirivala dno suda. Naći silu kojom težnosti deluju na poklopac i dno suda, i raspored pritiska na poklopac i dno suda.



Rešenje.

$$\omega = \frac{\sqrt{5gH_0}}{R} = 16,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} ; \quad +F_D = 1,51 \text{ kN} ;$$

$$+F_d = 2,84 \text{ kN} ;$$

raspored pritiska duž poklopca

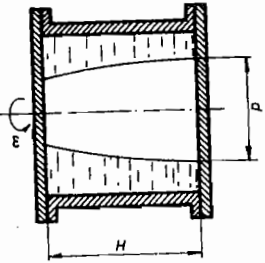
za $0 \leq r \leq r_0$ $p = p_a + 0,8\rho g z$ gde je $z = \frac{5}{2}H_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2$

za $r_0 \leq r \leq R$ $p = p_a + 0,8\rho g H + \rho g z$ gde je $z = \frac{5}{2}H_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2 - H_0$

raspored pritiska duž dna

za $0 \leq r \leq r_0$ $p = p_a + 0,8\rho g H_0 + \rho g z$ gde je $z = \frac{5}{2}H_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2$

za $r_0 \leq r \leq R$ $p = p_a + 0,8\rho g H_0 + \rho g z$ gde je $z = \frac{5}{2}H_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2$



9. Sa kojim brojem obrtaja treba da se obrće kalup za livenje cilindra sa livom da bi razlika u debljini zida cilindra bila manja od 1 mm. Poznati podaci su: $d=0,8 \text{ m}$; $H=0,5 \text{ m}$.

Rešenje.

$$n = 1058 \text{ min}^{-1}$$

10. Odlivci gvozd-

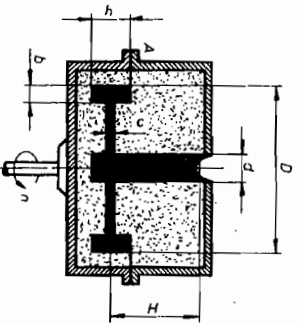
denih kašnika, ($\rho = 7200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)

prečnika $D=1000 \text{ mm}$ sa obodima širine $h=200 \text{ mm}$, debljine $b=80 \text{ mm}$ i debljine diska $c=$

$=40 \text{ mm}$, dobijaju se centrifugalnim livenjem $n=200 \text{ min}^{-1}$

u pešćanom kalupu. Odnediti silu istezanja u završtnjevi-

na A ako se zanemare težine oklopa i livačkog peska. Viskoziteta liva $H=300 \text{ mm}$, prečnik jezgra $d=200 \text{ mm}$.



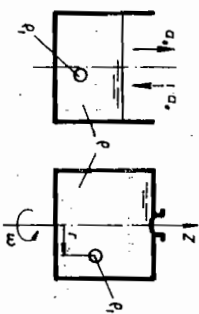
Rešenje.

$$F_A = 167 \text{ kN}$$

11. U tečnost gustine

ρ uronjeno je telo gustine ρ_1 čija je brzina u odnosu na tečnost u početnom trenutku bila jednaka nuli. Odnediti početno ubrzanje tela u odnosu na tečnost ako je:

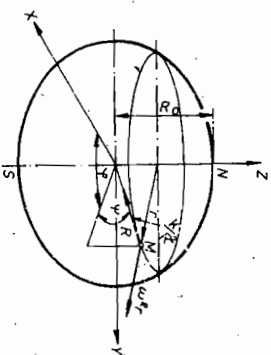
- a) sud sa tečnošću repokretan,
- b) sud se kreće vertikalno naviše ili naniže s konstantnim ubrzanjem, c) sud se obrće oko vertikalne ose konstantnom ugaonom brzinom ω .



Rešenje.

a) $a = -g(1 - \frac{\rho}{\rho_1})$; b) $a = -(g \pm a_0)(1 - \frac{\rho}{\rho_1})$;

c) $a_z = -g(1 - \frac{\rho}{\rho_1})$; $a_r = \omega^2 r(1 - \frac{\rho}{\rho_1})$



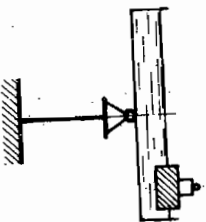
12. Odnediti oblik slobodne površine homogene tečnosti, koja se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω , a izložena je dejstvu privlačne sile obrnuto proporcionalne kvadratu rastojanja od stalne tačke na osi obrtanja. Za $R=R_0$ i $r=0$, $R_z^K = g$.

Rešenje.

$$\frac{gR_0^2}{R} + 2\omega^2 r^2 = gR_0$$
 - jednačina sfere spljoštene na polovima N i S (sferoid).

2.7. KONTROLNA PITANJA

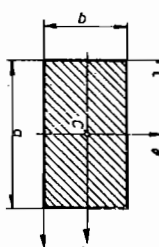
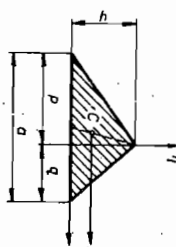
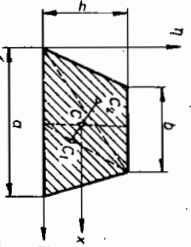
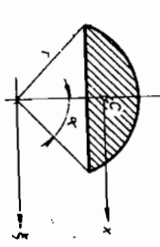
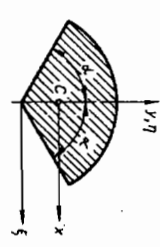
1. Šta je natpritisak a šta depresija?
2. Šta je pijezometarska visina?
3. Za kakve uslove važi Ojlerova diferencijalna jednačina za statiku fluida?
4. Napisati osnovnu hidrostatičku jednačinu za tečnosti i objasniti šta ona predstavlja.
5. Šta su površinske sile?
6. Zašto se slobodna površina homogene sredine javlja kao površina istog pritiska?
7. Čime se objašnjava ravnoteža tečnosti u spojenim sudovima?
8. Na kakvom principu se zasnivaju hidraulične prese?
9. Šta je hidraulični paradoks?
10. Šta znači relativno i apsolutno nivoenje fluida?
11. Šta predstavljaju sile po jedinici mase?
12. Od kojih veličina zavisi oblik površina istog pritiska pri obrtanju suda sa nepokretnom tečnošću u odnosu na sud?
13. Kakvi fluidi (modeli) zadovoljavaju zakone statike fluida?
14. Šta je barotropna tečnost?
15. U staklenom sudu sa vodom pliva drveni štap u vertikalnom položaju. Hoće li se izmeniti nivo vode u sudu ako štap predje u horizontalan položaj?
16. Sud sa vodom je postavljen na stalak prema slici. Da li će se narušiti ravnoteža ako se na površinu vode stavi drvena ploča a na nju teg, tako da zajedno plivaju na površini?

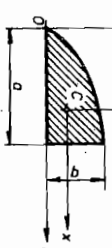
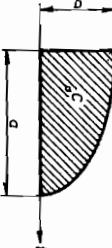
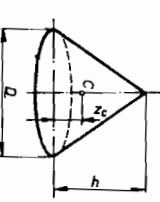
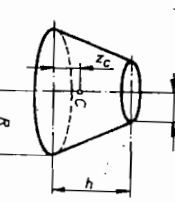
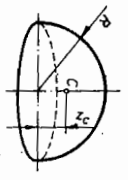


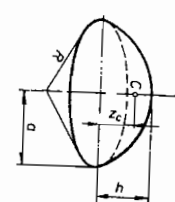
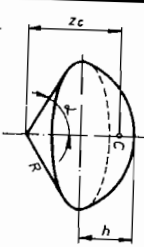
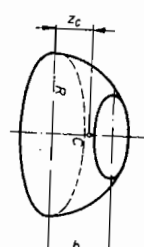
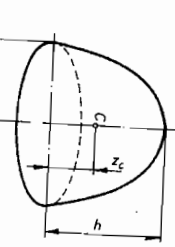
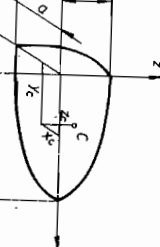
17. U čaši sa vodom pliva komad leda. Kako će se promeniti nivo vode u čaši kada se led istopi? Posmatrati slučajeve kada je: a) led homogen, b) u ledu zamrznut kamenčić, c) u ledu mehur vazduha.
18. Sila uzgona je
a) rezultujuća sila na telo od fluida koji je okružuje
b) rezultujuća sila koja deluje na telo koje pliva
c) sila neophodna za održavanje ravnoteže potopljenog tela
d) ne vertikalna sila za nesimetrično telo
e) srazmerna je zapremini istisnute tečnosti.
19. Telo koje pliva je u stabilnoj ravnoteži
a) kada je metacentarska visina jednaka nuli
b) samo ako je težište ispod centra potiska
c) kada je $\overline{CD} = \frac{I}{V}$ pozitivno i C je iznad D
d) kada je $\frac{I}{V}$ pozitivno
e) kada je metacentar iznad težišta tela.
19. Centar pritiska (tačka u kojoj deluje sila pritiska) je
a) u težištu potopljene površine
b) u težištu prizme pritiska
c) nezavisan od orijentacije površine
d) uvek iznad težišta površine.
20. Vertikalna komponenta sile pritiska potopljene krive površine je jednaka
a) horizontalnoj komponenti
b) sili na vertikalnu projekciju krive površine
c) težini tečnosti vertikalno iznad krive površine
d) nijedan od ovih odgovora.
21. Linija dejstva sile potiska deluje kroz
a) težište težine potopljenog tela
b) težište zapremine plivajućeg tela
c) težište istisnute zapremine tečnosti
d) težište zapremine vertikalno iznad tela
e) težište horizontalnih projekcija tela.

22. Kada se tečnost obrće konstantnom ugaonom brzinom oko vertikalne ose kao kruto telo, pritisak
- a) se smanjuje sa kvadratom radijalnog udaljenja
 - b) se povećava linearno sa radijalnim rastojanjem
 - c) se smanjuje sa kvadratom povećanja visine uzduž vertikalne ose
 - d) inverzno zavisi od visine svake vertikalne linije
 - e) se menja sa kvadratom radijalnog rastojanja.

TABLICA 6

KARAKTERISTIČNI ELEMENTI NEKIH PLOŠTINA I ZAPREMITNA	
slika	moment inercije
<p>PRAVOUGAONIK</p> 	<p>površina težiste</p> $F_C = \frac{a}{2}$ $\eta_C = \frac{b}{2}$ <p>moment inercije</p> $I_x = \frac{ab^3}{12}$ $I_y = \frac{ba^3}{12}$
<p>TROUGAO</p> 	<p>površina težiste</p> $F_C = \frac{ah}{2}$ $\eta_C = \frac{1}{3}h$ <p>moment inercije</p> $I_x = \frac{ah^3}{36}$ $I_y = \frac{ah^3}{12}$ $I_{\eta} = \frac{h}{12}(p^3 + q^3)$
<p>TRAPPEZ</p> 	<p>površina težiste</p> $F_C = \frac{a+b}{2} \cdot h$ $\eta_C = \frac{a+2b}{a+b} \cdot \frac{h}{3}$ <p>moment inercije</p> $I_x = \frac{a^2+4ab+b^2}{a+b} \cdot \frac{h^3}{36}$
<p>KRUŽNI ODSEČAK</p> 	<p>površina težiste</p> $r^2(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2})$ $\eta_C = \frac{4rsin^3\alpha}{6\alpha - 3sin2\alpha}$ <p>moment inercije</p> $I_x = r^4 \left(\frac{4\alpha - sin^4\alpha}{16} - \frac{8sin^6\alpha}{9(2\alpha - sin2\alpha)} \right)$
<p>KRUŽNI ISEČAK</p> 	<p>površina težiste</p> $r^2\alpha$ <p>moment inercije</p> $I_x = \frac{r^4}{72\alpha} (18\alpha^2 + 9a\sin 2\alpha - 32\sin^2\alpha)$

<p>1/2 PARABOLE</p> 	$V = \frac{2}{3}ab$ $F_C = \frac{3}{8}a$ $\eta_C = \frac{3}{8}b$ $I_\xi = \frac{2ab^3}{15}$ $I_\eta = \frac{2a^3b}{7}$ $I_x = \frac{19ab^3}{480}$ $I_y = \frac{8a^3b}{175}$
<p>1/2 ELIPSE</p> 	$V = \frac{\pi ab}{4}$ $F_C = \frac{4a}{3\pi}$ $\eta_C = \frac{4b}{3\pi}$ $I_\xi = \frac{\pi ab^3}{16}$ $I_\eta = \frac{\pi a^3 b}{16}$
<p>KUPA</p> <p>telo</p>	<p>zapremina</p> <p>težište</p>
	$V = \frac{\pi D^2 h}{12}$ $z_C = \frac{h}{4}$
<p>ZARUBljena KUPA</p> 	$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$ $z_C = \frac{h}{4} \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$
<p>POULOPTA</p> 	$V = \frac{2}{3} R^3 \pi$ $z_C = \frac{3}{8} R$

<p>LOPTIN ODSEČAK</p> 	$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$ $z_C = \frac{h}{4} \frac{4R-h}{3R-h}$
<p>LOPTIN ISEČAK</p> 	$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h$ $z_C = \frac{3}{8} (2R-h) = \frac{3}{8} (1 + \cos \alpha) R$
<p>LOPTIN SILOJ</p> 	$V = \pi R (R^2 - \frac{h^2}{3})$ $z_C = \frac{3h}{4} \frac{2R^2 - h^2}{3R^2 - h^2}$
<p>OBRTNI PARABOLOID</p> 	$V = \frac{R^2 \pi h}{2} = 1,571 R^2 h$ $z_C = \frac{h}{3}$
<p>OSMINA ELIPOSODA</p> 	$V = \frac{\pi abc}{6}$ $x_C = \frac{3}{8} a$ $y_C = \frac{3}{8} b$ $z_C = \frac{3}{8} c$

Kinematika se bavi proučavanjem kretanja fluida za koji se pretpostavlja da svojom masom potpuno ispunjava prostor. Pretpostavka se opravdava time što se u zanemarljivo malim zapreminama prostora sadrži vrlo veliki broj molekula fluida. Zato se prostor u kome se fluid nalazi obično naziva poljem ili neprekidnom sredinom.

3.1. LAGRANŽOV NAČIN

Lagranžov metod se sastoji u proučavanju kretanja svakog pojedinačnog delića, tj. u određivanju putanje, brzina i ubrzanja u svakoj tački putanje delića.

Kretanje fluidnog delića je određeno sistemom triju jednačina

$$\begin{aligned}x &= f_1(t) \\y &= f_2(t) \\z &= f_3(t)\end{aligned}$$

Tu su x, y, z , koordinate mesta gde se delić nalazi a t je vreme. Za kretanje svih delića bilo bi potrebno beskonačno mnogo ovakvih sistema. To je razume se nezgodno. Ovakvostatak se može odstraniti uvođenjem početnog položaja delića (u trenutku $t = t_0$) koji se označava sa $x_0 = a, y_0 = b, z_0 = c$; tako da se kretanje celokupnog fluida može predstaviti samo jednim sistemom od tri jednačine

$$\begin{aligned}x &= f_1(a, b, c, t) \\y &= f_2(a, b, c, t) \\z &= f_3(a, b, c, t)\end{aligned}$$

Promenljive a, b, c smatraju se nezavisnim koordinatama (svaki delić ima drugačije a, b, c). Promenljive a, b, c se nazivaju la-

granzanove promenljive.

Brzine i ubrzanja su određeni sledećim izrazima

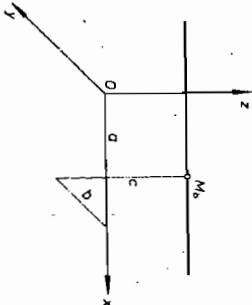
$$\begin{aligned}v_x &= \frac{\partial f_1(a, b, c, t)}{\partial t} = \frac{dx}{dt}; \quad a_x = \frac{\partial^2 f_1(a, b, c, t)}{\partial t^2} = \frac{d^2x}{dt^2}; \\v_y &= \frac{\partial f_2(a, b, c, t)}{\partial t} = \frac{dy}{dt}; \quad a_y = \frac{\partial^2 f_2(a, b, c, t)}{\partial t^2} = \frac{d^2y}{dt^2}; \\v_z &= \frac{\partial f_3(a, b, c, t)}{\partial t} = \frac{dz}{dt}; \quad a_z = \frac{\partial^2 f_3(a, b, c, t)}{\partial t^2} = \frac{d^2z}{dt^2};\end{aligned}$$

Zadaci.

1. Kretanje predstavljeno na slici, dato je sistemom jednačina

$$\begin{aligned}x &= a + ut \\y &= b \\z &= c\end{aligned}$$

Određiti vrstu kretanja, brzine i ubrzanja.



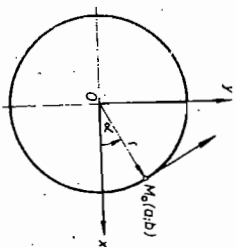
Rešenje. $v_x = u; v_y = 0; v_z = 0; a_x = 0; a_y = 0; a_z = 0$; Kretanje je pravolinijsko i jednoliko.

2. Napisati jednačine za

kretanje, i odrediti brzine i ubrzanja za obrtanje tečnosti konstantnom ugaonom brzinom oko ose z .

Rešenje. $a = x_0; b = y_0; c = z_0$

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha + \omega t) = r \cos(\alpha + \omega t) \\y &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \omega t) = r \sin(\alpha + \omega t) \\z &= c\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}v_x &= -\omega r \sin(\alpha + \omega t); & a_x &= -\omega^2 r \cos(\alpha + \omega t) \\v_y &= \omega r \cos(\alpha + \omega t); & a_y &= -\omega^2 r \sin(\alpha + \omega t)\end{aligned}$$

$$v_z = 0; \quad v = \omega r; \quad a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

3.2. OJLEROV NAČIN

Ojlerova metoda se sastoji u proučavanju brzina, ubrzanja i drugih strujnih veličina koje fluidni delić poseduje u posmatranoj (nepokretnoj) tački polja. Ove veličine se mogu ali ne moraju menjati s vremenom. Ako se ne menja, kretanje je ustaljeno (stacionarno).

Skalarne veličine, brzina i ubrzanje u Ojlerovom načinu opisivani su određene sledećim izrazima

$$p = F(x, y, z, t) \quad a_x = \frac{\partial F_1(x, y, z, t)}{\partial t} = \frac{dv_x}{dt}$$

$$v_x = F_1(x, y, z, t) \quad a_y = \frac{\partial F_2(x, y, z, t)}{\partial t} = \frac{dv_y}{dt}$$

$$v_y = F_2(x, y, z, t) \quad a_z = \frac{\partial F_3(x, y, z, t)}{\partial t} = \frac{dv_z}{dt}$$

$$v_z = F_3(x, y, z, t)$$

U istoj tački prostora, kroz koju teče fluid, brzina i druge strujne veličine se ne menjaju u istom trenutku bez obzira da li se kretanje proučava po Lagranžovom ili Ojlerovom načinu. Preimućstvo Ojlerovog opisivani nad Lagranžovim je u tome što se strujne veličine mogu proveravati.

3.2.1. SKALARNO POLJE

Oblast u kojoj je definisana skalarna funkcija polja $U = U(x, y, z)$ naziva se skalarno polje skalarne veličine U . To znači, da svakoj tački toga polja odgovara po jedna vrednost skalarne veličine U . Odrđjivanje skalara U posmatranog u polju svodi se na proučavanje skalarnih funkcija od promenljivih skalarnih veličina x, y, z pri čemu se pretpostavlja da je skalarna funkcija realna i neprekidna u posmatranom polju tj. da je skalarno polje neprekidno. Ako su koordinate x, y, z proizvoljne, polje je neograničeno, u protivnom je ograničeno. U opštem slučaju, skalarna funkcija položaja $U(x, y, z)$ može da opisuje prostor, površinu ili liniju, te prema tome može se govoriti o prostornom, površinskom ili

linijskom skalarnom polju. Ako, naprimer, skalar U predstavlja temperaturu ili atmosferski pritisak, onda skalarna funkcija $U(x, y, z)$ definiše polje temperature, odnosno, polje atmosferskog pritiska.

Ekviskalarne ili nivoske površine (linije) definišu tačke polja u kojima skalarna funkcija U ne menja svoju vrednost tj. tačke polja za koje je $U = \text{const}$.

Primer.

Šta predstavlja skalarno polje definisano funkcijom $U(x, y, z)$ i napisati jednačine ekviskalarne površine (linije) u slučajevima kada je:

- a) $U = U(x, y, z) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}$
- b) $U = U(r) = \frac{1}{r}$, gde je $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- c) $U = U(x, y, z) = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
gde je $\left| \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| < 1$ ili $x^2 + y^2 - z^2 \geq 0$
- d) $U = U(x, y) = xy$
- e) $U = U(r) = r^2$, gde je $r^2 = x^2 + y^2$
- f) $U = U(x, y) = \frac{1}{x+y}$
- g) $U = U(x) = \frac{1}{x}$.

Rešenje.

a) Polje predstavlja u sve tačke u prostoru $Oxyz$. Ekviskalarne površine su koncentrične sfere određene jedinačnom

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - U_n^2 \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

za $a = U_n$ dobiće se koordinatni početak.

b) Polje sadrži sve tačke prostora, izuzev tačke $x=y=z=0$ u kojoj polje nije definisano. Ekviskalarne površine

su koncentrične sfere date izrazom

$$x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{U_n} z, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

c) Polje predstavljaju sve tačke u prostoru izvan kružnoga konusa $x^2+y^2-z^2=0$, zajedno sa tačkama na konusu. Ekvivskalarne površine su kružni konusi

$$z^2 = (x^2+y^2)\sin^2 U_n, \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

d) Polje predstavljaju sve tačke u ravni Oxy. Ekvivskalarne linije su hiperbole

$$y = \frac{U_n}{x}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

e) Polje predstavljaju sve tačke u ravni Oxy. Ekvivskalarne linije su koncentrični krugovi

$$x^2+y^2 = U_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

f) Polje sadrži sve tačke u ravni Oxy osim tačke na pravu $x+y=0$. Ekvivskalarne linije su paralelne prave

$$y = -x + \frac{1}{U_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

g) Polje predstavljaju sve tačke na osi Ox osim $x=0$. Ovo je linijsko polje.

3.2.1.1. ELEMENT LUKA

Primeri.

1. Izraziti element luka generalisanim koordinatama

$$q_1=q_1(x,y,z); \quad q_2=q_2(x,y,z); \quad q_3=q_3(x,y,z).$$

Rešenje. Ako prostor prekrijemo mrežom krivolinijskih koordinata q_1, q_2, q_3 , i ako uobičajene koordinate Dekartova koordinatna sistema x, y, z jednoznačno odredimo generalisanim koordinatama q_1, q_2 i q_3 u vidu

$x = x(q_1, q_2, q_3); \quad y = y(q_1, q_2, q_3); \quad z = z(q_1, q_2, q_3)$ može se izvršiti transformacija veličina predstavljenih koordinatama x, y, z u izraze koji sadrže nove promenljive q_1, q_2, q_3 .

Element luka proizvoljne krive linije $ds(x, y, z)$ obraća se u $ds(q_1, q_2, q_3)$ na sledeći način. Podseća se prvo da je

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Dekartove koordinate su

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3$$

$$y = y(q_1, q_2, q_3), \quad dy = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3$$

$$z = z(q_1, q_2, q_3), \quad dz = \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3.$$

Tako se dobija

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = A_1^2 dq_1^2 + A_2^2 dq_2^2 + A_3^2 dq_3^2 + 2B_2 dq_1 dq_2 + 2B_3 dq_1 dq_3 + 2B_1 dq_2 dq_3$$

gde su

$$A_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2$$

$$A_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2$$

$$A_3^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2$$

$$B_3 = \frac{\partial x}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_2}$$

$$B_2 = \frac{\partial x}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_3}$$

$$B_1 = \frac{\partial x}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial y}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial z}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_3}$$

Za ortogonalni trijedar generalisanih koordinata, pokazan na slici, koeficijenti su $B_i=0$ za $i=1, 2, 3$, pa u tom slučaju element luka je određen skalarnim izrazom

$$ds^2 = A_1^2 dq_1^2 + A_2^2 dq_2^2 + A_3^2 dq_3^2$$

ili vektorskim

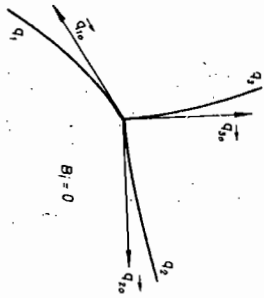
$$d\vec{s} = A_1 dq_1 \vec{q}_{10} + A_2 dq_2 \vec{q}_{20} + A_3 dq_3 \vec{q}_{30}$$

Tu su

$$A_1 dq_1 = ds_1$$

$$A_2 dq_2 = ds_2$$

$$A_3 dq_3 = ds_3$$



elementi luka pojedinih krivolinijskih koordinata. Za pravolinijske koordinate bi elementi luka bili jednaki dx, dy, dz , odnosno podudarali bi se sa elementima osa Dekartovog koordinatnog sistema.

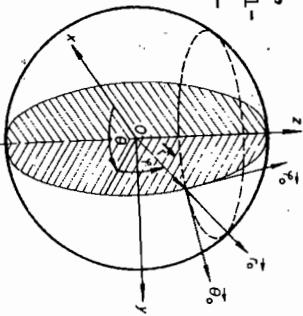
2. Izraziti element luka sfernim koordinatama.

Rešenje. Sferne koordinate, ustvari, su generalisane ortogonalne koordinate za koje važe ovi odnosi

$$x = r \cos \phi \cos \theta \quad r = q_1$$

$$y = r \cos \phi \sin \theta \quad \theta = q_2$$

$$z = r \sin \phi \quad \phi = q_3$$



$$A_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 \phi \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = 1$$

$$A_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = \sqrt{r^2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta} = r \cos \phi$$

$$A_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2} = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \cos^2 \phi} = r$$

$$d\vec{s} = A_1 dq_1 \vec{q}_{10} + A_2 dq_2 \vec{q}_{20} + A_3 dq_3 \vec{q}_{30}$$

$$d\vec{s} = dr \vec{e}_r + r \cos \phi d\theta \vec{e}_\theta + r d\phi \vec{e}_\phi$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 \cos^2 \phi d\theta^2 + r^2 d\phi^2}$$

Zadatak.

1. Izraziti element luka polarnim i cilindarskim koordinatama.

Rešenje. U polarnom sistemu: $d\vec{s} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$
 U cilindarskom sistemu: $d\vec{s} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$

3.2.1.2. GRADIJENT

Izrazom $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ definiše se tzv. formalni vektor ∇ (nabla). Matematički ∇ pokazuje da treba naći parcijalni izvod veličine koja bi se našla na mestu oznake \dots . Kad je ta veličina skalar (npr. U) onda se izraz ∇U naziva gradom (gradijent U) i piše se

$$\nabla U = \text{grad} U = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) U = \vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z}$$

Može se dokazati da je grad U u proizvoljnoj tački površine $U = U(x, y, z)$ kolinearan sa vektorom normale podignute u istoj tački te površine. Kako je pravac normale najkraće rastojanje između dve vrednosti skalara U , npr. U_0 i U_1 , to grad U predstavlja najjaču promenu skalara U . Smer grad U je smer porasta promene skalara U . Za operacije sa gradom važe ista pravila kao i za diferenciranje.

Preko grad U mogu se odrediti promene skalarnih funkcija U bilo u kojem pravcu \vec{r} . Totalni diferencijal

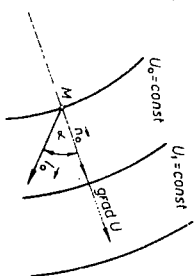
$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = (\text{grad} U, d\vec{r}) = (\text{grad} U, \vec{r}_0) dr$$

vodi ka izvodu

$$\frac{dU}{dr} = (\text{grad} U, \vec{r}_0)$$

Primeri.

1. Pokazati da je $\frac{du}{dn}$ (vidi sliku) pravac najjače promene skalarne funkcije U od svih mogućih pravaca.



Rešenje. $\frac{du}{dn} = (\text{grad}U, \vec{n}_0) = |\text{grad}U| \cos \alpha$

$$\frac{du}{d\vec{l}} = (\text{grad}U, \vec{l}_0) = |\text{grad}U| \cos \alpha < |\text{grad}U|$$

2. Sračunati grad r, ako je $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ - vektor položaja.

Rešenje. Prema definiciji je

$$\begin{aligned} \text{grad } r &= \nabla r = \frac{\partial r}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \right) \vec{i} + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \right) \vec{k} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{1}{r} \vec{r} = \vec{r}_0 \end{aligned}$$

Kao rezultat dobija se jedinični vektor pravca vektora položaja \vec{r}_0 .

3. Skalarno polje se svodi na ravan i određeno je izrazom $U = \frac{r_1}{r_2}$; tu su r_1 i r_2 nastojanja dve stalne tačke od koordinatnog početka. Naći gradU.

$$\begin{aligned} \text{Rešenje. } \text{grad}U &= \text{grad} \frac{r_1}{r_2} = r_1 \text{grad} \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} \text{grad} r_1 = \\ &= - \frac{r_1}{r_2^2} \text{grad} r_2 + \frac{1}{r_2} \text{grad} r_1 \end{aligned}$$

Kako je grad $r_1 = \vec{r}_{10}$ i grad $r_2 = \vec{r}_{20}$ posle sredjivanja, dobija se
$$\text{grad}U = \frac{1}{r_2} (\vec{r}_{10} - \frac{r_1}{r_2} \vec{r}_{20}).$$

4. Naći grad (\vec{C}_0, \vec{r}) gde je \vec{C}_0 konstantan ort a \vec{r} vektor položaja.

Rešenje. Kako je $U = (\vec{C}_0, \vec{r})$ to važi $du = (\vec{C}_0, d\vec{r})$, sa druge strane je $du = (\text{grad}U, d\vec{r})$.

Izjednačavanjem obadva izraza postaje gradU = \vec{C}_0 .

5. Naći izvod skalarne funkcije $U(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$ u smernu pravu koja sa osom x zaklapa ugao α .

Rešenje. $du = (\text{grad}U, d\vec{l})$

$$\frac{du}{d\vec{l}} = (\text{grad}U, \vec{l}_0) = \left(\frac{\partial \sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2}}{\partial y} \vec{j}, \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j} \right)$$

$$\frac{du}{d\vec{l}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} (x \cos \alpha + y \sin \alpha).$$

6. Izraziti gradU generalisanim koordinatama.

Rešenje. Gradijent skalarne funkcije U ne zavisi od izbora koordinatnih osa - on je invarijanta polja. Zato se može pretpostaviti da se ose Dekartovog pravouglavog trijedra preklape sa tangentama generalisanog koordinatnog trijedra u posmatranoj tački. Tako se izraz za gradU može predstaviti kao

$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial s_1} \vec{q}_{10} + \frac{\partial U}{\partial s_2} \vec{q}_{20} + \frac{\partial U}{\partial s_3} \vec{q}_{30}$$

gde su $\frac{\partial U}{\partial s_1} = \frac{1}{\partial q_1} \frac{\partial U}{\partial q_1}$; $\frac{\partial U}{\partial s_2} = \frac{1}{\partial q_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} = \frac{1}{\partial q_2} \frac{\partial U}{\partial q_2}$;

$$\frac{\partial U}{\partial s_3} = \frac{1}{\partial q_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} = \frac{1}{\partial q_3} \frac{\partial U}{\partial q_3};$$

(imati na umu da je $ds_1 = A_1 dq_1$; $ds_2 = A_2 dq_2$; $ds_3 = A_3 dq_3$).

Tako se dobija izraz za gradU u generalisanim koordinatama

$$\text{grad}U = \frac{1}{A_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \vec{q}_{10} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \vec{q}_{20} + \frac{1}{A_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \vec{q}_{30}.$$

7. Napisati izraz za gradU služeći se cilindarskim koordinatama.

Rešenje. Potrebne relacije između generalisanog (cilindarskog) i Dekartovog sistema jesu:

$$A_1 = 1; A_2 = r; A_3 = z$$

$$x = r \cos \theta; y = r \sin \theta; z = z$$

gde je $r = q_1; \theta = q_2; z = q_3$

$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial r} \hat{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \hat{\theta}_0 + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}_0$$

8. Raspored pritiska u mirnom nestišljivom fluidu dat je izrazom

$$p = xy + x + z^2 + 10 \text{ [Pa].}$$

Kolika je sila po jedinici zapremine fluida koja dejstvuje na element fluida u pravcu

$$\hat{r} = 0,95\hat{i} + 0,32\hat{j} \text{ [m],}$$

a na mestu $x = 10, y = 3, z = 4 \text{ [m].}$

Rešenje. Iz Ojlerove jednačine za miran fluid

$$\hat{r} = \frac{1}{\rho} \text{ grad}p$$

gde je \hat{r} - rezultujuća zapreminska sila po jedinici mase koja napada fluid i održava ravnotežu sa silama pritiska, sledi

$$\hat{r} = \frac{1}{\rho} [(y+1)\hat{i} + x\hat{j} + 2z\hat{k}] \text{ [N/Kg]}$$

Projekovanje sile \hat{r} u pravcu \hat{r} se vrši skalarnim proizvodom (\hat{r}, \hat{r}_0) gde je ort \hat{r}_0 odredjen sa

$$\hat{r}_0 = \frac{\hat{r}}{r} = \frac{0,95\hat{i} + 0,32\hat{j}}{\sqrt{0,95^2 + 0,32^2}} = 0,95\hat{i} + 0,32\hat{j},$$

odnosno, zadatkom je već zadat ort vektora $\hat{r} = \hat{r}_0$.

Dakle, $(\hat{r}, \hat{r}_0) = \frac{1}{\rho} ((y+1)\hat{i} + x\hat{j} + 2z\hat{k}, 0,95\hat{i} + 0,32\hat{j}) =$

$$= \frac{1}{\rho} (0,95(y+1) + 0,32x) \text{ N/Kg.}$$

Projekcija sile \hat{r} u pravcu \hat{r}_0 a u tački $x=10, y=3, z=4$ iznosi

$$F = \frac{1}{\rho} (0,95(3+1) + 0,32 \cdot 10) = \frac{7}{\rho} \text{ N/Kg,}$$

a tražena sila po jedinici zapremine iznosi

$$F_V = F \cdot \rho = 7 \text{ N/m}^3.$$

Zadaci:

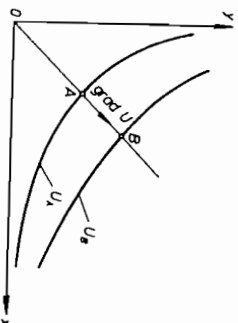
1) Naci izvod skalarne funkcije $U = xyz$ za tačku $A(5,1,2)$ u pravcu ka tački $B(9,4,12)$.

$$\text{Rešenje: } \frac{dU}{dx} = \frac{88}{\sqrt{125}}; \hat{r}_0 = \frac{4\hat{i} + 3\hat{j} + 10\hat{k}}{\sqrt{125}}$$

2. Koristeći gradU

pokazati za koliko se promeni vrednost funkcije

$U=xy$ od tačke $A(1,1)$ do tačke $B(5,5)$.



$$\text{Rešenje. } U_B - U_A = 24$$

3) Napisati izraz za gradU pomoću sfernih koordinata.

$$\text{Rešenje. } \text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial r} \hat{r}_0 + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial U}{\partial \theta} \hat{\theta}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} \hat{\phi}_0$$

4) Naci grad $(f \cdot Q)$, funkcija

$$f = x^2yz, \quad Q = xy^2z.$$

$$\text{Rešenje. } \text{grad}U = x^2y^2z(3yz\hat{i} + 3xz\hat{j} + 2xy\hat{k})$$

3.2.2. VEKTORSKO POLJE

Svakoj tački ovakvog polja pripada po jedan određjen vektor. U nastavku se navode primeri koji se odnose na polje brzine i ubrzanja.

3.2.2.1. POLJE BRZINE

Za vektorsko polje brzine (vektorsko strujno polje) vezuje se pojam strujnice (strujne linije) i pojam putanje (trajektorije) fluidnog delića. Strujnica dočarava sliku o strujanju u nekom bilo kojem trenutku. Vreme t, koje se sa- drži u jednačinama strujnica je "zamrznuto" jer predstav- lja samo trenutno pomeranje svih fluidnih delića. Putanja, medjutim, predstavlja, u neku ruku, trag koji za sobom os- tavlja fluidni delić. Pri stacionarnom kretanju strujnice su ujedno i putanje.

Jednačina strujnice je određjena vektorskom diferen- cijalnom jednačinom

$$[\vec{v}, d\vec{s}] = 0$$

koja je ravna nuli zato što se pravac na koje brzine \vec{v} i elementa strujnice $d\vec{s}$ (kojem pripada brzina) podudaraju. Ra- zvijsanjem vektorskog proizvoda postaje

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

Skup svih strujnica koje prolaze kroz sve tačke zatvorene krive linije predstavljaju "strujnu cev", zato što fluid ne može proći kroz omotač tog prostora (po definiciji strujni- ce - normalne komponente brzine su jednake nuli). Svodjenjem na neizmerno malu vrednost površine zatvorene krivom, struj- na cev se svodi na strujno vlakno. Za strujno vlakno se br- zine mogu smatrati konstantne u svim tačkama protočnog pre- ka strujnog vlakna, zato što se međusobno razlikuju samo za neizmerno malu vrednost. U protočnom preseku strujne ce- vi brzine se mogu razlikovati za konačnu vrednost.

Jednačina putanje fluidnog delića glasi

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = dt$$

jer je $|\vec{v}| dt = ds$

Primeri.

1. Za strujno polje određeno vektorom

$$\vec{v} = 6x\vec{i} + 6y\vec{j} - 7t\vec{k}$$

naći brzinu u tački $A(x=10 \text{ m}; y=6 \text{ m}; t=10 \text{ s})$ i nacrtati strujnice u trenutku $t=0$.

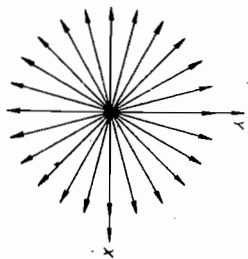
Rešenje. $\vec{v}_A = 6 \cdot 10\vec{i} + 6 \cdot 6\vec{j} - 7 \cdot 10\vec{k}$

$$\vec{v}_A = 60\vec{i} + 36\vec{j} - 70\vec{k}; \quad v_A = 99 \text{ m/s}$$

$$\frac{dy}{v_y} = \frac{dx}{v_x}; \quad \frac{dy}{6y} = \frac{dx}{6x}$$

$$\ln y = \ln x + \ln k, \quad y = kx$$

Jednačina strujnica predstavlja pramen znakova koji izviru iz koordinatnog početka. Ustvari je to slika struj- nja u polju izvora.



2. Kako izgledaju strujnica i putanja tečnog delića čije su brzine

$$v_x = a - \omega y; \quad v_y = \omega x - at; \quad v_z = 0$$

Rešenje. Iz

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad \text{slеди} \quad \frac{dx}{a - \omega y} = \frac{dy}{\omega x - at}$$

pa $\int (\omega x - at) dx = \int (a - \omega y) dy$

s rešenjem $\frac{\omega x^2}{2} - atx = ay + \frac{\omega y^2}{2} + C_1$

$$\frac{\omega}{2}(x^2+y^2) - a(tx+ty) - C_1 = 0.$$

Strujnica je krug. Parametri kruga se određuju uporedjivanjem jednačine

$$x^2+y^2 - \frac{2at}{\omega}x - \frac{2ay}{\omega} - \frac{2C_1}{\omega} = 0$$

s jednačinom kruga u opštem obliku

$$x^2+y^2+Ax+By+C = 0$$

i jednačinom $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$.

Vidi se da je $a = -\frac{A}{2}$; $b = -\frac{B}{2}$; $r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}$

pa je zato $A = -\frac{2a}{\omega}t$; $B = -\frac{2a}{\omega}$; $C = -\frac{2C_1}{\omega}$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{2a}{\omega}t\right)^2 + \left(-\frac{2a}{\omega}\right)^2 - 4\left(-\frac{2C_1}{\omega}\right)} = \sqrt{\frac{a^2}{\omega^2}(t^2+1) + \frac{2C_1}{\omega}}$$

Za određivanje putanje delića polazi se od

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dY}{v_y} = dt$$

$$\frac{dx}{dt} = a - \omega y; \quad \frac{dy}{dt} = \omega x - at$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x + \omega at$$

odnosno $\ddot{x} + \omega^2 x = \omega at$

Rešenje glasi $x = E \cos \omega t + D \sin \omega t + \frac{a}{\omega} t^2$

Iz $\frac{dy}{dt} = \omega x - at$

sledi, pošto se zameni x,

$$y = E \sin \omega t - D \cos \omega t + F.$$

Zadaci.

1. Odrediti strujnice vektornog polja čije su brzine $\vec{v} = \frac{1}{r^3} \vec{r}$.

Rešenje. $y = C_1 x$; $z = C_2 x$

2. Odrediti strujnice i putanje kad su komponente brzina $v_x = a$; $v_y = b$; $v_z = 0$.

Rešenje. $y = \frac{b}{a} x + C$ predstavlja jednačinu i strujnice i putanja delića.

3. Kakve su strujnice i putanje kad su komponente brzina date jednačinama

$$v_x = -a \sin \omega t; \quad v_y = b \cos \omega t; \quad v_z = 0.$$

Rešenje. $y = -\frac{b}{a} \cot \omega t \cdot x + C$ važi i za strujnice i za putanje.

4. Na kojem rastojanju y od zida okrugle cevi poluprečnika R, lokalna brzina iznosi koliko i srednja brzina, ako je raspored brzina po preseku dat izrazom

$$v = \frac{(n+1)(n+2)}{2} v_{sr} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^n \quad (\text{uzeti } n = \frac{1}{2})$$

Rešenje. $y = 0,2423 R$

3.2.2.1.1. DIVERGENCIJA

Primena operatora ∇ preko skalarnog proizvoda na vektorsku funkciju $\vec{v}(x,y,z)$ dovodi do skalarne veličine $\text{div } \vec{v}$ (divergencija \vec{v})

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{v} &= (\nabla, \vec{v}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}, v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \right) \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Prema zakonu o održanju mase, jedna ista količina fluidne mase protiče kroz svako strujno vlakno u datom trenutku vremena. Ako je strujanje ustaljeno, i ako tačkama elementarnog protočnog preseka pripadaju brzine v onda mora biti

$$dm = \rho dQ = \rho(v, d\vec{A}) = \text{const}.$$

Za strujnu cev važi

$$\dot{m} = \int_A \rho(\vec{v}, d\vec{A}).$$

Za tečnosti je $\rho = \text{const}$, pa je

$$\frac{\dot{m}}{\rho} = Q = \int_A (\vec{v}, d\vec{A}), \quad \text{odnosno isti}$$

rezultat se može predstaviti primenom Grinove teoreme kao

$$Q = \int_V \text{div } \vec{v} \, dV$$

V - je zapremina omeđjena površinom A .

Divergencija \vec{v} predstavlja po tome razliku količine fluida koja ističe iz jedinice zapremine prostora u jedinici vremena i količine fluida koja u nju doteče za to isto vreme. Za tečnosti ($\rho = \text{const}$):

$$\text{div } \vec{v} = 0 \text{ pokazuje da je protok konstantan.}$$

Kad je $\text{div } \vec{v} > 0$ onda iz posmatrane zapremine izvire tečnost koja se dodaje struji (izvor u polju).

Kad je $\text{div } \vec{v} < 0$ onda iz posmatrane zapremine deo fluida ponire (ponor u polju).

Pri radu s vektorskim i diferencijalnim operatorom ∇ treba voditi računa o tome da se ∇ mora povinovati zakonom vektorskog i diferencijalnog računa (videti 3. primer u 3.2.2.1.2.).

Primeri.

1. Sračunati $\text{div} (U \cdot \vec{v})$ i $\text{div} [\vec{a}, \vec{b}]$.

Rešenje. $\text{div}(U \cdot \vec{v}) = (\vec{v}, \text{grad}U) + U \text{div } \vec{v}$

$$\text{div} [\vec{a}, \vec{b}] = (\nabla, [\vec{a}, \vec{b}]) = -(\vec{a}, [\nabla, \vec{b}]) + (\vec{b}, [\nabla, \vec{a}])$$

$$\text{div} [\vec{a}, \vec{b}] = -(\vec{a}, \text{rot} \vec{b}) + (\vec{b}, \text{rot} \vec{a})$$

2. Naći $\text{div} [(\vec{c}_0, \vec{r}), \vec{c}_0]$ gde je $\vec{c}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ konstantan ort \vec{r} vektor položaja.

Rešenje.

$$\begin{aligned} [(\vec{c}_0, \vec{r}), \vec{c}_0] &= -[\vec{c}_0, (\vec{c}_0, \vec{r})] = -\vec{c}_0(\vec{r}, \vec{c}_0) + \vec{r}(\vec{c}_0, \vec{c}_0) = \\ &= \vec{r} - \vec{c}_0(\vec{r}, \vec{c}_0) \end{aligned}$$

jer pravilo za rastavljanje dvostrukog vektorskog proizvoda glasi

$$[A, [B, C]] = B(A, C) - C(A, B).$$

Prema tome je $\text{div} [(\vec{c}_0, \vec{r}), \vec{c}_0] = \text{div } \vec{r} - \text{div}(\vec{c}_0(\vec{r}, \vec{c}_0)) =$

$$= \text{div } \vec{r} - \vec{c}_0 \text{grad}(\vec{r}, \vec{c}_0) - (\vec{r}, \vec{c}_0) \text{div} \vec{c}_0$$

kako je

$$\text{div} \vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} 1 + \frac{\partial}{\partial y} 1 + \frac{\partial}{\partial z} 1\right) (\vec{x}\vec{i} + \vec{y}\vec{j} + \vec{z}\vec{k}) = 3$$

a

$$\text{grad}(\vec{r}, \vec{c}_0) = \vec{c}_0; \quad \text{div} \vec{c}_0 = \frac{\partial \cos \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \cos \beta}{\partial y} + \frac{\partial \cos \gamma}{\partial z} = 0$$

to se dobija $\text{div} [(\vec{c}_0, \vec{r}), \vec{c}_0] = 3 - \vec{c}_0 \cdot \vec{c}_0 = 3 - 1 = 2$.

3. Napisati izraz za $\text{div } \vec{v}$ služeći se generalisanim koordinatama.

Rešenje. $\vec{v} = v_1 \vec{q}_{10} + v_2 \vec{q}_{20} + v_3 \vec{q}_{30}$

$$\text{div } \vec{v} = \text{div}(v_1 \vec{q}_{10}) + \text{div}(v_2 \vec{q}_{20}) + \text{div}(v_3 \vec{q}_{30})$$

Ortogonalni otvori su

$$\vec{q}_{10} = [\vec{q}_{20}, \vec{q}_{30}]; \quad \vec{q}_{20} = [\vec{q}_{30}, \vec{q}_{10}]; \quad \vec{q}_{30} = [\vec{q}_{10}, \vec{q}_{20}]$$

te je $\text{div } \vec{q}_{10} = \text{div} [\vec{q}_{20}, \vec{q}_{30}] = (\nabla, [\vec{q}_{20}, \vec{q}_{30}]) = -(\vec{q}_{20}, \text{rot} \vec{q}_{30}) + (\vec{q}_{30}, \text{rot} \vec{q}_{20})$

Rotor ortu, npr. $\text{rot} \vec{q}_{10}$, dobija se na sledeći način:

Kad se izraz $\text{grad} q_1 = 1/A_1 \vec{q}_{10}$ vektorski pomnoži operatorom ∇ piše se

$$\text{rot} \text{grad} q_1 = \text{rot} \frac{1}{A_1} \vec{q}_{10}$$

Kako je $\text{rot} \text{grad} q_1 = [\nabla, \nabla q_1] = q_1 [\nabla, \nabla] = 0$

to sledi $\text{rot} \frac{1}{A_1} \vec{q}_{10} = [\nabla, \frac{1}{A_1} \vec{q}_{10}] = \frac{1}{A_1} \text{rot} \vec{q}_{10} - [\vec{q}_{10}, \text{grad} \frac{1}{A_1}] =$

$$= \frac{1}{A_1} \text{rot} \vec{q}_{10} + \frac{1}{A_1} [\vec{q}_{10}, \text{grad} A_1] = 0$$

odnosno $\text{rot} \vec{q}_{10} = -\frac{1}{A_1} [\vec{q}_{10}, \text{grad} A_1]$.

Zbog

$$[\vec{q}_{10}, \text{grad} A_1] = \begin{vmatrix} \vec{q}_{10} & \vec{q}_{20} & \vec{q}_{30} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial q_1} & \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} & \frac{1}{A_3} \frac{\partial A_1}{\partial q_3} \end{vmatrix} = \vec{q}_{30} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} \right) - \vec{q}_{20} \left(\frac{1}{A_3} \frac{\partial A_1}{\partial q_3} \right)$$

dobija se $\text{rot} \vec{q}_{10} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial q_3} \vec{q}_{20} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} \vec{q}_{30}$

a zatim cikličnom permutacijom

$$\text{rot} \vec{q}_{20} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} \vec{q}_{30} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial q_3} \vec{q}_{10}$$

$$\text{rot} \vec{q}_{30} = \frac{1}{A_3} \frac{\partial A_3}{\partial q_2} \vec{q}_{10} - \frac{1}{A_3} \frac{\partial A_3}{\partial q_1} \vec{q}_{20}$$

Zamenom veličina $\text{rot} \vec{q}_{30}$ i $\text{rot} \vec{q}_{20}$ u izrazu $\text{div} \vec{q}_{10}$, postaje

$$\text{div} \vec{q}_{10} = \frac{1}{A_2 A_1} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} + \frac{1}{A_3 A_1} \frac{\partial A_3}{\partial q_1}$$

Sad se najzad može sračunati

$$\begin{aligned} \text{div}(\nabla_1 \vec{q}_{10}) &= \vec{q}_{10} \text{grad} \nabla_1 + \nabla_1 \text{div} \vec{q}_{10} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \nabla_1}{\partial q_1} + \frac{\nabla_1}{A_2 A_1} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} + \frac{\nabla_1}{A_3 A_1} \frac{\partial A_3}{\partial q_1} = \\ &= \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \cdot \frac{\partial (A_2 A_3 \nabla_1)}{\partial q_1} \end{aligned}$$

a potom cikličnom permutacijom i

$$\text{div}(\nabla_2 \vec{q}_{20}) = \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \cdot \frac{\partial (A_3 A_1 \nabla_2)}{\partial q_2}$$

$$\text{div}(\nabla_3 \vec{q}_{30}) = \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \cdot \frac{\partial (A_1 A_2 \nabla_3)}{\partial q_3}$$

otkud $\text{div} \vec{v} = \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \left[\frac{\partial (A_2 A_3 \nabla_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (A_1 A_3 \nabla_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (A_1 A_2 \nabla_3)}{\partial q_3} \right]$

4. Izvesti izraz za $\text{div} \vec{v}$ pomoću cilindarskih koordinata.

Rešenje. Za cilindarske koordinate važe odnosi

$$x = r \cos \theta \quad q_1 = r \quad v_1 = v_r \quad A_1 = 1$$

$$y = r \sin \theta \quad q_2 = \theta \quad v_2 = v_\theta \quad A_2 = r$$

$$z = z \quad q_3 = z \quad v_3 = v_z \quad A_3 = 1$$

Zamenom u izrazu za $\text{div} \vec{v}$ napisanom generalisanim koordinatama postaje

$$\text{div} \vec{v} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial (r v_z)}{\partial z} \right]$$

$$\text{div} \vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

5. Izraziti Laplasiijan skalarne funkcije ΔU Dekartovim, cilindarskim i sfernim koordinatama.

Rešenje. $\Delta U = (\nabla, \nabla) U = \text{div} \text{grad} U$.

Kako je $(\text{grad} U)_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial U}{\partial q_1}$; $(\text{grad} U)_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial U}{\partial q_2}$; $(\text{grad} U)_3 = \frac{1}{A_3} \frac{\partial U}{\partial q_3}$

to se po zameni ovih vrednosti u generalisanom izrazu za $\text{div} \vec{v}$ dobija

$$\Delta U = \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{A_2 A_3}{A_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{A_1 A_3}{A_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{A_1 A_2}{A_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \right) \right]$$

Za cilindarski koordinatni sistem važi

$$\Delta U = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial U}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (r^2 \frac{\partial U}{\partial z}) \right] =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

a za sferni: $q_1 = r$; $q_2 = \theta$; $q_3 = \phi$; $A_1 = 1$; $A_2 = r \cos \phi$; $A_3 = r$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2 \cos \phi} \left| \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cos \phi \frac{\partial U}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r}{\cos \phi} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{r \cos \phi}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) \right| =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \operatorname{tg} \phi \frac{\partial U}{\partial \phi}$$

Laplasijan ove skalarne funkcije određen je u Dekartovom koordinatnom sistemu izrazom

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Zadaci.

1. Sračunati divgradr.

Rešenje. $\operatorname{divgradr} = \frac{2}{r}$

2. Pokazati da funkcija $U = \frac{1}{r}$ zadovoljava Laplasovu jednačinu kad je $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. (Proveriti i za Dekartov i za sferni koordinatni sistem).

3. Pokazati da funkcija $U = \ln r$ zadovoljava Laplasovu jednačinu pri $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. (Proveriti i za Dekartov i polarni koordinatni sistem).

4. Napisati izraz za $\operatorname{div} \vec{v}$ pomoću sfernih koordinata.

Rešenje. $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2}{r} v_r + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \operatorname{tg} \phi \cdot v_\phi$

3.2.2.1.2. ROTOR (VRTLOZI)

Vektorski proizvod \vec{v} i vektora brzine \vec{v} naziva se rotorom (rotacijom) brzine, a piše se

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Veza između $\operatorname{rot} \vec{v}$ i vrtloga $\vec{\omega}$ je neposredna i utvrđena jednačinom

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 2\vec{\omega} = f(x, y, z)$$

$\vec{\omega}$ je, u stvari, vektor ugaone brzine kojom se delić okreće na nekom mestu. Strujno polje u kojem se tečni delići obrću u isto vreme kad prelaze svoju putanju naziva se vrtložnim strujanjem. Po tome je pojam $\operatorname{rot} \vec{v}$ vezan za predstavu vrtložnog kretanja fluidnih delića.

Kad se sva tečnost obrće konstantnom ugaonom brzinom ($\omega = \text{const}$) oko neke ose (tačke) - dakle, kao da je po sredi čvrsto telo a ne fluid, i svi njezini delići se obrću istom ugaonom brzinom $\vec{\omega}$, (veštački vrtlog).

Smer vrtloga je pozitivan kad se delići obrću suprotno hodu kazaljke na časovniku; inače je negativan. Svaki vrtložni vektor se može razložiti (u opštem slučaju) na tri komponente pravcima izabranog koordinatnog sistema. Razlaganjem vektora $\vec{\omega}$ u pravcu osa Dekartovog koordinatnog sistema dobijaju se tri komponente vrtložnog vektora ω_x , ω_y , ω_z . Komponenta ω_x predstavlja obrtanje fluidnih delića u ravnima paralelnim yz ravni, itd.

Primeri.

1. Brzine fluidnih delića u cevi okruglog preseka paralelne su medju sobom i menjaju se po zakonu

$$v = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

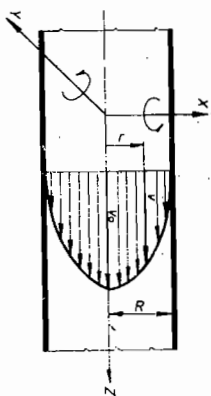
R je poluprečnik cevi; v_0 brzina u osi cevi (za $r=0$). Sračunati komponente ugaone brzine $\vec{\omega}$ i objasniti promenu $\vec{\omega}$ u funkciji razdaljine od ose cevi.

Rešenje.

$$v_x = 0$$

$$v_y = 0$$

$$v_z = v_0 \left(1 - \frac{x^2 - y^2}{R^2}\right) = v$$



$$\text{rot } \vec{v} = 2\vec{\omega} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & v \end{vmatrix}$$

$$2\vec{\omega} = 2\omega_x \hat{i} + 2\omega_y \hat{j} + 2\omega_z \hat{k} = \frac{\partial v}{\partial y} \hat{i} - \frac{\partial v}{\partial x} \hat{j}$$

odnosno $\omega_x = v_0 \frac{y}{R^2}$; $\omega_y = -v_0 \frac{x}{R^2}$;

i $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} = v_0 \frac{r}{R^2}$

Intenzitet obrtanja delića je nula u osi cevi (za $r=0$) a najjači je uz zidove cevi (za $r=R$). Smer vrtloga je pozitivan kad je vektor vrtloga usmeren naviše.

2. Sračunati $\text{rot } \vec{b}(\vec{r}, \vec{a})$; \vec{a} i \vec{b} su konstantni vektori.

Rešenje. $[\vec{v}, \vec{b}(\vec{r}, \vec{a})] = (\vec{r}, \vec{a}) \text{rot } \vec{b} - [\vec{b}, \text{grad}(\vec{r}, \vec{a})] =$

$$= 0 - [\vec{b}, \vec{a}] = [\vec{a}, \vec{b}]$$

3. Razviti proizvod $[\vec{v}, \text{rot } \vec{v}]$.

Rešenje. Rastavljanjem dvostrukog vektornog proizvoda dobija se

$$[\vec{v}, [\vec{v}, \vec{v}]] = \vec{v}(\vec{v}, \vec{v}) - \vec{v}(\vec{v}, \vec{v}) = 0$$

Strelicom \uparrow označava se vektor koji podleže diferenciranju; ovde je to vektor brzine; dakle

$$[\vec{v}, \text{rot } \vec{v}] = \vec{v}(\vec{v}, \vec{v}) - \vec{v}(\vec{v}, \vec{v}) = 0$$

odnosno

$$[\vec{v}, \text{rot } \vec{v}] = \vec{v}(\vec{v}, \vec{v}) - (\vec{v}, \vec{v})\vec{v}$$

Izraz $\vec{v}(\vec{v}, \vec{v})$ može se napisati kao

$$\vec{v}(\vec{v}, \vec{v}) = \frac{1}{2} \text{grad } v^2$$

jer je

$$\text{grad } v^2 = \vec{v}(\vec{v}, \vec{v}) + \vec{v}(\vec{v}, \vec{v}) = 2\vec{v}(\vec{v}, \vec{v})$$

Na kraju je

$$[\vec{v}, \text{rot } \vec{v}] = \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - (\vec{v}, \vec{v})\vec{v}$$

Napominje se da izraz $\vec{v}(\vec{v}, \vec{v})$ nikako ne treba napisati kao $\vec{v}(\vec{v}, \vec{v})$ jer bi to značilo da diferencijalni operator nahja koji se u prvom izrazu primenjuje na skalarnu veličinu - u drugom slučaju se odnosi na vektorsku.

4. Prevesti izraz za $\text{rot } \vec{v}$ na generalisane koordinate .

Rešenje. $\vec{v} = v_1 \hat{q}_1 + v_2 \hat{q}_2 + v_3 \hat{q}_3$

$$\text{rot } \vec{v} = \text{rot}(v_1 \hat{q}_1) + \text{rot}(v_2 \hat{q}_2) + \text{rot}(v_3 \hat{q}_3)$$

$$\text{rot}(v_1 \hat{q}_1) = [v_1 \hat{q}_1, \text{grad } v_1] + v_1 [\text{grad } v_1, \hat{q}_1]$$

Kako je

$$-[\hat{q}_1, \text{grad } v_1] = -$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{q}_1 & \hat{q}_2 & \hat{q}_3 \\ \frac{\partial v_1}{\partial q_1} & \frac{\partial v_1}{\partial q_2} & \frac{\partial v_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial q_2}{\partial q_1} & \frac{\partial q_3}{\partial q_1} \end{vmatrix} = \hat{q}_2 \frac{\partial v_1}{\partial q_2} - \hat{q}_3 \frac{\partial v_1}{\partial q_3}$$

i

$$v_1 \text{rot} \vec{q}_{10} = \frac{v_1}{A_1 A_3} \frac{\partial A_1}{\partial q_3} \vec{q}_{20} - \frac{v_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} \vec{q}_{30}$$

dobija se $\text{rot}(v_1 \vec{q}_{10}) = \frac{1}{A_1 A_3} \frac{\partial(A_1 v_1)}{\partial q_3} \vec{q}_{20} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial(A_1 v_1)}{\partial q_2} \vec{q}_{30}$.

Posle ciklične permutacije sledi

$$\text{rot}(v_2 \vec{q}_{20}) = \frac{1}{A_2 A_1} \frac{\partial(A_2 v_2)}{\partial q_1} \vec{q}_{30} - \frac{1}{A_2 A_3} \frac{\partial(A_2 v_2)}{\partial q_3} \vec{q}_{10}$$

$$\text{rot}(v_3 \vec{q}_{30}) = \frac{1}{A_3 A_2} \frac{\partial(A_3 v_3)}{\partial q_2} \vec{q}_{10} - \frac{1}{A_3 A_1} \frac{\partial(A_3 v_3)}{\partial q_1} \vec{q}_{20}$$

i na kraju

$$\text{rot} \vec{v} = \frac{1}{A_2 A_3} \left[\frac{\partial(A_3 v_3)}{\partial q_2} \right] \vec{q}_{10} + \frac{1}{A_1 A_3} \left[\frac{\partial(A_1 v_1)}{\partial q_3} \right] \vec{q}_{20} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 v_2)}{\partial q_1} \right] \vec{q}_{30} - \frac{\partial(A_3 v_3)}{\partial q_1} \vec{q}_{20} + \frac{\partial(A_2 v_2)}{\partial q_3} \vec{q}_{10} - \frac{\partial(A_1 v_1)}{\partial q_2} \vec{q}_{30}$$

ili preko simbolične determinante

$$\text{rot} \vec{v} = \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \begin{vmatrix} A_1 \vec{q}_{10} & A_2 \vec{q}_{20} & A_3 \vec{q}_{30} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ A_1 v_1 & A_2 v_2 & A_3 v_3 \end{vmatrix}$$

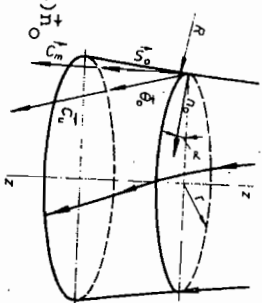
5. Odrediti komponente vrtloga pri osnosimetričnom strujanju vode ispred turbinskog kola. Strujanje je određeno obimskom brzinom C_u i meridijanskom brzinom C_m . Komponente vrtloga izraziti u prirodnim koordinatama $\vec{e}_0, \vec{s}_0, \vec{n}_0$.

Rešenje. Prirodne koordinate su pokretne, pa bi veza između njih i Dekartovih koordinata zavisila od vremena t. Zato nije pogodno da se primene generalisane koordinate.

Zadatak se rešava polazeći od izraza za $\text{rot} \vec{v}$ napisanog za koordinatni sistem $\vec{e}_0, \vec{s}_0, \vec{n}_0$ smatrajući ga nepokretnim, a zatim se traže vrtložne komponente usled kretanja ovog koordinatnog sistema duž strujnice i zbog obrtanja zajedno s delićem oko vertikalne ose.

$$\text{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_0 & \vec{s}_0 & \vec{n}_0 \\ \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial n} \\ C_u & C_m & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\partial C_m}{\partial n} \vec{e}_0 + \frac{\partial C_u}{\partial n} \vec{s}_0 + \left(\frac{\partial C_m}{\partial t} - \frac{\partial C_u}{\partial s} \right) \vec{n}_0$$



Ovde je $\partial C_m / \partial t \neq 0$ jer voda teče simetrično prema osi z kola.

a) Zbog kretanja po luku, poluprečnika R, postoji komponenta vrtloga C_m/R koja pada u pravac $-\vec{e}_0$ (zbog obrtanja u smeru kazaljke na časovniku).

b) Svaki delić se obrće oko ose z ugaonom brzinom C_u/r , usmerenom naviše, i koja se može razložiti u dva pravca (vidi sliku dole)

$$\frac{C_u}{r} = -\frac{C_u}{r} \cos \alpha \vec{e}_0 - \frac{C_u}{r} \sin \alpha \vec{n}_0$$

Sabiranjem svih komponentata dobija se rezultantni vrtlog koji je jednak

$$2\vec{\omega} = -\left(\frac{\partial C_m}{\partial n} + \frac{C_m}{R} \right) \vec{e}_0 + \left(\frac{\partial C_u}{\partial n} - \frac{C_u}{r} \cos \alpha \right) \vec{s}_0 - \left(\frac{\partial C_u}{\partial s} + \frac{C_u}{r} \sin \alpha \right) \vec{n}_0$$

odnosno

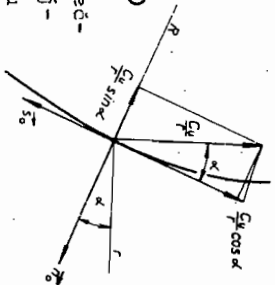
$$2\omega_\theta = -\left(\frac{\partial C_m}{\partial n} + \frac{C_m}{R} \right)$$

$$2\omega_s = \frac{\partial C_u}{\partial n} - \frac{C_u}{r} \cos \alpha$$

$$2\omega_n = -\left(\frac{\partial C_u}{\partial s} + \frac{C_u}{r} \sin \alpha \right)$$

Ako se promenljivi poluprečnik r predstavi kao funkcija strujnice, dakle, kao $r=r(s, \theta)$, i uvedu se odnosi

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\partial r}{\partial s} \\ \cos \alpha &= \frac{\partial r}{\partial n} \end{aligned}$$



dobije se $2\omega_\theta = -\left(\frac{\partial C_m}{\partial n} + \frac{C_m}{r}\right)$; $2\omega_s = \left(\frac{\partial C_u}{\partial n} - \frac{C_u}{r} \frac{\partial r}{\partial n}\right)$;

$$2\omega_n = -\left(\frac{\partial C_u}{\partial s} + \frac{C_u}{r} \frac{\partial r}{\partial s}\right).$$

Zadaci.

1) Koliki je $\text{rot} \vec{r}$ ako je \vec{r} vektor položaja?

Odgovor. $\text{rot} \vec{r} = 0$

2) Sračunati rotgrad u i rotdiv \vec{v} .

Rešenje. rotgrad u = 0; drugo, ne postoji.

3) Koliki je $\text{rot}(r \cdot \vec{a})$ ako je $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ i $\vec{a} = \text{const}$?

Odgovor. $\text{rot}(r \cdot \vec{a}) = \frac{1}{r} [\vec{r}, \vec{a}]$

4) Dato je polje brzine: $\vec{v} = (16x^2+yz)\vec{i} + 10y\vec{j} + yz^2\vec{k}$. Kolika je ugaona brzina fluidnog delića za položaj

$$\vec{r} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} ?$$

Odgovor. $\vec{\omega} = 2\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{k}$

5. Napisati izraz za $\text{rot} \vec{v}$ pomoću cilindarskih i sfernih koordinata.

Rešenje. U cilindarskom koordinatnom sistemu

$$\text{rot} \vec{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) \vec{r}_0 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \vec{\theta}_0 + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) \vec{z}_0$$

U sfernom koordinatnom sistemu

$$\text{rot} \vec{v} = \left[\frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \text{tg} \phi \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right] \vec{r}_0 + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} - \frac{\partial v_\phi}{\partial r}\right] \vec{\theta}_0 + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] \vec{z}_0$$

6. Razviti $\text{rot}[\vec{v}_1, \vec{v}_2]$.

Rešenje. $\text{rot}[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = (\vec{v}_2, \nabla) \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \text{div} \vec{v}_2 - (\vec{v}_1, \nabla) \vec{v}_2 - \vec{v}_2 \text{div} \vec{v}_1$

7. Razviti $\text{rot} \text{rot} \vec{v}$.

Rešenje. $\text{rot} \text{rot} \vec{v} = \text{grad} \text{div} \vec{v} - \Delta \vec{v}$

8. Izraziti $\Delta \vec{v}$ (Laplasijan vektorske funkcije \vec{v}) pomoću Dekartovih i cilindarskih koordinata.

Rešenje. $\Delta \vec{v} = \Delta v_x \vec{i} + \Delta v_y \vec{j} + \Delta v_z \vec{k}$

$$\Delta \vec{v} = \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} - \frac{v_x}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) \vec{k}$$

9. Pokazati da razvijeni izrazi $\frac{1}{2} \text{grad} v^2$ i $\nabla(\vec{v}, \vec{v})$ imaju istu vrednost.

Rešenje. Razvijeni izrazi se svode na

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \vec{k}$$

3.2.2.1.3. CIRKULACIJA, STOKSOVA FORMULA

Krivolinijski integral skalarnog proizvoda vektora

brzine \vec{v} i elementa luka $d\vec{s}$ duž zatvorene krive c, naziva se cirkulacija i označava se sa Γ (gamma),

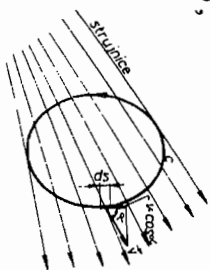
$$\Gamma = \oint_C (\vec{v}, d\vec{s}) = \oint_C v \cos \alpha ds$$

gde je $d\vec{r} = v \cos \alpha ds$.

Prema Stoksovoj formuli

$$\oint_C (\vec{v}, d\vec{s}) = \int_A (\text{rot} \vec{v}, d\vec{A})$$

gde je \vec{A} orijentisana površina koju zatvara kriva c. Cirkulacija je posledica postojanja vrtloga ($\text{rot} \vec{v}$), i predstavlja nekakvo merenje vrtloženja.



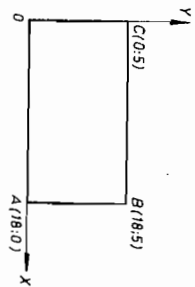
Primeri.

1. Sračunati cirkulaciju u polju brzine $\vec{v}=2xi-2yj+16k$, oko pravougaonika pokazanog na slici (ravan xy).

Rešenje. $\Gamma = \oint_C (\vec{v}, d\vec{s}) = \int_0^{18} (\vec{v}, \vec{i}) dx + \int_0^5 (\vec{v}, \vec{j}) dy + \int_0^{18} (\vec{v}, \vec{i}) dx + \int_5^0 (\vec{v}, \vec{j}) dy =$
 $= \int_0^{18} 2x dx + \int_0^5 -2y dy + \int_0^{18} 2x dx + \int_5^0 -2y dy = 324 - 25 - 324 + 25 = 0$
 U slučajevima kada se u li-

njskom integralu javljaju teškoće u rešavanju, do rezultata se može doći i pomoću Stoksove formule, na primer, za ovaj slučaj, sledi

$$\Gamma = \oint_C (\vec{v}, d\vec{s}) = \int (\text{rot} \vec{v}, d\vec{A}) = \int 2(\vec{\omega}, d\vec{A})$$



Kako je $\text{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x & -2y & 16 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 0 + \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot 0 = 0$

to je i $\int (\text{rot} \vec{v}, d\vec{A}) = 0$, iz čega sledi da strujno polje nije vrtložno.

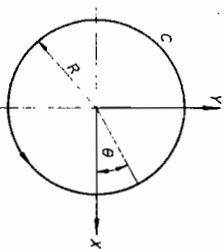
2. Naći cirkulaciju duž kružne putanje u polju brzine $\vec{v} = -3yi + 3xj + k$. Poluprečnik putanje R je povučen iz početka koordinatnog sistema.

Rešenje. Koristi se cilindarski koordinatni sistem. Polazeći od

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho(\vec{v}, d\vec{s})$$

i utvrđenih veza

$$\begin{aligned} x &= R \cos \theta; y = R \sin \theta \\ d\vec{s} &= R d\theta \vec{e}_\theta \\ \vec{i} &= \cos \theta \vec{e}_\rho - \sin \theta \vec{e}_\theta; \vec{j} = \sin \theta \vec{e}_\rho + \cos \theta \vec{e}_\theta \end{aligned}$$



dobija se $\Gamma = \oint_C (-3yi + 3xj + k) d\vec{s} = \int_0^{2\pi} [-3R \sin \theta (\cos \theta \vec{e}_\rho - \sin \theta \vec{e}_\theta) + 3R \cos \theta (\sin \theta \vec{e}_\rho + \cos \theta \vec{e}_\theta) + k] R d\theta \vec{e}_\theta$

Integracija po promenljivoj θ daje konačan rezultat

$$\Gamma = 3R^2 \int_0^{2\pi} (\sin 2\theta + \cos 2\theta) d\theta = 6R^2 \pi$$

Do rezultata se lakše dolazi pomoću Stoksove formule

$$\Gamma = \oint_C (\vec{v}, d\vec{s}) = \int (\text{rot} \vec{v}, d\vec{A})$$

$$\text{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -3y & 3x & 1 \end{vmatrix} = 6\vec{k}$$

$$\Gamma = \int (\vec{k}, d\vec{A}) = 6 \int dA = 6R^2 \pi$$

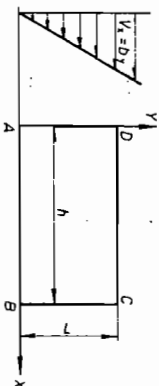
Zadatak.

Sračunati cirkulaciju oko pravougaonika ABCD kad su projekcije brzine date sa

$$v_x = by; v_y = 0; v_z = 0$$

Pokazati u kakvoj vezi stoji cirkulacija s površinom pravougaonika.

Rešenje. $\Gamma = -bA$



3.2.2.1.4. KLASIFIKACIJA POLJA BRZINE

Strujna polja se razvrstavaju prema vrednostima $\text{div} \vec{v}$

i $\text{rot} \vec{v}$.

$$\begin{cases} \text{div} \vec{v} = 0 \\ \text{rot} \vec{v} = 0 \end{cases}$$

Zadovoljena je jednačina $\Delta \vec{v} = \text{grad} \text{div} \vec{v} - \text{rot} \text{rot} \vec{v} = 0$. U ovakvom polju nema vrtloga a protok je ustaljen.

$$\begin{cases} \text{div} \vec{v} \neq 0 \\ \text{rot} \vec{v} = 0 \end{cases}$$

- Potencijalno polje

rotor brzine $\text{rot} \vec{v} = 0$, zbog $\text{rot grad } \varphi = \text{grad } \Delta \varphi = 0$

predstavlja nužan i dovoljan uslov da bi v_x, v_y i v_z bili potencijalni izvodi po koordinatama neke funkcije ϕ koja se naziva potencijalom brzine. Ukratko, bezvrtložne strujnice su sa potencijalne. Komponente brzine takvog polja određene su sa

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{tj.} \quad \vec{v} = \text{grad } \phi.$$

Potencijalna polja su nevrtložna ali u polju mogu postojati izvori i ponori.

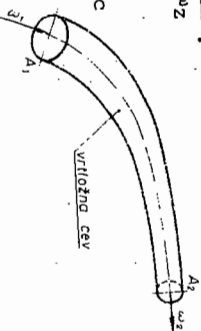
$$\begin{cases} \text{div} \vec{v} = 0 \\ \text{rot} \vec{v} \neq 0 \end{cases}$$

- Vrtložno (solenoidno) polje

U ovakvom polju nema ni izvora ni ponora. Jednačina vrtložnica (vrtložnih linija) glasi

$$\frac{dx}{w_x} = \frac{dy}{w_y} = \frac{dz}{w_z}$$

Vrtložnice se definišu kao linije čije tangente određuju pravac vrtložnog vektora ugaone brzine \vec{w} .



Skup vrtložnica koje prolaze kroz zatvorenu krivu liniju naziva se vrtložnom cevi. Svodjenjem obuhvaćene površine na elementarnu vrednost postaje vrtložno vlakno. Za vrtložna vlakna i cevi važi zakon o nuništvosti vrtloga, i predstavlja se jednačinom (ako je $w = \text{const}$ po preseku A)

$$w_1 A_1 = w_2 A_2$$

Proizvod $2wA$ je karakteristična veličina svake vrtložne cevi, i jednaka je cirkulaciji bilo po kakvoj zatvorenoj liniji koja obuhvata vrtložnu cev tj.

$$\Gamma = \oint_C v_x dx + v_y dy + v_z dz = \int_A (\text{rot} \vec{v}, d\vec{A}) = 2wA,$$

A je površina preseka vrtložne cevi koja je normalna na vrtložnice. U ravni površine A se fluidni delići obrću.

$$\begin{cases} \text{div} \vec{v} \neq 0 \\ \text{rot} \vec{v} \neq 0 \end{cases}$$

- Složeno polje

U ovakvom polju ima vrtloga, izvora i ponora.

Primeri.

1. Kakvo je vektorsko polje gde su brzine $\vec{v} = 2x\vec{i} - 2y\vec{j} + 16k$?

Rešenje. Zbog $\text{rot} \vec{v} = 0$ i $\text{div} \vec{v} = 0$ polje je Laplasovo.

2. Brzine delića tečnosti su proporcionalne rastojanjima delića od ose Ox i njoj su paralelne, tj.

$$v_x = c\sqrt{y^2+z^2}; \quad v_y = 0; \quad v_z = 0.$$

Odrediti vrtložno polje.

Rešenje. Polazi se od izraza

$$\frac{dx}{w_x} = \frac{dy}{w_y} = \frac{dz}{w_z}$$

Znajući da je $w_x = 0$; $w_y = \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial z}$; $w_z = -\frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y}$

$$\text{postaje} \quad w_y = \frac{Cz}{\sqrt{y^2+z^2}}; \quad w_z = -\frac{Cy}{\sqrt{y^2+z^2}}; \quad \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{Cz} dy = -\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{Cy} dz.$$

Integraljenjem se dobija

$$c(y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} = -c(y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} + C_1$$

odnosno $y^2+z^2 = C_2$.

Vidi se da su vrtložne linije krugovi $y^2+z^2 = C_2$;

$x = \text{const}$. Intenzitet vrtloga je svud isti i jednak $\omega = c$.

3. Delići tečnosti se obrću oko ose Oz brzinama koje su obrnuto proporcionalne rastojanju delića od ose, dakle

$$v_x = \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos(v, x) = -\frac{cy}{x^2+y^2}$$

$$v_y = \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos(v, y) = \frac{cx}{x^2+y^2}$$

$$v_z = 0$$

Određiti vrtložno polje.

Rešenje. Ovde je $\text{rot} \vec{v} = 0$, te je kretanje bezvrtložno u svim tačkama sem u onim koje leže na osi Oz, gde bi brzine v_x i v_y težile beskonačnoj vrednosti. Ako se osa Oz okruži cilindrom beskonačno malog poluprečnika, onda je polje, izvan njega, potencijalno, potencijala brzine

$$\phi = c \arctg\left(-\frac{x}{y}\right).$$

Cirkulacija Γ je data sa (vidi 6. glavu)

$$\Gamma = \phi_2 - \phi_1.$$

Pri jednom obilasku oko konture kruga bilo kakvog poluprečnika, cirkulacija je

$$\Gamma = 2\pi c R$$

Ovako se kreću fluidni delići u polju osamljenog vrtloga ili vrtložne cevi.

Zadaci.

1. Neka je $\vec{v} = (16x^2+yz)\vec{i} + 10y^2+yz^2\vec{k}$; a) klasifikovati polje za razne vrednosti x, y, z , b) naći vrtložno polje.

Rešenje. a) za $16x = -yz$ polje je vrtložno

za $16x + yz \neq 0$ polje je složeno

$$b) \vec{\omega} = \frac{1}{2}z^2\vec{i} - \frac{1}{2}y^2\vec{k}$$

2. Tečnost se obrće oko ose Oz kao čvrsto telo ugao-
nom brzinom ω . Odrediti vrtložno polje.

Rešenje. Vrtložnice su prave linije paralelne osi Oz; $\text{rot} \vec{v}$ je u svim tačkama isti i znosi $2\vec{\omega}$.

3. Odrediti vrtložno polje kad su komponente brzine

$$v_x = cy; \quad v_y = 0; \quad v_z = 0.$$

Rešenje. Sve vrtložne linije su prave paralelne s osom Oz; $\text{rot} \vec{v}$ je svud isti i jednak $-c\vec{k}$.

3.2.2.1.5. JEDNAČINA KONTINUITETA

Polazeci od činjenice da je elementarna masa fluidnog delića neuništiva, mora biti

$$dm = \rho dV = \text{const.}$$

i

$$\frac{d}{dt}(dm) = \frac{d(\rho dV)}{dt} = 0$$

odnosno

$$\frac{d\rho}{dt}dV + \rho \frac{d(dV)}{dt} = 0.$$

Prirastaj zapremine dV delića, tj. $d(dV)$ u odnosu na početnu zapreminu dV i za vreme dt obrazuje količnik $d(dV)/dVdt$, koji pokazuje za koliko priraște zapremina delića u jedinici prostora i za jedinicu vremena (dt). S druge strane, to iznosi isto toliko koliko i $\text{div} \vec{v}$, tako da je

$$\text{div} \vec{v} = \frac{d(dV)}{dVdt}.$$

Zato je i $\frac{d(\rho V)}{dt} = \text{div} \vec{v} V$
 pa se gornja jednačina sad javlja kao
 $\frac{d\rho}{dt} V + \rho \text{div} \vec{v} V = 0.$

Pošto se rastavi izraz $d\rho/dt$ na sabirke dolazi se do jednačine kontinuiteta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z + \rho \text{div} \vec{v} = 0.$$

Otuda je $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \text{grad} \rho + \rho \text{div} \vec{v} = 0$
 ili $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0.$

Kad je strujanje stacionarno, a fluid nestišljiv, jednačina kontinuiteta se predstavlja izrazom

$$\text{div} \vec{v} = 0.$$

Kako je $\frac{d(\rho V)}{dt} = dQ = \text{div} \vec{v} V$

to se jednačina kontinuiteta pri stacionarnom i nekompresibilnom strujanju svodi na

$$dQ = 0.$$

Ishod pokazuje da je protok tečnosti kroz strujni prostor isti u svakoj jedinici vremena.

Primeri.

1. Da li je zadovoljena jednačina kontinuiteta za stacionarno nekompresibilno strujanje ako su komponente brzine

$$v_x = 2x^2 - xy + z^2$$

$$v_y = x^2 - 4xy + y^2$$

$$v_z = -2xy - yz + y^2.$$

Rešenje. Primenom jednačine kontinuiteta za stacionarno i nekompresibilno strujanje dobija se

$$\text{div} \vec{v} = \frac{\partial (2x^2 - xy + z^2)}{\partial x} + \frac{\partial (x^2 - 4xy + y^2)}{\partial y} + \frac{\partial (-2xy - yz + y^2)}{\partial z} = 0.$$

2. Napisati jednačinu kontinuiteta za stišljivu struju fluida pomoću Dekartovih, cilindarskih i sfernih koordinata.

Rešenje. Jednačina kontinuiteta stišljivog strujanja glasi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Izražena Dekartovim koordinatama biće:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

cilindarskim: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho r v_z)}{\partial z} \right] = 0$

sfernim: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2 \cos \phi} \left[\frac{\partial(\rho r^2 \cos \phi v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho r v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho r \cos \phi v_\phi)}{\partial \phi} \right] = 0$

3. Putanje delića tečnosti leže na omotaču cilindra. Napisati jednačinu kontinuiteta.

Rešenje. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$, $\vec{v} = v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z$

ili $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho r v_z)}{\partial z} \right] = 0$
 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0.$

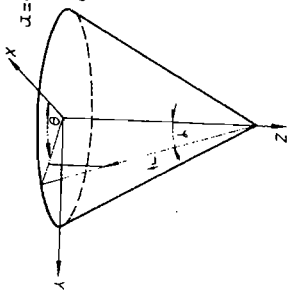
4. Putanje tečnih delića se nalaze na površinama kosačijalnih kupa čija je osa z. Napisati jednačinu kontinuiteta u sfernim koordinatama.

Rešenje. Ako se uzmu za generalisane koordinate $q_1 = \theta$; $q_2 = \phi$; $q_3 = r$; čiji su ortovi međusobno ortogonalni, onda važe odnosi

$$\begin{aligned} x &= r \sin \phi \cos \theta \\ y &= r \sin \phi \sin \theta \\ z &= H - r \cos \phi \end{aligned}$$

Zato je

$$A_1 = \sqrt{r^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + 0} = r \sin \phi$$



$$A_2 = \sqrt{r^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta + r^2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \phi} = r$$

$$A_3 = \sqrt{\sin^2 \phi \cos^2 \theta + \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \cos^2 \phi} = 1$$

Komponente brzine su $v = v_{\theta} \vec{e}_{\theta} + v_{\phi} \vec{e}_{\phi} + v_{\psi} \vec{e}_{\psi}$ sa $v_{\phi} = 0$ jer je $\phi = \text{const}$.
Jednačina kontinuiteta imaće oblik

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \left[\frac{\partial(\rho r v_{\theta})}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho r^2 \sin^2 \phi v_{\psi})}{\partial \psi} \right] = 0$$

$$\text{odnosno} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r \sin^2 \phi} \left[\frac{\partial(\rho r v_{\theta})}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho r^2 \sin^2 \phi v_{\psi})}{\partial \psi} \right] = 0$$

5. Cev prečnika 200 mm proširuje se kupastim difuzorom na prečnik 350 mm. Kroz cev protiče količina vazduha $Q_m = 2,5 \text{ kg/s}$. Na deonici prečnika 200 mm je natpritisak vazduha $p_m = 350 \text{ kPa}$ a temperatura 57°C . U drugoj sekciji manometarski pritisak je 200 kPa , temperatura 30°C . Barometarski pritisak je $101,3 \text{ kPa}$. Kolika je srednja brzina u svakoj sekciji?

Rešenje. Pri ustaljenom strujanju biće za sve preseke strujnog vlakna, i u svim trenucima, proizvod iz površine preseka i na njega upravne pripadajuće brzine uvek iste vrednosti, te predstavlja elementaran protok mase

$$dQ_m = \rho v dA = \text{const.}$$

Za nestišljiv fluid ($\rho = \text{const}$), ova jednačina prelazi u

$$dQ = v dA = \text{const.}$$

Tu je dQ elementaran zapreminski protok fluida.

Malopredjašnje jednačine se odnose na strujno vlakno.

U praktičnoj mehanici fluida, isti se izrazi primenjuju na celokupnu fluidnu struju samo što se tad pod gustinom ρ i brzinom v podrazumevaju njihove srednje vrednosti u posmatranom preseku A strujne cevi. Dakle, protok mase jednak je

$$Q_m = \int_A \rho (v \cdot d\vec{A})$$

Ako se pretpostavi da ni srednja gustina ρ , ni srednja brzina v ne zavisi od položaja elementa dA može se - ukoliko je brzina upravna na presek - jednačina kontinuiteta predstaviti kao

$$Q_m = \rho v \int dA = \rho v A = \text{const.}$$

Zapreminski protok je $Q = vA = \text{const}$.

Srednje brzine fluida u preseku A_1 i A_2 jesu

$$v_1 = \frac{Q_m}{\rho_1 A_1} \quad v_2 = \frac{Q_m}{\rho_2 A_2}$$

gustina ρ se određuje iz jednačine gasnog stanja $p = RT$.

Gasna konstanta za vazduh je $R = 287 \text{ J/kgK}$

Gustina u preseku A_1 biće $\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{(3,5+1,013)10^5}{287 \cdot 330} = 4,765 \text{ kg/m}^3$

gustina u preseku A_2 : $\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = \frac{(2+1,013)10^5}{287 \cdot 303} = 3,465 \text{ kg/m}^3$

srednje brzine u sekcijama 1 i 2 iznose

$$v_1 = \frac{Q_m}{\rho_1 A_1} = \frac{2,5 \cdot 4}{4,765 \cdot 0,22^2 \pi} = 16,71 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{Q_m}{\rho_2 A_2} = \frac{2,5 \cdot 4}{3,465 \cdot 0,35^2 \pi} = 7,50 \text{ m/s}$$

6. Ako se brzine vode između dva paralelna zida raspoređuju po parabolli, i ako je maksimalna brzina $v_{\text{max}} = v_0$ u sredini kanala, a brzina na zidovima nula, naći srednju brzinu u funkciji maksimalne brzine. Koordinatni sistem postaviti u sredinu zidova. Širina kanala je 1 m.

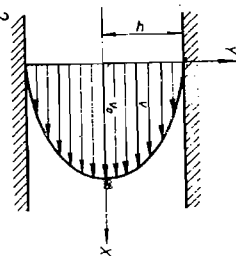
Rešenje. Profil brzine iskazuje se jednačinom

$$v = v_0 \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right]$$

Zapreminski protok jednak je

$$Q = \int_A v dA = 2 \cdot 1 \int_0^h v dy = v_{sr} \cdot 2h \cdot 1$$

$$Odatle je \quad v_{sr} = \frac{v_0}{h} \int_0^h \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] dy = \frac{2}{3} v_0$$



Zadaci.

1. Da li su za stacionarno i nekompresibilno strujanje moguće sledeće vrednosti v_x i v_y :

a) $v_x = 4xy + y^2$

b) $v_x = 2x^2 + y^2$

$v_y = 6xy + 3x$

$v_y = -4xy$

Rešenje. a) nemoguće; b) moguće.

2. Tečnost se kreće nestacionarno ali tako da svaki njezin deo opisuje krug, normalan na osu, a na osi se nalazi i središte kruga. Napisati jednačinu kontinuiteta.

Rešenje. $\vec{v} = r\omega\vec{\theta}_0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial \theta} = 0$

3. Strujanje je definisano poljem osamljenog izvora ili ponora odnosno, brzina svakog delića zavisi samo od rastojanja r od centra. Napisati jednačinu neprekidnosti (kontinuiteta).

Rešenje. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{2}{r} \rho v_r + \frac{\partial \rho v_r}{\partial r} + \rho \frac{\partial v_r}{\partial r} = 0$ ($\theta = \text{const}$; $\theta = \text{const}$)

4. Svaki deo tečnosti se kreće tako da se u svakom trenutku nalaze na ravni u kojoj leži vertikalna osa z. Napisati jednačinu kontinuiteta.

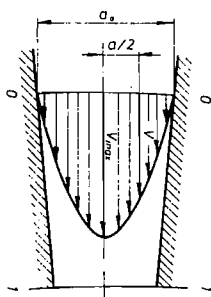
Rešenje. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho v_r}{r} + \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$; ($\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_z \vec{e}_z$)

5. Fluid struji između dve konvergentne ploče (koje su široke 450 mm) brzinom koja se može predstaviti izrazom

$$\frac{v}{v_{max}} = 2 \frac{a}{a_0} \left(1 - \frac{a}{a_0} \right)$$

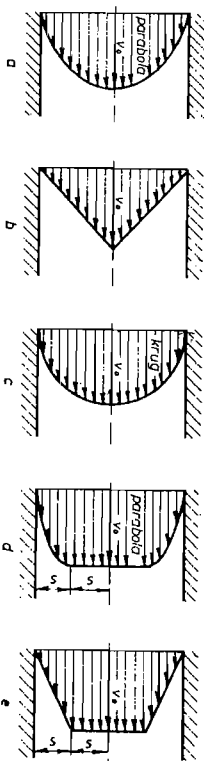
Nek je $a_0 = 50$ mm i $v_{max} = 0,3$ m/s.

Izračunati: a) protok, b) srednju brzinu u preseku 50×450 mm² i c) srednju brzinu u preseku 20×450 mm²



Rešenje. a) $Q = 2,25$ l/s, b) $v_{sr} = 0,1$ m/s, c) $v_{sr} = 0,25$ m/s.

6. Kolika je srednja vrednost brzina fluida ako se brzine između dva paralelna zida raspoređuju na način prikazan dijagramima.



Rešenje. a) $v_{sr} = \frac{2}{3} v_0$; b) $v_{sr} = \frac{1}{2} v_0$; c) $v_{sr} = \frac{4}{\pi} v_0$;

d) $v_{sr} = \frac{5}{6} v_0$; e) $v_{sr} = \frac{3}{4} v_0$.

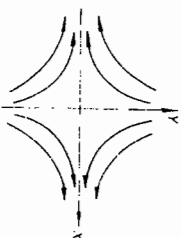
7. Koliko fluida Q protokne između dve kružne strujnice radijusa r_1 i r_2 kad je a) $v_r = 0$, $v_\theta = c/r$ i b) $v_r = 0$, $v_\theta = \omega r$, po jedinici visine prostora.

Rešenje. a) $Q = c \cdot 2\pi \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1}$; b) $Q = \omega \frac{r_2^3 - r_1^3}{2}$

8. 0,1 kg/s vazduha struji kroz cev prečnika 200 mm. Pretpostavljajući da u preseku vladaju normalni atmosferski uslovi ($p_0 = 101325$ Pa, $t_0 = 15^\circ\text{C}$, $R = 287$ J/kgK), sračunati brzinu vazduha.

Rešenje. $v_{sr} = 26,32$ m/s

9. Kavansko strujanje predstavljano je komponentama brzine $v_x=4x$; $v_y=-4y$. Odrediti a) oblik strujnica, b) vrtlog, c) i proveriti da li strujanje zadovoljava jednačinu kontinuiteta.



Rešenje. a) b) $w=0$; c) zadovoljava.

3.2.2.2. POLJE UBRZANJA

To je vektorsko polje gde svakoj tački pripada po jedan vektor ubrzanja fluidnih delića.

Primeri.

1. Objasniti šta predstavljaju pojedini članovi opšteg izraza vektora ubrzanja.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v}$$

Odgovor.

$\frac{d\vec{v}}{dt}$ - predstavlja supstancijalni izvod brzine \vec{v} po vremenu;

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ - predstavlja lokalni izvod po vremenu odnosno, kako se menja brzina \vec{v} u uočenoj tački strujnog polja s vremenom;

$v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = (\vec{v}, \nabla) \vec{v}$ - naziva se konvektivni izvod brzine \vec{v} i predstavlja promenu brzine \vec{v} u okolici jedne tačke pri zamišljenom pomeranju u ma kojem pravcu.

Ovo zamišljeno pomeranje se dešava u trenutku: (Slični izrazi važe i za bilokakvu skalarnu funkciju).

2. Izraziti ubrzanje fluidnog delića cilindarskim koordinatama.

Rešenje. $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z + \dot{z} \dot{z} \vec{e}_z$$

Do izvoda ortova $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ i \vec{e}_z dolazi se na sledeći način:

a) Skalarni proizvod dva jedinična vektora \vec{c} jeste $(\vec{c}, \vec{c}) = \text{const}$.

Izvod skalarnog proizvoda po vremenu je $(\dot{\vec{c}}, \vec{c}) + (\vec{c}, \dot{\vec{c}}) = 0$

odnosno $(\dot{\vec{c}}, \vec{c}) = 0$

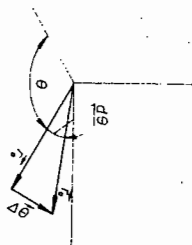
pravac izvoda orta je normalan na

ort.

b) $\dot{\vec{r}}_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = |\dot{\vec{r}}_0| \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

a slično je $\dot{\vec{\theta}}_0 = -\dot{\theta} \vec{e}_r$

$$\dot{\vec{z}}_0 = 0.$$



(U sledećem primeru izvodi ortova se drukčije određuju).

Izraz za ubrzanje se može napisati kao

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z$$

ili

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{dv_z}{dt} \vec{e}_z$$

Kako je $v_r = f_1(r, \theta, z, t)$, $v_\theta = f_2(r, \theta, z, t)$ i $v_z = f_3(r, \theta, z, t)$ to je

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}$$

$$\frac{dv_\theta}{dt} = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

3. Polje brzine je definisano izrazom

$$\vec{v} = (3rr^2 + 2t\theta) \vec{e}_r + (12t + 5r\theta) \vec{e}_\theta + (6z^2t + 2zr) \vec{e}_z$$

Za koliko se delić ubrza u tački M($r=2$; $\theta=0$; $z=-2$; $t=3$) pravcem osa sistema?

Rešenje. Prema opštem obrascu za ubrzanje u cilindarskom koordinatnom sistemu jeste

$$\dot{\vec{a}} = \frac{d\dot{V}}{dt} = \left(\frac{dV}{dt} \right) \vec{r}_0 + \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \frac{V}{r} \vec{r}_0 + \frac{dV}{dt} \frac{V}{r} \vec{r}_0 + \frac{dV}{dt} \frac{V}{r} \vec{z}_0$$

slеди

$$\frac{dV}{dt} = 3r^2 + 2\theta + 6rt(3tr^2 + 2t\theta) + 2t(12t + 5r\theta) \frac{1}{r} = 1416$$

$$\frac{dV}{dt} = 12 + 5\theta(3tr^2 + 2t\theta) + 5r(12t + 5r\theta) \frac{1}{r} = 192$$

$$\frac{dV}{dt} = 6z^2 + 2z(3tr^2 + 2t\theta) + (12zt + 2r)(6z^2 + 2zr) = -4472$$

$$\dot{\vec{a}} = 768\vec{r}_0 + 840\vec{\theta}_0 - 4472\vec{z}_0$$

4. Izraziti ubrzanje sfernim koordinatama.

Rešenje. Lako je uveriti se da je ubrzanje i u generalisanim koordinatama dato izrazom

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla) \vec{V}$$

Za sferni koordinatni sistem važi

$$\begin{aligned} \vec{V} &= V_r \vec{r}_0 + V_\theta \vec{\theta}_0 + V_\phi \vec{\phi}_0, \\ V &= r \frac{\partial \dots}{\partial r} + \dot{\theta}_0 \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial \dots}{\partial \theta} + \dot{\phi}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \dots}{\partial \phi} \end{aligned}$$

Osnovno je da se nadju izvodi ortova \vec{r}_0 , $\vec{\theta}_0$ i $\vec{\phi}_0$ po vremenu. Radi toga se prvo uspostavlja veza između ortova Dekartovog i sfernog koordinatnog sistema. Za \vec{r}_0 - prema slici i na osnovu sličnosti trouglova važi

$$\vec{r}_0 = (\dot{\theta}_0 \cos \theta + \dot{\phi}_0 \sin \theta) \cos \phi + \dot{\theta}_0 \sin \theta \sin \phi + \dot{\phi}_0 \cos \theta \sin \phi$$

tj. $\vec{r}_0 = \cos \theta \cos \phi \dot{\theta}_0 + \sin \theta \cos \phi \dot{\phi}_0 + \sin \theta \dot{\theta}_0 \sin \phi + \sin \theta \dot{\phi}_0 \cos \phi$

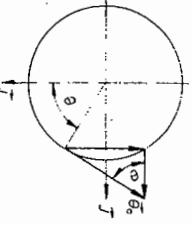
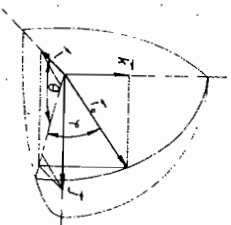
Za ort $\vec{\theta}_0$ se dobija (prema slici)

$$\vec{\theta}_0 = -\sin \theta \dot{\theta}_0 + \cos \theta \dot{\phi}_0$$

Za ort $\vec{\phi}_0$ sledi

$$\vec{\phi}_0 = \dot{\theta}_0 \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi}_0 \sin \theta \sin \phi$$

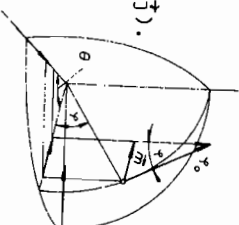
gde je $m = -\dot{\theta}_0 \cos \theta - \dot{\phi}_0 \sin \theta$ tako da je $\vec{\phi}_0 = -\cos \theta \sin \theta \dot{\theta}_0 - \sin \theta \sin \theta \dot{\phi}_0 + \cos \theta \dot{\phi}_0$



Ortovi \vec{r}_0 , $\vec{\theta}_0$ i $\vec{\phi}_0$ su ispravno napisani jer su izvodi po vremenu ortova i, j i k jednaki nuli ($\dot{i} = 0$; $\dot{j} = 0$; $\dot{k} = 0$.)
Sad su $\vec{r}_0 = -\sin \theta \cos \phi \dot{\theta}_0 - \cos \theta \sin \phi \dot{\phi}_0 + \cos \theta \cos \phi \dot{\theta}_0 + \sin \theta \cos \phi \dot{\phi}_0 + \cos \theta \dot{\theta}_0 \sin \phi + \sin \theta \dot{\phi}_0 \cos \phi$

Izraz $\cos \theta \dot{\theta}_0 + \sin \theta \dot{\phi}_0$ može se napisati kao $\cos \theta \dot{\theta}_0 + \sin \theta \dot{\phi}_0 = \cos \phi \dot{r}_0 - \sin \phi \dot{\theta}_0$ tako da je

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_0 &= -\dot{\theta}(\cos \phi \dot{r}_0 - \sin \phi \dot{\theta}_0) \\ \dot{\phi}_0 &= \sin \theta \dot{\theta}_0 - \cos \theta \dot{\phi}_0 \\ \dot{\phi}_0 &= (\sin \theta \sin \theta \dot{\theta}_0 - \cos \theta \cos \theta \dot{\phi}_0) \dot{r}_0 - (\cos \theta \sin \theta \dot{\theta}_0 + \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}_0) \dot{j} - \sin \theta \dot{\theta}_0 \dot{k} \end{aligned}$$



Prema tome je $\dot{\theta}_0 = -\dot{\theta} \dot{r}_0 - \dot{\theta} \sin \theta \dot{\theta}_0$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_0 &= \dot{\theta} \cos \theta \dot{\theta}_0 + \dot{\theta} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_0 &= \sin \theta \dot{\theta}_0 - \cos \theta \dot{\phi}_0 \\ \dot{\phi}_0 &= -\dot{\theta} \dot{r}_0 - \dot{\theta} \sin \theta \dot{\theta}_0 \end{aligned}$$

Sada je ubrzanje

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}}{dt} &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla) \vec{V} = \frac{\partial}{\partial t} (V_r \dot{r}_0 + V_\theta \dot{\theta}_0 + V_\phi \dot{\phi}_0) + V_r \frac{\partial}{\partial r} (V_r \dot{r}_0 + V_\theta \dot{\theta}_0 + V_\phi \dot{\phi}_0) + \\ &+ V_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (V_r \dot{r}_0 + V_\theta \dot{\theta}_0 + V_\phi \dot{\phi}_0) + \frac{V_\phi}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (V_r \dot{r}_0 + V_\theta \dot{\theta}_0 + V_\phi \dot{\phi}_0) + \\ &+ \frac{V}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (V_r \dot{r}_0 + V_\theta \dot{\theta}_0 + V_\phi \dot{\phi}_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial t} \dot{r}_0 + V_r \frac{\partial \dot{r}_0}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \dot{\theta}_0 + V_\theta \frac{\partial \dot{\theta}_0}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \dot{\phi}_0 + V_\phi \frac{\partial \dot{\phi}_0}{\partial \phi} + V_r \frac{\partial}{\partial r} (V_r \dot{r}_0 + V_\theta \dot{\theta}_0 + V_\phi \dot{\phi}_0) + \\ &+ V_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (V_r \dot{r}_0 + V_\theta \dot{\theta}_0 + V_\phi \dot{\phi}_0) + \frac{V_\phi}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (V_r \dot{r}_0 + V_\theta \dot{\theta}_0 + V_\phi \dot{\phi}_0) + \\ &+ \frac{V}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (V_r \dot{r}_0 + V_\theta \dot{\theta}_0 + V_\phi \dot{\phi}_0), \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_{r\frac{\partial}{\partial r}} + \frac{v_\theta}{r\cos\phi} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \phi} - v_\theta \cos\phi \dot{\theta} - v_\phi \dot{\phi} \right] \vec{r}_0 + \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_{r\frac{\partial}{\partial r}} + \frac{v_\theta}{r\cos\phi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + v_r \dot{\theta} \cos\phi - v_\phi \dot{\theta} \sin\phi \right] \vec{\theta}_0 + \left[\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_{r\frac{\partial}{\partial r}} + \frac{v_\theta}{r\cos\phi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_r \dot{\phi} - v_\theta \sin\phi \dot{\theta} \right] \vec{\phi}_0$$

Radikalna, kružna i meridijanska komponenta brzine \vec{v} mogu se predstaviti izrazima

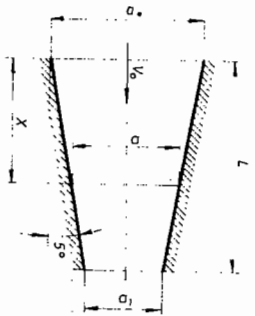
$$v_r = \dot{r}; \quad v_\theta = r\dot{\theta}\cos\phi; \quad v_\phi = r\dot{\phi}$$

te sledi $\frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{dv_r}{dt} - \frac{1}{r}(v_\theta^2 + v_\phi^2) \right] \vec{r}_0 + \left[\frac{dv_\theta}{dt} + \frac{1}{r}(v_r v_\theta - v_\phi v_\theta \tan\phi) \right] \vec{\theta}_0 + \left[\frac{dv_\phi}{dt} + \frac{1}{r}(v_r v_\phi - \frac{v_\theta^2}{r} \tan\phi) \right] \vec{\phi}_0$,

i konačno

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (r\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \cos^2\phi) \vec{r}_0 + \frac{1}{r\cos\phi} \frac{d(r^2\dot{\theta}\cos^2\phi)}{dt} \vec{\theta}_0 + \left[\frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\phi})}{dt} - \dot{\theta}^2 \sin\phi \cos\phi \right] \vec{\phi}_0$$

5. Kroz cev četvrtastor preseka čija se visina menja linearno od a_0 do a_1 na dužini L, voda se ubrzava. Širina četvrtaste cevi je konstantna i jednaka 1.



Sračunati ubrzanje vode u proizvoljnom preseku a, u funkciji predjenog puta x znajući $v_0, a_0, a_0/a_1=2, \alpha=5^\circ$. Koliko je ubrzanje i protok na razdaljini $x/L=0,6$ pri $v_0=5$ m/s, $a_0=2$ m? Strujanje je ustaljeno; ($\text{tg}5^\circ=0,0875$).

Rešenje. $\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$

Zbog stacionarnog i linijiskog strujanja je

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

Iz $v_0 a_0 = v_x a$ sledi $v_x = \frac{v_0 a_0}{a}$

a iz sličnih trouglova $\frac{a_0}{L+m} = \frac{a}{L-m-x} = \frac{a_1}{m}$

Sa $ma_0 = a_1(L+m)$, otkud $m = \frac{a_1 L}{a_0 - a_1}$

bice $a = \frac{a_0(L-x) + a_1 x}{L}$ odnosno $a = \frac{a_0(2L-x)}{2L}$

te je brzina

$$v_x = \frac{2v_0 L}{2L-x} \cdot \text{Sledi delimični izvod} \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{2v_0 L}{(2L-x)^2}$$

i naposljetku ubrzanje $\vec{a} = \frac{2v_0 L}{2L-x} \cdot \frac{2v_0 L}{(2L-x)^2} \vec{i} = \frac{4v_0^2 L^2}{(2L-x)^3} \vec{i}$

Zamenjujući $\frac{x}{L} = 0,6; \quad v_0 = 5$ m/s; $a_0 = 2$ m i $\alpha = 5^\circ$

dobija se $a = 3,188$ m/s².

Protok je $Q = a_0 \cdot 1 \cdot v_0 = 10$ m³/s.

6. Znaajući da je $\vec{v} = \text{grad}\phi$ pokazati da i ubrzanje ima svoj potencijal.

Rešenje. $a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z$

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v} \text{grad} v_x$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \vec{v} \text{grad} v_y$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \vec{v} \text{grad} v_z$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a / \text{at} (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) + \vec{v} (\text{grad} v_x \vec{i} + \text{grad} v_y \vec{j} + \text{grad} v_z \vec{k})$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \phi + \frac{1}{2} \text{grad} v^2$$

Operatori ∇ i $\partial/\partial t$ mogu menjati mesta jer se prvi odnosi na prostor a drugi na vreme, zato su i nezavisne veličine.

Tako može da se napiše

$$\vec{a} = \text{grad}(\frac{1}{2}v^2 + \frac{\partial \phi}{\partial t})$$

Zadaci.

1. Utvrditi vrednost ubrzanja delića u tački A(3;1;0) polja brzine određenog izrazom

$$\vec{v} = 10\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j} - xyz\vec{k}$$

Rešenje. $\vec{a}_A = 80\vec{j}$

2. Znajući da je $\vec{v} = 6x\vec{i} + 6y\vec{j} - 7t\vec{k}$ odrediti ubrzanje delića u tački A(10;6;0) polja u trenutku $t = 10$ s.

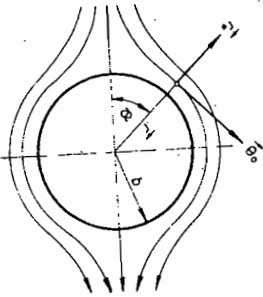
Rešenje. $\vec{a} = 36x\vec{i} + 36y\vec{j} + 7\vec{k}$; $\vec{a}_A = 360\vec{i} + 216\vec{j} - 7\vec{k}$

$a_A = 420$ m/s².

3. Posmatra se stacionarno

i dvodimenzijnsko strujanje oko cilindrične poluprečnika b (v. sliku). Koristeći se cilindarskim koordinatama izražava se brzina neviskoznog i nestišljivog fluida jednačinom

$$\vec{v}(r, \theta) = -(v_0 \cos \theta - \frac{b^2 v_0}{r^2} \cos \theta) \vec{r}_0 + (v_0 \sin \theta + \frac{b^2 v_0}{r^2} \sin \theta) \vec{\theta}_0$$



Tu je $v_0 = \text{const.}$

Koliko se ubrzava fluidni delić koji se pod uglom

$\theta = \alpha$ nalazi na granichnoj površini cilindra.

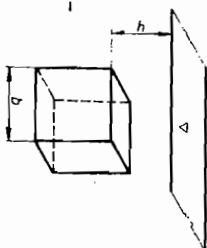
Rešenje. $\vec{a} = -\frac{4v_0^2 \sin^2 \alpha}{b} \vec{r}_0 + \frac{2v_0^2 \sin 2\alpha}{b} \vec{\theta}_0$

4. Za strujnice-krugove duž kojih intenzitet brzine iznosi 2 m/s sračunati: a) horizontalne, vertikalne, tangentialne i normalne komponente brzine i ubrzanja u tački A(2;60°); b) vrtlog; c) proveriti da li je zadovoljena jednačina kontinuiteta.

Rešenje. a) $v_x = -1,73$ m/s ; $v_y = 1$ m/s ; $v_\theta = 2$ m/s ; $v_r = 0$; $a_x = -1$ m/s² ; $a_y = -1,73$ m/s² ; $a_r = -2$ m/s² ; $a_\theta = 0$; b) $\omega = 1$ rad/s ; c) da

5. Kocka od trešnjevog drveta

ivice b je zaronjena u vodu na dubinu $h = 2,45$ m. Relativna gustina drveta je $\rho_{rd} = 2/3$. Koliko je ubrzanje kocke prema slobodnoj površini vode kada se trenutno otpusti; za koje vreme će stići do površine. Otpor zanemariti.



Rešenje. $a = \frac{g}{2}$; $t = 1$ s

3.3. SLOŽENO KRETANJE

Radi lakšeg izražavanja komplikovanijih slučajeva strujanja uvode se dva koordinatna sistema i to jedan nepokretan, prema kojem je kretanje apsolutno i drugi pokretan, u kome se predstavlja relativno kretanje (kretanje u odnosu na taj pokretni sistem). Kretanje pokretnog sistema prema nepokretnom sistemu naziva se prinudnim (nametnutim, prenosnim) kretanjem.

3.3.1. BRZINA

Apsolutna brzina kretanja predstavlja se vektorom

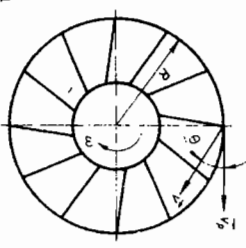
$$\vec{v} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_p$$

gde je \vec{v}_{rel} - relativna brzina, a \vec{v}_p - prinudna brzina. Svaka od ovih brzina može imati obrtnu i translatornu komponentu. (U hidrauličnim mašinama je međunarodnim dogovorom uvedena

upotreba oznake \underline{c} za apsolutnu brzinu i \underline{w} za relativnu brzinu).

Primer.

Iz usmernog aparata turbine voda teče ka lopaticama obrtnog kola (ove su tako postavljene da se izbegne udar vode). Koliku relativnu brzinu ima delić vode na spojašnjem poluprečniku obrtnog kola ako je brzina $v=15$ m/s a ugao $\theta=60^\circ$; (v .sliku); poluprečnik kola $R=2$ m a ugaona brzina $\omega=0,5$ rad/s.



Rešenje. $\underline{v} = \underline{v}_{rel} + \underline{v}_p$

$$v_p = R\omega = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ m/s}$$

$$v_{rel}^2 = v^2 + v_p^2 - 2vv_p \cos\theta =$$

$$15^2 + 1^2 - 2 \cdot 15 \cdot 1 \cos 60^\circ = 211$$

$$v_{rel} = 14,53 \text{ m/s.}$$

Ugao između pravca R i tangente na kolu jednak je

$$\cos\beta = \frac{v \cos(90^\circ - \theta)}{v_{rel}} = \frac{15 \cdot 0,866}{14,53} = 0,89322$$

$$\beta = 26^\circ 42' 50''.$$

Zadaci.

1. Kišne kapi ostavljaju trag na prozorskim oknima voza pod uglom od 40° prema vertikali. Voz se kreće brzinom 72 km/h. Kolika je apsolutna brzina v kišnih kapi?

Rešenje. $v = 23,84 \text{ m/s}$

2. Brod plovi prema jugu brzinom $30\sqrt{2}$ km/h a drugi prema juopistoku brzinom 30 km/h. Odrediti intenzitet i pravac brzine drugog broda u odnosu na gledaoca koji se nalazi na prvom brodu.

Rešenje. $v_{rel} = 30 \text{ km/h}$ smeru severo-istok

3.3.2. UBRZANJE

a) Prinudno translatorno kretanje

Apsolutno ubrzanje pri translatornom prinudnom kretanju (npr. putničkog voza) iznosi

$$\underline{a} = \underline{a}_{rel} + \underline{a}_p \cdot \text{trans}$$

Vektori relativnog i translatornog kretanja ne moraju biti kolinearni. U takvom slučaju intenzitet ubrzanja jednak je

$$a = \sqrt{a_{rel}^2 + a_p^2 \text{trans}^2 + 2a_{rel}a_p \text{trans} \cos\psi}$$

Ugao ψ zaklapaju vektori relativnog i prenosnog ubrzanja.

Kad se relativno kretanje izvodi duž prave linije onda je relativno ubrzanje kolinearno s relativnom putanjom delića.

Pri relativnom kretanju po krivi u ravni relativno ubrzanje se sastoji iz dva dela i to: iz relativnog tangentnog \underline{a}_{reltan} i relativnog normalnog \underline{a}_{relnor} ubrzanja.

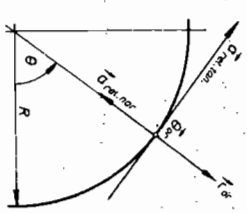
Redom je

$$\underline{a} = \frac{dv_{rel}}{dt} \underline{e}_{or} + \underline{a}_{relnor} = \frac{-v_{rel}^2}{R} \underline{e}_{-r}$$

ako se ortovi relativnog koordinatnog sistema r, θ označe sa \underline{e}_{or} i $\underline{e}_{\theta r}$. Relativno kretanje u svom koordinatnom sistemu ima podudarne izraze kao i kretanje prema apsolutnom sistemu.

Rezultantno relativno ubrzanje je određeno izrazom

$$\underline{a}_{rel} = \underline{a}_{reltan} + \underline{a}_{relnor}$$



a intenzitet

$$a_{rel} = \sqrt{a_{reltan}^2 + a_{relnor}^2}$$

b) Prirudno obrtno kretanje

Apsolutno ubrzanje ovakvog kretanja predstavlja se zbirom vektora

$$\vec{a} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_p + \vec{a}_{cor} = \vec{a}_{reltan} + \vec{a}_{relnor} + \vec{a}_{ptan} + \vec{a}_{pnor} + \vec{a}_{cor}$$

\vec{a}_{cor} je Koriolisovo ubrzanje:

$$\vec{a}_{cor} = 2 [\vec{\omega}_p \times \vec{v}_{rel}]$$

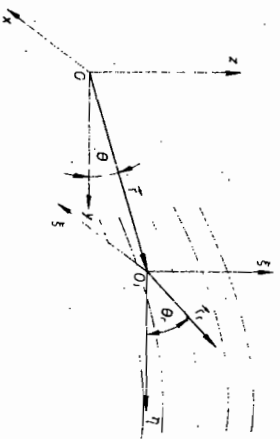
Koriolisovo ubrzanje je posledica obrtanja relativnog sistema, i vektor Koriolisovog ubrzanja je normalan na vektor ugaone brzine prirudnog kretanja i vektor relativne brzine u smeru koji određuje red ovih vektora (pravilo desne ruke).

Primeri.

1. Polje brzina

$\vec{v}(\xi, \eta, \zeta, t)$ posmatra se prema pokretnom koordinatnom sistemu ξ, η, ζ .

Početak ovog sistema putuje prema nepokretnom sistemu x, y, z translacionom brzinom \vec{v}_p , ugaonim ubrzanjem $\vec{\omega}_p$ i translacionim ubrzanjem \vec{a}_p . Napisati izraz za apsolutno ubrzanje delića koji se nalazi u položaju \vec{r}_p prema pokretnom sistemu.



Rešenje. Ubrzanje je dato izrazom

$$\vec{a} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_p + \vec{a}_{cor}$$

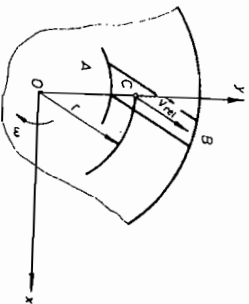
$$\begin{aligned} \vec{a}_{rel} &= \vec{a}_{reltan} + \vec{a}_{relnor} = \vec{a}_{reltan} - \frac{v_{rel}^2}{r} \vec{r}_{or} \\ \vec{a}_p &= \vec{a}_{ptans} + \vec{a}_{pnor} + \vec{a}_{ptan} = \vec{\omega}_p \times \vec{r}_p - r\omega_p^2 \vec{r}_p + \vec{a}_{ptan} \\ \vec{a}_{cor} &= 2 [\vec{\omega}_p \times \vec{v}_{rel}] = 2 [\vec{\omega}_p \times \dot{\vec{r}}_p] \end{aligned}$$

\vec{a}_{ptan} i \vec{a}_{reltan} su posledica obrtanja koordinatnog početka ξ, η, ζ ugaonim ubrzanjem $\vec{\omega}_p$ oko ose \vec{w}_p ; i obrtanja tačke \vec{r}_p ugaonim ubrzanjem $\dot{\vec{w}}_{rel}$ oko ose \vec{w}_{rel}

$$\begin{aligned} \vec{a}_{ptan} &= r\dot{\vec{\omega}}_p \\ \vec{a}_{reltan} &= r\dot{\vec{w}}_{rel} \end{aligned}$$

2. Obrtno kolo pravolini-

nijskih kanala se ravnomerno okreće ugaonom brzinom 4π rad/s oko ose 0 normalne na ravan crteža. Fluid struji kroz kanale konstantnom relativnom brzinom $v_{rel} = 2$ m/s. Naći projekcije apsolutne brzine i ubrzanja za koordinatne ose i delić fluida koji se nalazi u tački C kanala AB kad se zna da je kanal AB pod uglom 45° prema radijusu OC. Radijus $OC = 0,5$ m.



Rešenje. $\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_{rel}$

$$v_p = r\omega = 2\pi \text{ m/s}$$

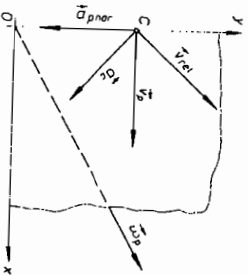
$$v_x = v_p \sin 45^\circ = 7,7 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_{rel} \cos 45^\circ = 1,41 \text{ m/s}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_p + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{cor}$$

$$a_p = a_{pnor} = r\omega^2 = 8\pi^2 \text{ m/s}^2$$

smer i pravac su pokazani na slici.



$a_{rel} = 0$
 zbog konstantne pravolinijske relativne brzine.

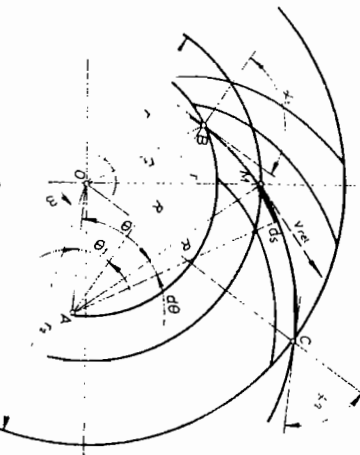
$$a_{cor} = 2 \cdot \omega_p \cdot v_{rel} = 16\pi \text{ m/s}^2$$

smera i pravca prema slici. (Smern obrtanja je u smeru skazaljke na satu pa je vektor $\vec{\omega}_p$ usmeren u pravcu i smeru pokazanom na sl. Vektori $\vec{\omega}_p$, \vec{v}_{rel} i \vec{a}_{cor} moraju da zadovolje orijsentaciju koju zahteva vektorski proizvod - pravilo desne ruke).

$$a_x = a_{cor} \cos 45^\circ = 35,54 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = -a_{cor} \sin 45^\circ = -114,5 \text{ m/s}^2$$

3. Pri relativnom proticanju izmedju dve horizontalne prstenaste ploče opisuju delići neviskozne tačnosti podudarne kružnolučne strujnice poluprečnika R (v.sliku). Pостоjanje izmedju ploča je h; protok $Q = \text{const.}$; strujanje je ustaljeno.



Svaka strujnica polazi pod uglom $\alpha_1 = 71^\circ$ prema poluprečniku $r_1 = 50 \text{ mm}$ a završava se pod uglom $\alpha_2 = 67,5^\circ$ prema krugu $r_2 = 100 \text{ mm}$.

Ploče se obrću stalnom ugaonom brzinom intenziteta $32\pi = \omega$ u direktnom smeru. Pita se:

a) Kolika je apsolutna brzina i koliko je apsolutno ubrzanje u proizvoljnoj tački N gde krug $r = \text{const.}$ seče strujnicu ako je projekcija ulazne relativne brzine v_{rel} na pravac tangente kruga istog intenziteta kao i obimska brzina $\omega = r_1 \omega$? Sračunati i brojne vrednosti za $r = r_1 = 65 \text{ mm}$ i za ugao θ izmedju OA i AN jednak $\theta = \theta_N = 59^\circ$.

b) Da li se fluidni delići ubrzavaju ili se usporavaju pri proticanju izmedju ploča. Postiže li se kakva ekstremna vrednost, i gde bi bio položaj tačke na strujnici BMC neren uglom θ (prema pravou OA)? Da li raste apsolutna energija struje i kakvoj bi mašini pripadale obrtne ploče posmatrane kao obrtno kolo hidraulične mašine?

Rešenje. Po definiciji je relativna brzina jednaka

$$v_{rel} = \frac{ds}{dt}$$

gde je ds element strujnice (v.sliku) na proizvoljnom mestu r od O. S druge strane biće

$$ds = R d\theta$$

što vodi jednačini

$$R d\theta = v_{rel} dt \quad (1)$$

Relativna brzina ima komponente v_{relrad} u pravcu radijusa kojim fluidni delić prolazi kroz međuprostor i komponentu u pravcu tangente na krug (tj. obimske brzine u) v_{relu} . Ovom bi brzinom delić samo kružio oko ose O ali nikad ne bi mogao napustiti obim kruga r. Zato jednačina kontinuiteta glasi

$$Q = 2\pi r h v_{relrad} \quad \text{otkud} \quad v_{relrad} = Q/r \quad (2)$$

stavljajući da je

$$k = \frac{Q}{2\pi h} \quad (2a)$$

Pravcem radijusa predje delić putanju dr za vreme dt. Na tako kratkom putu se samo neizmerno malo promeni (opadne) radijalna brzina te se može smatrati da je predjeni put jednaka

$$dr = v_{relrad} dt \quad \text{sa} \quad dt = dr/v_{reltan}$$

Po unošenju u jednačinu (1), i sredjivanju, postaje

$$R \frac{d\theta}{dr} = \frac{v_{rel}}{v_{reltan}} \quad (3)$$

Treba, dakle, sračunati izvod de/dr i poluprečnik krivine R . Radi toga se primenjuje kosinusna teorema za trougao OAM i piše se za stranu $\overline{OA} = e$,

$$e^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos(90^\circ - \alpha) = R^2 + r^2 - 2Rr\sin\alpha \quad (4)$$

Za početni i krajnji položaj fluidnog delića imamo trouglove OAB i OAC i nove jednačine s nepoznatim e i R

$$e^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\sin\alpha_1$$

$$e^2 = R^2 + r_2^2 - 2Rr_2\sin\alpha_2$$

pošto se oduzmu sleduje

$$R = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2(r_2\sin\alpha_2 - r_1\sin\alpha_1)} = 83 \text{ mm} \quad (5)$$

$$e = 40 \text{ mm}$$

Nek se opet primeni kosinusna teorema na trougao OAM ali za stranu

$$r^2 = R^2 + e^2 - 2Rec\cos\theta \quad (6)$$

pa se ova jednačina diferencira: dobija se

$$2rdr = 2Rer\sin\theta d\theta$$

odnosno

$$\frac{r}{e\sin\theta} = R \frac{d\theta}{dr} = \frac{V_{rel}}{v_{relrad}} \quad \text{zbog jednačine (3).}$$

Kako je od ranije $v_{relrad} = k/r$ poslednja jednačina se menja u

$$v_{rel} = \frac{k}{e\sin\theta} = \frac{C}{\sin\theta} \quad (\text{sa } C = k/e) \quad (7)$$

jer je e konstanta kad se zna oblik strujnica (kružnih lukova). Vrednost konstante C sračunae se na sledeći način: Prvo se zadatkom uslovljuje da je projekcija

$$v_{rel}\cos(90^\circ - \alpha_1) = \omega r_1$$

što vodi ka

$$v_{rel1} = \frac{\omega r_1}{\sin\alpha_1} = \frac{32\pi \cdot 0,05}{\sin 71^\circ} = 5,31 \text{ m/s.}$$

Ugao θ_1 se može naći zamenu vrednosti za R i e u jedn. (6) ali je za dalji rad bolje zamenuti jedn. (6) u jedn. (4), pa izdvojiti

$$\cos\theta = \frac{R - r\sin\alpha}{e} \quad (8)$$

i tako dobiti $\theta = f(\alpha)$.

Trenutno se traži:

$$\cos\theta_1 = \frac{R - r_1\sin\alpha_1}{e} = 0,90 \text{ i } \theta_1 = 25^\circ 50'$$

da bi se sračunala konstanta

$$C = v_{rel1}\sin\theta_1 = 5,31\sin 25^\circ 50' = 2,31 \text{ m/s}$$

i brzina M

$$v_{rel} = C\sin\theta = 2,31\sin 50^\circ = 3,01 \text{ m/s.}$$

S radijusom kroz M zaklapa brzina v_{rel} ugao α

$$\sin\alpha = \frac{R - e\cos\theta}{r_M} = \frac{83 - 40\cos 50^\circ}{65} = 0,903 \quad \alpha = 64^\circ 50'$$

Brzina v_{rel} razlaže se u komponente pravcem Dekartova koordinatna sistema čiji se početak nalazi u O a osa Y se podudara s radijusom kroz M . Tačka O je nepomična što znači da prenosni sistem nema translatornu brzinu. U pravcu ose y (u pravcu radijusa) apsolutna brzina ima komponentu

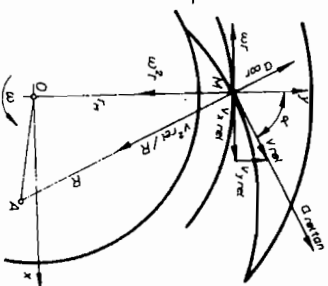
$$v_y = v_{rad} = v_{rel}\cos\alpha = 3,01\cos 64,5^\circ = 1,3 \text{ m/s.}$$

U pravcu ose x , koji se podudara s negativnim pravcem obimne brzine ωr , biće

$$v_x = v_{tan} = -\omega r + v_{rel}\sin\alpha = -32\pi \cdot 0,065 + 3,01\sin 64,5^\circ = -3,81 \text{ m/s}$$

Apsolutna brzina iznosi

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-3,81)^2 + 1,3^2} = 4,02 \text{ m/s.}$$



Relativna brzina ostaje ista u svakoj tački (ne zavisi od vremena) ali se menja od tačke do tačke idući prema izlazu iz strujnog prostora. Zato je ubrzanje pravcem strujnice relativne brzine jednako

$$a_{reltan} = \frac{dv_{rel}}{ds} = \frac{1}{R} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{C}{\sin\theta} \right) = -\frac{C \cos\theta}{R \sin^2\theta} \quad (9)$$

Relativna brzina (tačka se kreće) ostaje na kružnom luku zbog toga što je na to primorava centripetalno ubrzanje

$$\frac{v_{rel}^2}{R}$$

Normalno na strujnicu deluje i Koriolisovo ubrzanje

$$\bullet \quad a_{cor} = 2\omega v_{rel}$$

Naposljetku, prenosni sistem nameće deliću centripetalno ubrzanje (ka središtu kruga O) intenziteta

$$\omega^2 r$$

Iz slike sleduju komponente apsolutnog ubrzanja

$$a_x = a_{tan} = -\left[v_{rel} \left(2\omega - \frac{v_{rel}}{R} \right) \cos\theta + \frac{C \cos\theta}{R \sin^2\theta} \sin\theta \right] = -240,5 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = a_{rad} = -\left[\omega^2 r + \frac{C \cos\theta}{R \sin^2\theta} \cos\theta - v_{rel} \left(2\omega - \frac{v_{rel}}{R} \right) \sin\theta \right] = -224,4 \text{ m/s}^2$$

Apsolutno ubrzanje iznosi

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-240,5)^2 + (-224,4)^2} = 330 \text{ m/s}^2.$$

Nagib vektora apsolutnog ubrzanja prema radijusu r_M iznosi

$$\operatorname{tga} \alpha = \frac{a_x}{a_y} = 1,07 \quad \alpha = 47^\circ.$$

b) Tečnost prolazi kroz prstenasti prostor i relativnim i apsolutnim brzinama, što zavisi s kojeg se mesta strujanje posmatra: s kola ili iz tačke O.

Za relativno strujanje se našlo ubrzanje

$$a_{reltan} = -\frac{C \cos\theta}{R \sin^2\theta}$$

Vidi se da je ubrzanje negativno pravcem relativnog kretanja delića što znači da se fluidni delići pritom usporavaju. Moglo se to, uostalom, primetiti i po tome što je

$$v_{rel1} = 5,31 \text{ m/s} \quad a_{rel2} = 3,01 \text{ m/s}.$$

Da bi se razmotrilo da li relativno ubrzanje ima kakvu ekstremnu vrednost treba naći prvi izvod a_{reltan} po uglu θ , i izjednačiti ga s nulom. Pošto se to uradi dobija se jednačina (posle sredjivanja)

$$1 + \cos 2\theta = 0 \quad \cos\theta = \sqrt{-1}.$$

Vidi se da ne postoji ekstremum, dakle, relativno ubrzanje postepeno menja svoju vrednost, do kraja strujnice.

Ako se uporede apsolutne brzine (ili ubrzanja) duž strujnice, videće se da se njihov intenzitet povećava, što znači, da tečnost prima energiju pri prolasku kroz prstenasti strujni prostor: ploče u stvari čine obrtno kolo nekakve pumpe.

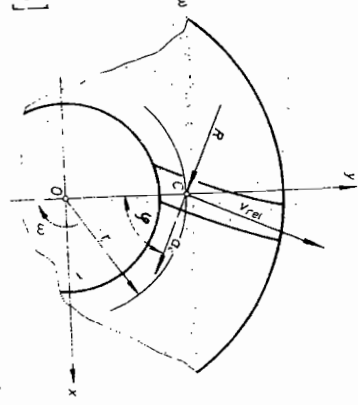
U opisanom primeru, koji se po svojoj opširnosti razlikuje od ostalih, su detaljno analizirane promene kinematičkih veličina vezanih za složeno kretanje, koje se javlja pri strujanju fluida kroz radna kola centrifugalnih hidrauličkih mašina.

Zadaci.

1. Voda teče kroz horizontalnu cev OA koja se stalno vrti 60 puta na minutu oko vertikalne ose Oz. Naći Koriolisovo ubrzanje a_{cor} za tačku struje gde je $v_{rel} = 21/11 \text{ m/s}$ i pada u pravac OA. Uzeti aproksimativnu vrednost za π , $\pi = 22/7$.

Rešenje. $a_{cor} = 24 \text{ m/s}^2$

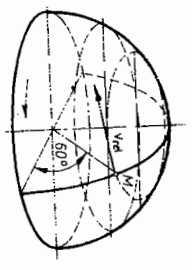
2. Dati rešenje drugog primera (ovog poflavlja) za ustaljeno strujanje i za kružno lučne lopatice koje obrazuju prstenast prostor, konstantne širine. U tački C zaklapa poluprečnik R ugao ϕ s poluprečnikom kroz C. Rešenje izrazi-
ti u opštim brojevima. Šta bi se promenilo u rezultatu ako bi se promenilo smer obr-
tanja.



Rešenje. $v_x = v_{rel} \cos \phi + r\omega$
 $v_y = v_{rel} \sin \phi$;
 $a_x = (2v_{rel}\omega - \frac{v_{rel}^2}{R}) \sin \phi$
 $a_y = -[r\omega^2 + (2v_{rel}\omega - \frac{v_{rel}^2}{R}) \cos \phi]$

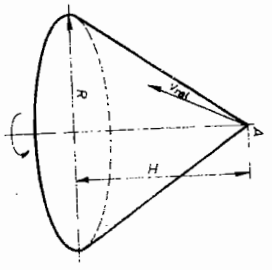
Promena smera obrtanja menja predznake u projekcijama korio-
lisovog ubrzanja na ose X, Y.

3. Reka teče sa istoka na zapad po paraleli 60° severne širine, brzinom $v_{rel} = 4$ km/h. Naći komponente apsolutnog ubrzanja vodnih delića i projekciju onih komponentnih ubrzanja koja zavise od brzine toka. Projekciju odrediti na tangentu odgovarajućeg meridijana. Poluprečnik Zemlje je $R = 6,4 \cdot 10^6$ m.



Rešenje. $a = 1,69 \cdot 10^{-3}$ m/s² ; $a_{rel} = 3,86 \cdot 10^{-8}$ m/s²;
 $a_c = 1,62 \cdot 10^{-5}$ m/s²; $a_{gc} = 1,40 \cdot 10^{-5}$ m/s²

4. Kružna Kupa visine H=4 m, osnova ima poluprečnik R = 3m, obrće se oko vertikalne ose jednom na sekundu. Iz vrha kupe A teče mlaz niz izvodnicu jednolikom brzinom $v_{rel} = 1$ m/s. Naći brzinu i



ubrzanje fluidnog delića u tački N posle t=2 s od početka kretanja.

Rešenje. $v = 7,60$ m/s ; $a = 47,92$ m/s²

M A P O N S K O S T A N J E

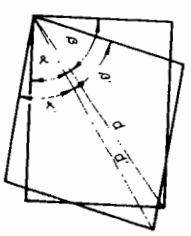
3.4. TENZORSKO POLJE

U savremenoj fizici se proučavaju pojmovi koji se ne mogu opisati uobičajenim izrazima više matematike. Među ove spadaju i tenzori. U stvari su to skupovi više veličina kojima se definiše neko fizičko svojstvo tela u prostoru. Prostor, gde su tenzori definisani, naziva se tenzorskim poljem. U takvim poljima kao i u skalarnim i vektornim, tenzori su funkcije položaja. U nastavku se koriste jedino tenzori kojima se izražavaju deformisanja fluidnih delića i naponi koji su s tim povezani.

3.4.1. BRZINE PROMENJANJA TEČNIH DELIĆA

Potpuna slika o kretanju delića tečnosti dobija se jedino kad se pored kretanja pozna je i način na koji se delići deformišu. S obzirom na to što gasovi i tečnosti predstavljaju veoma pokretljivu sredinu, delići fluida se jako deformišu tako da je važnija brzina deformisanja od samih deformacija. Ovom odlikom se fluidi bitno razlikuju od čvrstih tela gde su deformacije veoma male i spore.

U ravni (v.sliku) se fluidni delić predstavlja paralelogramom, dijagonale g koja građi uglove α i β na obližnjim stranama. Pri deformisanju delića jedna se dijagonala izdužuje, druga se skraćuje, a menja ju se i uglovi. Vremenska relativna izduženja prvobitnih dijagonala naziva se brzinom linearne deformacije, a vremenska promena uglova brzinom ugaone defo-
rmacije.

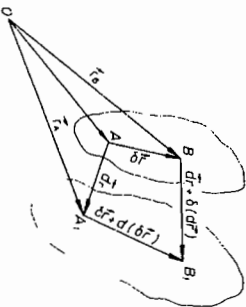


Ove dve vrste deformisanja su osnovne karakteristike deformacijskog stanja, i u sledećim poglavljima su dati izrazi koji ih eksplicitno opisuju.

3.4.1.1. BRZINA LINEARNE DEFORMACIJE

Primeri.

1. Na slici je nacrtana jedna delića makakvog fluida za dva radna položaja i to: 1 u trenutku t , i 2 u $t+dt$. U položaju 1 uočene su dve fluidne čestice A i B, čije je rastojanje δr malo, ali proizvoljno uzeto. Posle prelaska delića u položaj 2 promeni se -



zbog kretanja - rastojanje čestica $A_1 B_1 = \delta r + d(\delta r)$. Zapažiti da se promene izazvane kretanjem fluida (ili u pravcu kojim se menja vektor položaja iz 0) simbolično označuju slovom "d". Pravcem kojim se menja razdaljina čestica, od A ka B, promene se simbolično označuju slovom δ . Pokazati da se redosled δ i "d" diferenciranja vektora \vec{r} fluidnog delića može obrnuti.

Rešenje. Vektor \vec{r}_A priraste za $d\vec{r}$ od tačka A do tačke A_1 . Pravcem kojim se razmiču (kao na slici) ili se primiču (nenacrtano) vektor \vec{r}_A poraste za $\delta(\delta\vec{r})$. Dakle, od A do A_1 jeste $d\vec{r}$, a od A_1 do B1 jeste $d\vec{r} + \delta(\delta\vec{r})$. Dijagonala $A_1 B_1$ četvorougla iznosi jednom

$$\overline{A_1 B_1} = \delta\vec{r} + d\vec{r} + \delta(\delta\vec{r})$$

$$\overline{A B_1} = d\vec{r} + \delta\vec{r} + d(\delta\vec{r})$$

otkud izlazi da je $\delta(d\vec{r}) = d(\delta\vec{r})$.

Ovo pruža traženi dokaz da zaista vektor položaja za elementarno vreme priraste pravcem koji vodi od čestice A ka čestici

ci B delića isto toliko, koliko se promeni prvobitno rastojanje čestice zbog kretanja fluida. Matematička interpretacija ovog primera je da je vremenskoj prostorno diferenciranje ne zavisno međusobno, te se mesto diferenciranja može zameniti.

2. Odrediti brzine linearne deformacije elementarnih tečnih delića u pravcu osa Dekartovog koordinatnog sistema gde su beskonačno male tečne duži, paralelne koordinatnim osama, označene sa

$$\delta r_1(\delta x; 0; 0) ; \delta r_2(0; \delta y; 0) ; \delta r_3(0; 0; \delta z).$$

Rešenje. Zbog prvog primera biće

$$\frac{d(\delta\vec{r})}{dt} = \delta\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}\delta z.$$

Ovaj izraz predstavlja brzinu kojom se delić izdužuje jer je sa $\delta\vec{r}$ označeno izduženje vektora \vec{r} . Da bi se dobile brzine izduženja pravcem ose x treba u gornjem izrazu zadržati samo prvi član (jer je potrebna promena samo u zavisnosti od promenljive x), i projektovati prvi član na osu x. Tako je brzina izduženja elementarnog tečnog delića δr_1 određena skalarnim proizvodom

$$\left(\vec{1}, \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}\delta x\right) = \frac{\partial v_x}{\partial x}\delta x.$$

Brzina relativnog izduženja definiše se kao količnik izduženja elementarnog delića i dužine delića u tom pravcu. Tako je

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta x} = \frac{\partial v_x}{\partial x}.$$

Brzine relativnih izduženja elementarnih tečnih delića pravcem ostale dve ose određeni su izrazima

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \quad \text{ i } \quad \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

3. Kolikom se brzinom izdužuje elementarna tečna duž u strujnom polju definisanom brzinom $\vec{v} = 2xy\vec{i} + 3xy^2\vec{j}$ i to

pravcem $\vec{r} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ za tačku M(3;2).

Rešenje. Brzina izduženja u pravcu \vec{r} je određena sa

$$(\vec{r}_0, \left(\frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y \right))$$

gde su: $\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4y^2}} \vec{i} + \frac{2y}{\sqrt{x^2+4y^2}} \vec{j}$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y\vec{i} + 3y^2\vec{j}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x\vec{i} + 6xy\vec{j}$$

Tako da je brzina izduženja u pravcu \vec{r}

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+4y^2}} ([x\vec{i}+2y\vec{j}], [(2y\vec{i}+3y^2\vec{j})\delta x + (2x\vec{i}+6xy\vec{j})\delta y])$$

odnosno $\frac{1}{\sqrt{x^2+4y^2}} (2xy\delta x + 2x^2\delta y + 6y^3\delta x + 12xy^2\delta y)$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+4y^2}} [(2xy+6y^3)\delta x + (2x^2+12xy^2)\delta y]$$

Brzina linearne deformacije nalazi se deljenjem gornjeg izraza elementom dužine vektora \vec{r} tj. (δr)

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+4y^2}} [(2xy+6y^3)\frac{\delta x}{\delta r} + (2x^2+12xy^2)\frac{\delta y}{\delta r}]$$

ili $\frac{1}{\sqrt{x^2+4y^2}} [(2xy+6y^3)\cos\alpha + (2x^2+12xy^2)\cos\beta]$

gde su $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+4y^2}}$ i $\cos\beta = \frac{2y}{\sqrt{x^2+4y^2}}$

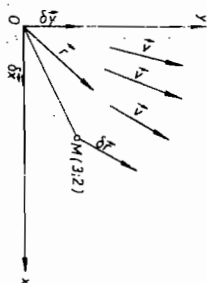
Tako je brzina linearne deformacije u pravcu \vec{r}

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+4y^2}} [(2x^2y+6xy^3) + (4x^2y+24xy^3)]$$

Vrednost brzine linearne deformacije u pravcu \vec{r} za tačku

M(3;2) biće

$$\frac{1}{25} [(36+144) + (72+576)] = 33,12 \text{ s}^{-1}$$



Zadatak.

Za strujno polje $\vec{v} = 2xy\vec{i} + 3xy^2\vec{j}$ sračunati brzinu linearne deformacije elementarne dijagonalne prvoditnog kvadratnog fluidnog delića čije se teme nalazi u koordinatnom početku.

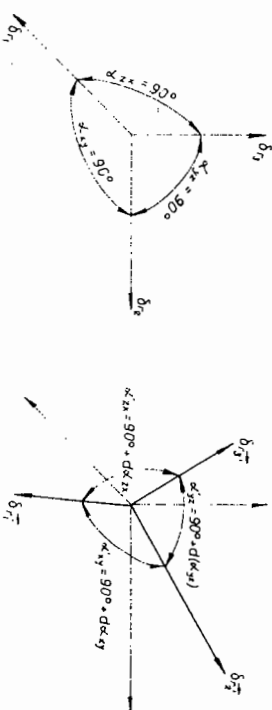
Rešenje. $2y^2 + y + 3xy + x \text{ [s}^{-1}]$

3.4.1.2. BRZINA UGAONE DEFORMACIJE

Primeri.

1. Kolikom se brzinom menjaju uglovi između elementarnih ortogonalnih duži δr_1 , δr_2 i δr_3 tečnog delića.

Rešenje. Promena uglova između osa Dekartovog sistema predstavljena je prirastajima da_{xy} , da_{yz} , da_{zx}



Radi iznalaženja brzine ugaone deformacije ugla α_{xy} formira se skalarni proizvod

$$(\delta \vec{r}_1, \delta \vec{r}_2) = \delta x \delta y \cos \alpha_{xy}$$

otkud $\cos \alpha_{xy} = \frac{(\delta \vec{r}_1, \delta \vec{r}_2)}{\delta x \delta y}$

a diferenciranjem po vremenu biće

$$-\sin \alpha_{xy} \frac{d\alpha_{xy}}{dt} = \frac{1}{\delta x \delta y} \left[\left(\frac{d}{dt} (\delta r_1) \right), \delta r_2 \right] + \left(\delta r_1, \frac{d}{dt} (\delta r_2) \right)$$

Zamenjujući potom razvijene vrednosti za $d/dt(\delta r_1)$ i $d/dt(\delta r_2)$ (v. prethodni primer) i naglašavajući da početni položaj pripada trenutku, kada je izvršeno diferenciranje ($\sin \alpha_{xy} = \sin 90^\circ = 1$), dobija se

$$-\frac{d\alpha_{xy}}{dt} = \frac{1}{\delta x \delta y} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \delta x \delta y + \delta x \frac{\partial v_x}{\partial y} \delta y \right)$$

s rezultatom

$$-\frac{d\alpha_{xy}}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Slično tome je

$$-\frac{d\alpha_{yz}}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad \text{i} \quad -\frac{d\alpha_{zx}}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

2. Dokazati da izrazi

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right); \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right); \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$$

predstavljaju brzine kojom se menjaju uglovi uz dijagonalu delića pri čistom deformisanju. Pozitivne vrednosti gornjih izraza, odgovaraju prema dogovoru smanjivanju uglova.

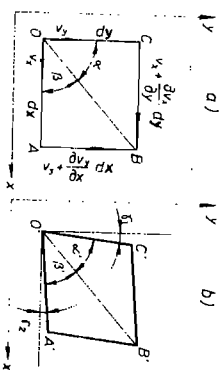
Rešenje. Neka u nekom

trenutku tečni delić u ravni xy ima oblik kvadrata sa stranama dx i dy . Kako su brzine po stranama kvadrata različite, u jedinici vremena kvadratni oblik će se preobraziti u paralelogram (sl. b). Pri tome će se ugao \cos smanjiti za većičinu uglova $(\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2)t$, gde su

$$\dot{\gamma}_1 = t \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$\dot{\gamma}_2 = t \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

Kako je najpogodnije pratiti deformaciju uglova uz dijagonalu



fluidnog delića (uglova α i β), koji posle deformacije (u jedinici vremena) postaju α' i β' ; $\dot{\gamma}_1$ i $\dot{\gamma}_2$ predstavljaju brzinu zakretanja uglova α i β zbog

$$\alpha' = \alpha - \dot{\gamma}_1 t; \quad \beta' = \beta - \dot{\gamma}_2 t$$

zbog malih razlika $\dot{\gamma}_1$ i $\dot{\gamma}_2$ njihova srednja vrednost $\dot{\gamma}$ definiše se kao mera deformacije, odnosno brzina ugaone deformacije uglova α i β je data sa

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2} (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

tako da je

$$\alpha' = \alpha - \dot{\gamma} t; \quad \beta' = \beta - \dot{\gamma} t$$

Uvedjenjem srednje vrednosti brzine ugaone deformacije uz dijagonalu $\dot{\gamma}$ slika deformacije se suštinski ne menja.

3. Naći brzinu ugaone deformacije uz dijagonalu za fluidni delić kvadratnog oblika, u tački $x=2$, $y=1$, kad je

$$\vec{v} = 2xy\vec{i} + 3xy^2\vec{j}$$

Rešenje. Uglovi α i β menjaju se istom brzinom te $\dot{\gamma}$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2} (2x + 3y^2)$$

za tačku $x = 2$; $y = 1$ biće

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2} (4 + 3) = \frac{7}{2} \text{ rad/s}$$

3.4.2. TENZOR BRZINA DEFORMISANJA DELIĆA

Brzina kojom se relativno izdužuju tečni delići u pravcu osa Dekartova koordinatna sistema, i brzine kojom se menjaju uglovi koji definišu paraleloipipedni oblik fluidnog delića sačinjavaju tenzor brzina deformacija e . Tenzor je jačnat

$$\epsilon \equiv \begin{matrix} \frac{\partial V}{\partial x} X & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} Y + \frac{\partial V}{\partial y} X \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} Z + \frac{\partial V}{\partial z} X \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial y} X + \frac{\partial V}{\partial x} Y \right) & \frac{\partial V}{\partial y} Y & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial y} Z + \frac{\partial V}{\partial z} Y \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} X + \frac{\partial V}{\partial x} Z \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} Y + \frac{\partial V}{\partial y} Z \right) & \frac{\partial V}{\partial z} Z \end{matrix}$$

U svakoj tački strujno-deformacijskog polja, tenzor ϵ može imati drugačiju vrednost, ali za jednu, proizvoljnu, tačku je invarijanta koja ne zavisi od upotrebljene koordinatne sistema; što predstavlja njegov osnovni fizički značaj.

Primeri.

1. Pokazati da zbir $\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y + \partial v_z / \partial z$ (dijagonalnih članova tenzora deformacija) predstavlja brzinu relativnog zapreminskog širenja elementarne zapremine delića ma u kojoj tački fluide struje.

Rešenje. Flamentarna zapremina δV jednaka je nečovi-
tom vektornom proizvodu

$$\delta V = (\delta \vec{r}_1, [\delta \vec{r}_2, \delta \vec{r}_3]).$$

Erzinu relativnog zapreminskog širenja predstavlja izraz

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt} (\delta V) = \frac{1}{\delta x \delta y \delta z} \frac{d}{dt} ((\delta \vec{r}_1, [\delta \vec{r}_2, \delta \vec{r}_3])).$$

Izvod po vremenu izraza u velikoj zagradi niče jednak

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt} (\delta V) = \frac{1}{\delta x \delta y \delta z} \left(\frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_1), [\delta \vec{r}_2, \delta \vec{r}_3] \right) +$$

$$+ \left(\frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_2), [\delta \vec{r}_3, \delta \vec{r}_1] \right) + \left(\frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_3), [\delta \vec{r}_1, \delta \vec{r}_2] \right)$$

Zamenjujući ranije izvedene izraze $\frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_i) = \frac{\partial V}{\partial x} \delta x$ i njima slične; kao i uvrštavanjem izraza

$$[\delta \vec{r}_2, \delta \vec{r}_3] = \delta y \delta z \vec{i}; \quad [\delta \vec{r}_3, \delta \vec{r}_1] = \delta x \delta z \vec{j}; \quad [\delta \vec{r}_1, \delta \vec{r}_2] = \delta x \delta y \vec{k}$$

dolazi se do

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt} (\delta V) = \frac{1}{\delta x \delta y \delta z} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y \delta x \delta z \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \delta z \delta x \delta y \vec{k} \right\}$$

i konačno do

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt} (\delta V) = \frac{\partial V}{\partial x} X + \frac{\partial V}{\partial y} Y + \frac{\partial V}{\partial z} Z$$

Rezultat je identičan s poznatim izrazom

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt} (\delta V) = \text{div } \vec{v}.$$

2. Odrediti komponente tenzora brzine deformisanja u generalisanim koordinatama.

Rešenje. Izrazi za rot \vec{v} u Dekartovim i generalisanim koordinatama su predstavljeni sa

$$\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{v} = & \frac{1}{A_2 A_3} \left[\frac{\partial(A_3 v_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(A_2 v_2)}{\partial q_3} \right] \vec{q}_{10} + \frac{1}{A_1 A_3} \left[\frac{\partial(A_1 v_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(A_3 v_3)}{\partial q_1} \right] \vec{q}_{20} + \\ & + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 v_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(A_1 v_1)}{\partial q_2} \right] \vec{q}_{30} \end{aligned}$$

Primjećuje se analogija između komponenta rot \vec{v} i tenzora brzine deformisanja ϵ kada su predstavljene Dekartovim koordinatama. Ako se znaci "-" zamene znakom "+" u izrazima za rot \vec{v} u Dekartovim i generalisanim koordinatama dobiće se nedijagonalne komponente tenzora brzine deformisanja u vidu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 v_2)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_1 v_1)}{\partial q_2} \right] \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{A_1 A_3} \left[\frac{\partial(A_1 v_1)}{\partial q_3} + \frac{\partial(A_3 v_3)}{\partial q_1} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{A_2 A_3} \left[\frac{\partial(A_3 A_3 v_z)}{\partial q_2} + \frac{\partial(A_2 v_z)}{\partial q_3} \right]$$

Dijagonalni članovi tenzora brzina deformisanja odgovaraju članovima izraza za $\text{div } \vec{v}$

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \left[\frac{\partial(A_2 A_3 v_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_1 A_3 v_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(A_1 A_2 v_3)}{\partial q_3} \right]$$

odnosno

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \frac{\partial(A_2 A_3 v_1)}{\partial q_1} ; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \frac{\partial(A_1 A_3 v_2)}{\partial q_2} ;$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \frac{\partial(A_1 A_2 v_3)}{\partial q_3}$$

Zadatak.

Kapisiati komponente tenzora brzina deformisanja pomoću sfernih koordinata.

Rešenje. Dijagonalni članovi

$$\frac{2}{r} v_r + \frac{\partial v_\theta}{r \cos \phi} ; \quad - \frac{1}{r} \text{tg} \phi \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} ; \quad \text{i nedijagonalni}$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right] ; \quad \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{v_\phi}{r} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right] ;$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \text{tg} \phi \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right]$$

3.4.3. OPTIČKI POLJUR POKRETA

Kretanje fluidnog delića, koji se, može se zamisliti kao složen iz tri vrste kretanja i to: a) translaciono, b) rotaciono i c) - usput se deformira. Sve to se može izraziti vektorskom jednačinom

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \left[\vec{\omega}, (\vec{r} - \vec{r}_0) \right] + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \epsilon$$

Prvi član na desnoj strani opisuje translaciono kretanje delića, drugi član se odnosi na obrtanje delića oko pola kretanja ugaonom brzinom, a treći član predstavlja komponentu brzine prouzrokovanu deformacijama. ϵ je tenzor brzina deformacija. Proizvod vektora $(\vec{r} - \vec{r}_0)$ i tenzora ϵ jednak je kasnije navedenim izrazima za komponente brzina deformisanja v_{xd} , v_{yd} , v_{zd} . (Proizvod vektora i tenzora se izvodi prema pravilima tenzorske računice).

Skalarne komponente vektora brzine za kretanje krutog tela određene su sa

$$v_{xkr} = v_{x0} + \omega_y (z - z_0) - \omega_z (y - y_0) =$$

$$= v_{x0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) (z - z_0) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) (y - y_0)$$

$$v_{ykr} = v_{y0} + \omega_z (x - x_0) - \omega_x (z - z_0) =$$

$$= v_{y0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) (z - z_0) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) (x - x_0)$$

$$v_{zkr} = v_{z0} + \omega_x (y - y_0) - \omega_y (x - x_0) =$$

$$= v_{z0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) (y - y_0) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) (x - x_0)$$

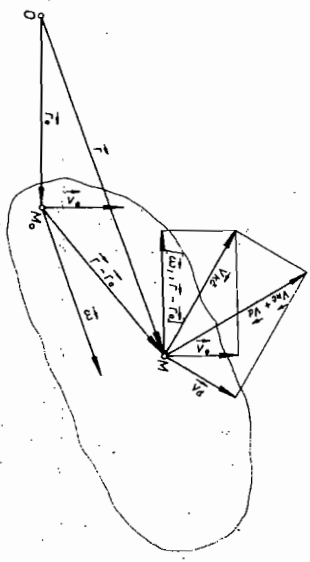
Skalarne komponente brzina deformisanja date su sa

izrazima

$$v_{xd} = \frac{\partial v_x}{\partial x} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) (y - y_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) (z - z_0)$$

$$v_{yd} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) (x - x_0) + \frac{\partial v_y}{\partial y} (y - y_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) (z - z_0)$$

$$v_{zd} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) (y - y_0) + \frac{\partial v_z}{\partial z} (z - z_0)$$



Sabiranjem svih komponentata, brzine delića postaju:

$$v_x = v_{x_0} + \frac{\partial v_x}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial v_x}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial v_x}{\partial z}(z-z_0)$$

$$v_y = v_{y_0} + \frac{\partial v_y}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial v_y}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial v_y}{\partial z}(z-z_0)$$

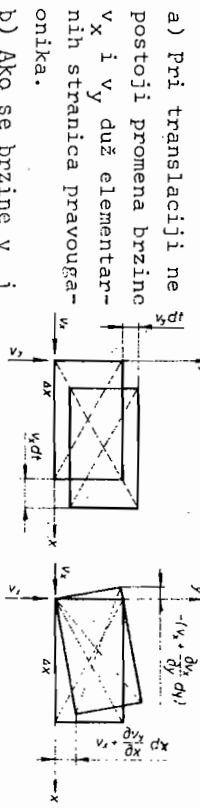
$$v_z = v_{z_0} + \frac{\partial v_z}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial v_z}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial v_z}{\partial z}(z-z_0)$$

S obzirom na to što se parcijalni izvodi vezuju za tačku M_0 , ovi izrazi predstavljaju komponente brzine \vec{v} koja je razvijena u red u okolini tačke M_0 (sa tačnošću do malih veličina prvog reda), te polazna zavisnost ima i matematičko opravdanje.

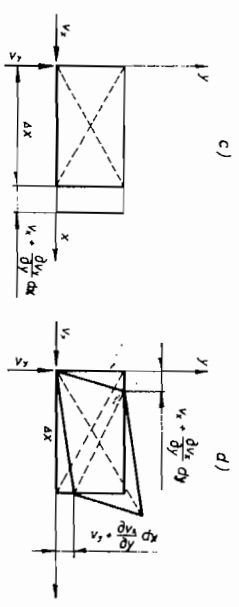
Primeri.

1. Crtežom predstaviti moguća ravanska kretanja sa deformacijom tečnog fluidnog delića pravougaonog oblika.

Rešenje.



a) Pri translaciji ne postoji promena brzine v_x i v_y duž elementarnih stranica pravougaonika.
 b) Ako se brzine v_x i v_y menjaju kako je prikazano na slici dolazi do čiste rotacije.



c) Pri postojanju brzine linearne deformacije dolazi do izduženja fluidnog delića.
 d) Brzine ugaone deformacije prouzrokuju razvlačenje uglova.

2. Dato je polje brzina sa:

$$v_x = cx + 2\omega_0 y + v_{x_0}$$

$$v_y = cy + v_{y_0}$$

$$v_z = -2cz + v_{z_0}$$

gde su $c, \omega_0, v_{x_0}, v_{y_0}$ i v_{z_0} konstantne veličine. Ako su gornjim jednačinama određene komponente brzine u tački (x, y, z) , odrediti komponente brzine i vrste kretanja koja su uključena u kretanje fluidnog delića koji se nalazi u susednoj tački (x_1, y_1, z_1) .

Rešenje.

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + [\vec{\omega}, d\vec{r}] + d\vec{r} \cdot \vec{\epsilon}$$

Ovde je sa \vec{v} označena translatorna brzina u tački (x, y, z)

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = (cx + 2\omega_0 y + v_{x_0})\vec{i} + (cy + v_{y_0})\vec{j} + (v_{z_0} - 2cz)\vec{k}$$

Sa $\vec{\omega}$ je označena ugaona brzina

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\vec{i} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] = -\omega_0 \vec{k},$$

što znači da se delić obrće konstantnom ugaonom brzinom oko z-ose.

Obrtanje delića u tački (x_1, y_1, z_1) je određeno sa

$$\left[\vec{\omega}, d\vec{r} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\omega_0 \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \omega_0 dy \vec{i} - \omega_0 dx \vec{j}.$$

Sa dx, dy i dz su označena rastojanja između tačke (x, y, z) i tačke (x_1, y_1, z_1) .

Komponente tenzora brzina deformisanja su

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = c; \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = -2c$$

$$i \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \omega_0$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = 0$$

Skalarne komponente brzine deformisanja delića u tački (x_1, y_1, z_1) su

$$v_{xd} = cdx + \omega_0 dy; \quad v_{yd} = \omega_0 dx + cdy; \\ v_{zd} = -2cdz$$

Na taj način je kretanje tačke (x_1, y_1, z_1) određeno sa tri komponente brzine: translatornom brzinom (\vec{v}); rotacionom brzinom ($[\vec{\omega}, d\vec{r}]$) i brzinom deformisanja (\vec{v}_d).

3.4.4. TENZOR NAPONA

Deformisanje delića izaziva promene napona u deliću i obratno. U ma kojoj tački fluidnog prostora, količnik

$$\lim_{d\vec{A} \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{d\vec{A}} = \vec{P}$$

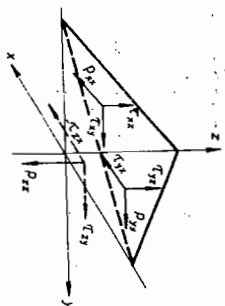
($d\vec{F}$ je elementarna sila koja napada elementarnu površinu $d\vec{A}$ u posmatranoj tački prostora), naziva se napon i , u stvari, je vektor (\vec{P}) - kao sila računata po jedinici površine. Vektor napona \vec{P} u nekoj tački može imati bezbroj vrednosti već prema tome kako je orijentisana površnica na koju se odnosi sila $d\vec{F}$. Zato je vektor napona \vec{P} funkcija i položaja, i orijentacije površnice. Ove zavisnosti su obuhvaćene tenzorom napona koji je sa svoje strane funkcija samo položaja tačke.

Položaj vektora napona prema mernoj površnici da je proizvoljan, pa se zato vektor napona razlaže na komponentu u pravcu spoljašnje normale na površnicu da tzv. normalna komponenta, i u komponentu u ravni površnice da: tangenta komponenta napona.

Naponi koji se pojavljuju u deliću opisuju se, dakle, tenzorom napona S . Ovaj tenzor ima 9 članova kao i tenzor brzina deformisanja, i to

$$S = \begin{matrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{matrix}$$

Prvi indeks označava osu



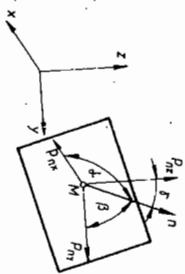
koja stoji normalno na površnicu a drugi indeks pokazuje pravac ose po kojoj se napon ispoljuje. P_{xx}, P_{yy} i P_{zz} su normalni naponi a $T_{yx} = T_{xy}, T_{zx} = T_{xz}$ i $T_{zy} = T_{yz}$ jesu tangenadni naponi. Normalni i tangenadni naponi imaju pozitivan znak kad smer normale na površini i smer delovanja napona imaju isti znak u odnosu na orijentaciju koordinata. U protivnom naponi su negativni.

Projekcije vektora napona \vec{p} , koji djeluje na proi-
zvoljno orijentisanu površinicu (\vec{n}), prema osama Dekartovog
koordinatnog sistema su

$$P_{nx} = P_{xx} \cos \alpha + r_{yx} \cos \beta + r_{zx} \cos \gamma$$

$$P_{ny} = r_{xy} \cos \alpha + P_{yy} \cos \beta + r_{zy} \cos \gamma$$

$$P_{nz} = r_{xz} \cos \alpha + r_{yz} \cos \beta + P_{zz} \cos \gamma$$



α, β i γ su uglovi koje zaklapaju pravac normale na površi-
nu i odgovarajuća koordinatna osa.

Primer.

Pod pojmom "naponi u ravni" treba shvatiti da u je-
dnom pravcu naponi ne postoje. Ploča, na slici, gde su sra-
zmeno vektorima (strelicama) označena opterećenja usredre-
djena na težište ivica; tripi napone $P_{xx} = 500$ Pa i $P_{yy} =$
 $= -100$ Pa i $r_{xy} = r_{yx} = 30$ Pa. Izračunati normalni napon
u pravcu koji zaklapa ugao 60° prema x osi u ravni xy.

Rešenje. Navedeni naponi

određuju naponsko stanje u ravni
xy. Pošto je površina orijentisa-
na pravcem normale \vec{n} , prvo je po-
trebno odrediti projekcije vektora
napona \vec{p} na tu površinu

$$P_{nx} = P_{xx} \cos \alpha + r_{yx} \cos \beta =$$

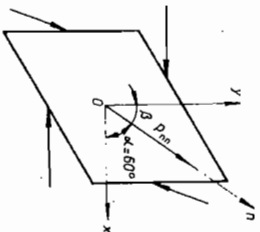
$$= P_{xx} \cos 60^\circ + r_{yx} \cos(90 - 60^\circ) = 500 \cdot \frac{1}{2} + 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 275,95 \text{ Pa}$$

$$P_{ny} = r_{xy} \cos \alpha + P_{yy} \cos \beta + r_{zy} \cos \gamma =$$

$$= 30 \cdot \frac{1}{2} - 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -71,5 \text{ Pa}$$

$$P_{nz} = 0$$

Normalni napon P_{nn} se dobija projektovanjem napona



P_{nx} i P_{ny} na pravac normale \vec{n} .

$$P_{nn} = P_{nx} \cos 60^\circ + P_{ny} \cos 30^\circ = 275,95 \cdot \frac{1}{2} - 71,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 76,13 \text{ Pa.}$$

Zadaci.

1. Definirati normalne i tangentne napone.

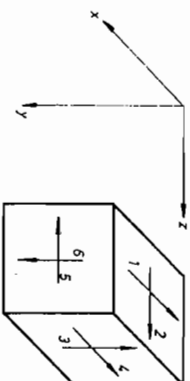
Rešenje. $\vec{p}_n = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{dA} \cos \alpha$ i $\vec{p}_s = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{dA} \cos \beta$

gde su α i β uglovi koje pravac vektora sile $d\vec{F}$ zaklapa sa
normalom \vec{n} i tangentom \vec{t} površine dA .

2. Zašto je u hidrostatici sila koja djeluje na ra-
vnu površinu uvek normalna?

3. Kakvi su tangentni
naponi koji su označeni na
crtežu.

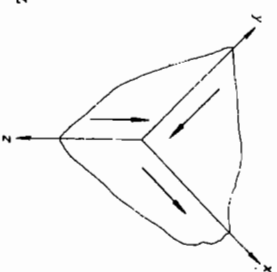
- Rešenje. 1) $-r_{yx}$,
2) $-r_{yz}$, 3) $-r_{zy}$, 4) $-r_{zx}$,
5) $-r_{xz}$, 6) r_{xy}



4. Neki poznati srednji

tangentni naponi su pokazani na
uglu zapreminskog fluidnog ele-
menta. Ako se ostvaruje promena
oblika elementa, kakvi drugi tan-
gentni naponi treba još da pos-
toje i kakav smer da imaju.

Rešenje. $-r_{zx}$, $-r_{xy}$ i r_{yz}



3.4.4.1. DEFINICIJA PRITISKA

Statički pritisak u proizvoljnoj tački neviskoznog
fluida definiše se kao makoji normalan napon

$$P_{11} = P_{22} = P_{33} = -p$$

gde su P_{11} , P_{22} i P_{33} tri uzajamno ortogonalna pozitivna normalna napona (usmereni u pravcima spoljnjih normala na površini).

Statički pritisak u viskoznoj tečnosti definiše se kao aritmetička sredina normalnih napona u tri uzajamno normalna pravca

$$\frac{1}{3}(P_{11}+P_{22}+P_{33}) = -p$$

Znak "-" pokazuje da je pritisak usmeren ka ortogonalnim površinama koje okružuju tačku. Ova hipoteza, po kojoj je definisan pritisak u fluidu koji se kreće, ima i eksperimentalno opravdanje.

Primer.

Polje napona je izraženo sa

$$P_{xx}=16x+10; \quad P_{yy}=10y^2+6xy; \quad \tau_{xy} = -5x^2$$

$$P_{zz}=0; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Određiti analitički izraz za pritisak u struji viskoznog fluida za tačku $M(0;10;2)$.

Rešenje. Prema definiciji za pritisak viskoznog fluida važi jednačina

$$-p = \frac{1}{3}(P_{xx}+P_{yy}+P_{zz})$$

$$\text{odnosno} \quad -p = \frac{1}{3}(16x+10+10y^2+6xy)$$

$$-p = \frac{2}{3}(5y^2+3xy+8x+5).$$

Vrednost pritiska u tački M iznosi

$$P_M = \frac{2}{3}(5 \cdot 10^2 + 5) = \frac{1010}{3} \text{ (dimenzija zavisi od}$$

jedinica mernog sistema kojima su predstavljani naponi i koordinate tačke M).

Zadaci.

1. a) Čemu je jednak pritisak u mirnom stišljivom i nestišljivom fluidu; b) Kakva je veza između tačne definicije pritiska i statičkog, dinamičkog i totalnog pritiska; c) Kakva je veza između tačne definicije pritiska i apsolutnog, manometarskog i vakuumetskog pritiska; d) Kakva je veza između tačne definicije pritiska i pritiska iz osnovne jednačine za statiku fluida.

Rešenje. a) $-p=P_{xx}=P_{yy}=P_{zz}$; b) $p=P_s$;

$$c) p=P_{aps}=P_a+P_m=P_a-P_v; \quad d) p = P$$

2. Iz definicije pritiska izvesti zaključak o smeru delovanja pritiska. Kakva razlika postoji između pritiska p i normalnog napona P_{xx} u neviskoznom fluidu?

Rešenje. Normalni naponi su orijentisani kao naponi istezanja i deluju u pravcu normala na površinu. Pritisak ima suprotan smer i deluje normalno na površinu. Kod neviskoznog fluida normalni napon je po intenzitetu jednak pritisku ali suprotnog znaka. Za viskozan fluid normalni napon može da bude veći ili manji od vrednosti pritiska. Izraz $P_{xx}+p$ (ne piše se u vektorskom obliku zbog svoje prirode) po intenzitetu predstavlja razliku vrednosti $|P_{xx}|$ i $|p|$.

3. Čemu su jednake komponente tenzora napona za slučajeva: a) fluid miruje, b) viskozni nestišljivi fluid stacionarno se kreće, c) viskozni stišljiv fluid se nestacionarno kreće, d) neviskozni stišljiv fluid nestacionarno se kreće, e) viskozni nestišljiv fluid se nestacionarno kreće, f) viskozni stišljiv fluid se nestacionarno kreće.

Rešenje. a) Postoje samo normalni naponi koji su međusobno jednaki a po intenzitetu su jednaki pritisku ($P_{xx}=P_{yy}=P_{zz}=-p$). b) Postoje normalni i tangentialni naponi koji se menjaju s vremenom. Veza između pritiska i normalnih napona je $-p=1/3(P_{11}+P_{22}+P_{33})$. Pri tome gustina fluida ne zavisi od promene pritiska. c) Postoje normalni i tangentialni

naponi, $-p=1/3(P_{11}+P_{22}+P_{33})$; gustina fluida zavisi od pro-
mene pritiska. d) Postoje samo normalni naponi koji se me-
njaju s vremenom, $p=f(p)$. e) Postoje samo normalni naponi
koji se ne menjaju s vremenom, $p=const$. f) Postoje normal-
ni i tangenti naponi koji se menjaju s vremenom, $p=f(p)$.

4. Kakva je razlika u definiciji pritiska za miran
i neviskozozan fluid. Da li termodinamički pritisak odgovara
pojmu pritiska u viskoznom fluidu?

Odgovor. Definicije su iste.

5. Kakva je razlika u definiciji pritiska za stiš-
ljiv neviskozozan i stišljiv viskozozan fluid.

Odgovor. Za stišljiv neviskozozan fluid pritisak se
definiše isto kao i pritisak neviskozoznog fluida; dok za
stišljiv viskozozan fluid važi definicija za viskozozan fluid.

3.4.4.2. TENZOR NAPONA ČISTE VISKOZNOSTI

Ako se od izmerene vrednosti normalnog napona, npr.
 P_{xx} , oduzme aritmetička sredina tri uzajamno ortogonalna
normalna napona (P_{11}, P_{22}, P_{33}) dobije se komponenta normal-
nog napona σ_{xx} koja je posledica samo viskoznosti fluida.

$$\sigma_{xx} = P_{xx} - \frac{1}{3}(P_{11} + P_{22} + P_{33}) = P_{xx} + p$$

slično tome je

$$\sigma_{yy} = P_{yy} + p$$

i

$$\sigma_{zz} = P_{zz} + p.$$

Tangentni naponi su isključivo posledica viskoznosti i os-
taju ne promenjeni u odnosu na nedijagonalne komponente ten-
zora napona. Tenzor napona viskoznih sila, bez sila pritis-
ka, je predstavljen sa

$$\begin{matrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{matrix}$$

Fluidna struja bez tangentičnih napona predstavlja fi-
ziku, jer u prirodi nema neviskoznih fluida. Jedino kad mi-
ruje fluid se predstavlja kao da je neviskozozan.

Primer.

Izraziti tangentični napon τ_{ns} u funkciji od σ_{xx} , σ_{yy} ,
 τ_{xy} , τ_{yx} i odgovarajućih kosinusa pravaca.

Rešenje.

$$\sigma_{nx} = \sigma_{xx} \cos(x, n) + \tau_{yx} \cos(y, n)$$

$$\sigma_{ny} = \tau_{xy} \cos(x, n) + \sigma_{yy} \cos(y, n)$$

$$\sigma_{nx} = \sigma_{xx} \cos(90+\alpha) + \tau_{yx} \cos(90+\beta)$$

$$\sigma_{ny} = \tau_{xy} \cos(90+\alpha) + \sigma_{yy} \cos(90+\beta)$$

Intenzitet vektora viskoznog napona

σ_n je određen sa

$$\sigma_n = \sqrt{\sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2}$$

a pravac

$$\tan \gamma = \frac{\sigma_{ny}}{\sigma_{nx}}$$

Tangentni napon τ_{ns} se dobija projektovanjem vektora visko-
znog napona σ_n na pravac tangente površine (\vec{n}) \vec{s} .

$$\tau_{ns} = \sigma_n \cos[180^\circ - (\alpha + \gamma)].$$

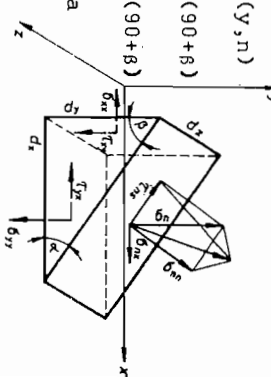
Zadatak.

Šta je veće po intenzitetu σ_{xx} ili P_{xx} ?

Rešenje. $|\sigma_{xx}| < |P_{xx}|$

3.4.4.3. VEZA NAPONA SA BRZINA DEFORMISANJA

Prema Njutnovom zakonu, tangentični naponi laminarnog
strujanja (Njutnovskog fluida) proporcionalni su brzinama
deformisanja fluidnih delića. Za prostorno strujanje važe
obrasci

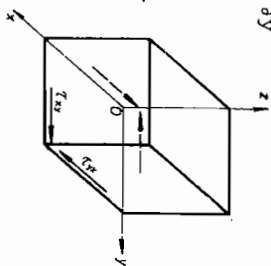


$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right); \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right);$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)$$

Tangentni naponi τ_{xy} i τ_{yx} izazivaju promenu pravog ugla ϕ . Kako je promena pravog ugla ϕ tokom vremena srazmerna uglovima $v_1 + v_2$, (pogledajte 3.4.1.2.) to sledi

$$\tau_{xy} = \eta \frac{\partial \phi}{\partial t} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right).$$



Viskozna sila se može zamisliti kao zamenjena normalnim naponima koji proizvode isto dejstvo na telo; oni mogu proizvoditi istezanje ili skupljanje tečnih delića a time i promenu oblika delića. Kako je $\text{div } \vec{v}$ mora za promenu zapremine tečnih delića to se normalni viskozni naponi mogu napisati kao

$$\sigma_{xx} = 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\eta \text{div } \vec{v}$$

$$\sigma_{yy} = 2\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\eta \text{div } \vec{v}$$

$$\sigma_{zz} = 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\eta \text{div } \vec{v}$$

Tu su 2η i $-\frac{2}{3}\eta$ koeficijenti proporcionalnosti [1] za brzine linearne deformacije koje izazivaju linearna izduženja, i brzine zapreminske deformacije koje izazivaju promenu celokupne zapremine fluidnog delića. Ove promene se dešavaju pod uticajem odgovarajućih normalnih viskoznih napona.

Umesto gornjih izraza češće se navode normalni naponi

$$P_{xx} = -p + 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\eta \text{div } \vec{v}$$

$$P_{yy} = -p + 2\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\eta \text{div } \vec{v}$$

$$P_{zz} = -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\eta \text{div } \vec{v}$$

Predstavljene vrednosti normalnih napona upotrebljavaju se pri kretanju stišljivog viskoznog fluida.

Zadatak.

Izračunati komponente napona i označiti njihovu prirodu za sledeće komponente brzina:

a) $v_x = cx$; $v_y = cy$; $v_z = -2cz$;

b) $v_x = c$; $v_y = 0$; $v_z = 0$;

c) $v_x = 2cy$; $v_y = 0$; $v_z = 0$;

d) $v_x = v_x(x,y)$; $v_y = v_y(x,y)$; $v_z = 0$.

Rešenje. a) Tangentni naponi ne postoje; normalni naponi su $P_{xx} = P_{yy} = -p + 2cn$ i $P_{zz} = -p - 4cn$; normalni viskozni naponi (viskozni naponi) su manji od normalnih napona (zbog suprotnog smera dejstva pritiska p) i iznose:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 2cn; \quad \sigma_{zz} = -4cn.$$

b) Ne postoje ni tangentni ni normalni naponi usled čiste viskoznosti.

c) Normalni naponi usled čiste viskoznosti ne postoje; tangentni naponi su: $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2cn$; $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$.

d) Postoje samo tangentni i normalni naponi u ravni x,y.

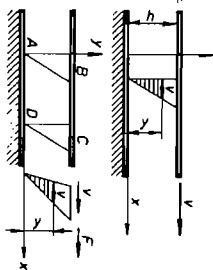
3.5. KONTROLNE PITANJA

1. Fluid se ponaša tako da
 - a) uvek se širi tokle god ne ispuni svaki prostor,
 - b) je uvek praktično nekompresibilan,
 - c) tangentne sile u njemu ne mogu delovati,
 - d) ne može ostati u mirovanju pod dejstvom tangentnih sila,
 - e) ima iste tangentne napone u svakoj tački bez obzira na njegovo kretanje.

2. Strujnice
 - a) su linije koje spajaju srednje tačke pojedinih strujnih sekcija,
 - b) su definisane samo za uniformnu struju,
 - c) su postavljene normalno na vektor brzine u svakoj tački,
 - d) su uvek i putanje delića,
 - e) su nepomične u prostoru stacionarne struje.
3. Jednačina kontinuiteta
 - a) podrazumeva da je Drugi Njutnov zakon kretanja zadovoljen u svakoj tački fluida,
 - b) izražava vezu između energije i rada,
 - c) određuje da brzina na graničnim površinama mora biti jednaka nuli za razliku od brzine stvarnog fluida na graničnim površinama,
 - d) predstavlja odnos momenta po jedinici zapremine za dve tačke na strujnoj liniji,
 - e) odnosi se na promenu mase duž strujne cevi.
4. Njutnov zakon za viskoznost povezuje
 - a) pritisak, brzinu i viskoznost,
 - b) tangenti napon i brzinu ugaone deformacije u fluidu,
 - c) tangenti napon, temperaturu, viskoznost i brzinu,
 - d) pritisak, viskoznost i brzine ugaonih deformacija,
 - e) tangenti napon, brzinu ugaone deformacije i viskoznost.
5. Pritisak je istog intenziteta u svim pravcima u tački fluida
 - a) samo kada je fluid bez trenja,
 - b) samo kada je fluid bez trenja i nekompresibilan,
 - c) samo kada je viskoznost fluida nula i kada je u mirovanju,
 - d) kada nema kretanja na jednom sloju fluida u odnosu na sloj sa kojim se graniči,

e) bez obzira na kretanje sloja fluida u odnosu na susedni sloj.

6. Koristeći dijagram brzina, pokazati da je horizontalan tangenti napon svugde konstantan između dve paralelne ploče koje se kreću relativno jedna u odnosu na drugu. Naći za koliko se promenio ugaon BAD od trenutka kada je BA vertikalno.



7. Na kakav se način može posmatrati kretanje tečnosti i gasova i kakve se metode primenjuju u mehanici fluida za proučavanje strujanja.
 8. šta je skalarno a šta vektorsko polje.
 9. šta predstavlja ekvivalarna površina.
 10. kakva je razlika između vektorske linije polja i vektorske cevi.
 11. šta se naziva strujnicom a šta putanjom.
 12. kad se poklapa strujnica s putanjom.
 13. napisati diferencijalne jednačine za strujnice i putanje.
 14. šta znači potencijal brzine.
 15. šta je ekvipotencijalna površina i kakvo je njeno svojstvo.
 16. šta su singularne tačke, i navesti primere.
 17. kako se definiše protok fluida.
 18. kako se obrazuje jednačina kontinuiteta.
 19. kakvo je vrtložno kretanje.
 20. šta je rotor brzine i kako se određuje.
 21. šta je vrtložno polje i kakav sastav može imati.
 22. navesti primere za vrtložna kretanja.
 23. šta je vrtložna linija a šta vrtložna cev.
 24. kako glase diferencijalne jednačine vrtložnica.
 25. kakva je uloga vrtložnih linija pri obrtanju elementarnih fluidnih delića.
 26. Da li se izraz $\frac{1}{2}\rho \vec{v} \cdot \vec{v}$ odnosi na celokupnu fluidnu masu ili samo na fluidni delić.

27. Kako se formuliše I Helmholtzeva teorema i kako se matematički izražava.
28. Šta se naziva intenzitetom vrtložne cevi.
29. Šta je divergencija brzine i kako se predstavlja.
30. Kakva veza postoji između rotora brzine i vrtloža.
31. Kada je vrtložno polje solenoidno polje.
32. Šta se naziva cirkulacijom brzine, i kako se cirkulacija predstavlja matematički.
33. Šta čini Stoksovu teoremu i kako se na osnovu nje može formulisati druga Helmholtzeva teorema.
34. U kom slučaju važi načelo o održanju vrtloža u fluidnoj struji.
35. Šta je granični sloj.
36. Definisati lokalno, konvektivno i supstancijalno ubrzanje.
37. Usled čega se javljaju dopunski članovi ubrzanja izraženog cilindričnim koordinatama u odnosu na Dekartove.
38. Šta znači stacionarno a šta nestacionarno kretanje.
39. Šta je Koriolisovo ubrzanje i kako se određuje.
40. U čemu se razlikuje kretanje tečnosti od kretanja čvrstog tela.
41. Kakav je fizički smisao tenzora brzina deformacija.
42. Šta predstavlja vektor napona.
43. Šta je tenzor napona.
44. U čemu je razlika između hijtunovske i ne Njutnovske tečnosti.
45. Definisati pritisak mirnog, neviskoznoeg i viskoznoeg fluida.
46. Kakav je fizički smisao veza pojedinih komponenta tenzora brzina deformisanja i odgovarajućih komponenta tenzora napona čiste viskoznosti.
47. Kakva je razlika između složenog kretanja i opšteg polja brzina.

GLAVA 4
BERNULIJEVA JEDNAČINA

Ovo je osnovna jednačina za inženjersko rešavanje strujnih problema. Najveći broj praktičnih zadataka rešava se direktno primenom Bernulijeve jednačine (B.j.) sa njenim pratećim uslovom - jednačinom kontinuiteta. Značaj jednačine je posledica njenog sadržaja, koji predstavlja bilans pojedinih karakterističnih vrsta fluidne energije.

4.1. PODELA PRITISAKA PREMA KARAKTERU
I OSNOVNI NAČIN ZA NJHOVO ODREĐIVANJE

Pri kretanju, pored statičkog pritiska p_s (svi ranije navedeni pritisci imaju karakter statičkog) treba razlikovati i dinamički pritisak p_d - koji je mera kinetičke energije fluidne struje. Zbir ova dva daje totalni pritisak p_t .

$$p_t = p_s + p_d$$

Dinamički pritisak dat je izrazom

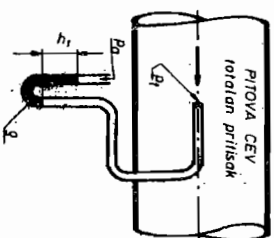
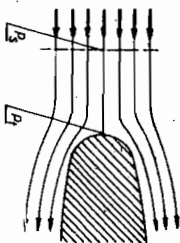
$$p_d = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad [\text{Pa}]$$

gde su ρ i v - gustina i brzina fluidne struje.

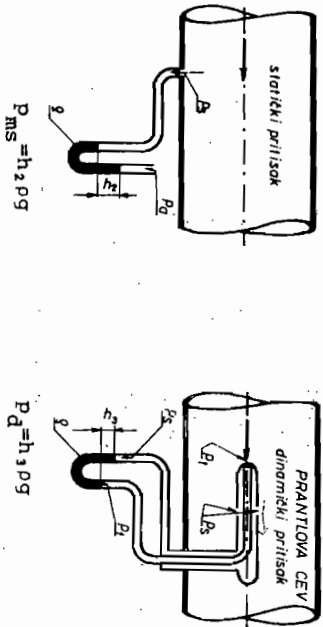
Totalni pritisak se meri u tačkama gde je brzina fluida jednaka nuli, tj. u zaustavnim tačkama, pa se zbog toga naziva još i zaustavnim pritiskom.

Instrument sa kojim se određuje je totalni pritisak naziva se Pitova cev (Pitot-va cev).

Statički pritisak se meri na površinama preko kojih fluid prelazi nepromenjenim brzinama (npr, rupe na



$$p_{st} = \rho g h$$

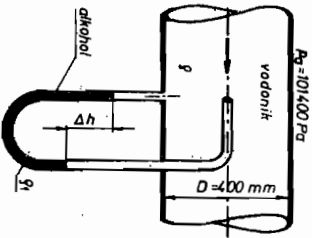


zidovima cevi).

Dinamički pritisak se određuje posrednim putem, meri razliku totalnog i statičkog pritiska.

Instrument za određivanje dinamičkog pritiska zove se Prantlova cev (Prandtl-ova cev). Otvori u spoljnoj cevi Prantlove cevi su sa glatko obradjenim ivicama tako da se kroz njih prima samo statički pritisak.

Primer:



U osu gasovoda $D=400$ mm, kroz koji struji vodonik pritiska $p=2$ at i temperature $t=17^{\circ}\text{C}$, postavljena je Pitova cev i priključena na U cev sa alkoholom $\rho_1=800$ kg/m³, kako je pokazano na slici. Odrediti protok vodonika Q ako je pokazivanje U cevi $h=17$ mm. Zakon rasporeda brzine u cevi je dat izrazom

$$v = \frac{(n+1)(n+2)}{2} v_{sr} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^n, \text{ za } n = \frac{1}{7}.$$

Gasna konstanta za vodonik je

$$R = 4125,66 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$$

Rešenje. Razlika nivoa alkohola u U cevi je srazmerena dinamičkom pritisku u oži cevi

$$P_{dmax} = \frac{1}{2} \rho v_{max}^2 = \Delta h \rho_1 g.$$

Odatle je

$$v_{max} = \sqrt{2g\Delta h \frac{\rho_1}{\rho}}$$

gde se ρ određuje iz jednačine gasnog stanja

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{101400 + 2 \cdot 10000 \cdot 9,81}{4125,66 \cdot 290} = 0,249 \text{ kg/m}^3,$$

pa je

$$v_{max} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,017 \frac{800}{0,248}} = \sqrt{1076} = 32,8 \text{ m/s}.$$

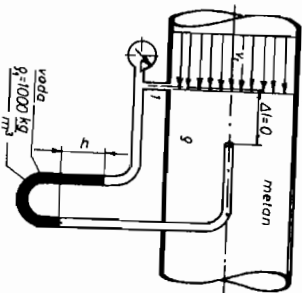
Iz raspodele brzine nalazi se v_{sr} ($r=0$)

$$v_{sr} = \frac{2v_{max}}{(n+1)(n+2)} = \frac{2 \cdot 32,8}{\left(\frac{1}{7}+1\right)\left(\frac{1}{7}+2\right)} = 26,8 \text{ m/s}.$$

I protok

$$Q = v_{sr} \frac{D^2 \pi}{4} = 37,882 \frac{0,4^2 \cdot 3,14}{4} = 3,37 \text{ m}^3/\text{s}.$$

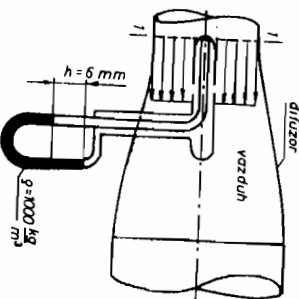
Zadaci.



Rešenje. $v_1 = 89,6$ m/s.

2. Na usisnoj strani vazdušnog cevovoda u difuzoru (presek 1-1) postavljena je Prantlova cev i priključena na U cev sa vodom. Zanimajući ulazne gubitke i kompresibilne efekte odrediti brzinu vazduha u označenom preseku. Ako se umesto Prantlove cevi postavi Pitova cev šta će pokazivati U cev. Parametri vazduha su: $p_a=101,4$ kPa, $t=15^{\circ}\text{C}$, $R=287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$.

Rešenje. $v = 10$ m/s ; $h_1=0$



4.2. OSNOVNI OBLIK BERNULLIJEVE JEDNAČINE - B.J. ZA NESTIŠLJIV FLUID BEZ CUBITAKA

Bernullijeva jednačina se izvodi iz Ojlerove jednačine koja glasi

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p .$$

Ojlerova jednačina opisuje dejstvo svih sila koje se javljaju u polju nevistkoznog fluida. U njoj su one označene sa:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} - \text{inercijalne sile po jedinici fluidne mase} \left[\frac{\text{N}}{\text{kg}} \right],$$

$$\vec{f} - \text{spoljašnje, zapremninske sile po jedinici fluidne mase} \left[\frac{\text{N}}{\text{kg}} \right],$$

$$\frac{1}{\rho} \text{ grad } p - \text{sile pritiska po jedinici fluidne mase} \left[\frac{\text{N}}{\text{kg}} \right].$$

Ako se fluid nalazi u polju konzervativnih sila onda spoljašnje sile imaju svoj potencijal (U) i mogu se napisati kao $\vec{f} = \text{grad } U$.

Leva strana Ojlerove jednačine može se rastaviti prema 3.2.2.2. i 3.2-2.1.2. (primer 3) kao

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v}$$

gde je $(\vec{v}, \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \text{ grad } v^2 - [\vec{v}, \text{rot } \vec{v}]$,

a za stacionarno kretanje fluida je $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$.

Ako se iz celog strujnog polja odabere jedna strujnica, što se postiže skalarnim množenjem svih članova Ojlerove jednačine sa elementom te strujnice $d\vec{l}$, dobija se

$$\frac{1}{2} (\text{grad } v^2, d\vec{l}) - ([\vec{v}, \text{rot } \vec{v}], d\vec{l}) = (\text{grad } U, d\vec{l}) - \frac{1}{\rho} (\text{grad } p, d\vec{l}).$$

Mešoviti proizvod $([\vec{v}, \text{rot } \vec{v}], d\vec{l}) = 0$ zbog kolinearnosti vektora \vec{v} i $d\vec{l}$, a preostali članovi se prema 3.2.1.2. mogu napisati kao

$$\frac{1}{2} d(v^2) = du - \frac{1}{\rho} dp .$$

U barotropnom polju Zemljine teže, kada je $U = -gz$ (z -osa orijentisana vertikalno naviše) i $\rho = f(p)$ ili $\rho = \text{const}$, integral gornje jednačine je

$$\frac{v^2}{2} + gz + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const} .$$

Ovako napisana jednačina naziva se Bernullijev integral Ojlerove jednačine.

Zadržavajući se samo na nestišljivom fluidu $\rho = \text{const}$ jednačina postaje

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const} \quad \left[\frac{\text{Nm}}{\text{kg}} \right] .$$

Ovo je osnovni oblik Bernullijeve jednačine. Svaki pojedini član na levoj strani predstavlja energiju koju u sebi sadrži jedinična masa fluidne struje. Prvi član predstavlja kinetičku energiju, drugi energiju pritiska i treći potencijalnu energiju. Konstanta na desnoj strani označava da je zbir navedene tri vrste energija konstantan za bilo koju tačku strujnice. Sa delimičnim ograničenjem za kinetičku energiju (v.4.2.1.1.) sa strujnice je moguće preći na strujno vlakno, strujnu cev i na proizvoljne, zamišljene ili stvarne, protočne preseke između kojih postoji fluidni kontinuitet. Drugi, vrlo često upotrebljavan, oblik B.j. je

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{const} \quad \left[\frac{\text{Nm}}{\text{N}} \right] .$$

U njoj su pojedine vrste energija date u metrima stuba tečnosti koja struji kroz posmatrane preseke. U ovom obliku se može vršiti pregledno kvantitativno i dijagramsko upoređivanje svih vrsta energija preko odgovarajućih visina stubova protočne tečnosti. Članovi $v^2/2g$, $p/\rho g$ i z se nazivaju brzinskom visinom, pritiskom (pijezometarskom) visinom i geodezijskom visinom. Dimenzija $[\text{Nm}/\text{N}]$ označava energiju po jedinici težine fluidne struje.

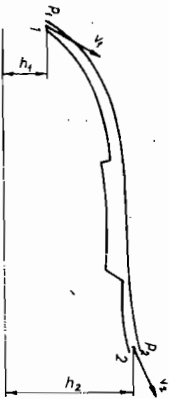
Snaga fluidne struje se dobija množenjem svakog člana B.j. sa protočnom masom (ρQ), otuda je

$$P = \frac{1}{2} \rho Q v^2 + \rho Q \frac{p}{\rho} + \rho Q g z \quad [W] .$$

Prvi član određuje snagu fluidne struje pri atmosferskom pritisku. Druga dva člana određuju snagu kada postoji razlika pritiska u fluidnoj struji i okolini u odnosu na koju se meri snaga (najčešće atmosferski pritisak). Ova snaga može da bude pozitivna i negativna, a uobičajeno je da se daje sa $P = \Delta p Q$ (v.4.3. primer 1).

Efikasna primena B.j. zahteva poštovanje izvesnih uslova.

1. B.j. se uvek piše samo za dva preseka i to tako da se sa leve strane nalazi fluidna energija u preseku odakle teče struja (1), a sa desne strane fluidna energija u preseku ka kome se strujanje vrši (2).



Uvek treba imati na umu da su članovi B.j. energije delića tečnosti koji se nalazi u uočenoj položaju. Tako npr, ako se dva fluidna delića 1 i 2 nalaze na različitim visinama, onaj u višoj tački 1 imaće veću potencijalnu energiju od onog u tački 2 za njihovu visinsku razliku hg.

2. Za bilo koje dve tačke, koje mogu da se povežu za mišljenom ili stvarnom strujnicom, B.j. je punovažna (v.sl. na sledećoj strani).

3. Uz B.j, koja u osnovnom obliku sadrži šest nepoznatih v_1, v_2, p_1, p_2, h_1 i h_2 , uvek se vezuje i jednačina kontinuiteta. U prostim cevnim problemima jednačina kontinuiteta glasi

$$v_1 \frac{d^2 \pi}{4} = v_2 \frac{d^2 \pi}{4}$$

i u B.j. eliminiše jednu nepoznatu brzinu. Ako se potencijalne energije (energije položaja) ocenjuju u odnosu na niže označeni presek, u B.j. umesto visina h_1 i h_2 javlja se njihova razlika kao jedna nepoznata.

Iako su eliminisane dve nepoznate, osnovni oblik B.j. sadrži još 4 nepoznate i zbog toga se mora posvetiti posebna pažnja izboru karakterističnih tačaka 1 i 2. Preseke (npr. tačke 1 i 2) treba uzimati na mestima za koja postoji najveći broj poznatih podataka. U nastavku su data dva najčešća slučaja, dok se drugi mogu uočiti kroz primere.

- Za slučaj preli-

canja (bez gubitaka) iz jednog rezervoara u drugi, kod kojih je površina tečnosti mnogo veća od površine preseka spojne cevi, karakteristične tačke B.j. su slobodni nivoi tečnosti u rezervoarima. Na njima su kinetičke energije delića tečnosti zanemarljive, tj. $v_1 = v_2 = 0$, a pritisak $p_1 = p_2 = p_a$. B.j. za tačke 1 i 2 glasi

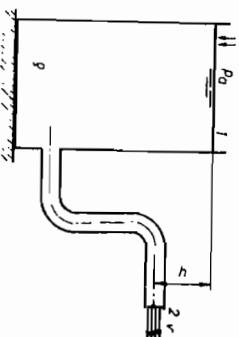
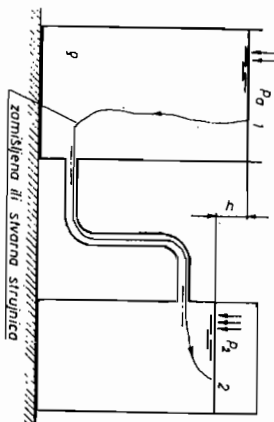
$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + hg = \frac{p_a}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$

$$hg = \frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{p_2 - p_1}{\rho}$$

- Za slučaj slobodnog isticanja u atmosferu (bez gubitaka), prema slici, karakteristične tačke 1 i 2 su nivo tečnosti u rezervoaru i završni presek cevovoda u kome vlada atmosferski pritisak p_a . B.j. za tačke 1 i 2 glasi

$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + hg = \frac{p_a}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$

$$hg = \frac{v_2^2}{2g}$$



4. Ako se pored postojeće B.j. za neki strujni problem mogu napisati i druge B.j., takve da se u njima javljaju nove nepoznate i poznate veličine, one su takodje punovažne. To se redovno dešava pri rešavanju problema složenih cevovoda.

5. U B.j. treba unostiti intenzitete srednjih brzina (oznaka v) i statičke pritiske (oznaka p) za koje se smatra da su nepromenjivi u celom preseku cevovoda. Sa apsolutnih pritiska vrlo je lako preći na relativne - manometarske i vakuumetarske pritiske.

Za energetski pregled problema najjasnija predstava se dobija kada se članovi B.j. izražavaju u mST.

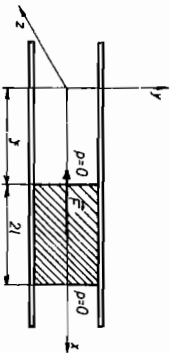
6. Pre postavljanja B.j. trebalo bi izvršiti analizu problema: shvatiti i potvrditi njegov fizički smisao, odrediti karakteristične tačke i redosled rešavanja jednačina. Numeričko rešenje će dati kvantitativne odnose traženih i zadatih veličina, i potvrđiće opravdanost postavljenog programa. Ukoliko je rešenje sumnjive vrednosti, razmatranje energijskog bilansa sa grafičkom predstavom duž toka strujanja lako će otkriti računsku i formalnu grešku.

Primeri.

1. (Ojlerova jednačina). Zapremina tečnosti dužine 2l nalazi se u pravoj cevi sa malom nepromenljivom površinom preseka. Na svaki deo tečnosti deluje, uzduž ose cevi ka jednoj nepokretnoj tački na osi cevi, spoljašnja sila koja je proporcionalna rastojanju delića do te tačke. Odrediti kretanje tečnosti i pritisak u svakoj tački tečnosti.

Rešenje. Za usvojeni

položaj tečnosti, koordinatni sistem i granične uslove prema slici, jednačina kontinuiteta i Ojlerova jednačina se svode na oblike:



$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 ; v_y = 0 ; v_z = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -kx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} ; \frac{\partial p}{\partial y} = 0 ; \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Integracija po x ($v_x = t$), $\frac{\partial v_x}{\partial t}$ ne zavise od x) daje

$$x \frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{kx^2}{2} - \frac{p}{\rho} + C$$

Zamenom graničnih uslova (za $x=\xi$, $p=0$ i za $x=\xi+2l$, $p=0$) određuje se integraciona konstanta C i $\partial v_x / \partial t$

$$C = \xi \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{2} k \xi^2 ; \frac{\partial v_x}{\partial t} = -k(\xi+l)$$

pošto v_x može da se napiše kao $v_x = \frac{d\xi}{dt} = \dot{\xi}$, druga jednačina postaje

$$\ddot{\xi} + k(\xi+l) = 0$$

odakle se integracijom dobija

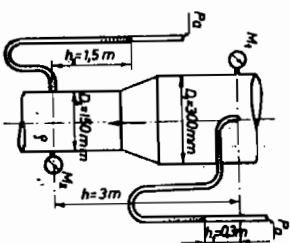
$$\xi+l = A \sin(\sqrt{k}t + \epsilon)$$

Kretanje tečnosti je harmonijsko oscilovanje oko koordinatnog početka. Pritisak se određuje zamenom vrednosti C i $\partial v_x / \partial t$ u integraljenu Ojlerovu jednačinu

$$p = C - \frac{1}{2} kx^2 - x \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial t} x(\xi-l) + \frac{1}{2} k(\xi^2 - x^2) = -k(\xi+l)(\xi-x) + \frac{1}{2} k(\xi^2 - x^2) = \frac{1}{2} k(x-\xi)(\xi+2l-x)$$

2) Kroz vertikalnu cev poka-

zanu na slici struji kerozin $\rho=850 \text{ kg/m}^3$. Zamarnivši gubitke, potrebno je odrediti protok i pokazivanje manometara. Smatrati da je odnos srednje brzine i maksimalne brzine u osi cevovoda $v_{SI}/v_{max} = 0,8$.



Rešenje. B.j, napisana za preseke u kojima se nalaze manometri M₁ i M₂, je osnovna jednačina. Za te preseke ona glasi

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + hg = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$

Jednačina kontinuiteta eliminiše npr. brzinu v₂, a pokazivanje donje u cevi pritisak p₂. Pokazivanje gornje u cevi daje podatak o totalnom pritisku u osi preseka 1, tako da je taj sistem jednačina potpun, odnosno dovoljan za rešenje. Redosled operacija je sledeći:

Iz sistema jednačina

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + hg = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$

$$p_a + h_2 \rho g = p_2$$

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 + h_1 \rho g = p_a$$

druga i treća, rešena po p₁, zamenjuju se u prvu

$$\frac{p_a - \frac{1}{2} \rho v_1^2 - h_1 \rho g}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + hg = \frac{p_a + h_2 \rho g}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$

posle zamene v₂ = (D₁/D₂)v₁ = 4v₁ i sredjivanja, dobija se

$$\frac{v_1^2}{2} - h_1 g + \frac{v_1^2}{2} + hg = h_2 g + \frac{16v_1^2}{2}$$

tj.

$$\left(\frac{v_1}{0,8}\right)^2 + v_1^2 - 16v_1^2 = 2g(h_2 + h_1 - h)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g(h-h_1-h_2)0,64}{8,6}} = \sqrt{\frac{19,62(3-1,5-0,3)0,64}{8,6}} = 1,324 \text{ m/s}$$

Protok $Q = v_1 \frac{D_1^2 \pi}{4} = 1,324 \frac{0,3^2 \pi}{4} = 0,0936 \text{ m}^3/\text{s}$

Manometri pokazuju:

$$M_1 - P_v = h_1 \rho g + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = 0,3 \cdot 850 \cdot 9,81 + \frac{1}{2} \cdot 850 \left(\frac{1,324^2}{0,8}\right) = 3666 \text{ Pa} = 0,037 \text{ at}$$

M₂ - P_m = h₂ ρg = 1,5 · 850 · 9,81 = 12508 Pa = 0,13 at

3) Pitova cev je postavljena u osi cevi kroz koju protiče vodonik i priključena je na jedan krak U cevi u kojoj se nalazi petroleum ρ₂ = 800 kg/m³. Na drugi krak U cevi doveden je statički pritisak koji je uzet sa zida cevi. Razlika nivoa petroleuma u U cevi iznosi h = 17 mm. Odrediti zapreminski protok gasa Q ako je natpritisak vodonika u preseku 1 p=2 at i temperatura t=17°C (R=4125,6 $\frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \cdot \text{K}$), p_a=101,4 kPa). Zakon turbulentnog rasporeda brzine je dat u eksponencijalnom obliku sa eksponentom n=1/7

$$v = \frac{(n+1)(n+2)}{2} v_{sr} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^n$$

Rešenje. B.j. za strujnicu kroz tačke 1 i 2 je data sa

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$

(Tačka 1 je dovoljno blizu zaustavnoj tački 2 da bi se mogli zanemariti gubici na tom putu, pa sledi da je p₁ = p₂. Posle punjenja cevi gasom tačka 2 je zaustavna, pa je v₂ = 0).

Jednačina ravnoteže za iste nivoa x-x u U cevi daje

$$p_2 + \rho_2 g = p_2 + \rho_1 g + h \rho_2 g$$

$$p_1 + \rho_1 \frac{v_1^2}{2} + \rho_1 g = p_1 + \rho_1 g + h \rho_2 g$$

tj.

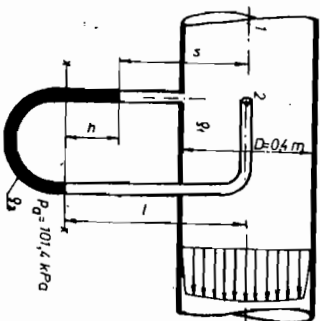
Odatle je $v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\rho_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}} = \sqrt{\frac{19,62 \cdot 0,017 \cdot 800 - 0,248}{0,248}} = 32,77 \text{ m/s}$

gde je gustina ρ₁ određena iz jednačine stanja za vodonik

$$\rho_1 = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{(101400 + 2 \cdot 100000) \cdot 9,81}{4125,6 \cdot 290} = 0,248 \text{ kg/m}^3$$

Brzina v₁ je maksimalna i odgovara profilu brzine za r=0. Sada je moguće odrediti srednju brzinu, odnosno protok

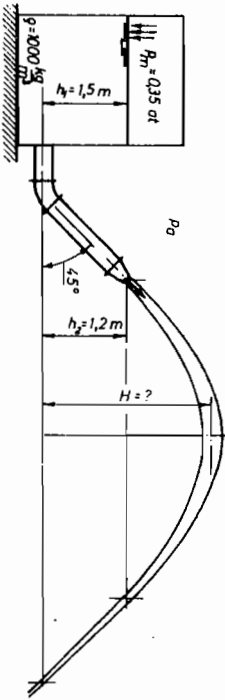
$$v_{sr} = \frac{2v_1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2 \cdot 32,77}{8 \cdot \frac{15}{7}} = 26,762 \text{ m/s}$$



$$Q = v \cdot S \cdot \frac{D^2 \pi}{4} = 26,762 \frac{0,4^2 \pi}{4} = 3,360 \text{ m}^3/\text{s}$$

Primedba. Visine stubova vodionika iznad nivoa petroleuma u cevi mogu da se zanemare, jer ne utiču na rezultat zbog velike razlike u gustinama vođionika i petroleuma.

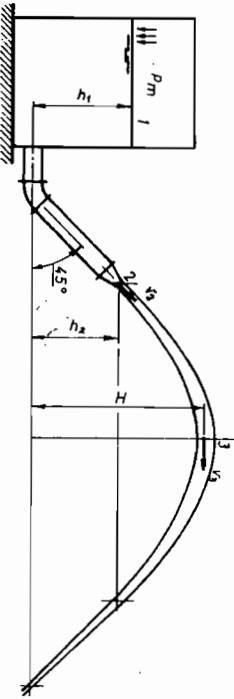
4. Voda koja se u velikom rezervoaru nalazi pod natprijetiskom od 0,35at ističe kroz mlaznik i formira slobodan mlaz. Za poznate podatke date na slici treba odrediti najvišu tačku slobodnog mlaza. Račun izvoditi bez gubitaka.



Rešenje. Da bi se uočile sve nepoznate treba se upoznati sa karakteristikama slobodnog mlaza.

Slobodni mlaz prikazan na slici ima osobine kosog hica. Trenje mlaza o vazduh se zanemaruje, a proširenje u temenu parabole i suženje u slaznom kraku parabole su posledica smanjenja, odnosno ponovnog povećanja brzine i važeće jednačine kontinuiteta. U najvišoj tački brzina je jednaka horizontalnoj projekciji brzine na izlasku iz mlaznika.

Prema tome, postoje dve nepoznate: brzina na izlasku iz mlaznika i visina H.



Karakteristične B.j. su za preseke 1 i 2, 1 i 3,

B.j. 1-2

$$\frac{P_1}{\rho} + h_1 g = \frac{P_a}{\rho} + \frac{V^2}{2} + h_2 g$$

B.j. 1-3

$$\frac{P_1}{\rho} + h_1 g = \frac{P_a}{\rho} + \frac{(v \cos 45^\circ)^2}{2} + Hg$$

Zamenjujući vrednost $\frac{v^2}{2}$ iz prve jednačine $\frac{v^2}{2} = \frac{P_1}{\rho} + (h_1 - h_2)g$ u drugu, određuje se H:

$$H = \frac{P_1}{\rho g} + h_1 - \left(\frac{P_1}{\rho g} + h_1 - h_2 \right) (\cos 45^\circ)^2 = \frac{0,35 \cdot 10000}{1000 \cdot 9,81} + 1,5 - \left(\frac{0,35 \cdot 10000}{1000 \cdot 9,81} + 1,5 - 1,2 \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 3,1 \text{ m}$$

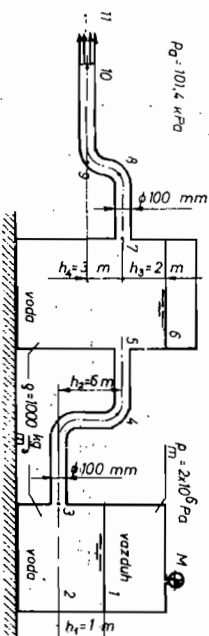
Ovakav, čisto računski, način rešavanja zadatka skriva energijski pregled, i eventualnu grešku je vrlo teško uočiti i ispraviti. Izračunavajući pojedine članove B.j-a u mVS dobija se slika energijskog stanja, tj. jasna predstava o pretvaranju u jedne vrste energije u drugu:

- u početnom položaju ukupna relativna energija (bez uticaja P_a) je $3,5 + 1,5 = 5 \text{ mVS}$,
- na izlasku iz mlaznika $v^2/2g = 5 - 1,2 = 3,8 \text{ mVS}$ (ukupna energija ostaje nepromenjena),
- u najvišoj tački mlaza, ukupna relativna energija se sastoji iz dva člana

$$5 = \frac{v^2}{2g} + H = \frac{v^2}{2g} \cos^2 45^\circ + H = 3,8 \cdot \frac{1}{2} + H = 1,9 + H$$

odakle je $H = 5 - 1,9 = 3,1 \text{ mVS}$.

5. zanemarujući gubitke, odrediti pritiske i brzine u svim označenim tačkama prikazanog cevnog sistema.



Rešenje. Zbog istog prečnika oba cevovoda, brzine strujanja u njima su iste. Karakteristične tačke su 1, 6 i 10. B.j. za 1-10 određuje brzinu v,

$$\frac{p_1}{\rho} + h_1 g = \frac{p_a}{\rho} + \frac{v^2}{2} + (h_2 - h_1) g$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{p_m}{\rho} + g(h_1 + h_4 - h_2) = \frac{2 \cdot 10^5}{1000} + 9,81(1+3-6) = 180,38 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

B.j. za tačke 6-10 odredjuje p₆:

$$\frac{p_6}{\rho} + (h_3 + h_4) g = \frac{p_a}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

$$p_6 = p_a + \frac{1}{2} \rho v^2 - (h_3 + h_4) \rho g = 101400 + 180380 - (2+3)9810 = 232730 \text{ Pa}$$

Sada je lako odrediti pritiske u svim označenim tačkama:

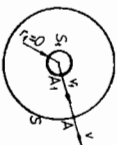
$$p_1 = p_a + p_m = 301400 \text{ Pa} ; p_2 = p_1 + h_1 \rho g = 311210 \text{ Pa} ; p_3 = p_2 - \frac{1}{2} \rho v^2 =$$

$$= 130830 \text{ Pa} ; p_4 = p_5 = p_7 = p_8 = p_3 - h_2 \rho g = p_6 + h_3 \rho g - \frac{1}{2} \rho v^2 = 71970 \text{ Pa} ;$$

$$p_9 = p_{10} = p_{11} = p_a$$

Zadaci.

1. (Ojlerova jednačina) Pokazati da se pritisak usled eksplozije mine pod vodom menja obrnuto proporcionalno rastojanju od mesta eksplozije.



Primerba. Inercijalne sile i sile pritiska su velike u odnosu na spoljašnje sile koje se zato mogu zanemariti, a brzinu definišati kao $v = v_1/r^2$, te je $dv/dt \approx v_1/r^2 dt$.

Rešenje. grad $p = -\frac{\rho v_1 r}{r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{k}{r^2} \frac{dr}{dt}$; $p = \frac{k}{r}$

2. Napisati B.j. u kojoj su energijski članovi izraženi po jedinici zapremine fluidne struje.

Rešenje. $\frac{\rho v^2}{2} + \rho g z + p = \text{const}$ [Nm/m^3]

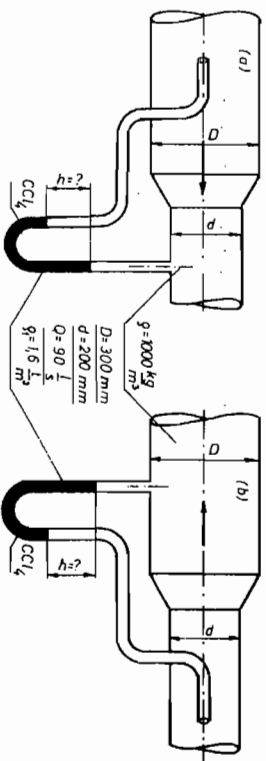
3. Primenom B.j. za tačku 1 ispred Prantlove cevi i tačku 2 na vrhu Prantlove cevi, pokazati vezu između statičkog, dinamičkog i totalnog pritiska.

4. U polju zemljine teže zadato je polje brzine nestisljive tečnosti, gustine $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$,
 $\vec{v} = (3x^2 + y^2) \vec{i} + 2yx^2 \vec{j} + 3zx^2 \vec{k}$ [m/s].

Zanemarujući gubitke, odrediti pritisak u tački 2 (1;-2;-3), ako je u tački 1 (2;3;1) $p_1 = 1,05 \text{ at}$.

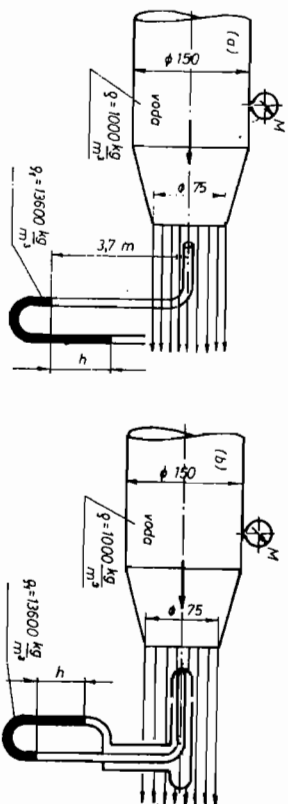
Rešenje. $p_2 = 558815 \text{ Pa}$

5) Odrediti pokazivanje U cevi za podatke date na slikama.



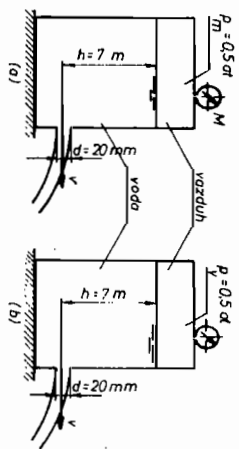
Rešenje. a) $h = 0,698 \text{ m}$; b) $h = 0,138 \text{ m}$

6. Odrediti pokazivanje manometara ako je u vodenu struju postavljena: a) Pitova cev, b) Prantlova cev. Pokazivanje U cevi je u ova slučajja isto $h = 1,5 \text{ m}$. U kom slučaju je brzina vodenog mlaza veća. Gubitke zanemariti.



Rešenje. a) $p_m = 1,565 \text{ at}$; b) $p_m = 1,772 \text{ at}$; $v_b > v_a$

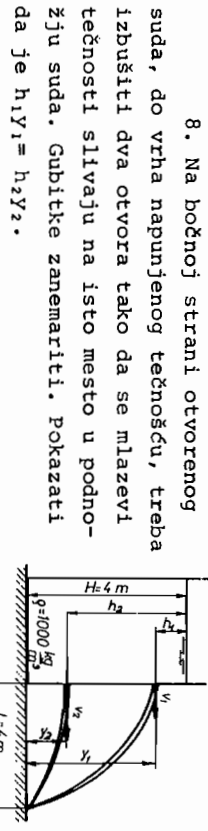
7. Iz rezervoara (a) i (b) ističe voda ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$). Zanemarujući gubitke koji se javljaju pri isticanju, odrediti brzine i protoke na izlaznom otvoru.



Rešenje.

a) $v = \sqrt{2g(h + \frac{p_m}{\rho g})} = 15,345 \text{ m/s}$
 $Q = \frac{d^2 \pi}{4} v = 4,818 \text{ l/s}$

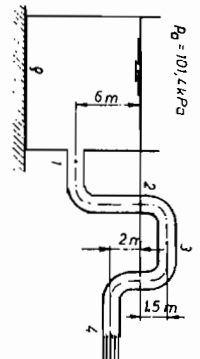
b) $v = \sqrt{2g(h - \frac{p_m}{\rho g})} = 6,265 \text{ m/s}$
 $Q = \frac{d^2 \pi}{4} v = 1,967 \text{ l/s}$



Rešenje. $h_1 = y_2 = 0,27 \text{ m}$

8. Na bočnoj strani otvorenog suda, do vrha napunjenog tečnošću, treba izbušiti dva otvora tako da se mlazevi tečnosti slijavaju na isto mesto u podnožju suda. Gubitke zanemariti. Pokazati da je $h_1 y_1 = h_2 y_2$.

Rešenje. $y_1 = 31,855 \text{ m}$

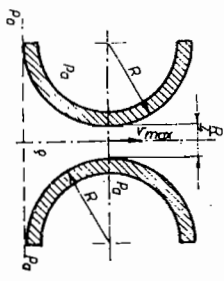
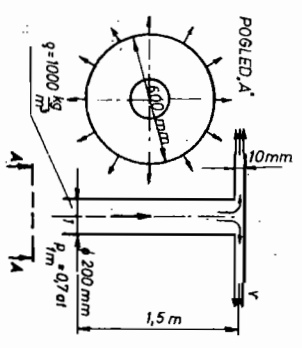


10. Izračunati statičke pritiske u tačkama 1, 2, 3 i 4 pri proticanju vode ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$) kroz cevovod pokazan na slici. Prečnik cevovoda se ne menja a trenje se zanemaruje.

Rešenje. $p_1 = 140640 \text{ Pa}$; $p_2 = 81780 \text{ Pa}$;
 $p_3 = 67065 \text{ Pa}$; $p_4 = p_a$

11. Vodena struja ističe, kako je pokazano na slici, između dve kružne ploče u atmosferu. Zanemarujući gubitke, za date podatke odrediti protok vode.

Rešenje. $Q = 245 \text{ l/s}$

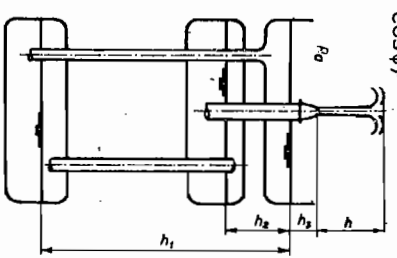


12. Između dve polucilindrične površine visine $h=5R$ i poluprečnika R struji idealan gas, čija je brzina u najužem preseku v_{max} . U zavisnosti od v_{max} odrediti silu F koja teži da međusobno približi cilindre.

Rešenje. $F = 1,753 \rho R v_{max}^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi d\phi = 23,227$

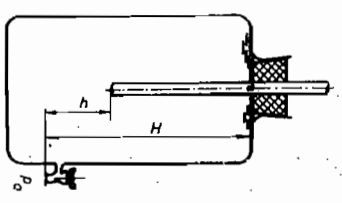
13. Zanemarujući gubitke, odrediti brzinu kojom voda ističe iz Heronovog vodokoka i domet mlaza ako je $h_1 = 24 \text{ m}$, $h_2 = 4 \text{ m}$ i $h_3 = 0,4 \text{ m}$.

Rešenje. $h = 19,62 \text{ m}$; $v = 19,62 \frac{\text{m}}{\text{s}}$



14. Mariotov sud je napunjen vodom do visine H . Odrediti brzinu isticanja za razne nivoce vode x u sudu. Izlazne gubitke zanemariti.

Rešenje. $v = \sqrt{2gh}$, za $h \ll x \ll H$
 $v = \sqrt{2gx}$, za $x \ll h$



4.2.1. KOREKCIONI FAKTOR KINETIČKE ENERGIJE

Kada je B.j. napisana za strujnicu, kinetička energija po jedinici protočne mase fluida ($v^2/2$) je predstavljena brzinom v u označenoj tački, a kada je B.j. napisana za neki protočni presek onda v predstavlja srednju brzinu fluida (v_{sr}) kroz ceo presek. Medjutim, u zavisnosti od vrste strujanja (laminarno, prelazno, turbulentno) član $v_{sr}^2/2$ ne daje uvek pravu veličinu kinetičke energije i potrebno je uvesti korekciorni faktor α koji će pomnožen sa $v_{sr}^2/2$ dati stvarnu veličinu kinetičke energije po jedinici mase, tj.

$$E_k = \alpha \frac{v_{sr}^2}{2} \quad (v_{sr} \text{ se piše bez indeksa}).$$

Ova energija treba da se uvede u B.j. Za laminarno strujanje kroz cevi je $\alpha=2$. Za turbulentno je $\alpha=1,01+1,10$ pa se najčešće zanemaruje.

B.j. sa korekcionim faktorom α glasi:

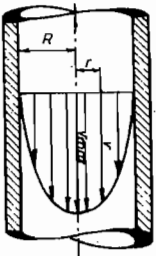
$$\frac{P_1}{\rho} + \alpha \frac{v_1^2}{2} + g z_1 = \frac{P_2}{\rho} + \alpha \frac{v_2^2}{2} + g z_2.$$

Primer

Za poznati profil brzine stacionarnog laminarnog strujanja kroz kružnu cev

$$v = v_{max} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right),$$

odrediti korekciorni faktor.



Rešenje. Ukupna stvarna kinetička energija u označenom preseku izražena sa v_{sr} je

$$E_k = \alpha \frac{v_{sr}^2}{2} \rho v_{sr} R^2,$$

a izražena preko v :

$$E_k = \int_0^R \frac{v^2}{2} \rho v \cdot 2\pi r dr.$$

Izjednačavanjem izraza za protok

$$Q = v_{sr} R^2 \pi = \int_0^R v \cdot 2\pi r dr$$

dobija se veza

$$v_{max} = 2v_{sr}$$

a izjednačavanjem izraza za E_k određuje se α :

$$\alpha \frac{v_{sr}^2}{2} \rho v_{sr} R^2 \pi = \int_0^R \frac{v^2}{2} \rho v \cdot 2\pi r dr$$

odnosno

$$\alpha = \frac{2}{R^2} \frac{v_{sr}^2}{v_{sr}^2} \int_0^R v^3 r dr$$

$$\alpha = \frac{2}{R^2} \int_0^R \left(\frac{v_{max}}{2}\right)^3 \cdot \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^3 r dr$$

$$\alpha = 2.$$

Zadatak.

Raspored brzine pri turbulentnom strujanju kroz cevovod je približno predstavljen sa Prantlovim eksponencijalnim oblikom

$$\frac{v}{v_{max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/4}$$

gde je y - rastojanje od zida cevi, a R - poluprečnik cevi. Odrediti korekciorni faktor α .

Rešenje. $\alpha = 1,06$

4.3. CIVNI PROBLEMI - OBLIK SA GUBICIMA

Meo ukupne fluidne energije u preseku 1 troši se na savladivanje gubitaka koji se javljaju pri strujanju na putu do preseka 2. Zbog toga će ukupna energija fluidne struje u preseku 2 biti manja od energije u preseku 1, za vrednost gubitaka. Izgubljena energija (gubici) $h_1 g$ u B.j. se unosi sa desne strane

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + z_1 g = \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + z_2 g + h_1 g.$$



Gubici se izražavaju u formi kinetičke energije

$$h_1 g = \xi_{12} \frac{v_1^2}{1}$$

Oni se dele na mesne gubitke i gubitke zbog trenja. Mesni gubici se javljaju kadgod dolazi do promene vektora brzine. Karakteristična mesta gde se javljaju ovi gubici su: kolena, ventili, zasuni, blende, nagla proširenja i suženja, usisne korpe, račve i dr.

- KOEFICIJENTI LOKALNIH GUBITAKA

Ovi gubici se mogu rasporediti u nekoliko grupa: a) proširenja, b) suženja, c) krivine, d) račve i e) cevne armature.

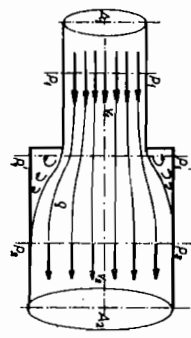
a) PROŠIRENJA

- Naglo proširenje. Pad

pritiska je $\Delta p = \frac{1}{2} \rho (v_1 - v_2)^2$,

a koeficijent gubitka

$$\xi = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho v_1^2} = (1 - \frac{A_1}{A_2})^2$$



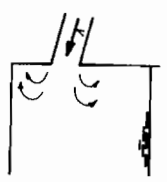
Novija ispitivanja su pokazala da nije tačna jednakost $p_1 = p_2$ (v.5.2.1.primjer 4) pa se zbog toga uvodi korekcionni faktor C. Korigovani koeficijent gubitka je

$$\xi = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho v_1^2} = C(1 - \frac{A_1}{A_2})^2$$

gde je C - neznatno veće od 1.

- Izlazni gubitak. Kada je $A_2 \gg A_1$ pad

pritiska je $\Delta p = \frac{1}{2} \rho v^2$,

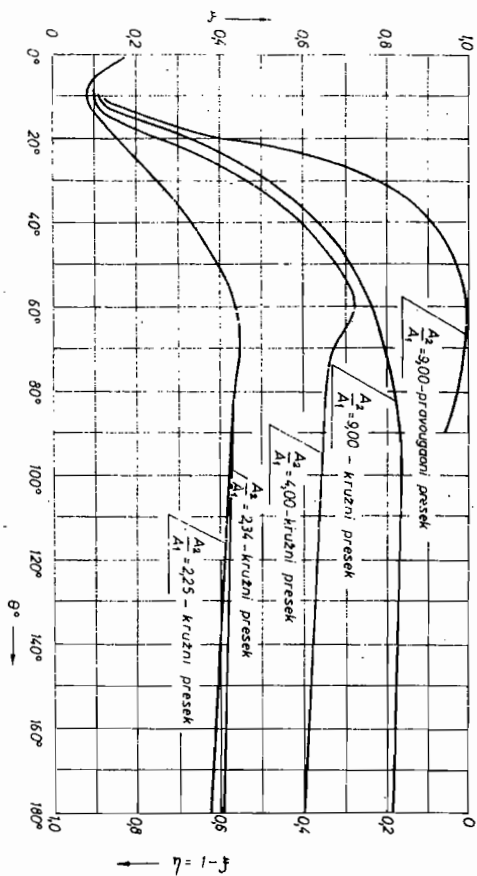
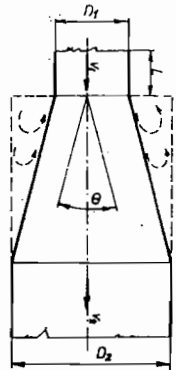


a koeficijent gubitka $\xi=1$ -za turbulentno strujanje, $\xi=2$ -za lamnarno strujanje.

- Difuzor. Upotrebom difuzora smanjuje se gubitak u odnosu na naglo proširenje. Eksperimenti su pokazali da je koeficijent gubitka

$$\xi = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2)} = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho v_1^2 (1 - (\frac{A_1}{A_2})^2)}$$

funkcija od ugla θ i od odnosa površina. Njegova vrednost, kao i vrednost stepena korisnosti difuzora $\eta = 1 - \xi$, date su na dijagramu 4.



DIJAGRAM 4. Koeficijent gubitka ξ i stepen korisnosti η difuzora u zavisnosti od ugla θ

Ispitivanja su pokazala da je:

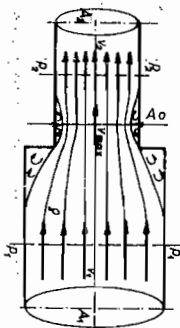
1. ugao proširenja koji daje najbolji koeficijent korisnosti oko 6° - 8° za cevi kružnog preseka, 6° za cevi kvadratnog preseka i 11° za pravougaone cevi;
 2. za zadani odnos A_2/A_1 , difuzor sa kružnim presekom i kvadratnim nastavkom daje najbolje η ;
 3. dužina cevi pre difuzora treba da bude što je moguće kraća. U izvesnoj granici η je funkcija proizvoda θ i L/D_1 gde je L/D_1 - "efektivna ulazna dužina";
 4. dužina cevi iza difuzora poboljšava η ; dužina izlazne cevi treba da bude 4-6 puta veća od većeg prečnika D_2 .
- U praksi se difuzor najčešće koristi za transformaciju kinetičke energije u energiju pritiska. Kada je difuzor

postavljen na kraju cevododa, a na ulazu u rezervoar, treba očekivati povećanje protoka zbog smanjenja izlaznog gubitka.

b) SUŽENJE

- Naglo suženje. Pri strujanju fluida kroz naglo suženje pr-

otokna površina se smanjuje kako je prikazano na slici. Postignući nizvodno od suženja najmanji presjek (vena contracta) struja se postepeno širi da bi naizad potpuno popunila presjek. Vrtlozi koji se stvaraju između zidova cevi i graničnih strujnica koriste strujnu energiju koja ih drži u rotaciji.



Zanemarujući gubitke kroz suženi deo do "vene contracta" gubitak u proširenoj deonici koji je mnogo veći (zbog nepovoljnog grad p) je

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho (v_{\max} - v_2)^2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \left(\frac{A_2}{A_0} - 1 \right)^2,$$

odnosno $\xi = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho v_2^2} = \left(\frac{A_2}{A_0} - 1 \right)^2$.

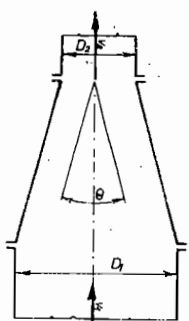
Količnik A_2/A_0 zavisi od A_2/A_1 pa je koeficijent gubitka ξ u funkciji od A_2/A_1 . Neke vrednosti za ξ date su u tabelici 7.

TABELICA 7.

A_2/A_1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
ξ	0,34	0,27	0,16	0,05	0

- Mlaznik. Postepeno suženje, u normalno izvedenim konstrukcijama, odlikuje se malim koeficijentom gubitka ξ . Gubitak se vezuje za brzinu v_2 , tj.

$$\Delta p = \xi \rho \frac{v_2^2}{2}$$



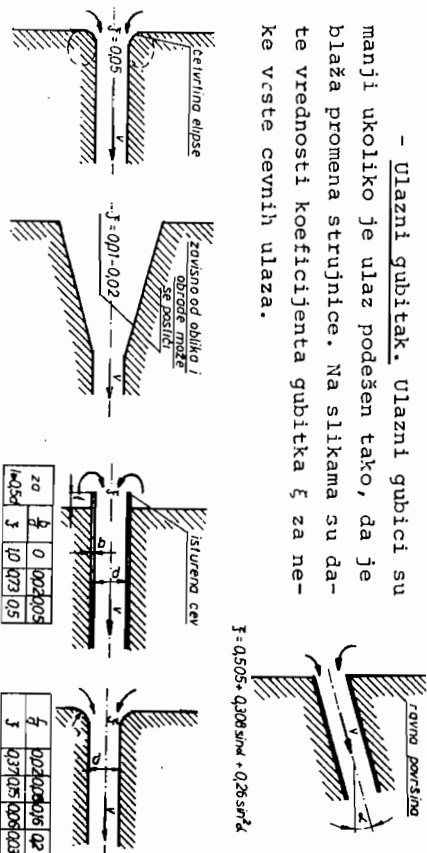
u tabelici 8. dati su eksperimentalni podaci za ξ u funkciji ugla θ i odnosa ulaznog i izlaznog prečnika.

TABELICA 8.

za $\frac{D_1}{D_2} = 1,2$	θ^0	10	20	30	40
	ξ	0,04	0,05	0,07	0,08
za $\frac{D_1}{D_2} = 2$	θ^0	10	20	30	40
	ξ	0,07	0,09	0,12	0,14
za $\frac{D_1}{D_2} = 3$	θ^0	10	20	30	40
	ξ	0,08	0,10	0,14	0,17

- Ulazni gubitak. Ulazni gubici su

manji ukoliko je ulaz podešen tako, da je blaža promena strujnice. Na slikama su date vrednosti koeficijenta gubitka ξ za neke vrste cevnih ulaza.

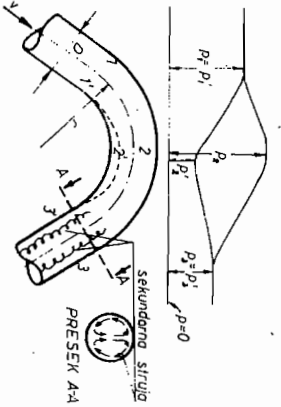


Treba izbegavati usvajanje naglog suženja za ulaz u cevovod, a umesto toga praktikovati zaobljene prelaze. Sa postepeno sužavajućim, dobro obradjenim, presekom moguće je najviše smanjiti ulazni gubitak.

c) KRIVINE

- Koleno. Cubici u kolennima su veći od gubitaka u pravim cevima iste dužine. Ti dodatni gubici su prouzrokovani povećanom turbulencijom koja je posledica promene smera strujanja. Promena strujanja izaziva povećanje pritiska na spoljašnjoj strani krivine i smanjenje pritiska na unutrašnjoj. Zbog toga se narušava profil brzine i centrifugalne sile iz-

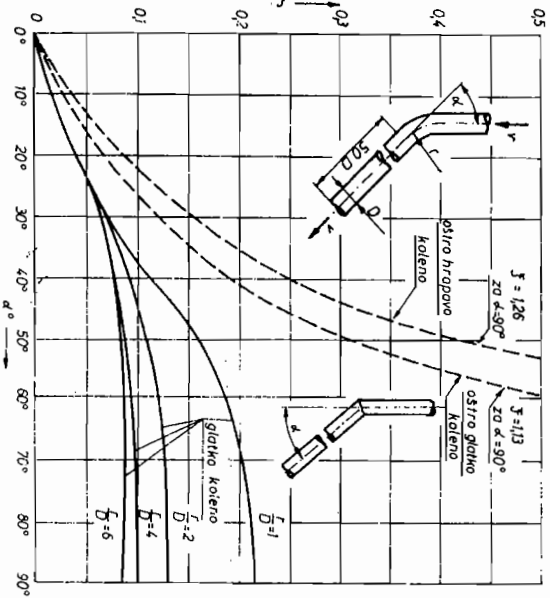
aziavaju sekundarno strujanje kao što je pokazano na slici. Struja fluida napušta koleno krećući se u duploj spirali koja nestaje tek u dosta udaljenom nizvodnom preseku. Međutim, podrazumeva se da je pun efekat gubitka skoncentrisan na koleno.



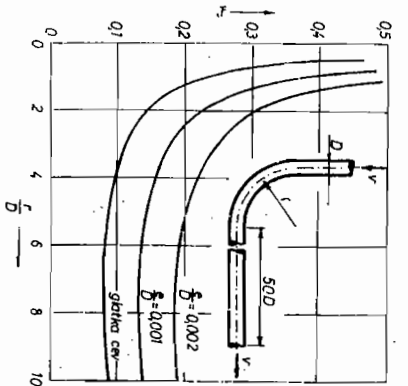
Koeficijent gubitka se definiše kao

$$\xi = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho v^2}$$

i zavisi od odnosa r/D , a ne zavisi od Re . Na sledećim dijagramima date su vrednosti koeficijenta gubitka ξ za koleno do 90° i oštro koleno do 90° , kao i za koleno od 90° .



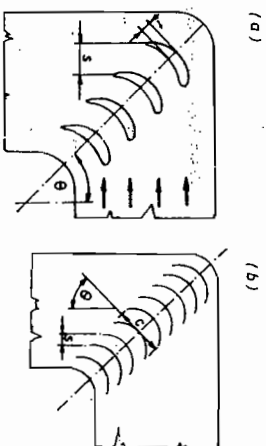
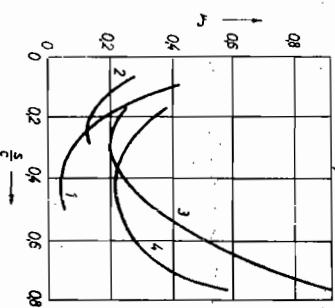
DIJAGRAM 5. Koeficijent gubitka ξ za koleno do 90° i oštro koleno do 90° u zavisnosti od odnosa r/D i ugla α



DIJAGRAM 6. Koeficijent gubitka ξ za koleno od 90° u zavisnosti od odnosa r/D i relativne hrapavosti e/D .

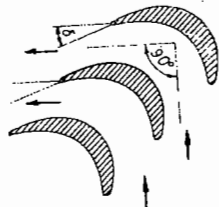
Cevne krivine manje od 90° imaju manji koeficijent gubitka ξ (v. dijagram 5.). Međutim, da bi se koeficijent gubitka ξ znatnije smanjilo, ugao α mora biti manji od 45° . Za veće odnose r/D zanimljiv je gubitak prouzrokovan odlepljivanjem struje, ali je ispoljen gubitak usled pojave sekundarne spiralne struje, tako da se sa porastom ugla α postepeno povećava gubitak. Napr. koeficijent gubitka za koleno od 180° je samo za oko 50% veći od istog koeficijenta ali za koleno od 90° .

Ugradnjom skretnih lopatica u oštro koleno gubici se znatno smanjuju. Na sledećem dijagramu dati su koeficijenti gubitaka ξ za razne vrste skretnih lopatica.



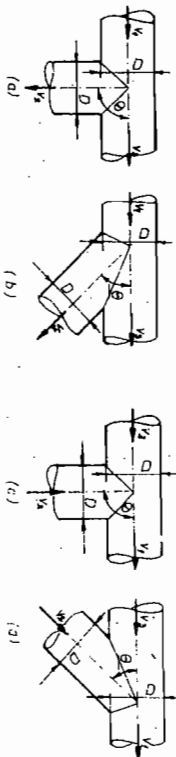
DIJAGRAM 7. Koeficijent gubitka ξ za oštro koleno od 90° sa skretnim lopaticama u zavisnosti od oblika skretnih lopatica - kriva 1 lopatice oblika aeroprofila (v.sl.a), krive 2, 3 i 4 kružni luk različitog oblika (v.sl.b) - i odnosa s/c

Da bi se fluidna struja skrenula tačno za 90° potrebno je lopatice saviti za dodatni ugao δ , zbog ranijeg odlepljivanja struje.



d) RAČUV

- Račve i trojnici. U tablici i dijagramima dati su koeficijenti gubitaka ξ za neke slučajeve račvanja i sučeljavanja fluidne struje. Pritisci u pojedinih granama račvanja ($\theta < 90^\circ$), ili trojnika ($\theta = 90^\circ$), međusobno se razlikuju samo za veličinu gubitka koji se određuje preko odgovarajućeg koeficijenta gubitka i brzine osnovnog toka struje.



TABLICA 9.

	v_2/v_1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
račvanje (a)	ξ_{1-2}	0,96	0,88	0,89	0,96	1,10	1,29
	ξ_{1-3}	0,05	-0,08	-0,04	0,07	0,21	0,35
	ξ_{1-2}	0,90	0,66	0,47	0,33	0,29	0,35
račvanje (b)	ξ_{1-3}	0,04	-0,06	-0,04	0,07	0,20	0,33
	ξ_{2-1}	-1,04	-0,40	0,10	0,47	0,73	0,92
	ξ_{3-1}	0,06	0,18	0,30	0,49	0,50	0,60
sučeljavanje (c)	ξ_{2-1}	-0,90	-0,37	0	0,22	0,37	0,38
	ξ_{3-1}	0,05	0,17	0,18	0,25	0,22	0,37
	ξ_{3-1}	0,05	0,17	0,18	0,25	0,22	0,37

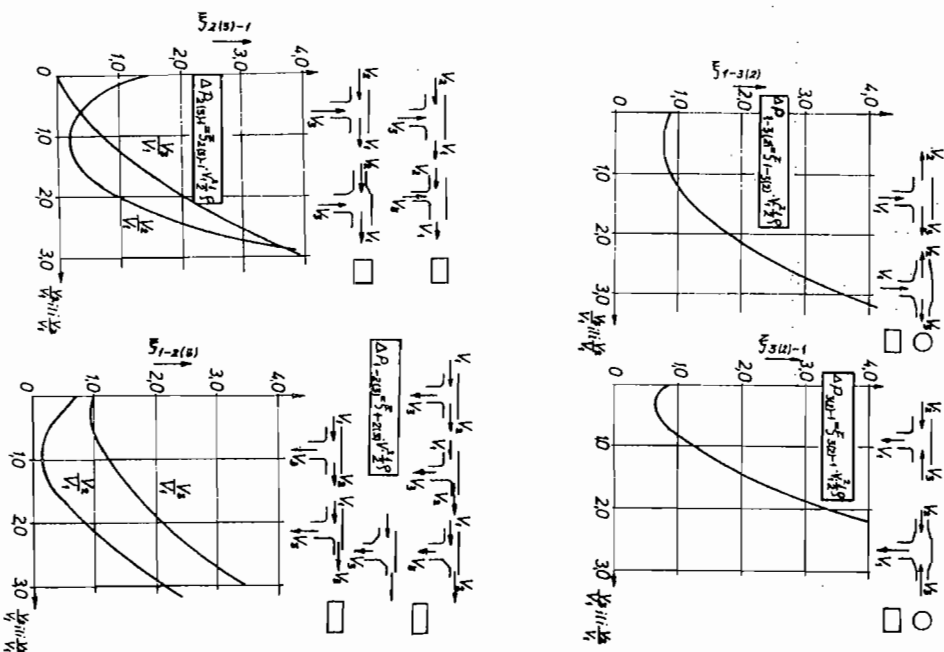
Gubitak u račvi se može smanjiti zaobljavanjem ulaznih ivica.

Pad pritiska pravcem strujanja određen je koeficijentom gubitka ξ i brzinom fluidne struje v_1 . Izr. za slučaj sučeljavanja (c) za $v_2/v_1=0,2$ pad pritiska od račve do horizontalne cevi je negativan

$$\Delta p_{2-1} = \xi_{2-1} \frac{\rho v_1^2}{2} = -0,4 \frac{\rho v_1^2}{2}$$

što znači da je pritisak od račve do horizontalne cevi negativan.

Za veće odnose brzina v_2/v_1 i v_3/v_1 , različite poprečne preseke i različito izvedene oblike račvanja i sučeljavanja struje pod 90° važe sledeći dijagrami:

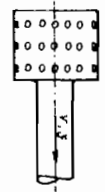


DIJAGRAM 8. Koeficijent gubitka ξ za različito izvedene oblike račvanja i sučeljavanja fluidne struje pod 90° u zavisnosti od odnosa brzina v_2/v_1 i v_3/v_1

e) CEVNE ARMATURE

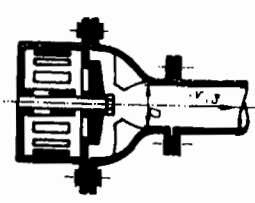
- Usisna korpa. U zavisnosti od konstrukcije, vrednost koeficijenta gubitka je

$$\xi = 1 \div 5$$

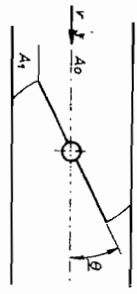


Za usisnu korpu sa jednosmernim ventilom, konstrukcije prema slici, koeficijent gubitka je dat u funkciji precnika usisnog cevovoda i iznosi

$$\xi = \frac{2,2}{D}, \quad D[m]$$



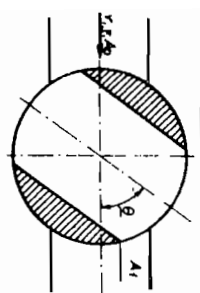
- Zatvarač (leptir). Koeficijent gubitka u funkciji ugla θ dat je tabelarno.



TABLICA 10.

θ°	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	60	65	70	75	90
ξ	0,24	0,52	0,90	1,54	2,51	3,91	10,8	32,6	118	256	751	∞			

- Slavina. Koeficijent gubitka u funkciji ugla θ , i odnosa površina A_1/A_0 , dat je tabelarno.



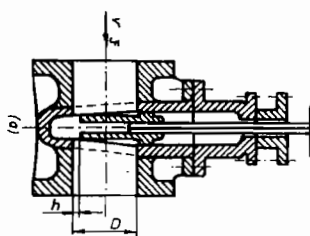
TABLICA 11.

θ°	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	67
A_1/A_0	0,93	0,85	0,77	0,69	0,60	0,52	0,44	0,35	0,27	0,19	0,11	0
ξ	0,05	0,31	0,88	1,84	3,45	6,15	11,2	20,7	41,0	95,3	275	∞

- Zasun. Koeficijent gubitka za zasun Ludlo (a).

TABLICA 12.

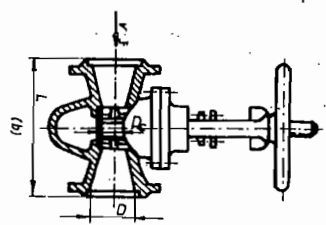
$\frac{h}{D}$	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ξ	30	22	12	5,3	2,8	1,5	0,8	0,3	0,15



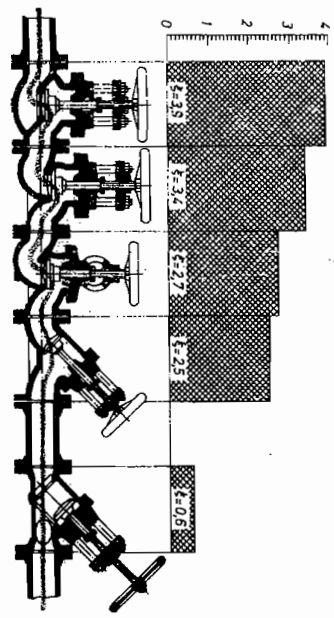
Koeficijent gubitka za zasun sa sitničnim jezgrom.

TABLICA 13.

D [mm]	D_c/D	L/D	ξ
300	0,67	2,50	1,45
300	0,67	1,68	1,80
250	0,80	1,50	0,39
200	0,75	1,33	0,60



- Ventil. Koeficijent gubitka za različito izvedene konstrukcije ventila.



TABLICA 14.

D [mm]	ξ sa podeonim zidom od 45°	ξ sa podeonim zidom od 90°
13	10,8	15,9
20	8,0	10,5
25	-	9,3
30	-	8,6
40	4,9	7,6
50	-	6,9
80	4,0	-
100	4,1	-
150	4,4	-
200	4,7	-
250	5,1	-
300	5,4	-
350	5,5	-

- KOEFICIJENT TRENJA

Gubici koji se javljaju zbog trenja su posledica viskoznosti i izražavaju se sa

$$\eta \cdot g = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2}$$

gde su: l, d - dužina i prečnik cevovoda za koji se određuje gubitak,

v - srednja brzina strujanja fluida kroz cevovod,

λ - koeficijent trenja.

Koeficijent trenja zavisi od režima strujanja (Rejnoidsovog broja Re) i od relativne hrapavosti cevovoda $\delta = e/d$ (e - apsolutna hrapavost - tablica 15). Za praktično rešavanje cevnih problema zavisnost između λ, Re i δ je data Mudi-jevim (Moody) dijagramom.

U Mudijevom dijagramu razlikuju se tri oblasti: laminarna, prelazna i turbulentna.

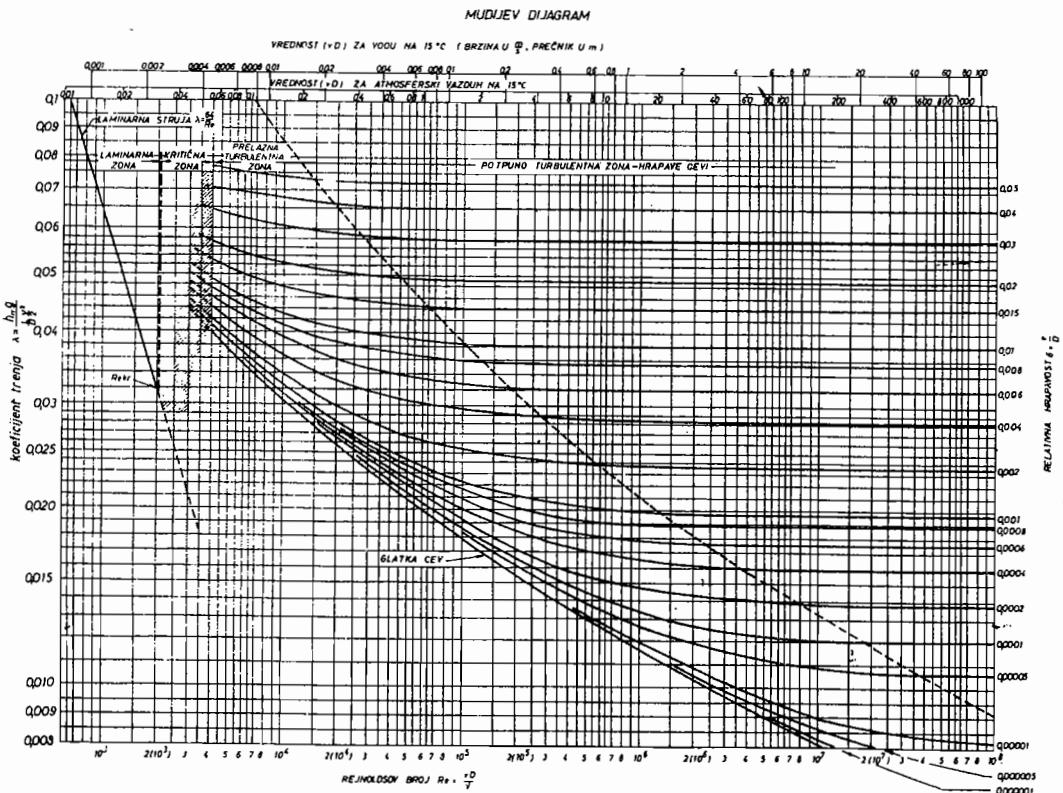
U laminarnom području koeficijent trenja λ je dat Stoksovom formulom

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

Između laminarne i prelazne oblasti nalazi se kritična zona, $2000 < Re < 4000$, u kojoj se mogu očekivati laminaran ili turbulentan režim strujanja fluida.

U prelaznoj zoni koeficijent trenja zavisi od viskoznosti (Re) i od relativne hrapavosti. Za vrednosti relativne hrapavosti $\delta = 0,001$ i manje, pri smanjenju Re , λ se približava vrednosti za glatke cevi, što je uslovljeno stvaranjem laminarnog sloja na zidovima cevi koji delimično prekriva sve neravnine. Za izvesne vrednosti Re u prelaznoj zoni film potpuno prekriva male neravnine i vrednost koeficijenta trenja λ je ista kao i za potpuno glatku cev. Za veće Re , neravnine se probijaju kroz laminarni sloj što prouzrokuje dodatnu turbulenciju i povećani gubitak energije.

Za oblast potpune turbulencije - hrapave cevi - debljina filma je zanemarljiva u odnosu na hrapavost, što izaziva potpuno turbulentno strujanje u celom preseku cevi. Viskoznost nema uticaja na izgubljeni energiju, koja je srazmerna v^2 i



DIJAGRAM 9. Mudijev dijagram

TABLICA 15.

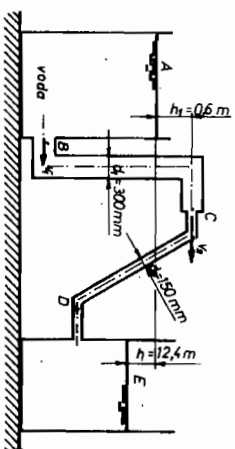
VRSTA CEVI - MATERIAL	STANJE CEVI	e [mm]
VUČENE CEVI IZ BAKRA, MESINGA ILI STAKLA I SL.	TEHNIČKI GLATKE	1,0013
VUČENE ČELIČNE CEVI (MANNESMANN)	NOVE	0,03
	ČIŠĆENE POSLE DUŽE UPOTREBE	0,15 ÷ 0,2
	ZARDJALE	0,4
	SA JAKOM KOROZIJOM I RDJOM	do 3
ZAVARENE ČELIČNE CEVI (ZA HIDROCENTRALE I DRUGE VELIKE CEVOVODE)	NOVE, BITUMINIRANE	0,05
	UPOTREBLJIVANE, BITUMINIRANE SA MESTIMICNOM RDJOM	0,1
	UPOTREBLJIVANE, JEDNOLIKO LAKO ZARDJANE	0,15
	POSLE DUGOGODIŠNJE UPOTREBE	0,5
	JACĀE ZARDJANE	1 ÷ 1,5
	JAKO ZARDJANE I KORODIRANE	2 ÷ 4
POCINKOVANE GASNE I VODOVodne CEVI OD 1/2" ÷ 4"	NOVE	0,05 ÷ 0,1
	NOVE	0,25 ÷ 1
LIVENE CEVI	NOVE BITUMINIRANE	0,1 ÷ 0,15
	UPOTREBLJIVANE, MESTIMICNO ZARDJANE	1 ÷ 1,5
	SA KORODIRANIM GNEZDIRA	1,5 ÷ 4
	OČIŠĆENE POSLE DUGU UPOTREBU	0,3 ÷ 1,5
	RAZNE	0,2 ÷ 1
	GLAČAVI	0,3 ÷ 0,8
DRVENE CEVI	NEOBRAĐIVANE	1 ÷ 3
BETONSKE CEVI	NOVE	0,05 ÷ 1

koeficijent trenja ne zavisi od Re.

Na gornjem delu dijagrama označene su dve pomoćne skale (umesto ka), proizvodi v·D za vodu i vazduh. (Kinematička viskoznošć v je obračunata za standardne atmosfere uslove).

Primeri.

1. Voda gustine $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$ struji iz rezervoara A u rezervoar E kao što je pokazano na slici. Izgubljene energije se mogu usvojiti ovako:



od A do B = $0,6 \frac{v_1^2}{2}$; od C do D = $1,2 \frac{v_2^2}{2}$,
od D do E = $9 \frac{v_1^2}{2}$; od D do E (izlazni gubitak) = $\frac{v_2^2}{2}$.

Odrediti: a) protok Q, b) pritisak i snagu u tački C, c) koliki je protok ako se na cev prečnika 150 mm pre ulaska u rezervoar E postavi difuzor izlaznog prečnika 300 mm, d) za koliko se smanjio izlazni gubitak ($\xi=0,1$)? ($p_a=101,4 \text{ kPa}$).

Rešenje. a) B.j. za slobodne nivoe ulja u rezervoarima A i E i jednačina kontinuiteta određuju protok Q,

$$\frac{p_a}{\rho} + hg = \frac{p_a}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} (0,6+9) + \frac{v_2^2}{2} (1,2+1)$$

$$v_1 = v_2 \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 = \frac{v_2}{4}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1,2+1 + \frac{0,6+9}{16}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 12,4 \cdot 16}{19,2+16+0,6+9}} = 9,321 \text{ m/s}$$

$$Q = v_2 \frac{d_2^2 \pi}{4} = 9,321 \frac{0,15^2 \pi}{4} = 164,633 \text{ l/s}$$

b) Pritisak u C se određuje iz B.j. za slobodni nivo voda u rezervoaru A i tačku C,

$$\frac{p_a}{\rho} = \frac{p_c}{\rho} + h_1g + \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} (0,6+9)$$

$$P_C = P_a - h_1 \rho g - \rho \frac{V_2^2}{2} (1+0,6+9) = 101400 - 0,61 \cdot 9810 - 1000 \frac{9,321^2}{16 \cdot 2} = 10,6$$

$$P_C = 66636,68 \text{ Pa} \quad , \quad P_{VC} = 34763,32 \text{ Pa}$$

Snaga struje ulja u tački C u odnosu na nivo ulja u rezervoaru E sastoji se od tri komponente

$$P = \frac{1}{2} \rho Q V_1^2 - P_{VC} Q + (h_1 + h) \rho g Q =$$

$$= \frac{1}{2} 164,633 \cdot 9,321^2 - 34763,32 \cdot 0,164633 + (0,61 + 12,4) 9,81 \cdot 164,633 =$$

$$= 22440,38 \text{ W}$$

c) Sa difuzorom na kraju cevovoda B.j. za nivoce u rezervoarima glasi

$$\frac{P_a}{\rho} + hg = \frac{P_a}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} (0,6+9) + \frac{V_2^2}{2} 1,2 + \xi \frac{V_2^2 - V_3^2}{2} + \frac{V_3^2}{2}$$

za $\xi=0,1$ i $V_3=V_1$ i $V_1=\frac{1}{4}V_2$ dobija se

$$V_2 = \sqrt{\frac{2hg}{16} + 1,2 + 0,1(1 - \frac{1}{16}) + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12,4 \cdot 9,81 \cdot 16}{9,6 + 1,2 \cdot 16 + 1,5 + 1}} = 11,15 \text{ m/s}$$

$$Q = V_2 \frac{d^2 \pi}{4} = 11,15 \frac{0,15^2 \cdot 3,14}{4} = 196,93 \text{ l/s}$$

d) Prvobitni izlazni gubitak je iznosio $\frac{V_2^2}{2}$, a sa difuzorom je

$$\xi \frac{V_2^2 - V_3^2}{2} + \frac{V_3^2}{2}$$

Smanjenje gubitka iznosi (za $\frac{V_3}{V_2} = \frac{1}{4}$)

$$\frac{\frac{V_2^2}{2} - \xi \frac{V_2^2 - V_3^2}{2} - \frac{V_3^2}{2}}{\frac{V_2^2}{2}} = (1 - \xi) (1 - \frac{1}{16}) = 0,8437 = 84,37 \%$$

2. Kroz horizontalan cevovod, dužine $L=24,2$ km i prečnika $D=76$ mm, transportuje se ulje $Q=8,19$ m³/h. Izračunati ukupni otpor cevovoda i potrebnu snagu za transport. Dinamička viskoznost i gustina ulja su: $\eta=3,83P$ i $\rho=865$ kg/m³.

Rešenje. Srednja brzina ulja je

$$v = \frac{4Q}{D^2 \pi} = \frac{4 \cdot 8,19}{3600 \cdot 0,076^2 \cdot 3,14} = 0,502 \text{ m/s}$$

a Reynoldsov broj

$$Re = \frac{D v \rho}{\eta} = \frac{0,076 \cdot 0,502 \cdot 865}{0,383} = 86,16$$

odredjuje režim strujanja. Kako je $86,16 \ll 2300$ strujanje je laminarno, a koeficijent trenja

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{86,16} = 0,743$$

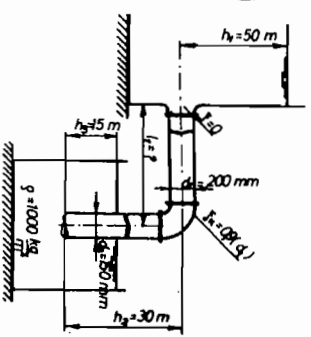
Lokalni gublaci se mogu zanemariti zbog male brzine strujanja, tako da pad pritiska usled trenja predstavlja ukupan gubitak fluidne energije,

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{v^2}{2} = 0,743 \frac{24200}{0,076} \cdot 865 \cdot \frac{0,502^2}{2} = 25,8 \text{ MPa}$$

Potrebna snaga je

$$P = \Delta p Q = 258 \cdot 10^5 \frac{8,19}{3600} = 58700 \text{ W} = 58,7 \text{ kW}$$

3. Kroz cevovod, prikazan na slici, protiče voda $Q=300$ l/s. Za ovaj protok odrediti maksimalno moguću dužinu l_1 horizontalne deonice cevovoda. Cevi su nove, čelične i bešavne.



Rešenje. Osnovna jednačina je B.j. za nivoce u rezervoarima

$$\frac{P_a}{\rho} + (h_1 + h_2 - h_3) g = \frac{P_a}{\rho} + \frac{V^2}{2} (\xi_K + \lambda \frac{l_1}{D_1}) + \frac{V^2}{2} (1 + \lambda \frac{h_2}{D_2})$$

Koeficijenti trenja λ_1 i λ_2 se odredjuju iz Muddijevog dijagrama (dijagram 9).

Iz tablice 15. za date podatke, maksimalna hrapavost je $e=0,03$ mm. Sada su relativne hrapavosti:

$$\delta_1 = \frac{e}{D_1} = \frac{0,03}{200} = 0,00015 \quad ; \quad \delta_2 = \frac{e}{D_2} = \frac{0,03}{150} = 0,0002$$

Koristiće se pomoćna skala Muddijevog dijagrama vd za vodu, umesto Re,

$$v_1 = \frac{4Q}{d_1^2 \pi} = \frac{4 \cdot 0,3}{0,2^2 \pi} = 9,55 \text{ m/s} \quad ; \quad v_2 = \frac{4Q}{d_2^2 \pi} = \frac{4 \cdot 0,3}{0,15^2 \pi} = 16,98 \text{ m/s}$$

$$v_1 d_1 = 9,55 \cdot 0,2 = 1,91 \text{ m}^2/\text{s} \quad ; \quad v_2 d_2 = 16,98 \cdot 0,15 = 2,55 \text{ m}^2/\text{s}$$

Iz Muddijevog dijagrama za gornje vrednosti relativne hrapavosti i proizvodova vd, koeficijenti trenja su:

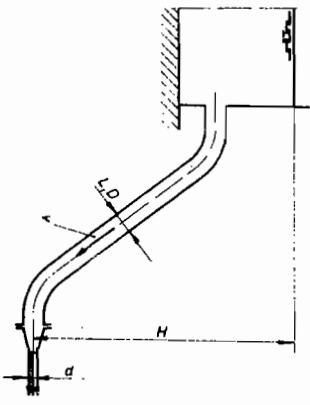
$$\lambda_1 = 0,0135 \quad ; \quad \lambda_2 = 0,0142$$

Zamenom svih poznatih veličina u B.-j. dobija se tražena dužina l_1 ,

$$(50+30-15)9,81 = \frac{9,55^2}{2} (0,9+0,0135 \frac{l_1}{0,2}) + \frac{16,98^2}{2} (1+0,0142 \frac{30}{0,15}),$$

$$l_1 = 14 \text{ m}$$

4. Cevovod jedne hidrocentrale, kojim se iz sabirnog jezera dovodi voda do turbine, prečnika $D=0,6 \text{ m}$, dužine $L=1500 \text{ m}$ i visinske razlike $H=250 \text{ m}$, završava se mlaznikom izlaznog prečnika $d=0,1 \text{ m}$. Koeficijent trenja u cevovodu je $\lambda=0,02$; mesni gubici se zanemaruju. Koeficijent gubitka mlaznika $\xi=0,04$; ne postoji kontrakcija mlaza na izlazu iz mlaznika. Odrediti:



- a) protok Q, snagu mlaza P i stepen korisnosti η
- cevovoda, b) izlazni prečnik mlaznika d_{max} , za koji je snaga mlaza maksimalna, i stepen korisnosti η_{max} cevovoda za ovaj slučaj.

Rešenje. a) B.-j. napisana za slobodni nivo vode u jezuru i izlazni presek mlaznika

$$\frac{P_a}{\rho} + gH = \frac{P_a}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + \lambda \frac{L}{D} \frac{v_1^2}{2} + \xi \frac{v_1^2}{2}$$

gde je v_1 - brzina vode u izlaznom preseku mlaznika, i jednačina kontinuiteta

$$v \frac{D^2 \pi}{4} = v_1 \frac{d^2 \pi}{4}$$

daju rešenje za brzinu v_1 ,

$$v_1^2 + \lambda \frac{L}{D} \left(\frac{d}{D}\right)^4 v_1^2 + \xi \frac{v_1^2}{2} = gH$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gH}{1+\lambda \frac{L}{D} \left(\frac{d}{D}\right)^4 + \xi}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 250}{1+0,02 \frac{1500}{0,6} \left(\frac{0,1}{0,6}\right)^4 + 0,04}} = 67,436 \text{ m/s}$$

Sada je protok

$$Q = v_1 \frac{d^2 \pi}{4} = 67,436 \frac{0,1^2 \pi}{4} = 0,529373 \text{ m}^3/\text{s}$$

snaga mlaza

$$P = \frac{1}{2} \rho Q v_1^2 = \frac{1}{2} 1000 \cdot 0,529373 \cdot 67,436^2 = 1203695,895 \text{ W} \approx 1,2 \text{ MW}$$

a stepen korisnosti cevovoda

$$\eta = \frac{v_1^2}{2gH} = \frac{67,436^2}{2 \cdot 9,81 \cdot 250} = 0,92714 \approx 93 \%$$

b) Polazi se od izraza za snagu mlaza

$$P = \frac{1}{2} \rho Q v_1^2 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\pi d^2}{4}\right) v_1^3 = \frac{\rho \pi d^2 d^2}{8} \left(\frac{2gH}{1+\xi+\lambda \frac{L}{D} \left(\frac{d}{D}\right)^4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

a zatim

$$\frac{dP}{d\left(\frac{d}{D}\right)} = \frac{\rho \pi D^2}{8} \left\{ 2 \frac{d}{D} \left(\frac{2gH}{1+\xi+\lambda \frac{L}{D} \left(\frac{d}{D}\right)^4}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{d}{D}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{2gH}{1+\xi+\lambda \frac{L}{D} \left(\frac{d}{D}\right)^4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{-2gH \cdot 4 \lambda \frac{L}{D} \left(\frac{d}{D}\right)^3}{\left(1+\xi+\lambda \frac{L}{D} \left(\frac{d}{D}\right)^4\right)^2} \right\} = 0$$

i posle sredjivanja dobija se

$$\left(\frac{d}{D}\right)^4 = (1+\xi) \frac{D}{2\lambda L} = 1,04 \frac{0,6}{2 \cdot 0,02 \cdot 1500} = 0,0104$$

Izlazni prečnik mlaznika za maksimalnu snagu mlaza izračunava se iz gornjeg izraza i iznosi

$$d_{max} = 0,3194D = 0,3194 \cdot 0,6 = 0,19164 \text{ m} \approx 0,192 \text{ m}$$

a odgovarajuća izlazna brzina iz mlaznika je

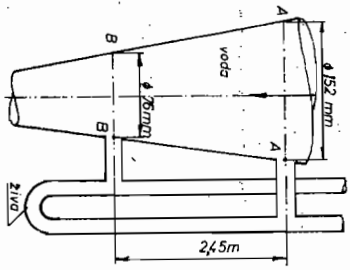
$$v_{1max}^2 = \frac{2gH}{1+\xi+\lambda \frac{L}{D} \left(\frac{d_{max}}{D}\right)^4}$$

Stepen korisnosti cevovoda za ovaj slučaj iznosi

$$\eta_{\max} = \frac{v_{\max}^2}{2gH} = \frac{1}{1 + \xi + \frac{\lambda L}{D} \left(\frac{d}{D}\right)^5} = \frac{1}{1 + 0,04 + \frac{0,02 \cdot 1500}{0,6} \left(\frac{0,19164}{0,6}\right)^5} = 0,6407 \approx 64\%$$

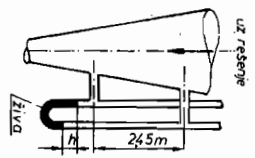
Zadaci

1. Na jednoj vertikalnoj deonici kroz koju teče voda postavljene su manometri u A i B, gde su prečnici cevi 152 mm i 76 mm. Tačka B je 2,45 m ispod A, i kada je protok kroz cev $Q=21$ l/s, pritisak u B je za 0,12 at veći od pritiska u A. Ako se pretpostavi da se gubici u cevi između A i B mogu izraziti kao $\xi v_A^2/2$, gde je v_A srednja brzina vode u preseku A, treba odrediti ξ .



Ako se manometri u A i B zamenju sa cevima napunjenim vodom i priključenim za U manometar u kome se nalazi živa, izračunati razliku nivoa žive h.

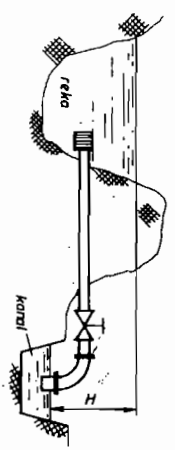
Rešenje. $\xi = 3,28$; $h = 99,2$ mm



2. Benzol relativne gustine ρ_r , 0,90 i dinamička viskoznosti $7,61 \times 10^{-4}$ Pa·s, struji kroz rovu bežavnu čeličnu cev prečnika 150 mm sa srednjom brzinom 3,5 m/s. Odrediti pad pritiska na 600 m dužine cevodva.

Rešenje. ($\epsilon=0,03$ mm, $\lambda=0,0152$) $\Delta p = 335,2$ kPa

3. Kroz cevovod prikazan na slici prebacuje se voda iz reke u kanal pri razlici nivoa $H=3$ m. Cevovod se sastoji iz pravde deonice ukupne dužine $L=1000$ m ($d=800$ mm, $\epsilon=1,8$ mm), usisne rešetke $\xi_r=4$, kolena $\xi_k=0,6$ i ventila. Odrediti koeficijent otpora ventila kada kroz sistem prikazan na slici protiče $Q=55$ m³/min vode.



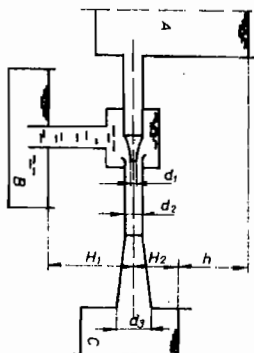
Rešenje: ($\lambda = 0,024$) $\xi_v = 11$

4. Kroz horizontalnu cev, dužine L i prečnika d, protiče Q vode. Pritisak vode na ulazu u cev je $\rho g H$. Odrediti, uzimajući u obzir gubitak energije zbog trenja po dužini, snagu struje vode P na kraju cevi i dokazati da će snaga, kad je gubitak pritiska jednak $\rho g H/3$, biti najveća (koeficijent trenja se ne menja). Kolika je brzina toka v_{\max} koja daje maksimalnu snagu. (Rezultat izraziti opštim brojevima).

Rešenje.

$$P = (\rho g H - \lambda \frac{L}{d} \frac{8Q^2}{\pi^2}) \rho Q ; P_{\max} = \frac{1}{6} \rho g H d^2 \pi v_{\max} ; v_{\max} = \sqrt{\frac{2d g H}{3 \lambda L}}$$

5. Vodostrojna pumpa, primajući vodu za rad iz rezervoara A, isisava vodu iz rezervoara B sa visine $H_1=4$ m i izbacuje u rezervoar C na visinu $H_2=2$ m. Ostali podaci su: izlazni prečnik mlaznika $d_1=20$ mm, prečnik cilindrične komore u kojoj se meša voda $d_2=40$ mm i izlazni prečnik difuzora $d_3=100$ mm. Uzeti u obzir samo gubitke zbog naglog proširenja (d_1, d_2) i difuzora ($\xi_d=0,1$). Odrediti:



a) Kolika je minimalna visina vode h_{min} u rezervoaru A pri kojoj prestaje isisavanje vode iz rezervoara B;

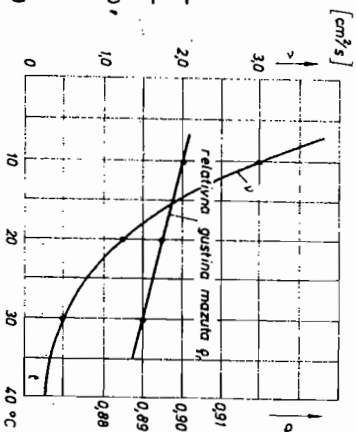
b) Koliki je protok vode Q kroz mlaznik za slučaj pod a).

Napomena. Kada pumpa prestane da isisava vodu iz rezervoara B na izlazu iz mlaznika vlada vakuummetarski pritisak $p_1 = p_0 + \rho g h_1$. (Princip rada vodostrojne pumpe detaljnije je obradjen u 3. primeru poglavlja 5.2.2.).

Rešenje. (Postavljaju se B.j. za nivo vode u rezervoarima A i C, i za izlazni presek mlaznika i nivo vode u rezervoaru C.)

a) $h_{min} = 7,90 \text{ m}$; b) $Q = 5,177 \text{ l/s}$

6. Mazut, koji se transportuje kroz horizontalan cevovod prečnika 150 mm i dužine 5 km, menja viskoznost i gustinu u zavisnosti od temperature prema priloženom dijagramu. Odrediti padove pritiska Δp_{10} , Δp_{20} i Δp_{30} za konstantan protok mazuta 50 l/s i tri vrednosti temperature 10, 20 i 30°C. Apsolutna hrapavost cevovoda je 0,1 mm.



Rešenje. $\Delta p_{10} = 5,42 \text{ MPa}$; $\Delta p_{20} = 5,01 \text{ MPa}$;

$\Delta p_{30} = 3,92 \text{ MPa}$

7. Kroz cevovod konstantnog prečnika struji konstantan protok tečnosti. Odrediti za koliko procenata je potrebno povećati prečnik cevovoda da bi se gubitak energije zbog

savladivanja trenja smanjio za dva puta. Zadatak rešavati pretpostavljajući:

- a) laminarni režim,
- b) turbulentni režim u hidraulički glatkoj cevi i
- c) turbulentni režim u hidraulički hrapavoj cevi.

Za slučajeve pod b) i c) koristiti se sledećim formulama:

- za turbulentni režim u hidraulički glatkoj cevi $\lambda = \frac{0,316}{\sqrt{Re}}$,
- za turbulentni režim u hidraulički hrapavoj cevi $\lambda = 0,11 \sqrt{\frac{v}{D}}$.

Rešenje. a) 19% ; b) 16% ; c) 14%

4.4. METOD PRIBLIŽAVANJA

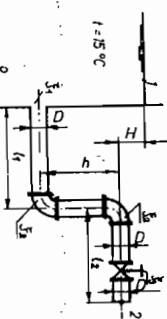
Velikine v, d i λ su u međusobnoj zavisnosti preko B.j. i Mudijevog dijagrama. Vrlo čest slučaj je da su dve velikine, od navedene tri, nepoznate (skoro uvek λ), a za njihovo određivanje se raspolaže samo sa jednim analitičkim izrazom - Bernulijevom jednačinom. Tada se pristupa metodu približavanja, npr. za nepoznate λ i v . Redosled operacija je sledeći: prvo se pretpostavi vrednost λ i iz B.j. se određuje druga nepoznata v ; zatim se sa poznatim proizvodom $v \cdot d$ ulazi u dijagram i određuje novo λ , koje se ponovo uvodi u B.j. i proces se ponavlja. Kada se poklopi pretpostavljena sa dobijenom vrednošću, nepoznate λ i v su određene. Pretpostavlja se ona vrednost koja se najmanje menja (λ) a tačno rešenje se redovno dobija posle dva do tri ponavljanja, jer nepoznate vrlo brzo konvergiraju ka tačnom rešenju.

Navedenom metodom se dobija tačno rešenje, jer Mudijev dijagram i B.j. predstavljaju dve međusobno nezavisne hidrodinamičke relacije.

Primeri.

1. Odrediti protok vode Q za zavaren, čelični, duže u upotrebi cevovod pokazan na slici. Podaci su:

H=9 m, h=12 m, $\xi_1=30$ m, $\xi_2=60$ m,
D=150 mm, $\xi_1=0,5$, $\xi_2=0,9$, $\xi_3=10$,
 $\rho=1000$ kg/m³.



Rešenje. B.j. za tačke 1 i 2

$$H_g = \frac{v^2}{2} (1 + \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 + \lambda \frac{\xi_1 l_1 + h + l_2}{D})$$

rešena po v i λ , svodi se na

$$9 \cdot 2g = v^2 (1 + 0,5 + 2 \cdot 0,9 + 10 + \frac{30 + 12 + 60}{0,15} \lambda)$$

$$176,58 = v^2 (13,3 + 680\lambda)$$

Pretpostavlja se vrednost za $\lambda=0,02$. Zamenom u jedna-

činu određuje se v,

$$v = \sqrt{\frac{176,58}{13,3 + 680 \cdot 0,02}} = 2,562 \text{ m/s.}$$

Relativna hrapavost za zavarenu čeličnu cev duže vre-

mena u upotrebi ($e=0,5$ mm)

$$\delta = \frac{e}{D} = \frac{0,5}{150} = 0,003$$

za v·D = 2,562·0,15 = 0,384 i $\delta = 0,003$ iz Muddjevog

diagrama se nalazi $\lambda = 0,0271$.

Zamenom $\lambda=0,0271$ u B.j. dobija se novo v,

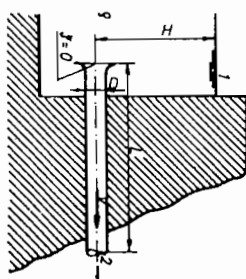
$$v = \sqrt{\frac{176,58}{13,8 + 680 \cdot 0,0271}} = 2,34 \text{ m/s.}$$

Za v·D = 2,34·0,15 = 0,35 i $\delta=0,003$ iz Muddjevog di-
agrama se nalazi $\lambda=0,0272$, što je vrlo blizu ranije dobi-
jenoj vrednosti $\lambda=0,0271$.

Protok vode

$$Q = \frac{v \cdot D^2 \pi}{4} = \frac{2,34 \cdot 0,15^2 \cdot 3,14}{4} = 0,041 \text{ m}^3/\text{s.}$$

2. U podnožju brane izgrađjene je horizontalna drenažna cev od livenog gvoždja dužine L=30 m. Odrediti prečnik ove cevi tako da pri najvećem protoku vode u jezero od Q=5,6 m³/s nivo vode u njemu sme da poraste najviše do h=30 m.



Rešenje. B.j. za tačke 1 i 2

$$H_g = \frac{v^2}{2} (1 + \lambda \frac{L}{D}), \text{ gde je } v = \frac{4Q}{D^2 \pi},$$

izražena preko nepoznatih D i λ glasi

$$HD^5 - \frac{1}{2g} (\frac{4Q}{\pi})^2 D - \frac{L}{2g} (\frac{4Q}{\pi})^2 \lambda = 0$$

odnosno

$$D^5 - 0,086D - 2,591\lambda = 0.$$

Za pretpostavljeno $\lambda=0,02$ (uobičajena vrednost λ za turbulenta strujanja kroz cevi) iz B.j. se određuje D

$$D^5 - 0,086D - 0,052 = 0,$$

Vrednost D koja zadovoljava jednačinu određuje se iz nekoliko pokušaja) iznosi D=0,640 m. Za ovu vrednost podaci za Muddjev dijagram su

$$v = \frac{4Q}{D^2 \pi} = \frac{4 \cdot 5,6}{0,64^2 \cdot \pi} = 17,4 \text{ m/s ; } v \cdot D = 11,14$$

i relativna hrapavost (određjuje se za usvojenju vrednost apsolutne hrapavosti za novu cev od livenog gvoždja $e=0,5$ mm)

$$\delta = \frac{e}{D} = \frac{0,5}{640} = 0,00078$$

Visoka vrednost v·D pokazuje da se strujanje dešava u zoni

potpune turbulencije gde Re nema uticaja. Zato treba očekivati da će vrednost λ određena iz Muddijevog dijagrama u B.j. dati i konačnu vrednost za D (mala je promena relativne hrapavosti).

Za $v \cdot D = 11,14$ i $\delta = \frac{e}{D} = 0,00078$ iz dijagrama sledi $\lambda = 0,0187$.

Zamena λ u B.j. određuje novo D,

$$D^5 - 0,086D - 0,048 = 0.$$

$$D = 0,635 \text{ m.}$$

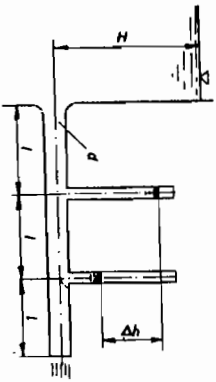
Sledi

$$v = \frac{4Q}{D^2 \pi} = \frac{4 \cdot 5,6}{0,635^2 \cdot 3,14} = 17,7 \text{ m/s.}$$

Za $v \cdot D = 17,7 \cdot 0,635 = 11,23$ i $\delta = \frac{e}{D} = \frac{0,5}{635} = 0,00079$.

Iz dijagrama se dobija $\lambda \approx 0,0187$ - vrednost koja se poklopila sa prethodnom.

Za ostvarenje zahtevanog protoka treba usvojiti cev prečnika $D = 635 \text{ mm}$.



Zadaci. 1. Voda ističe iz otvorenog rezervoara u atmosferu kroz horizontalnu cev na kojoj se nalaze dva pijezometra. Zanimajuća lokalne gubitke, sračunati visinu nivoa vode u rezervoaru H, protok vode Q. Ako su: $d=50 \text{ mm}$; $l=4 \text{ m}$; $e=0,5 \text{ mm}$; $\Delta h=3 \text{ m}$.

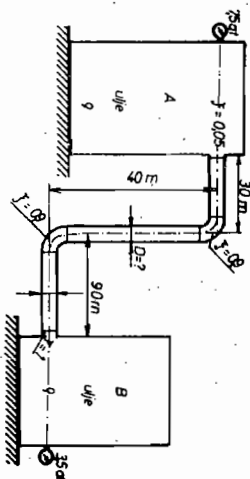
Rešenje: ($\lambda=0,038$) $H=10 \text{ m}$; $Q=8,6 \text{ l/s}$

2. Odrediti prečnik nove cevi od livenog gvoždja D ($e=0,4 \text{ mm}$) kojom treba da se transportuje 253 l/s ulja kinematičke viskoznosti $0,93 \cdot 10^5 \text{ m}^2/\text{s}$. Dužina horizontalne cevi

je 3 km , a raspoloživa energija za transportovanje po jedinici protočne mase ulja je 225 J/kg . Gustina ulja je 800 kg/m^3 . Kolika visina stuba ulja h_u je ekvivalentna raspoloživoj energiji za transportovanje.

Rešenje. ($\lambda=0,0225$) $D=389 \text{ mm}$; $h_u=22,936 \text{ m US}$

3. Cevni sistem, pokazan na slici, služi za transport ulja $Q=28 \text{ l/s}$ iz rezervoara A u rezervoar B. Odrediti prečnik nove besšavne cevi D koja će najbolje izvršiti ovaj zadatak. $\eta=23,7\%$, $\rho=800 \text{ kg/m}^3$.



Rešenje. ($e=0,03 \text{ mm}$) $D=82,1 \text{ mm}$ ($\lambda=0,0286$)

4.5. GUBITAK TRENJA U CEVIMA RAZLIČITIH POPREČNIH PRESEKA

Inženjerska praksa zahteva poznavanje strujanja i kroz cevi različitih poprečnih preseka (ventilacija, hlađenje, strujanje u otvorenim kanalima i dr.). Za određivanje padova pritiska pri strujanju kroz različite poprečne preseke koristi se uobičajeni izraz

$$h_{1g} = \lambda \frac{l}{D_h} \cdot \frac{v^2}{2}$$

sa niže predstavljenu pojmom hidrauličnog prečnika D_h .

Ukupna sila trenja na granici strujne površine (zidovi cevi) je

$$F_T = 0,4 \tau_0$$

gde je: 0 - unutrašnji obim cevi; l - dužina cevi; τ_0 - tangenti napon na zidu cevi. Za dati poprečni presek i protok (prema tome i srednju brzinu v) sila trenja je proporcionalna obimu poprečnog preseka (ili obimu okvašenog poprečnog preseka,

kada fluid delimično popunjava preseke). Kružni poprečni presek ima najmanji obim za datu površinu preseka, pa je zbog toga, s gledišta izgubljene energije, i najpovoljniji za upotrebu.

Ako se osnovni kriterijum za strujanje, Rejnoldsov broj, izrazi preko hidrauličkog prečnika D_h ; za određivanje koeficijenta trenja, pri turbulentnom proticanju kroz razne preseke, može se koristiti Muddijev dijagram. Hidraulički poprečnik R_h je definisan kao

$$R_h = \frac{A}{O}$$

gde su A i O površina i obim okvašenog protočnog preseka. Hidraulični prečnik, koji se uvrsti u Re broj ($Re = vD_h/\nu$) i gubitak energije usled trenja

$$\frac{\Delta P}{\rho} = \lambda \frac{L}{D_h} \cdot \frac{v^2}{2}$$

vezan je sa R_h relacijom

$$D_h = 4R_h$$

Za cev kružnog poprečnog preseka je

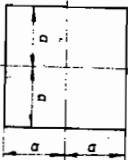
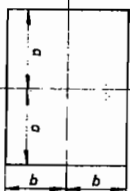
$$D_h = D ; R_h = \frac{D}{4}$$

Za pravougaoni poprečni presek ($2a \times 2b$)

$$D_h = \frac{4ab}{a+b} ; R_h = \frac{ab}{a+b}$$

Za kvadratni poprečni presek ($2a \times 2a$)

$$D_h = 2a ; R_h = \frac{a}{2}$$



Laminarno strujanje kroz kvadratni i eliptični presek su jedini slučajevi kada se za određivanje koeficijenta trenja, sa dovoljnom tačnošću može iskoristiti koeficijent trenja λ za odgovarajući (iste površine) kružni poprečni presek.

Za određivanje koeficijentata trenja, odnosno padova pritiska, ustaljenog laminarnog strujanja kroz prstenaste, eliptične i pravougaone preseke upotrebljavaju se niže navedeni izrazi, dobijeni teorijskim razmatranjem odgovarajućeg

Laminarnog strujanja.

Za strujanje izmedju dva saosna cilindra

$$\Delta P = \frac{8\eta l v}{2 \frac{r_2^2 - r_1^2}{1} - \frac{r_1^2 - r_2^2}{4n \frac{r_2}{r_1}}}, \quad (v \text{ je srednja brzina)}$$

Za vrlo uske prstenaste preseke je

$$\Delta P = \frac{12\eta l v}{\delta^2}$$

gde je $\delta = r_2 - r_1$ - širina prstenastog procepa. Hidraulični prečnik je $D_h = 2\delta$, a koeficijent trenja je

$$\lambda = \frac{48}{Re}, \quad \text{gde je } Re = \frac{vD_h}{\nu} = \frac{2v\delta}{\nu}$$

Za strujanje kroz procep koji obraduju ekscentrični cilindri, približna formula za pad pritiska je

$$\Delta P = \frac{12\eta l v}{\delta^2} \frac{1}{(1 + \frac{3}{2} \frac{e^2}{\delta^2})}$$

gde je: e - ekscentricitet, a $\delta = r_2 - r_1$ - širina procepa saosno postavljenih cilindara.

Za strujanje kroz cevi eliptičnog preseka, koeficijent trenja se određuje prema koeficijentu trenja za strujanje kroz cev odgovarajućeg kružnog preseka

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64v}{vD_h}$$

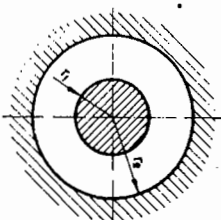
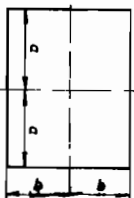
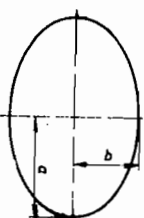
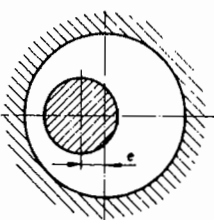
gde se D_h određuje iz

$$\frac{1}{D_h^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{(2b)^2} \right) = \frac{1}{8} \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$$

odnosno

$$D_h^2 = \frac{8a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

Za strujanje kroz cev pravougaonog preseka važi



$$\Delta p = \frac{3n\lambda v}{b^2 f(b/a)} \quad 1 \quad D_h = \frac{4ab}{a+b}$$

Vrednosti računске funkcije $f(b/a)$ su date u sledećoj tabeli:

a/b	1	1,25	1,5	2	3	4	5	10	∞
$f(b/a)$	0,422	0,515	0,585	0,686	0,789	0,824	0,874	0,938	1

TABLICA 16.

Veza između koeficijenta trenja i datih padova pritiska se dobija iz ranije navedenog izraza

$$\lambda \cdot \frac{L}{D_h} \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \rho = \Delta p$$

Za određivanje koeficijenta trenja za strujanje u potpuno turbulentnoj zoni, pored Muddjevog dijagrama, može se upotrebljavati i formula

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{e}{D_h}\right)^{0,25}$$

gde je e - apsolutna hrapavost.

Prema novijim istraživanjima utvrđeno je da se hidraulički prečnik može koristiti za turbulentna strujanja kroz pravougaone poprečne preseke kod kojih je odnos širine i visine u granicama $0,3 \leq a/b \leq 3$. Sa korišćenjem hidrauličnog radijusa u Muddjevom dijagramu se ne mogu očekivati dovoljno tačni rezultati pri turbulentnom strujanju između dve paralelne ploče i između dva saosna cilindra.

Primer:

Kroz cevi kružnog i kvadratnog preseka, istih površina poprečnog preseka i iste dužine, protiče ista količina neke tečnosti. Potrebno je uporediti izgubljene energije zbog trenja, pretpostavljajući: a) laminaran režim tečenja i b) turbulentan režim tečenja za iste vrednosti apsolutne hrapavosti u oba preseka.

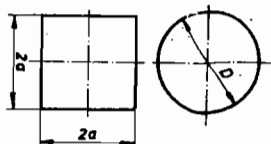
Rešenje. Izgubljena energija je

$$gh = \lambda \cdot \frac{L}{D_h} \cdot \frac{v^2}{2}$$

a) Za laminarni režim strujanja važi

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64v}{v \cdot D} \quad , \quad \text{za kružni presek } D = D_h$$

Uspostavljajući vezi između prečnika kružnog preseka D i hidrauličnog prečnika kvadratnog preseka $D_h = 2a$, koja se dobija izjednačavanjem površina poprečnih preseka



$$\frac{D^2 \pi}{4} = (2a)^2 \text{ sledi } D_h = \frac{D}{2} \sqrt{\pi}$$

Iz izraza za koeficijent trenja za cevi kružnog preseka može se dobiti formula za određivanje koeficijenta trenja za cevi kvadratnog preseka pri gornjim uslovima ($A_c = A_q; v_{sc} = v_{sq}$),

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64v}{v \cdot D_h}$$

gde je Re određeno sa $Re = \frac{v D_h}{\nu}$.

Traženi odnos je

$$\frac{gh_D}{gh_Q} = \frac{\lambda_Q \frac{L}{D_h Q} \cdot \frac{v^2}{2}}{\lambda_D \frac{L}{D_h D} \cdot \frac{v^2}{2}} = \frac{\frac{64v}{v \cdot D_h Q} \cdot \frac{v^2}{2}}{\frac{64v}{v \cdot D_h D} \cdot \frac{v^2}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

b) Za potpuno turbulentni režim strujanja za određivanje koeficijenta trenja može se iskoristiti Muddjev dijagram ($Re = v D_h / \nu$) ili zakon

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{e}{D_h}\right)^{0,25}$$

Upoređenje izgubljenih energija za iste vrednosti apsolutne hrapavosti ($e_Q = e_D$) daje

$$\frac{gh_D}{gh_Q} = \frac{0,11 \left(\frac{2e}{D_h Q}\right)^{0,25} \cdot \frac{2L}{D_h Q} \cdot \frac{v^2}{2}}{0,11 \left(\frac{e}{D_h D}\right)^{0,25} \cdot \frac{L}{D_h D} \cdot \frac{v^2}{2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1,25} = 1,16$$

Napomena. Zadatak pod a) mogao je da se reši koristeći se funkcijom $f(b/a)$ za $a/b = 1$ i odgovarajućeg izraza za pad pritiska.

Zadatak.

Za koliko se povećava izgubljena energija zbog trenja, pri laminarnom i turbulentnom strujanju zadanog protoka tečnosti kroz cev pravougaonog preseka $a \times b$ pri $a/b = 3$ u odnosu na laminarno i turbulentno strujanje istog protoka kroz cev kvadratnog preseka iste površine. Dužina cevi i apsolutna hrapavost su u oba slučaja iste.

Rešenje.

$$\lambda = \frac{68,44}{Re} \left(\frac{\Delta P_{ps}}{\Delta P_{D}} \right)_{lam} = 1,39 ; \quad \lambda = 0,11 \left(\frac{e}{D} \right)^{2,5} \left(\frac{\Delta P_{ps}}{\Delta P_{D}} \right)_{tur} = 1,198$$

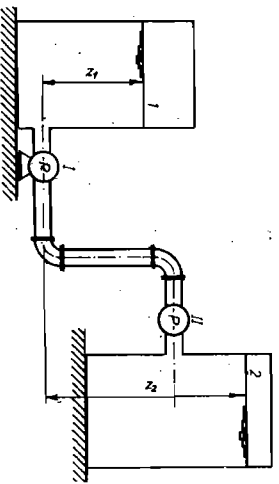
4.6. CEVOVOD SA TURBOMAŠINOM: KRITIČNI PRITISAK; ZATVOREN CEVNI SISTEM

Ako se između

tačaka 1 i 2 cevnog sistema (v.sl.), koji je obuhvaćen B.j, nalazi pumpe, njen napor H_g treba ubeležiti sa leve strane jednačine.

Napor pumpe H_p je energija koju radno kolo

pumpe predaje svakoj jedinici protočne mase fluida. Pumpe pridonosi dodatje energiju osnovnoj struji fluida i tako povećava ukupnu raspoloživu energiju. Ukupna raspoloživa energija koja se nalazi sa leve strane B.j. koristi se za postizanje krajnjih hidrodinamičkih parametara fluida u tački 2 (p_2, V_2, z_2) i savladavanje svih usputnih gubitaka. S gledišta B.j. svedeno je gde se nalazi pumpe između tačaka 1 i 2. U položaju I pumpe



svoj doprinos fluidu ostvaruje povećanjem pritiska na potisnoj strani, a u položaju II snižavanjem pritiska na usisnoj strani (kada su isti preseki usisnog i potisnog cevovoda pumpe). U položaju II, pritisak na usisnoj strani pumpe mora da bude veći od kritičnog pritiska p_k .

$$\frac{P}{\rho} + z_1 g + H_p g = \frac{P}{\rho} + z_2 g + z h_1 g$$

Napor turbine $H_T g$ treba ubeležiti sa desne strane B.j, sa strane gubitaka, jer turbina oduzima od fluida energiju da bi je preradila u drugi oblik npr. električnu energiju.

Snaga pumpe na spojnicu elektromotora i pumpe, i snaga turbine na spojnicu turbine i generatora je data sledećim relacijama:

$$P = \frac{\rho Q H_p g}{\eta_p} \quad [W]$$

$$P = \rho Q H_T g \eta_T \quad [W]$$

gde su: ρ [kg/m³] i Q [m³/s] - gustina i protok fluida,

$H_p g, H_T g$ [J/kg] - napor pumpe, turbine,

η_p, η_T - ukupni stepen korisnosti pumpe, turbine.

Mesta u cevovodu na kojima se javljaju najniži pritisci su karakteristična i na njih treba obratiti pažnju. To su: ulaz u pumpu, najviše tačke cevovoda, nagla suženja, ulazi u rezervoare u kojima vlada potpritisak i sl. U tim tačkama se mora obezbediti veći pritisak od kritičnog $p > p_k$, kako bi se onemogućilo isparavanje fluida, razvoj kavitacionih pojava i obrazovanje parnog mehura sa prekidom fluidne struje.

Osnovna šema pumpnog postrojenja, prikazana na slici (na sledećoj strani), se sastoji od: pumpe 4, usisne cevi 2 i potisnog cevovoda 6. Na ulazu u usisnu cev nalazi se usisna korpa i sa jednosmernim ventilom koji pri punjenju usisne cevi pumpe (pre početka ili posle završetka rada) ne dozvoljava vodi da isteče iz cevi. Sa 3 i 5 su označeni vakuumetar i manometar koji se ugrađuju na usisnoj, odnosno potisnoj strani pumpe i služe za kontrolu pravilnog rada.

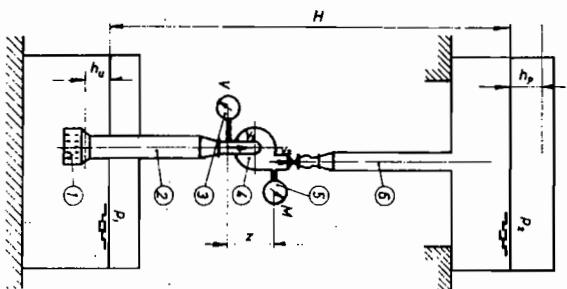
Ukupan napor pumpe za datu šemu je izražen sa

$$gH_p = gH + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + gh_1$$

111

$$gH_p = \frac{P_m + P_v}{\rho} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + gz$$

gde su sa $gh_1 = gh_u + gh_p$ označeni svi gubici u usisnoj i potisnoj delu cevovoda. Visinska razlika z je, za slučaj klasičnih manometara i vakuumetara, rastojanje između osa instrumentata, a ne njihovih priključnih mesta.



Primeri.

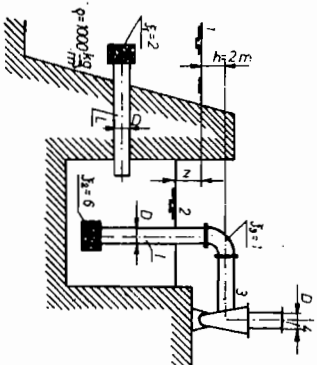
1) Centrifugalna pumpa crpi vodu iz jame u koju voda dolazi iz jezera kroz jednu horizontalnu cev. Dimenzije ove cevi su $L=20$ m, $D=150$ mm, a dimenzije usisne cevi pumpe $l=13$ m, $D=150$ mm (v.sliku).

a) Koliki se maksimalni protok može postići pumpom a da vakuum ispred ulaza u pumpu ne bude veći od 6 m VS? Apsolutna hrapavost cevi je $e=0,75$ mm.

Pumpa je postavljena 2 m iznad nivoa vode u jezenu.

b) Kolika je pri tom protoku razlika nivoa vode u jezenu i crpnoj jami (z)?

c) Naći snagu pumpe, ako je natpritisak u tački 4 $P_{4m}=0,2$ at pri maksimalnom protoku vode. Stepen korisnosti pumpe $\eta=0,8$. Tačka 4 se nalazi neposredno iznad pumpe (nema visinske razlike između tačaka 3 i 4).



Rešenje. a) Brzina vode u cevima 1 i 2 su iste, jer bi se inače jama punila ili praznila. B.j. se zbog toga može pisati direktno za tačke 1 i 3,

$$\frac{P_a}{\rho} = \frac{P_3}{\rho} + \frac{v^2}{2} + hg + \frac{v^2}{2} (\xi_1 + \lambda \frac{L}{D} + 1) + \frac{v^2}{2} (\xi_2 + \xi_3 + \lambda \frac{L}{D})$$

U prvom zagradi se nalaze gubici strujanja kroz cev L:

ξ_1 - gubitak u usisnoj korpi, $\lambda \frac{L}{D}$ - gubitak trenja, 1 - izlazni gubitak. Izlazni gubitak postoji jer struja vode gubi brzinu u jami, a zatim se ponovo ubrzava u usisnoj korpi pumpe.

Iz gornje jednačine sledi

$$\frac{P_a - P_3}{\rho g} = 6 = 2 + \frac{v^2}{2g} (2 + 1 + 1 + 6 + 1 + \lambda \frac{13+20}{0,15})$$

$$78,48 = v^2 (11 + 220\lambda)$$

Za pretpostavljenu vrednost $\lambda = 0,02$, dobijenu vrednost brzine iz B.j. $v = 2,257$ m/s i poznatu relativnu hrapavost $\delta = 0,75/150 = 0,005$ iz Mudičevog dijagrama se određuje novo $\lambda = 0,0306$.

Za $\lambda = 0,0306$ iz B.j. $v = 2,104$ m/s, iz Mudičevog dijagrama ($v \cdot D = 0,3156$, $\delta = 0,005$) se nalazi $\lambda = 0,0306$.

Za tačno rešenje $\lambda = 0,0306$, $v = 2,104$ m/s; traženi protok je

$$Q = v \cdot \frac{D^2 \pi}{4} = 2,104 \frac{0,15^2 \pi}{4} = 0,03716 \text{ m}^3/\text{s}$$

b) Razlika nivoa vode u jezenu i jami se određuje iz B.j. za te nivoe (tačke 1, 2)

$$zg = \frac{v^2}{2} (\xi_1 + \lambda \frac{L}{D} + 1)$$

odakle je

$$z = \frac{2,104^2}{2 \cdot 9,81} (2 + 0,0306 \cdot \frac{20}{0,15} + 1) = 1,597 \text{ m}$$

c) Napor pumpe je

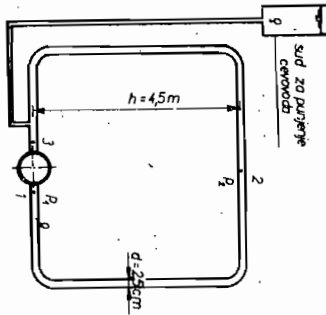
$$H_{Pg} = \frac{P_a - P_3}{\rho} = \frac{P_{4m} + P_{3v}}{\rho} = \frac{(0,2 + 0,6) \cdot 10^4 \cdot 9,81}{1000} = 78,48 \text{ Nm/kg}$$

jer nema razlike kinetičkih energija iza i ispred pumpe zbog istog prečnika usisnog i potisnog voda. Snaga pumpe je određena sa

$$P = \frac{\rho Q H_p g}{\eta} = \frac{1000 \cdot 0,03716 \cdot 78,48}{0,8} = 3630 \text{ W}$$

2. Kroz zatvoren, u vertik-

lnoj ravni postavljen, cevovod, ukupne dužine $L=26 \text{ m}$ i prečnika $d=2,5 \text{ cm}$, pod dejstvom pumpe kruži glicerina gustine $\rho=1250 \text{ kg/m}^3$. Pritisak na izlazu iz pumpe (u tački 1) je $P_1=1,75 \text{ at}$, a u tački 2, koja je na visini $h=4,5 \text{ m}$ iznad tačke 1 i u sredini cevovoda, $P_2=0,15 \text{ at}$. Ako je koeficijent dinamičke viskoznosti $\eta=4,79 \text{ P}$, a koeficijent gubitka u kolenu $\xi=0,5$, odrediti:



- protok glicerina;
- koliko se snage troši za održavanje protoka i
- povišenje temperature glicerina posle 1 sata, ako bi se cevni sistem potpuno toplотно izolovao. Specifična toplota glicerina je $c=2344 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$. Stepen korisnosti pumpe $\eta_p=0,6$.

Rešenje. B.j. za tačke 1 i 2,

$$P_1 + \frac{v^2}{2} = P_2 + \frac{v^2}{2} + hg + \sum \xi h_{1g}$$

(Ukupni gubitak u cevovodu je označen sa $\sum \xi h_{1g}$; brzine su u svim presecima cevovoda iste).

Iz gornje jednačine je moguće odrediti ukupni gubitak u cevovodu $\sum \xi h_{1g}$,

$$\sum \xi h_{1g} = 2 \frac{P_1 - P_2}{\rho} - hg = 2 \frac{(1,75 - 0,15) \cdot 9,81 \cdot 10^4}{1250} - 4,5 \cdot 9,81 = 162,846 \text{ Nm/kg}$$

111 u metrima stuba glicerina

$$\sum h_{1g} = \frac{162,846}{9,81} = 16,6 \text{ m}$$

S druge strane, ukupni gubici su jednaki

$$\sum h_{1g} = \frac{v^2}{2} (4\xi + \lambda \frac{L}{d}),$$

$$162,846 = \frac{v^2}{2} (2 + 1040\lambda)$$

Pošto je

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{v \cdot 0,025 \cdot 1250}{0,479} = 65,24v$$

može se sa sigurnošću tvrditi da je strujanje kroz cevovod laminarno i da nije potrebno poznavanje cevovoda za određivanje λ , tako da je

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64v}{v \cdot d} = \frac{64}{65,24v} = \frac{0,981}{v}$$

Vraćanjem u jednačinu za gubitke određuje se brzina glicerina

$$162,846 = \frac{v^2}{2} (2 + 1040 \frac{0,981}{v})$$

$$v^2 + 510,12v - 162,846 = 0$$

$$v_{1,2} = \frac{-510,12 \pm \sqrt{260224,41 + 651,38}}{2} = \frac{-510,12 \pm 510,76}{2}$$

$$v = \frac{510,76 - 510,12}{2} = 0,32 \text{ m/s}$$

Iz izraza pod korenom se vidi da su lokalni gubici potpuno zanemarljivi u odnosu na gubitke trenja.

Sada je protok

$$Q = v \cdot \frac{d^2 \pi}{4} = 0,32 \cdot \frac{0,025^2 \cdot 3,14}{4} = 0,157 \text{ l/s}$$

b) Napor pumpe $H_p g$ se određuje iz B.j. za tačke neposredno ispred i iza pumpe (tačke 3 i 1).

$$P_3 + H_p g = P_1; \quad \frac{P_3 - P_1}{\rho} = \sum h_{1g}$$

$$H_p g = \sum h_{1g} = 162,846 \text{ Nm/kg}$$

Snaga koja je potrebna za cirkulaciju glicerina je samo ona koja se utroši za savladjivanje gubitaka. Kod zatvorenog cevovoda nije važna visinska razlika - potpuno je svejedno da li se zatvoren cevovod nalazi u vertikalnoj ili horizontalnoj ravni.

$$P = \frac{\rho Q h_p g}{\eta_p} = \frac{1250 \cdot 0,157 \cdot 10^3 \cdot 162,846}{0,6} = 53,264 \text{ W}$$

c) Snaga koja se preda fluidu utroši se na savladjivanje gubitaka - trenja (i lokalni gubici prouzrokuju trenje), odnosno na povećanje temperature. Izjednačavanjem toplotne i strujne energije određuje se povećanje temperature $\Delta t [^{\circ}\text{C}]$ u toplotno izolovanom sistemu posle $\tau = 1 \text{ h}$ strujanja glicerina,

$$Pr = \rho V c \Delta t$$

$$\text{gde je } V = \frac{d^2 \pi \cdot L}{4} = \frac{0,025^2 \pi \cdot 26}{4} = 0,01277 \text{ m}^3$$

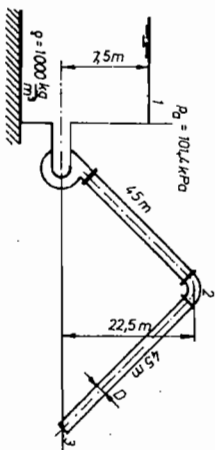
$$\Delta t = \frac{53,264 \cdot 3600}{1250 \cdot 0,01277 \cdot 2344} = 5,12^{\circ}\text{C}$$

Da bi u toplotno izolovanom sistemu, temperatura glicerina ostala nepromenjena, u svakoj sekundi treba odvesti količinu toplote koja je jednaka snazi pumpe

$$\dot{q} = P = 53,264 \text{ J/s}$$

3. Odrediti protok

i snagu pumpe koja je potrebna da bi se kroz cev prečnika $D=0,2 \text{ m}$, prikazanu na slici, transportovala maksimalna količina vode. Lokalne gubitke zanemariti; koeficijent trenja usvojiti $\lambda=0,02$. Pritisak na kome voda počinje da isparava $P_K=2400 \text{ Pa}$. Stepen korisnosti pumpe $\eta=0,8$.



Rešenje. Kritični pritisak P_K nalazi se u tački 2. B.j. za tačke 1 i 2 ili 1 i 3 sadrži dve nepoznate:

napor pumpe H_{Pg} i brzinu v . Zbog toga je najpogodnije prvo postaviti B.j. za tačke 2 i 3,

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + 22,5g = \frac{P_a}{\rho} + \frac{v^2}{2} (1 + 0,02 \cdot \frac{45}{0,2})$$

$$\text{odakle je } v = \sqrt{\frac{22,5 \cdot 9,81 + \frac{2400 - 101400}{1000}}{2,25}} = 7,36 \text{ m/s}$$

$$\text{i protok } Q = \frac{D^2 \pi \cdot v}{4} = \frac{0,2^2 \pi \cdot 7,36}{4} = 0,231 \text{ m}^3/\text{s}$$

B.j. za tačke 1 i 3 određuje napor pumpe,

$$\frac{P_a}{\rho} + 7,5g + H_{Pg} = \frac{P_a}{\rho} + \frac{v^2}{2} (1 + 0,02 \cdot \frac{90}{0,2})$$

$$H_{Pg} = \frac{7,36^2}{2} (1 + 9) - 7,5 \cdot 9,81 = 197,3 \text{ Nm/kg}$$

Snaga je

$$P = \frac{\rho Q H_{Pg}}{\eta} = \frac{1000 \cdot 0,231 \cdot 197,3}{0,8} = 56963 \text{ W} \approx 57 \text{ kW}$$

Napomena. Zadatak je za poznatu apsolutnu hrapavost i primenu Muddjevog dijagrama mogao da se reši i bez poznavanja koeficijenta trenja, primenjujući metodu približavanja.

4. Cevovod za snabdevanje fabrike s vodom je izveden od nove besšavne čelične cevi prečnika $d=51 \text{ mm}$. Visinska razlika između rezervoara u koji se doprema voda i vodene površine reke, odakle se crpi voda, je $H=12,2 \text{ m}$. Karakteristike pumpe zadovoljavaju zahtev da ukupna dužina cevovoda iznosi $L=153 \text{ m}$ i da su u cevovod ugrađjeni: usisna korpa, nepovratni ventil, tri kolena od 90° i zasun.

a) Odrediti protok Q kroz cevovod i

b) izračunati snagu pumpe P .

Lokalne gubitke usvojiti prema: za usisnu korpu $\xi_1=2$; za nepovratni ventil $\xi_2=1,7$; za koleno od 90° $\xi_3=0,2$ i za otvoren zasun $\xi_4=0,2$. Kinematička viskoznost vode je $\nu=0,108 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

Karakteristike pumpe su date u tablici.

Q [m ³ /s]	0	0,0028	0,0032	0,0056	0,0070	0,0084
H _p [m VS]	25	23,2	21,7	19,2	15,3	9,8
η [%]	0	19	26	31	33	23

Rešenje. B.j. za nivo vode u reci i rezervoaru određuje napor pumpe H_p (sa obračunatim izlaznim gubitkom

$$gh_1 = v^2/2)$$

$$gH_p = gh + (\xi_1 + \xi_2 + 3\xi_3 + \xi_4 + 1 + \lambda \cdot \frac{L}{d}) \frac{v^2}{2}$$

Za pretpostavljeno $\lambda = 0,03$

$$H_p = 12,2 + (2+1,7+3 \cdot 0,2+0,2+1+0,03 \cdot \frac{153}{0,051}) \cdot \frac{v^2}{2}$$

Zamenjujući v² sa $16Q^2/d^4\pi^2$ dobija se

$$H_p = 12,2 + 65,5 \cdot \frac{v^2}{2 \cdot 9,81} = 12,2 + 115800Q^2$$

Ako se kriva

gubitaka unese u dijagram karakteristika pumpe, njihova presečna tačka daje radne karakteristike. One su, prema dijagramu, određene sa

$$Q = 0,00294 \text{ m}^3/\text{s}$$

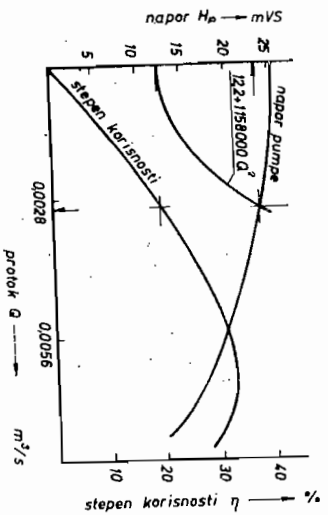
$$H_p = 23,2 \text{ m VS}$$

Sada je moguće proveriti usvojeni koeficijent trenja.

$$\text{za brzinu } v = \frac{4Q}{d^2\pi} = \frac{4 \cdot 0,00294}{0,051^2 \cdot \pi} = 1,435 \text{ m/s}$$

$$\text{Re iznosi } Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{1,435 \cdot 0,051}{0,108 \cdot 10^{-3}} = 69000$$

Za vrednost apsolutne hrapavosti $e=0,2 \text{ mm}$, relativna hrapavost iznosi $\delta = e/D = 0,2/51 = 0,00392$, a iz Mudijevog dijagrama



se potvrđuje pretpostavljena vrednost za

$$\lambda = 0,03$$

Potrebna snaga pumpe P se određuje prema

$$P = \frac{\rho g H_p Q}{\eta} = \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot 23,2 \cdot 0,00294}{0,2} = 3345 \text{ W}$$

Stepen korisnosti pumpe $\eta=0,2$ odgovara radnoj tački Q=2,94 l/s i H_p=23,2 m VS.

Napomena. Bernulijeva jednačina je osnovna jednačina za rešavanje problema. U njoj se tri nepoznate veličine (H_p, λ, v) određuju pretpostavljanjem vrednosti za λ i vezom između v(Q) i H_p koja se dobija iz dijagrama. Procedura rada je identična sa metodom približavanja. Pretpostavljena vrednost λ=0,03 je uzeta zbog toga da bi se izbeglo ponavljanje već prikazanih redosleda operacija.

Zadaci.

1. Pumpa crpi vodu

iz velikog rezervoara u jedan hemijski aparat kroz cevi sistem pokazan na slici.

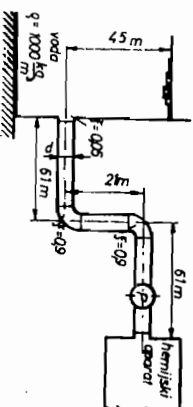
Snaga i stepen korisnosti

pumpe su: P=150 kW i η=0,85.

Koliki će pritisak p_m biti

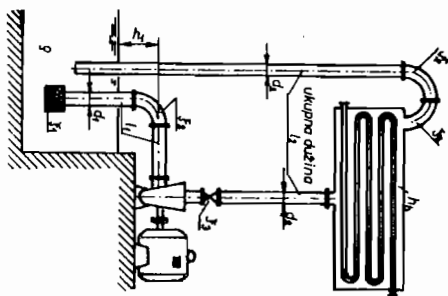
u hemijskom aparatu ako se održava stalni protok Q=283 l/s.

Prečnik nove zavarene čelične cevi je svuda isti i iznosi d=200 mm.



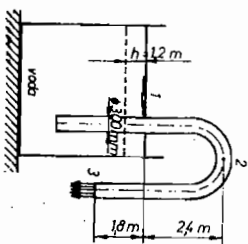
$$\text{Rešenje. } (\lambda=0,0148) \quad p_m = 140,5 \text{ kPa}$$

2. Odrediti snagu pumpe P i pritisak na ulazu u pumpu P_V za pum-pno postrojenje pokazano na slici i podatke: d₁=150 mm; d₂=100 mm; Q=200 m³/h; ξ₁=5 (sa jednosmernim ventilom); ξ₂=0,2; ξ₃=0,6; λ_{1,2}=0,025; gubitak u hladnjaku h_hg=29,43 J/kg; usisni cevod l₁=7 m; potisni cevo-vod l₂=45 m; h₁=4 m; stepen korisno-sti pumpe η=0,75; ρ=1000 kg/m³.



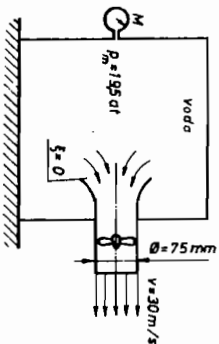
Rešenje. P = 29,1 kW
P_V = 75,5 kPa

3. Sud napunjen vodom prazni se preko sifonske cevi kako je pokazano na slici. Ako je protok 80 l/s, odrediti izgubljenu energiju gh₁ od tačke 1 do tačke 3 u funkciji kinetičke energije. Takodje odrediti pritisak P_{1V} u tački 2 ako se dve trećine gubitaka dešava na pu-tu od tačke 1 do tačke 2. Koliki će bi-ti pritisak P_{2V} u tački 2 ako se nivo vode u sudu spusti za h=1,2 m, a koeficijent ξ i raspodela gubitaka ostanu nepromenjeni? (ρ=1000 kg/m³)



Rešenje. $gh_1 = \xi \frac{v^2}{2} = 26,6 \frac{v^2}{2}$; $P_{2V} = 35,5 \text{ kPa}$
 $P'_{2V} = 39,3 \text{ kPa}$

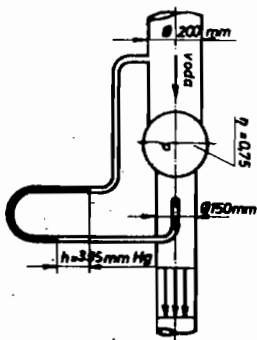
4. Iz velikog rezervoara ističe voda kroz turbinsko kolo pokazano na slici. Zanemarujući gubitke, odrediti: a) pritisak P_m neposredno ispred turbine, b) snagu turbine P (η=0,6) i c) brzinu



mlaza v kada bi se uklonila turbina.

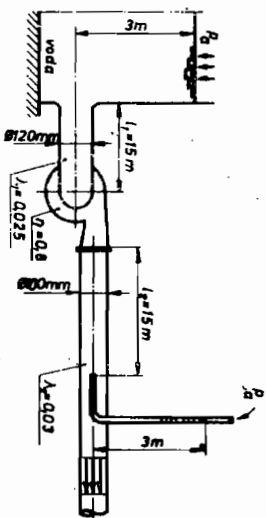
Rešenje. a) P_m = 1,46 MPa ; b) P = 116,28 kW
c) v = 61,85 m/s

5. Ako pumpa razvija snagu od 7,5 kW odrediti protok vode Q kroz pumpno postrojenje.



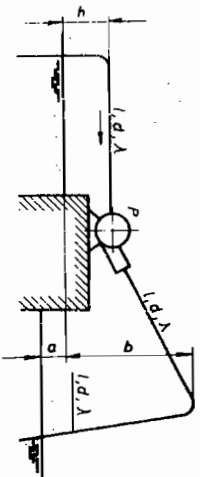
Rešenje. Q = 150 l/s

6. Odrediti snagu pumpe P ako je protok vode Q=50 l/s. Lokalne gubitke zanemariti.



Rešenje. P = 7,615 kW

7. Centrifugalna pumpa potiskuje vodu kroz cevod koji se sastoji iz tri jednake de-onice dužine l=30 m, pre-čnika d=60 mm i koeficijenta trenja λ=0,03. Dajte su visine a=2 m i b=20 m.



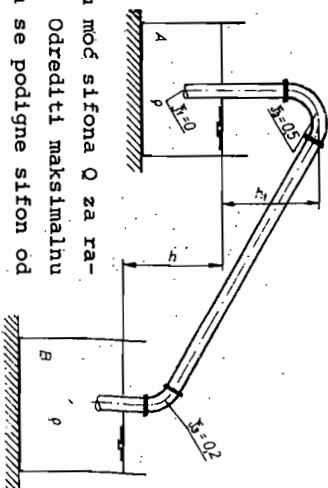
a) Ako vakuum u potisnom cevodu ne sme nigde da bude veći od 4 kPa, odrediti maksimalan protok Q i odgovarajući napor pumpe H_pg.
b) Za ovaj protok odrediti maksimalnu usisnu visinu pumpe h i odgovoriti da li je moguć položaj pumpe kao na slici. Lokalne otvore zanemariti.

Rešenje. a) $Q = 11,2 \text{ l/s}$; $H_p g = 343,53 \text{ Nm/Kg}$
 b) $h = -2,95 \text{ m}$

8. Sifon, dužine

60 m i prečnika 0,3 m, spaja sudove A i B sa benzinom, $\rho = 700 \text{ kg/m}^3$ i $n = 7 \cdot 10^{-4}$ Pas. $P_a = 101,4 \text{ kPa}$, $e = 0,1 \text{ mm}$.

a) Zanimajuću ulazni gubitak odrediti propusnu moć sifona Q za razliku nivoa $h = 7,5 \text{ m}$. b) Odrediti maksimalnu visinu h_1 na koju može da se podigne sifon od površine benzina u sudu A ako je napon benzi-nskih para $P_k = 44,1 \text{ kPa}$, a razlika nivoa $h = 3 \text{ m}$.



Rešenje. a) $(\lambda = 0,0156) \quad Q = 390 \text{ l/s}$

b) $(\lambda = 0,0159; \quad v = 3,47 \text{ m/s}) \quad h_1 = 7,182 \text{ m}$

4.7. ENERGIJSKI DIJAGRAM

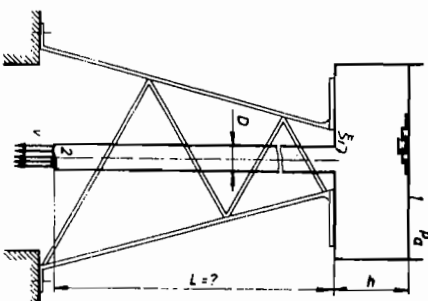
Dijagramsko predstavljanje stanja pojedinih vrsta energija duž strujanja omogućuje kontinualan uvid u promene ener-gije pritiska, kinetičke energije, energije utrošene na sav-ladjivanje otpora i raspoložive položajne energije. Ovakav grafički pregled upozorava na karakteristična mesta koja zas-lužuju detaljniju analizu.

Uobičajeno je da se u dijagramima energija fluidne stru-je predstavlja po jedinici težinskog protoka tako da se dimen-zije pojedinih vrsta energije izražavaju u metrima stuba fluida. Energija natpritisaka $P_m/\rho g$ se naziva piježometarskom visinom. Ona je pozitivna, za razliku od negativne piježometar-ske visine $P_v/\rho g$.

Primeri.

1. Na dnu velikog rezervoara sa konstantnom visinom slobodnog ni-voa vode $h = 2 \text{ m}$, priključena je ver-tikalna cev prečnika $D = 0,2 \text{ m}$. Sred-nja vrednost apsolutne hrapavosti cevi je $e = 1 \text{ mm}$. Ako kroz cev ističe slobodno u atmosferu $Q = 287 \text{ l/s}$ vode, kolika je dužina cevi L?

Skicirati liniju energije, piježometarsku liniju i raspored energija za dati sistem. Koefici-jent gubitka energije na ulazu u cev je $\xi_1 = 0,5$. Temperatura i gustina vode su $t = 15^\circ\text{C}$ i $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$.



Rešenje. B.j. za tačke 1 i 2 daje

$$\frac{P_a}{\rho} + g(h+L) = \frac{P_a}{\rho} + \frac{v^2}{2} (\xi_1 + \lambda \frac{L}{D} + 1)$$

$$g(h+L) = \frac{16Q^2}{2 \cdot D^5 \pi^2} (\xi_1 + \lambda \frac{L}{D} + 1)$$

$$L = \frac{16 \cdot 0,287^2}{2 \cdot 9,81 \cdot 0,2^5 \pi^2} (0,5 + \lambda \frac{L}{0,2} + 1) - 2 = 4,2(1,5 + \lambda \frac{L}{0,2}) - 2$$

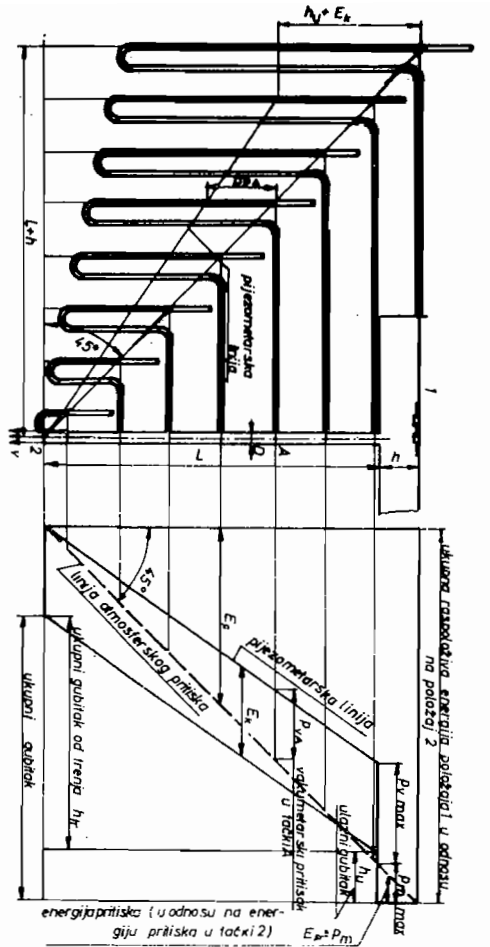
$$L = \frac{4,37}{1 - 21,2\lambda}$$

λ se lako određuje iz Muddijevog dijagrama.

Za $v \cdot D = \frac{0,287 \cdot 4}{0,2 \pi} \cdot 0,2 = 1,83 \quad 1 \cdot \delta = \frac{e}{D} = \frac{1}{200} = 0,005$ sledi

$\lambda = 0,031$

$L = \frac{4,37}{1 - 21,2 \cdot 0,031} = 12,9 \text{ m}$.



U svakom preseku cevi brzina je konstantna i iznosi

$$v = \frac{4Q}{D^2 \pi} = \frac{4 \cdot 0,287}{0,22^2 \pi} = 9,14 \text{ m/s.}$$

Izgubljena energija na ulazu u cev je

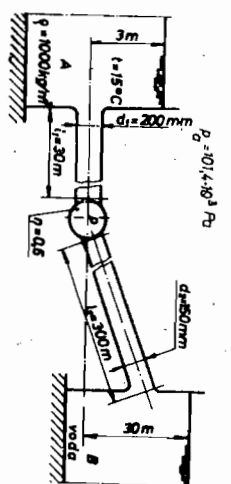
$$h_u = \xi_{12} \frac{v^2}{2g} = 0,5 \cdot \frac{9,14^2}{19,62} = 2,13 \text{ m VS.}$$

Na ulazu u cev se deo energije pritiska pretvara u kinetičku energiju i troši za savladavanje ulaznog gubitka, tako da na ulazu u cev vlada potpritisak P_{max} . Kinetička energija se ne menja duž cevi i iznosi

$$E_k = \frac{v^2}{2g} = \frac{9,14^2}{19,62} = 4,26 \text{ m VS.}$$

U svakom preseku cevi zbir energije pritiska, kinetičke energije i utrošene energije na savladavanje gubitaka tog preseka je jednak ukupnoj energiji.

Na slici je dat raspored energija i pokazivanje pije-zometara. Najmanji pritisak u sistemu se javlja u ulaznom preseku cevi.



2. Kolika je potrebna snaga pumpe P , da bi se voda podigla u gornji rezervoar, ako je protok $Q=0,03 \text{ m}^3/\text{s}$. Koliki je maksimalan pouzdan protok Q_{max} kroz pumpno postrojenje i potrebna snaga P_{max} ako je najniži dozvoljen pritisak $P_{min}=4000 \text{ Pa}$. Cevovod je izradjen od nove besšavne čelične cevi. Lokalne gubitke zanemariti. Koeficijent trenja pri računanju maksimalnog protoka usvojiti isti kao i za protok $Q=0,03 \text{ m}^3/\text{s}$.
Nacrtati energijsku promenu duž cevnog sistema za slučaj maksimalnog protoka.

Rešenje. B.j. za mlave u rezervoarima A i B

$$g(3+H_p) = g \cdot 30 + \lambda_1 \frac{L_1 v_1^2}{d_1^5} + \lambda_2 \frac{L_2 v_2^2}{d_2^5}$$

ukazuje na nepoznate λ_1 i λ_2 . Za poznate vrednosti relativne hrapavosti i proizvodva $v \cdot d$ iz Mudijevog dijagrama se određuju koeficijenti trenja λ_1 i λ_2 :

$$\delta_1 = \frac{e}{d_1} = \frac{0,03}{200} = 0,00015 ; v_1 d_1 = \frac{4Q}{d_1 \pi} = \frac{4 \cdot 0,03}{0,2 \cdot 3,14} = 0,191$$

sledi $\lambda_1 = 0,0168$

$$1 \quad \delta_2 = \frac{e}{d_2} = \frac{0,03}{150} = 0,0002 ; v_2 d_2 = \frac{4Q}{d_2 \pi} = \frac{4 \cdot 0,03}{0,15 \cdot 3,14} = 0,255$$

sledi $\lambda_2 = 0,0172$.

Zamenom u B.j. određuje se napor pumpe

$$gH_p = 27g + 0,0168 \frac{30 \cdot 16 \cdot 0,03^2}{0,2^5 \cdot 2 \cdot 0,2^4 \pi^2} + 0,0172 \frac{300 \cdot 16 \cdot 0,03^2}{0,15^5 \cdot 2 \cdot 0,15^4 \pi^2}$$

$$gH_p = 264,87 + 1,15 + 49,62 = 315,64 \text{ Nm/Kg.}$$

Sada je snaga pumpe

$$P = \frac{gH_p Q}{\eta} = \frac{1000 \cdot 315,64 \cdot 0,03}{0,6} = 15,78 \text{ kW.}$$

Najniži pritisak može da se pojavi na ulazu u pumpu.
B.j. za nivo vode u rezervoaru A i ulaz u pumpu daje

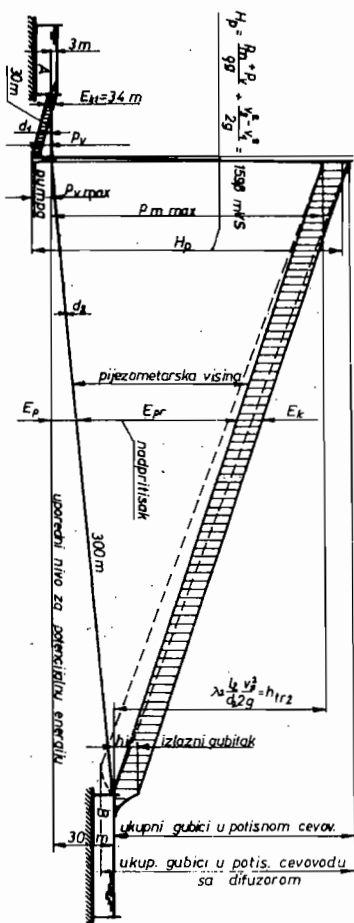
$$P_a + 3g = \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \left(1 + \lambda \frac{l}{d_1}\right)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{6g + \frac{2}{\rho}(P_a - P)}{1 + \lambda \frac{l}{d_1}}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 9,81 + \frac{2}{1000}(101400 - 4000)}{1 + 0,0168 \cdot \frac{30}{0,15}}} = 8,05 \text{ m/s}$$

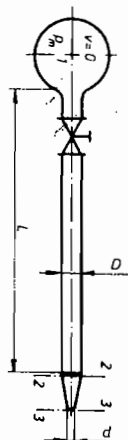
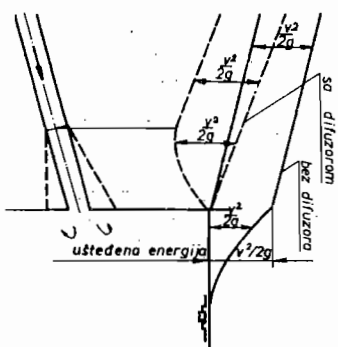
$$Q_{\max} = \frac{v_1 d_1^2 \pi}{4} = \frac{8,05 \cdot 0,20^2 \pi}{4} = 0,253 \text{ m}^3/\text{s}$$

Potrebna snaga za maksimalan protok iznosi

$$P_{\max} = 1285 \text{ kW}$$



Napomena. Izlazni gubitak koji se u računu zanemaruje u dijagramu je označen punom linijom. Energijsko stanje za manji izlazni gubitak, koji se ostvaruje npr. difuzorom, dato je na dijagramu, i uvećanom izlazu cevi u rezervoar B, sa crtkanom linijom. Ako je izlazna brzina iz difuzora zanemarljiva, celokupna kinetička energija je uštedjena, odnosno iskorišćena za savladjivanje usputnih gubitaka.



3. Gumeno crevo, prečnika $D=13 \text{ mm}$ i dužine $L=18,3 \text{ m}$, priključeno je na baštenski ventil koji je spojen sa vodovodnom mrežom. Natpritisak u mreži iznosi $P_m=552 \text{ kPa}$.

a) Izračunati izlaznu brzinu vode iz mlaznika koji se nalazi na kraju cevi, prečnika $d=3,2 \text{ mm}$.

b) Odrediti brzinu vode kada se mlaznik ukloni.

c) Izračunati kinetičku energiju mlaza u oba slučaja i objasniti šta pokazuje njihov koeficijent.

d) Nacrtati energijski dijagram za slučaj pod a).

Napomena. Crevo je u horizontalnom položaju i glatko iznutra. Koeficijent gubitka u mlazniku $\xi_m=0,1$ a u ventilu $\xi_v=7,5$. Zanemariti brzinu strujanja vode u vodovodnoj mreži. Kinematičku viskoznost vode uzeti za normalne atmosferske uslove.

Rešenje. a) B.j. za 1 - 3 glasi

$$\frac{P_m}{\rho} = \frac{v^2}{2} \left(1 + \xi_m\right) + \frac{v^2}{2} \left(\xi_v + \lambda \frac{L}{D}\right)$$

$$\text{Zamenjujući } v_3 = v_2 \left(\frac{D}{d}\right)^2 = 16,51 \cdot v_2$$

$$\text{dobića se } 552 = \frac{v_2^2}{2} (265,45 + 26,54 + 7,5 + \lambda \cdot 1407,7),$$

$$\text{odnosno } 1104 = v_2^2 (299,5 + 1407,7\lambda)$$

Pretpostavljajući $\lambda=0,02$, iz gornje jednačine se određuje

$$v_2 = 1,92 \text{ m/s}$$

Za vrednost $v_2 D = 1,92 \cdot 0,013 = 0,025$ za glatku cev iz Mulljevog dijagrama nalazi se

$$\lambda = 0,0255$$

Sa ovom vrednosti je $v_2=1,81 \text{ m/s}$, a $v_2 D=1,81 \cdot 0,013=0,0235$. Iz dijagrama vrednost $\lambda \approx 0,0255$ se poklapa sa pretpostavljenom.

Tražena brzina je

$$v_3 = 16,51v_2 = 16,51 \cdot 1,81 = 29,88 \text{ m/s}$$

$$Q = v_2 \frac{D^2 \pi}{4} = 1,81 \cdot \frac{0,013^2 \pi}{4} = 0,24 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{s}$$

b) za ovaj slučaj B.j. za tačke 1 i 2 glasi

$$\frac{P_m}{\rho} = (1 + \lambda \frac{l}{D} + \xi_v) \frac{v^2}{2}$$

$$1104 = v_2^2 (8,5 + \lambda \cdot 1407,7)$$

za pretpostavljeno $\lambda = 0,02$; iz gornje jednačine se dobija $v_2 = 5,49 \text{ m/s}$,

a za $v_2 D = 5,49 \cdot 0,013 = 0,0714$ i glatku cev, iz dijagrama se dobija $\lambda = 0,02$ - pretpostavljena vrednost.

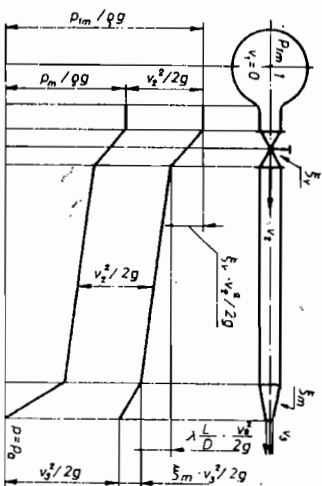
$$Q = v_2 \frac{D^2 \pi}{4} = 5,49 \cdot \frac{0,013^2 \pi}{4} = 0,73 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{s}$$

c) Upoređenje energija u oba slučaja

$$\frac{(Qv_2^2) \cdot a}{(Qv_1^2) \cdot b} = \frac{0,24 (29,88)^2}{0,73 (5,49)^2} = 9,73$$

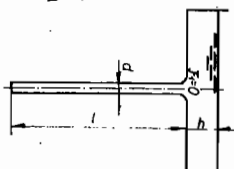
pokazuje da je mnogo veća energija mlaza koji je snažniji ali manjeg protoka od slabijeg mlaza većeg protoka.

d) Energijski dijagram.



Zadaci.

1. Iz rezervoara, u kome se nalazi voda na nivou h , ističe voda kroz vertikalnu cev prečnika d u atmosferu. Odrediti zavisnost protoka Q od dužine cevi l , i naći visinu h pri kojoj protok Q neće zavisiti od dužine cevi l . Traženu zavisnost dokumentovati dijagramskim stanjem. Zanimariti ulazni gubitak, a koeficijent trenja λ smatrati konstantnim.



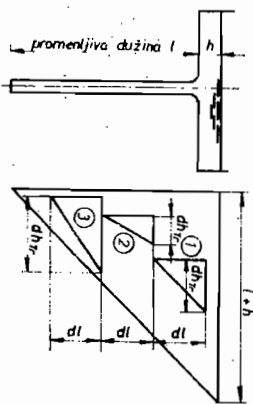
Rešenje. $Q = \frac{d^2 \pi}{4} \sqrt{\frac{2g(h+l)}{1+\lambda \frac{l}{d}}}$;

za $h = \frac{d}{\lambda}$ $Q = \frac{d^2 \pi}{4} \sqrt{2g h}$ je nezavisan od l ;

za $h < \frac{d}{\lambda}$ protok se povećava sa povećanjem l ;

za $h > \frac{d}{\lambda}$ protok se smanjuje sa povećanjem l .

Za pojednostavljen slučaj kada se kinetička energija i lokalni gubici zanemare u odnosu na ukupno raspoloživu energiju, u dijagram potencijalne energije mogu da se unesu tri karakteristična slučaja strujanja:



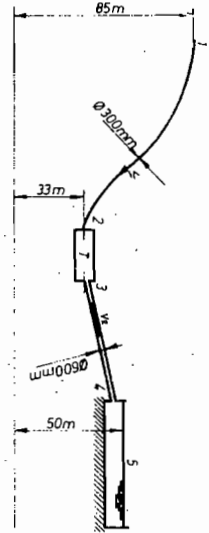
kada je energija potrebna za savladivanje trenja jednaka potencijalnoj energiji ①, kada je manja ② i kada je veća ③.

Prvi slučaj označava nepromenjen protok s produžavanjem cevovoda, drugi povećanje protoka u odnosu na prvi slučaj i treće smanjen protok u odnosu na prvi slučaj.

Analize mogu da se izvode i u odnosu na druge karakteristike strujanja (λ, d).

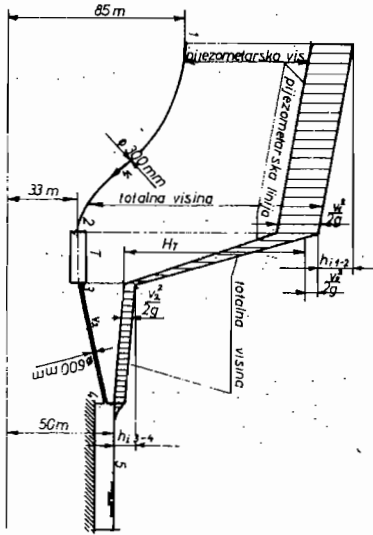
2. a) Odrediti protok Q kroz dovodni 1-2 i odvodni 3-4 cevovod turbine, ako je poznato:

- napor turbine $H_T = 90$ m VS,
 - natpritisak u tački 1 $p_{1m} = 60$ m VS,
 - gubici između 1-2 su dati kao $3v_1^2/2g$
 - gubici između 3-4 su dati kao $2v_2^2/2g$.
- b) Naći pritisak na izlazu iz turbine p_m .
- c) Grafički predstaviti promene pojedinih oblika energije od mesta 1 do 5.



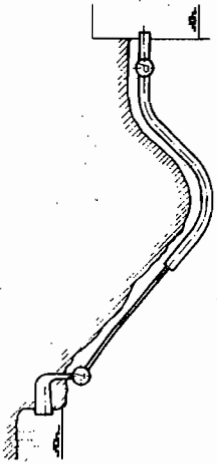
Rešenje.

- a) $Q = 2,499$ m³/s
- b) $p_m = 22$ m VS
- c) dijagram

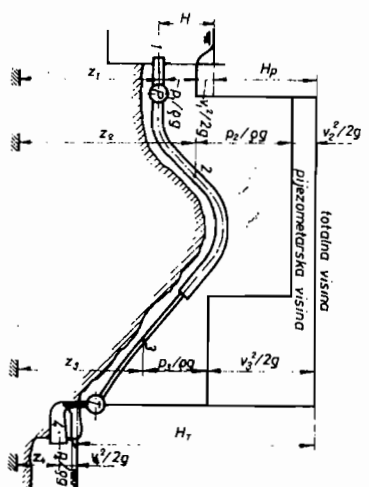


3. Za sledeće slučajeve strujanja nacrtati energijske dijagrame:

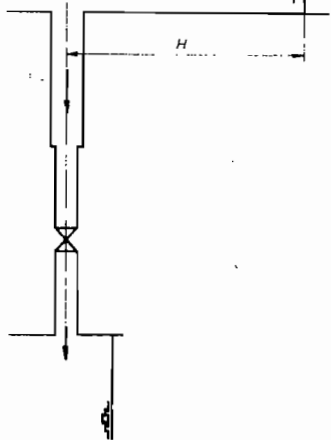
3.1. Cevni sistem sa pumpnim i turbinskim postrojenjem. Gubici se zanemaruju.



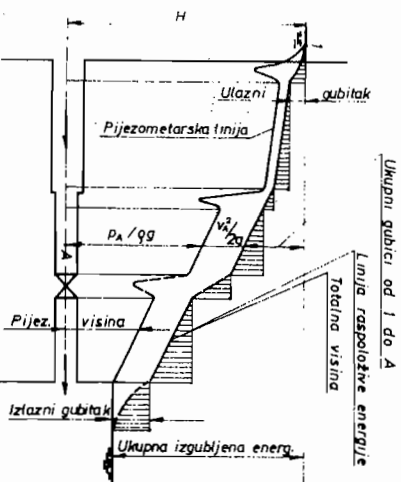
Rešenje.



3.2. Cevni sistem promenljivog preseka sa ugrađenim ventilom koji spaja dva rezervoara. Uzeti u obzir sve gubitke.

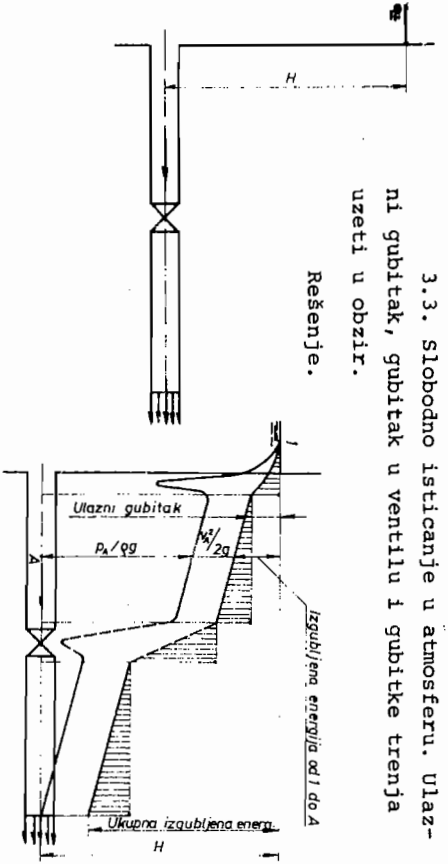


Rešenje.



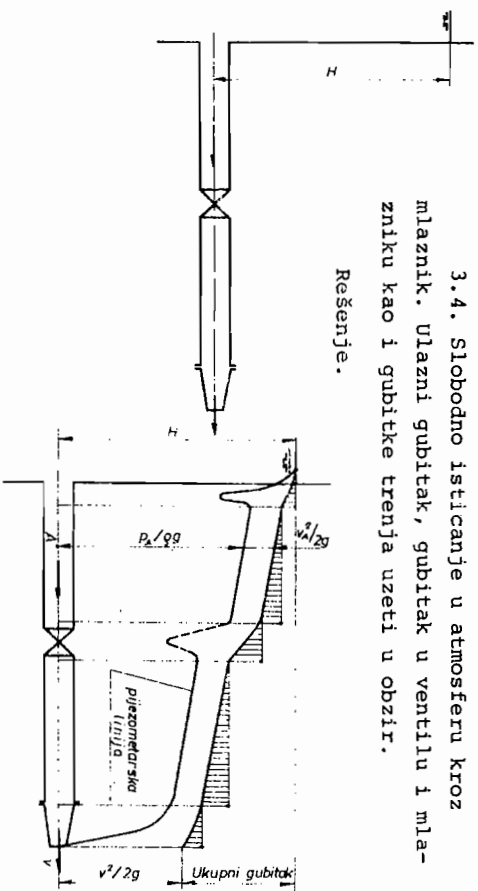
3.3. Slobodno isticanje u atmosferu. Ulazni gubitak, gubitak u ventilu i gubitke trenja uzeti u obzir.

Rešenje.

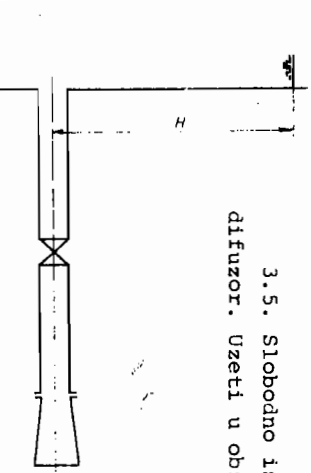


3.4. Slobodno isticanje u atmosferu kroz mlaznik. Ulazni gubitak, gubitak u ventilu i mlazniku kao i gubitke trenja uzeti u obzir.

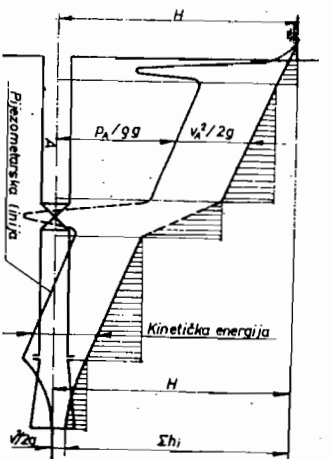
Rešenje.



3.5. Slobodno isticanje u atmosferu kroz difuzor. Uzeti u obzir gubitke trenja.

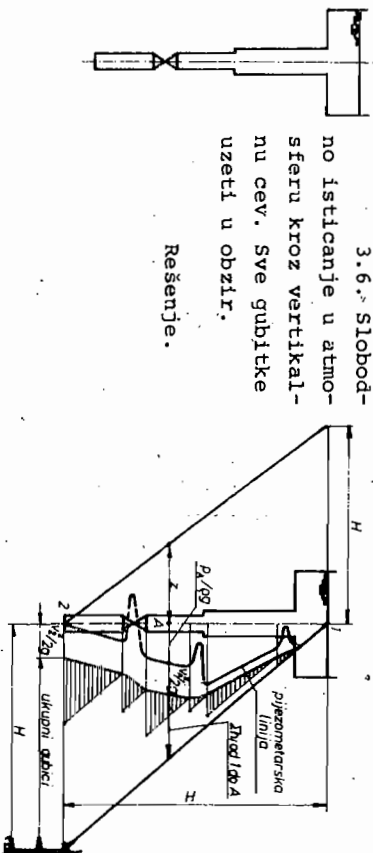


Rešenje.



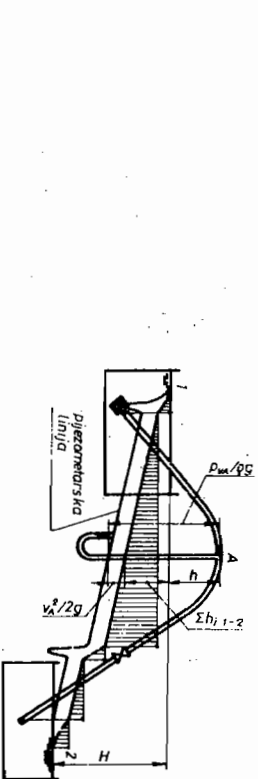
3.6. Slobodno isticanje u atmosferu kroz vertikalnu cev. Sve gubitke uzeti u obzir.

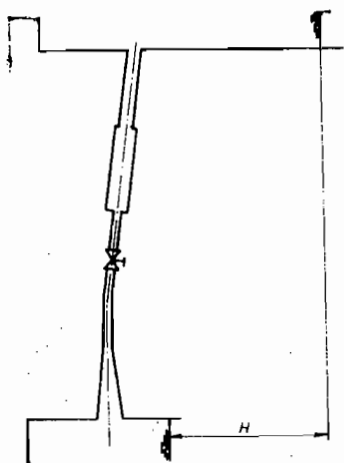
Rešenje.



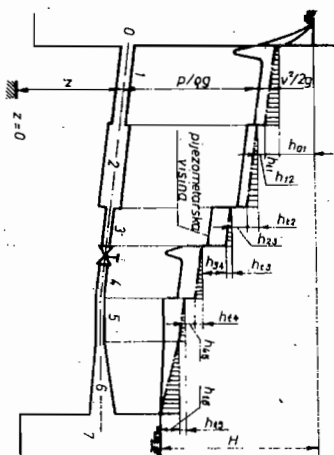
3.7. Preticanje iz rezervoara u rezervoar. Uzeti u obzir sve gubitke.

Rešenje.

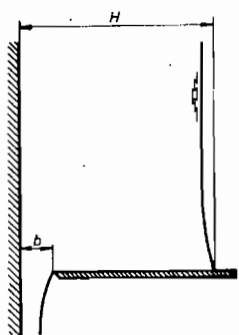




3.8. Cevni sistem promjenjivog preseka sa ug-radjenim ventilom i difuzorom koji spaja dva rezervoara. Uzeti u obzir sve gubitke.

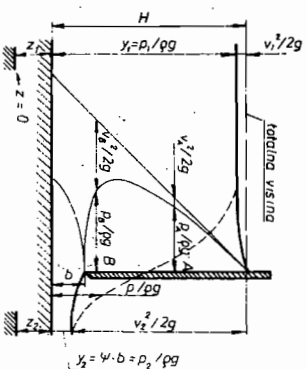


Rešenje.



3.9. Nacrtati energijski dijagram za slučaj isticanja prikazanog na slici.

Rešenje.



4.8. NIKARADZOVE JEDNAČINE

Nikaradze je na bazi izjednačavanja linearnog rasporeda tangenatnih napona u cevi kružnog preseka i tangenatnih napona izazvanih turbulencijom, predstavljenu Prandti-Karmanovom jednačinom

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{R}\right) = \rho K^2 \frac{\left(\frac{dv}{dy}\right)^4}{\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right)^2}$$

odredio izraze za raspored brzine, srednju brzinu, tangenatni napon na zidu cevi, koeficijent trenja i debljinu laminarnog sloja pri turbulentnom strujanju u glatkim i hrpanim cevima. U ovim izrazima su delimično korigovane konstante prema mnogobrojnim ogledima koje je izveo Nikaradze.

Relacije su sledeće:

- Za turbulentno strujanje kroz glatke cevi;
- a) Raspored brzina se određuje prema opštem izrazu

$$\frac{v_{max} - v}{v^*} = -2,5 \ln \frac{y}{R}$$

ili prema ogledima za glatke cevi

$$\frac{v}{v^*} = 5,50 + 5,75 \log \frac{v^* y}{\nu}$$

gde je v^* - prividna brzina određena sa

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

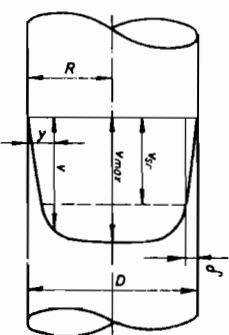
- b) Odnos srednje i maksimalne brzine je dat opštim izrazom

$$\frac{v_{SI}}{v_{max}} = \frac{1}{1 + 4,07 \sqrt{\lambda}}$$

c) Koeficijent trenja λ za Re brojeve veće od 5000 se sa dovoljnom tačnošću može odrediti iz

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0,80 + 2,0 \log Re \sqrt{\lambda}$$

d) Tangenatni napon na zidu cevi je određen opštim izrazom



$$\tau_0 = \lambda \frac{v_{sr}^2 \rho}{g}$$

c) Debljina laminarnog sloja se određuje prema

$$\frac{\delta}{D} = \frac{32,8}{\text{Re} \sqrt{\lambda}}$$

- Za turbulentno strujanje kroz hrapave cevi;

a) Raspored brzina se određuje prema navedenom opštem izrazu, ili prema

$$v = 8,48 + 5,75 \log_e^2 \quad (e\text{-apsolutna hrapavost}).$$

b) Odnos srednje i maksimalne brzine je prema navedenom opštem izrazu.

c) Koefficient trenja λ se određuje prema

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,14 + 2 \cdot \log_e \frac{D}{e}$$

d) Tangentni napon na zidu je prema navedenom opštem izrazu.

Primeri.

1. Voda ($\rho=1000 \text{ kg/m}^3$), temperature 15°C ($v=1,005 \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}$), struji kroz glatku mesinganu cev $D=75 \text{ mm}$ sa konstantnim protokom $Q=5,5 \text{ l/s}$. Potrebno je odrediti: a) pad pritiska na pravolinijskoj horizontalnoj deonici cevi dužine $L=900 \text{ m}$; b) tangentne napone i brzine u osi cevi i na rastojanju $r=25 \text{ mm}$ od ose cevi i c) debljinu laminarnog sloja.

$$\text{Rešenje. Za } v_{sr} = \frac{4Q}{D^2 \pi} = \frac{4 \cdot 0,0055}{0,075^2 \pi} = 1,245 \text{ m/s}$$

$$\text{date podatke je } \text{Re} = \frac{v_{sr} D}{\nu} = \frac{1,245 \cdot 0,075}{1,005} \cdot 10^6 = 92910.$$

Iz Muddjevog dijagrama za Re i glatku cev dobija se $\lambda=0,0182$, a rešavanjem jednačine

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0,80 + 2,0 \cdot \log \text{Re} \sqrt{\lambda} \quad \text{dobija se}$$

$$\lambda = 0,0183.$$

a) Za λ određeno iz Muddjevog dijagrama (lakše se nalazi), pad pritiska je

$$\Delta p = \rho \lambda \frac{L}{D} \frac{v_{sr}^2}{2} = 1000 \cdot 0,0182 \cdot \frac{900}{0,075} \cdot \frac{1,245^2}{2} = 169 \text{ kPa}$$

b) Tangentni napon na zidu cevi je

$$\tau_0 = \frac{\lambda \rho v_{sr}^2}{8} = \frac{0,018 \cdot 1000 \cdot 1,245^2}{8} = 3,487 \text{ Pa}$$

maksimalna brzina u osi cevi

$$v_{\text{max}} = v_{sr} \left(1 + 4,07 \sqrt{\frac{\lambda}{g}}\right) = 1,245 \left(1 + 4,07 \sqrt{\frac{0,0182}{9,81}}\right) = 1,463 \text{ m/s}$$

a brzina na rastojanju $y = R - r$

$$v = v^* \left(5,50 + 5,75 \log \frac{v^* Y}{\nu}\right) = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left(5,50 + 5,75 \log \frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} Y}{\nu}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{3,487}{1000}} \left(5,50 + 5,75 \log \frac{\sqrt{3,487} \cdot 0,025}{1,005 \cdot 10^6}\right) = 1,399 \text{ m/s}$$

c) Debljina laminarnog sloja

$$\delta = \frac{32,8 \cdot D}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} = \frac{32,8 \cdot 0,075}{92910 \sqrt{0,0182}} = 0,192 \text{ mm}$$

2. Voda (15°C) struji kroz čistu dugačku cev od livenog gvoždja prečnika $d=300 \text{ mm}$. Ako je brzina vode u osi cevi $v_{\text{max}}=3 \text{ m/s}$ koliki je protok?

Rešenje. Pošto su maksimalna i srednja brzina međusobno povezane preko koefficienta trenja

$$\frac{v_{sr}}{v_{\text{max}}} = \frac{1}{1 + 4,07 \sqrt{\frac{\lambda}{g}}}$$

treba upotrebiti metod približavanja. Pretpostavljajući odnos $v_{sr}/v_{\text{max}}=0,8$ određuje se

$$v_{sr} \cdot d = 0,8 \cdot 3 \cdot 0,3 = 0,720$$

a iz Muddjevog dijagrama za vrednost apsolutne hrapavosti $e=0,5 \text{ mm}$, odnosno $e/d=0,00166$, nalazi se

$$\lambda = 0,022$$

Zamenom $\lambda=0,022$ u funkciji odnosa maksimalne i srednje brzine dobija se

$$v_{sr} = \frac{3}{1+4,07\sqrt{\frac{0,022}{8}}} = 2,472 \text{ m/s}$$

I ponovo za $v_{sr}d = 2,472 \cdot 0,3 = 0,742$ i $e/d = 0,00166$ nalazi se $\lambda = 0,022$.

Pošto su sve relacije zadovoljene, protok je

$$Q = v_{sr} \frac{d^2 \pi}{4} = 2,472 \frac{0,3^2 \pi}{4} = 0,175 \text{ m}^3/\text{s}$$

Zadaci.

1. Kroz cev, prečnika 150 mm, voda struji srednjom brzinom 5 m/s. Izgubljena visina h_f na dužini od 30 m je izmerena eksperimentalno i iznosi 5,5 m. Izračunati prividnu brzinu v^* i tangenti napon na zidu τ_0 .

Rešenje. ($\lambda = 0,0216$) $v^* = 0,260 \text{ m/s}$; $\tau_0 = 67,6 \text{ Pa}$

2. U cevi, prečnika 300 mm, srednja brzina strujanja vode iznosi 3 m/s. Relativna hrapavost cevi je 0,002, a kinematička viskoznost vode $0,932 \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}$. Odrediti koeficijent trenja λ , brzinu u osi cevi v_{max} , brzinu v_{50} na odstojanju 50 mm od zida i gubitak pritiska Δp zbog trenja na dužini 300 m.

Rešenje. ($Re = 965665$ - turbulentno strujanje kroz hrapav cevovod). Iz Mulljevog dijagrama $\lambda = 0,0236$, a iz $1/\sqrt{\lambda} = 1,14 + 2 \log \frac{1}{6} \Rightarrow \lambda = 0,0234$; $v_{max} = 3,66 \text{ m/s}$; $v_{50} = 3,17 \text{ m/s}$; $\Delta p = 169,2 \text{ Pa}$.

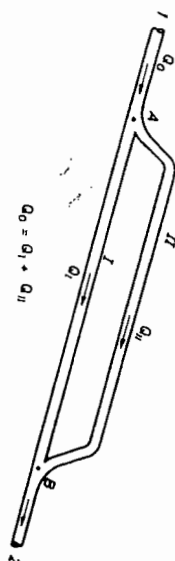
4.9. SLOŽENI CEVOVODI

Pri račvanju i sučeljavanju struje ukupni protok je jednak zbiru ili razlici pojedinačnih protoka u granama, a padovi pritiska, od tačke račvanja do tačke sučeljavanja,

su isti u svakoj granii.

Osnovne relacije za rešavanje problema se dobijaju iz Bernulijevih jedna-

čina koje treba napisati za strujnice kroz svaku granu cevovoda I-A-I-B-2 i I-A-II-B-2.



Primeri.

1. Cevovod koji spaja dva rezervoara ima prečnik $d=300 \text{ mm}$, dužinu $L=1500 \text{ m}$ i izgubljenu energiju zbog savladivanja trenja $gh_{f2}=21g \text{ Nm/kg}$. Pri tome je protok $Q_0=142 \text{ l/s}$. Kada se ovom cevovodu doda paralelna deonica dužine $l=600 \text{ m}$ istog prečnika i materijala, koliko se povećanje protoka može očekivati? Lokalni gubici se zanemaruju.

Rešenje.

Padovi pritiska u deonicama a i b moraju da budu isti, a protoci se sabiraju

$$h_a g = h_b g$$

$$Q_a + Q_b = Q_0$$

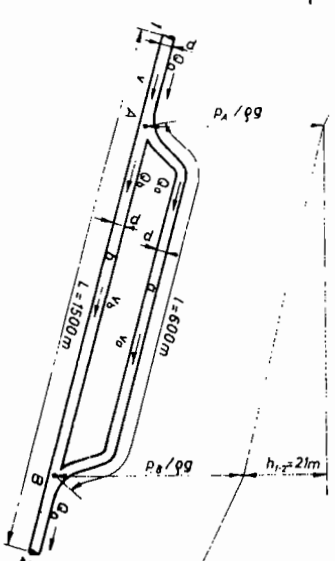
$$gh_{f2} = \lambda \frac{L}{d} \frac{v^2}{2} = \frac{16\lambda L}{4\pi^2 d^5} Q_0^2 = k Q_0^2$$

gde je k - konstanta, koja je za potpuno turbulentnu zonu u kojoj se strujanje nalazi, proporcionalna samo dužini cevovoda ($\lambda = f(e/d) = \text{const}$)

$$k = \frac{gh_{f2}}{Q_0^2} = \frac{9,81 \cdot 21}{0,142^2} = 10300$$

Jednakost $h_a g = h_b g$ može da se napiše kao

$$k_a Q_a^2 = k_b Q_b^2$$



gde su $k_D = k_a = \frac{1}{2} \cdot k = \frac{600}{1500} \cdot 10300 = 4120$ zbog istih dužina paralelnih deonica, pa prema tome i $Q_a = Q_D$.

za cevnu deonicu koja je bez paralelne veze

$$k_1 = \frac{L \cdot k}{L} \cdot k = \frac{900}{1500} \cdot 10300 = 6180$$

Izgubljene energije između rezervoara 1-2 preko deonice a i preko deonice b su određene sledećim jednači-nama

$$21g = 6180 \cdot Q_a^2 + 4120 \cdot Q_a^2$$

$$21g = 6180 \cdot Q_b^2 + 4120 \cdot Q_b^2$$

za $Q_a = Q_b$ sledi $Q_a = Q_b / 2$ pa zamena u prvu jednačinu daje

$$Q_a^2 (6180 + \frac{4120}{4}) = 21g$$

odnosno

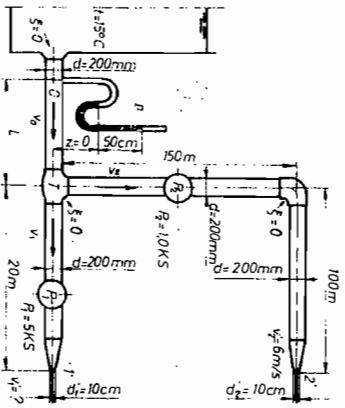
$$Q_a = 169 \text{ l/s}$$

što iznosi povećanje protoka za 16%.

2. Kroz cevni sistem pokazan na slici struji voda. Potrebno je naći brzinu v_1' i dužinu cevi L.

Podaci:

- n pumpe 1 i 2 = 0,6;
- apsolutna hrpavost cevovođa koji je u svim deonicama istog prečnika usvojiti za stanje nove čelne besšavne cevi;
- lokalni gubici se zanemaruju.



Rešenje. Imajući u vidu jednačine kontinuiteta, nepoznate veličine su L, v_1', λ_2 i λ_1 . Njima, međutim, treba priključiti i nepoznatu - pritisak u trojniku P_T . Ovaj pritisak je isti za sve tri deonice koje se spajaju u tački T. Pritisak P_T se eliminiše postavljajući B. j. za tačke T i 2'.

$$\frac{P_T}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gH_{p2} = \frac{P_a}{\rho} + \frac{v_2'^2}{2} + g \cdot 150 + \lambda_2 \cdot \frac{250}{d} \cdot \frac{v_2'^2}{2}$$

odnosno

$$\frac{P_T}{\rho} - \frac{P_a}{\rho} = g(150 - \frac{4nD^2}{\rho v_2^2 d^2}) + \frac{v_2'^2}{2} (1 + \frac{1}{16} \lambda_2 \cdot \frac{250}{d} - \frac{1}{16})$$

Kako je IKS = 736 W a $e/d = 0,03/200 = 0,00015$ i

$v_2^2 d = 1,5 \cdot 0,2 = 0,3$ nalazi se i $\lambda_2 = 0,0163$.

Sada je

$$\frac{P_T - P_a}{\rho} = 9,81(150 - \frac{4 \cdot 0,6 \cdot 736}{1000 \cdot 6 \cdot 0,1^2 \pi}) + \frac{6^2}{2} (1 + \frac{1}{16} \cdot 0,0163 \cdot \frac{250}{0,2} - \frac{1}{16})$$

$$\frac{P_T - P_a}{\rho} = 1419 \text{ Pa}$$

B. j. za tačke T i 1' određuje brzinu v_1' i λ_1

$$\frac{P_T}{\rho} + \frac{v_1'^2}{2} + gH_{p1} = \frac{P_a}{\rho} + \frac{v_1'^2}{2} + \lambda_1 \cdot \frac{20}{d} \cdot \frac{v_1'^2}{2}$$

$$1419 + 9,81 \cdot \frac{4 \cdot 0,6 \cdot 5 \cdot 736}{1000 \cdot v_1'^2 \cdot 0,1^2 \pi} = \frac{v_1'^2}{2} (1 - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \cdot \lambda_1 \cdot 10,2)$$

$$111 \quad 1419 + \frac{2755,5}{v_1'^2} = \frac{v_1'^2}{32} (15 + 1000 \lambda_1)$$

Primenjujući metod približavanja nalazi se

$$\lambda_1 = 0,0135 \quad \text{i} \quad v_1 = 41 \text{ m/s}$$

Zbog istih prečnika cevnih deonica

$$v_0 = \frac{1}{4}(v_1' + v_2') = \frac{1}{4}(6 + 41) = 11,75 \text{ m/s}$$

a B. j. za tačke O i T određuje dužinu L

$$\frac{P_O}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} = \frac{P_T}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} (1 + \lambda_0 \cdot \frac{L}{d})$$

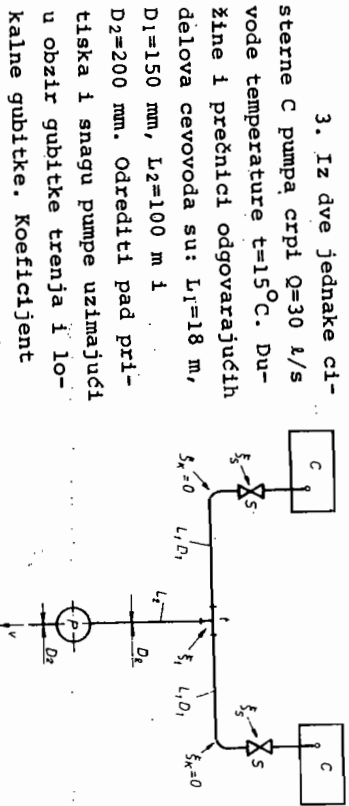
Ovde je

$$\frac{P_O}{\rho} = \frac{P_a}{\rho} + 0,5 \rho_2 g = \frac{P_a}{\rho} + 66708$$

i za $v_0 d = 11,75 \cdot 0,2 = 2,35$ i $f = 0,00015$, $\lambda_0 = 0,0134$ te je najzad

$$L = \frac{(66,708 - 1,419) \cdot 2 \cdot 0,2}{11,75 \cdot 2 \cdot 0,0134} = 301,96 \text{ m}$$

3. Iz dve jednake cisterne C pumpa crpi Q=30 l/s



sterne C pumpa crpi Q=30 l/s vode temperature t=15°C. Dužine i prečnici odgovarajućih delova cevovoda su: L1=18 m, D1=150 mm, L2=100 m i D2=200 mm. Odrediti pad pritiska i snagu pumpe uzimajući u obzir gubitke trenja i lokalne gubitke. Koefficijenti lokalnog gubitka na slavinama je $\xi_s=0,2$ a u trojniku $\xi_t=3$. (Koefficijenti ξ_t se odnosi na izlaznu brzinu iz trojnika v2). Apsolutna hrapavost cevi je e=0,1 mm. Cisterne, cevovod i pumpa se nalaze na istoj visini. Pumpa kroz kratku cev, prečnika D2, izbacuje vodu u atmosferu. Cisterne su otvorene. Stepen korisnosti pumpe je $\eta=0,5$.

Rešenje. B.j. se postavlja za jednu strujnicu, u ovom slučaju za strujnicu koja спаја površinu vode u cisterni i izlazni presek potisne cevi pumpe,

$$\frac{P_a}{\rho} + gH_p = \frac{P_a}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + \frac{v_1^2}{2} (\xi_s + \lambda \frac{L_1}{D_1}) + \frac{v_2^2}{2} (\xi_t + \lambda \frac{L_2}{D_2})$$

Ovde su:

$$v_1 = \frac{0,4}{2 \cdot D_1^2 \pi} = \frac{2 \cdot 0,03}{0,152 \pi} = 0,849 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{0,4}{D_2^2 \pi} = \frac{4 \cdot 0,03}{0,22 \pi} = 0,955 \text{ m/s}$$

$$\lambda_1 = \frac{e}{D_1} = \frac{0,1}{150} = 0,00067 \quad \lambda_2 = \frac{e}{D_2} = \frac{0,1}{200} = 0,0005$$

$$v_1 D_1 = 0,849 \cdot 0,15 = 0,127$$

$$v_2 D_2 = 0,955 \cdot 0,2 = 0,191$$

$$\lambda_2 = 0,0194$$

Napori pumpe je

$$gH_p = \frac{0,849^2}{2} (0,2 + 0,0212 \cdot \frac{18}{0,15}) + \frac{0,955^2}{2} (1 + 3 + 0,0194 \cdot \frac{100}{0,2})$$

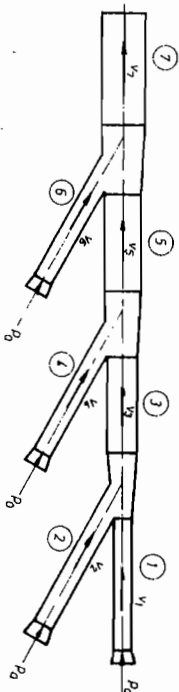
$$gH_p = 7,236 \text{ Nm/Kg}$$

Snaga pumpe

$$P = \frac{\rho g H_p Q}{\eta} = \frac{1000 \cdot 7,236 \cdot 0,03}{0,5} = 434,16 \text{ W}$$

Napomena. Napori pumpe (ventilatora) uvek mora biti dovoljan da pokrene fluid zahtevanom brzinom od tačke do koje su najveći gubici. Najveće je to najudaljenija tačka najduže grane cevne mreže.

4. Proračunati vazdušni vod s kojim se ravnomerno vrši isisavanje vazduha. Vod se sastoji od trojnika sa malim uglovima granjanja ($\alpha=25^\circ$) kao što je pokazano na slici. Protok kroz svaku granu iznosi Q=1000 m³/h. Brzina vazduha u 1,2,4 i 6 deonici je v1=6 m/s. Dužina svake deonice magistralnog voda i grane je 5 m, temperatura vazduha je 15°C a atmosferski pritisak pa=745 mm Hg. Vod je izveden od zavarene čelične cevi (e=0,1 mm). Koefficijenti gubitka u račvi $\xi=0,15$ obrachunati samo za deonice 1,2,4 i 6.



Rešenje. Za prvu deonicu, prečnik i pad pritiska usled trenja, je

$$d_1 = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1000}{3600 \cdot 3,14 \cdot 6}} = 0,243 \text{ m}$$

$$\Delta P_1 = \lambda \frac{L}{d_1} \frac{\rho v^2}{2} = 0,0208 \cdot \frac{5}{0,243} \cdot \frac{6^2}{2} = 8,97 \text{ Pa}$$

gde je λ_1 određeno iz Muddijevog dijagrama za

$$\lambda_1 d_1 = 6 \cdot 0,243 = 1,458 \quad \text{i} \quad \delta = \frac{e_1}{d_1} = \frac{0,1}{243} = 0,000454.$$

Vakuumetarski pritisak na mestu sučeljavanja cevi 1 i 2 je

$$\frac{\Delta P_{1V}}{\rho} = \frac{V_1^2}{2} (\lambda_1 \frac{L_1}{d_1} + \zeta + 1) = 8,97 + 18(0,15+1) = 29,67 \text{ J/kg}.$$

$$\text{Kako je } \frac{\Delta P_{1V}}{\rho} = \frac{\Delta P_{2V}}{\rho} = \frac{V_2^2}{2} (\lambda_2 \frac{L_2}{d_2} + \zeta + 1) \quad (\lambda_2 = \lambda_1) ; \quad V_2 = V_1$$

sledi $d_2 = d_1 = 0,243 \text{ m}$.

Najpogodnija brzina posle mešanja obe struje, s gledišta izgubljene energije usled mešanja, data je sa

$$v_3 = \frac{Q_1}{Q_3} v_1 \cos \alpha_1 + \frac{Q_2}{Q_3} v_2 \cos \alpha_2,$$

gde su α_1 i α_2 uglovi koje grane 1 i 2 zaklapaju sa horizontalom. Za $\alpha_1 = 0$ i $\alpha_2 = 25^\circ$ ($\cos 25^\circ = 0,9$)

$$v_3 = \frac{1000}{2000} \cdot 6 + \frac{1000}{2000} \cdot 6 \cdot 0,9 = 5,7 \text{ m/s}.$$

Za tu brzinu i protok $Q_3 = 2000 \text{ m}^3/\text{h}$ odgovara prečnik cevi

$$d_3 = 0,352 \text{ m}.$$

Ako se u trećoj deonici obračuna samo pad pritiska usled trenja (razlika kinetičkih energija i lokalni gubici se zanemaruju zbog malih vrednosti) vakuum bi na mestu sučeljavanja deonice 3 i 4 iznosio

$$\frac{P_V}{\rho} = 29,67 + \lambda_3 \frac{L_3}{d_3} \frac{V_3^2}{2} = 29,67 + 0,015 \cdot \frac{5}{0,352} \cdot \frac{5,7^2}{2} = 33,13 \text{ J/kg},$$

$$(\lambda_3 = 0,015 \text{ za } v_3 d_3 = 5,7 \cdot 0,352 = 2,01 \quad \text{i} \quad \delta = \frac{0,1}{352} = 0,000284).$$

Kako je ovaj vakuum veći od $P_V = 29,67 \text{ Pa}$ koji garantuje u deonici 4 protok $Q = 1000 \text{ m}^3/\text{h}$ za $d_4 = 0,243 \text{ m}$, to da bi se održao ovaj vakuum, treba deonicu 3 postepeno širiti sa prečnika $d_3 = 0,352 \text{ m}$ na prečnik d_{3k}

$$d_{3k} = d_3 \left(\frac{33,13}{29,67} \right)^{\frac{1}{5}} = 0,352 \cdot 1,0225 = 0,360 \text{ m},$$

koji se određuje izjednačavanjem protoka u izrazima

$$\lambda_1 \frac{L}{d_{32}} \frac{V_3^2}{2} = \lambda_2 \frac{L}{d_4} \frac{160^2}{\pi^2} = 33,13$$

$$\lambda \frac{L}{d_{3k}} \frac{V_{3k}^2}{2} = \lambda \frac{L}{d_4} \frac{160^2}{\pi^2} = 29,67 \quad \text{za konstantno } \lambda,$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta P_K} = \left(\frac{d_K}{d} \right)^5$$

Ovaj prečnik obezbedjuje, približno, vakuum od 29,67 Pa na mestu sučeljavanja cevovoda 3 i 4. Brzina na kraju treće deonice je

$$v_{3k} = v_3 \left(\frac{352}{360} \right)^2 = 5,7 \cdot 0,99 = 5,64 \text{ m/s}.$$

Prečnik i brzina u četvrtoj deonici je

$$d_4 = d_2 = 0,243 \text{ m} \quad \text{i} \quad v_4 = 6 \text{ m/s}.$$

Najpogodnija brzina na početku petog dela je

$$v_5 = \frac{2000}{3000} \cdot 5,64 + \frac{1000}{3000} \cdot 6 \cdot 0,9 = 5,56 \text{ m/s}.$$

Ovoj brzini odgovara $d_5 = 0,438 \text{ m}$.

Zatim

$$P_V = 29,67 + \lambda_5 \frac{L}{d_5} \frac{V_5^2}{2} = 29,67 + 0,0145 \cdot \frac{5}{0,438} \cdot \frac{5,56^2}{2} = 32,23 \text{ Pa},$$

$$(\lambda_5 = 0,0145 \text{ za } v_5 d_5 = 5,56 \cdot 0,438 = 2,44 \quad \text{i} \quad \delta = \frac{0,1}{438} = 0,000228).$$

Na kraju pete deonice

$$d_{5k} = 0,438 \cdot \left(\frac{32,23}{29,67} \right)^{\frac{1}{5}} = 0,438 \cdot 1,01 = 0,443 \text{ m}.$$

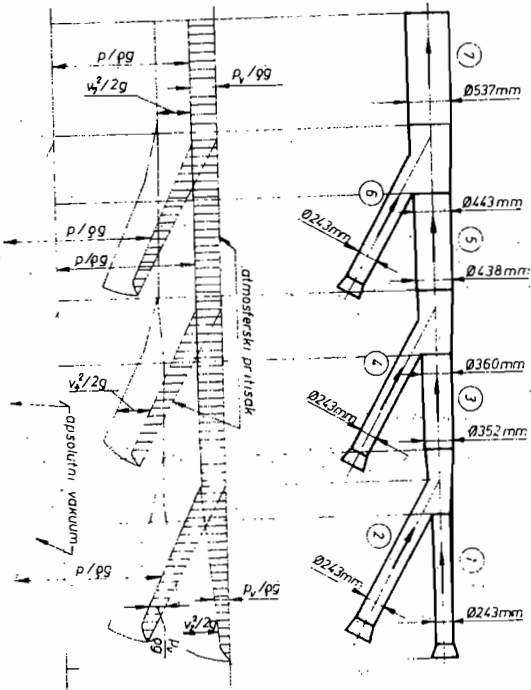
Brzina na kraju pete deonice je

$$v_{5k} = 5,56 \left(\frac{438}{443} \right)^2 = 5,52 \text{ m/s}.$$

Dalje sledi $d_6 = d_4 = 0,243 \text{ m}$, $v_6 = 6 \text{ m/s}$ i

$$v_7 = 5,53 \text{ m/s}; \quad d_7 = 0,573 \text{ m}.$$

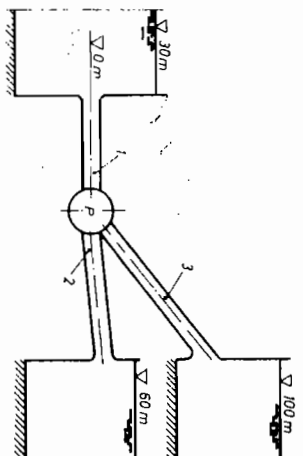
Napomena. Gubici usled mešanja se javljaju pri sučeljavanju prve dve struje, na mestu sučeljavanja deonice 1 i 2, i zatim pri priključenju struja iz deonice 4 i 6 na distralnom vodu. Gubici usled proširenja cevovoda i mešanja struja između deonice 3-5 i 5-7 su neznatni i zanemaruju se. Najpogodnija brzina se određuje uz pomoć jednačine o promeni količine kretanja (v. 5.2.1.). Izraz po kome se određuje nakost između smanjene kinetičke energije i pada pritiska usled savladjivanja gubitaka. Dijagramsko stanje je dato na crtežu.



Zadaci.

1. Voda protiče kroz cevni sistem kao što je prikazano na slici. Za date podatke naći dotok vode Q_3 u najvišji rezervoar i pritisak P_{3m} na potisnoj strani pumpe. Brojni podaci:

- cevovod 1; $d_1=300$ mm,
- $\lambda_1=500$ m, $\lambda_1=0,018$;
- cevovod 2; izradjen od novih besšavnih čeličnih cevi,
- $d_2=200$ mm, $\lambda_2=350$ m,
- $Q_2=270$ l/s;
- cevovod 3; $d_3=150$ mm,
- $\lambda_3=650$ m, $\lambda_3=0,023$.



Lokalni gubitak na ulazu u cevovod zanemariti.

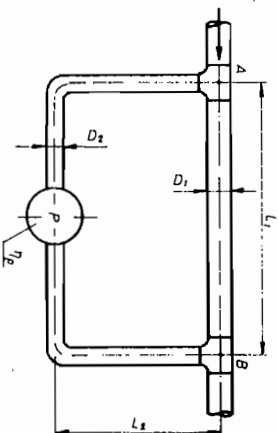
Rešenje. ($e_2=0,03$, $\lambda_2=0,0138$)

$$Q_3 = 57,7 \text{ l/s} ; P_{3m} = 1,48 \text{ MPa}$$

2. Na ulazu u cevni sistem, koji je pokazan na slici, protok vode je

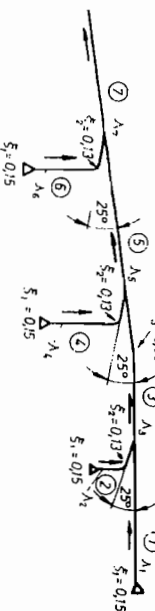
$Q=62,5$ l/s a natpritisak u tački A je $P_{mA}=0,07$ at. Odrediti natpritisak P_{mB} u tački B. Cevovod je izveden od komercijalnog čelika ($e=0,1$ mm). Podaci:

$D_1=200$ mm, $D_2=150$ mm, $P=1,47$ kW, $\eta_P=0,65$, $L_1=30$ m, $L_2=15$ m. Lokalni gubici se zanemaruju.



Rešenje. $P_{mB} = 6293$ Pa ($P_{mA} = 6867$ Pa)

3. Za poznate protoke kroz sve deonice usisnog vazduhovoda, prikazanog na slici, dužine deonice, koeficijente trenja i lokalnih gubitaka, odrediti prečnike deonice d i potreban pad pritiska Δp .



Deonice	1	2	3	4	5	6	7
l [m]	19	6	20	10	20	6	15
Q [m ³ /h]	240	200	440	300	740	400	1140
λ	0,0292	0,0230	0,0224	0,0214	0,0210	0,0197	0,0182

Rezultate prikazati u tablici. ($\cos 25^\circ = 0,9$; $\rho = 1,25$ kg/m³).

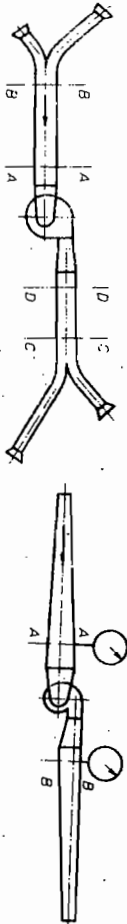
Napomena. U prvoj deonici usvojiti brzinu $v_1 = 5$ m/s.
Rešenje.

Broj	1	2	3	4	5	6	7
Q [m ³ /h]	240	200	440	300	740	400	1140
v [m/s]	5	7	5,5	8	6,2	11	7,4
l [m]	19	6	20	10	20	6	15
d [mm]	130	100	165	115	205	115	235
λ	0,0292	0,0230	0,0224	0,0214	0,0210	0,0197	0,0182
$\lambda l/d$	4,27	1,38	2,72	1,863	2,05	1,03	1,162
$1 + \xi(\xi)$	1,15	1,28	0,05	1,28	0	1,28	0
$\rho v^2/2$ [Pa]	16,1	30,6	18,93	40,0	24,2	75,5	34,3
ΔP_{ξ} [Pa]	68,4	42,2	51,45	74,40	49,6	77,6	39,8
ΔP_{ξ} [Pa]	18,45	39,15	0,95	51,2	0	96,5	0
Δp [Pa]	86,85	81,35	52,45	125,6	49,6	174,1	39,8
P_y [Pa]	86,85	81,35	133,80	-	183,4	-	223,2

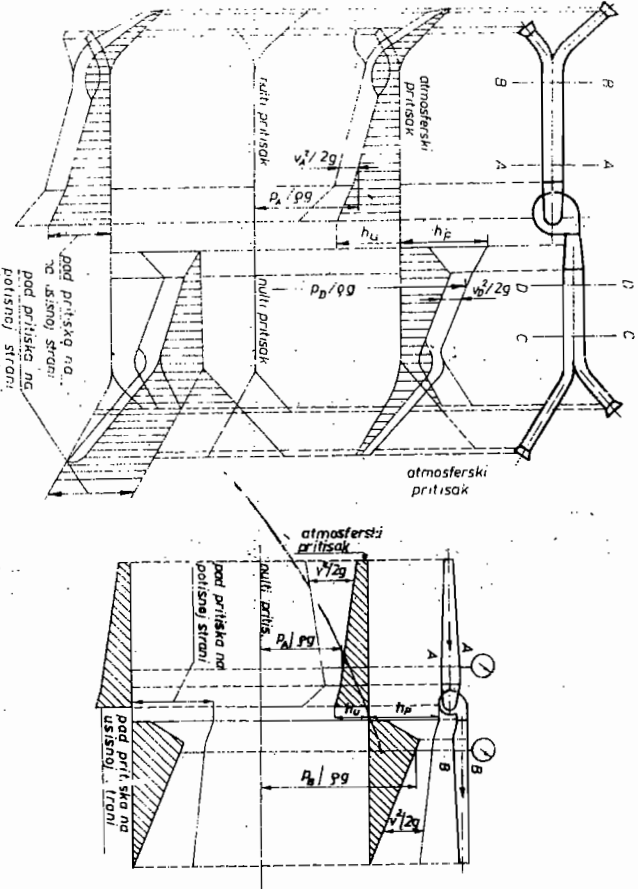
Napomena. Na kraju druge deonice vakuum treba da iznosi oko 86,85 Pa $\pm 10\%$. Pošto je ona kraća od prve, probom se usvaja veća brzina, odnosno manji prečnik $d_2 = 100$ mm. Brzina v_3 je određena kao najpogodnija. Prečnik četvrtle deonice se određuje prema vakuumu na mestu sučeljavanja sa trećom deonicom ($P_{y3} = P_{y4}$). Brzina v_5 se ponovo određuje kao najpogodnija, a prečnik d_5 prema vakuumu na kraju pete deonice.

Brzina v_7 je određena na isti način kao i brzine u trećoj i petoj deonici.

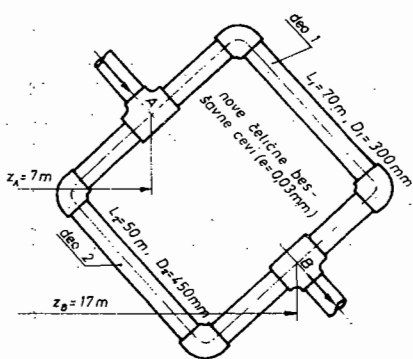
4. Za usisne i potisne strane prikazanih ventilatorskih sistema nacrtati energijske dijagrame, označiti veličine statičkih pritiska i izgubljene energije i obeležiti ih u označenim karakterističnim preseccima.



Rešenje.



5. Voda, $Q=0,5 \text{ m}^3/\text{s}$, protiče kroz cevni sistem pokazan na slici. Ako je poznat natpritisak u tački A $P_{mA}=7 \text{ at}$, natpritisak P_{mB} u tački B. Zanimariti lokalne gubitke.



Rešenje.

$$P_{mB} = 5,994 \text{ at}$$

6. a) Odrediti vreme t za koje će se vodom, napuniti lokomotivski tender zapremine 20 m^3 . Punjenje se vrši preko napojnog voda ($L_2=20 \text{ m}$; $d_2=0,162 \text{ m}$) koji je preko ventila, cevovodom ($L_1=800 \text{ m}$; $d_1=0,162 \text{ m}$) povezan sa rezervoarom za vodu, čiji se konstantan nivo slobodne površine vode nalazi na visini $H=20 \text{ m}$ iznad izlaznog preseka napojne cevi.

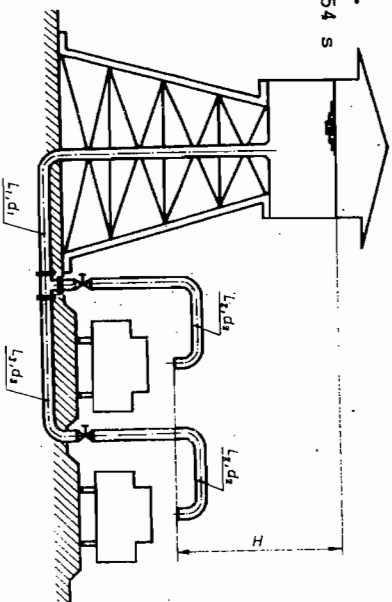
b) Ako se priključi i drugi napojni vod sa karakteristikama ($L_3=80 \text{ m}$; $d_3=d_2=0,162 \text{ m}$; $L_2=20 \text{ m}$) odrediti novo vreme t punjenja istog tendera, ako se pretpostavi da je koeficijent trenja isti za sve deonice i jednak onom koji je određen u prethodnom delu zadatka.

Apsolutna hrapavost svih cevnih deonica je $0,8 \text{ mm}$. Lokalni gubici se zanemaruju.

Rešenje.

$$\text{a) } (\lambda=0,03) \quad t=654 \text{ s}$$

$$\text{b) } t = 890 \text{ s}$$



4.10. ISTICANJE KROZ OTVORE I NAGLAVKE

Svojstva mlaza koji ističe su izražena preko četiri koeficijenta:

- ϕ - koeficijent brzine
 - μ - koeficijent protoka
 - ψ - koeficijent kontrakcije
 - ξ - koeficijent gubitka pri isticanju.
- Smisao ovih koeficijenata je dat u primeru slobodnog isticanja u atmosferu.

4.10.1. OTVORI

- a) Isticanje tečnosti u atmosferu kroz otvor sa oštrim ivicama

Struja tečnosti se pri isticanju sužava i na bliskom rastojanju od otvora ($\approx D/2$) presek struje je najmanji.

Odnos površina

$$\frac{A_{\min}}{A} = \psi$$

zove se koeficijent kontrakcije.

Tek u najužem preseku, zbog paralelnih strujnica, pritisak je atmosferski i B.J. za nivo tečnosti u sudu i taj presek određuje brzinu v u najužem preseku (najveća brzina)

$$H_g = \frac{v^2}{2(1+\xi)}, \text{ odakle je } v = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \sqrt{2gH}.$$

Vrednost $\frac{1}{\sqrt{1+\xi}} = \phi$ naziva se koeficijent brzine,

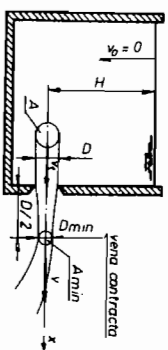
tako da je $v = \phi \sqrt{2gH}$.

Koeficijent protoka μ se određuje iz izraza za pro-

tok

$$Q = v A_{\min} = \phi \sqrt{2gH} \cdot \psi \cdot A = \phi \psi A \sqrt{2gH} = \mu A \sqrt{2gH},$$

gde je $\mu = \phi \psi$.



U slučaju idealnog fluida ($\xi=0$, odnosno $\phi=1$), teorijska ili idealna brzina isticanja je

$$v_t = \sqrt{2gH}$$

tako da se koeficijent brzine ϕ može predstaviti i kao odnos stvarne i idealne brzine

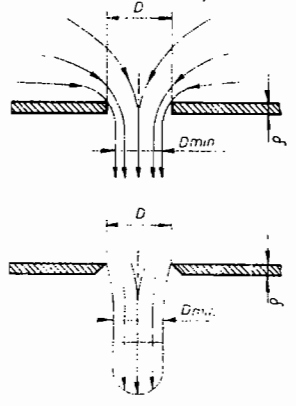
$$\phi = \frac{v}{v_t} < 1,$$

jer je, zbog trenja, stvarna brzina uvek manja od teorijske.

U preseku otvora, samo u centralnoj zoni mlaza,

brzina je ista i praktično jednaka teorijskoj brzini. U spoljnim slojevima brzina usled trenja opada.

Isticanje kroz otvor u tankom zidu je identično isticanju kroz otvor sa oštrim ivicama, jer mala debljina zida ne prouzrokuje pojavu efekta "lepljenja" mlaza uz granične površine otvora.



b) Isticanje tečnosti kroz potopljen otvor

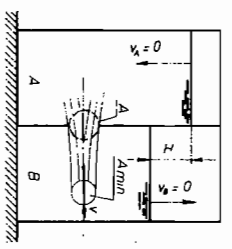
B.j. za nivo tečnosti u sudu A i najuži presek mlaza, u kome je brzina struje tečnosti v , glasi

$$Hg = \frac{v^2}{2} (1 + \xi),$$

tako da su svi koeficijenti definisani na potpuno isti način kao i u prethodnom slučaju, tj.

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} ; v = \phi \sqrt{2gH}$$

$$u = v \phi ; Q = \mu A \sqrt{2gH}$$



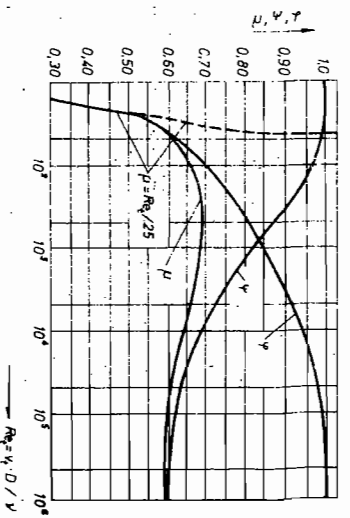
Ekperimenti su pokazali da je koeficijent protoka kroz potopljen otvor približno isti sa koeficijentom protoka pri slobodnom isticanju u atmosferu.

Koeficijenti

kontrakcije ψ , gubitka ξ , brzine ϕ i protoka μ zavise prvo od oblika otvora, zatim kao i svi drugi hidraulički koeficijenti, od Re . Na dijagramu 10 su prikazane vrednosti ψ , ϕ i μ u funkciji od Re_t za kružni otvor. Ovde je

$$Re_t = \frac{v_t D}{\nu} = \frac{\sqrt{2gH} \cdot D}{\nu}$$

DIJAGRAM 10.



Za vrlo male vrednosti Re_t ($Re_t < 25$) efekat viskoznosti je najvažniji i smanjenje brzine prema ivicama otvora je toliko veliko da praktično nema kontrakcije $\psi=1$ i $\phi=\mu$. Za ovu oblast važe sledeće teorijske formule - potvrđene eksperimentima

$$Q = \frac{D^3 \pi g H}{50 \nu} ; \mu = \frac{Re_t}{25}$$

Sa povećanjem Re_t (viskoznost gubi značaj) zbog smanjivanja ψ , raste ϕ . Smanjena kontrakcija ψ je rezultat malog smanjenja brzine prema ivicama otvora i postizanja većeg poluprečnika krivine kod "vena contracta". Kada $Re_t \rightarrow \infty$, ϕ i ψ dobijaju vrednosti kao pri isticanju idealnog fluida, $\phi=1$ a $\psi \rightarrow 0,60$. Maksimalan koeficijent protoka $\mu_{max} = 0,69$ se dobija za $Re_t \approx 350$.

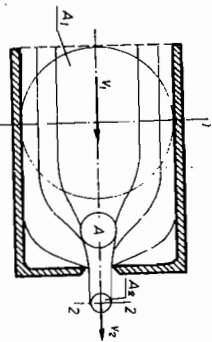
Pri isticanju manje viskoznih tečnosti (voda, benzin, kerozin) kroz kružne otvore u tankim zidovima, za inženjerske probleme najčešće se usvajaju vrednosti:

$$\psi = 0,63 ; \phi = 0,97 ; \mu = 0,61 \text{ i } \xi = 0,065$$

c) Delimična kontrakcija

Delimična kontrakcija se pojavljuje kada se izlazni otvor nalazi u blizini zidova rezervoara.

Ako je otvor simetričan u odnosu na rezervoar, zidovi rezervoara usmeravaju struju kroz otvor, čime se sprečava puna kontrakcija. Koefficient kontrakcije se povećava pa prema tome i protok.



Za isticanje manje viskozne tečnosti kroz kružne otvore rasporedjene u osi cilindričnih rezervoara, koefficient kontrakcije ψ_1 može se odrediti prema eksperimentalnoj formuli

$$\psi_1 = 1 + \frac{0,37}{\psi} n^2$$

gde je $n = A/A_1$, a ψ koefficient kontrakcije otvora za punu kontrakciju. Ako je $n \approx 1$, vrednosti za ξ i ϕ su $\xi=0,065$ i $\phi=0,97$.

Protok i koefficient protoka mogu se odrediti uz pomoć B.j. za preseke 1 i 2

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + \xi \frac{v_2^2}{2}, \quad v_1 A_1 = v_2 A_2 = v_2 \psi_1 A$$

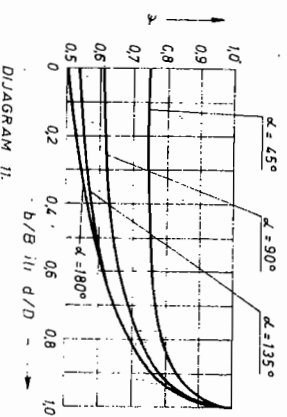
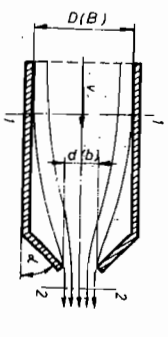
Odatle je

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi - \psi_1^2 n^2}} \sqrt{2g \frac{D_1 - P_2}{\rho g}}$$

$$Q = \psi_1 A \sqrt{2g \frac{\Delta P}{\rho g}}$$

$$\mu_1 = \frac{\psi_1}{\sqrt{1 + \xi - \psi_1^2 n^2}}$$

Ako je delimična kontrakcija ostvarena na način prikazan na slici (za osnosni-

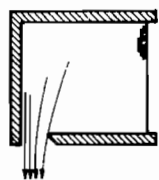


metrično ili ravansko strujanje), koefficient kontrakcije ψ za otvor, i kraj cevi, je određen prema dijagramu II.

U slučaju kada se izlazi otvor nalazi sasvim pri dnu rezervoara, kao što je prikazano na slici, koefficient protoka μ_2 može da se odredi prema eksperimentalnoj formuli

$$\mu_2 = \mu \left(1 + k \frac{AO}{O} \right),$$

gde su: k - koefficient oblika, za kružni otvor $k=0,128$, za kvadratni $k=0,152$ i za pravougaoni $k=0,134$,



O - obim otvora, AO - deo obima koji dodiruje dno suda (na kome nema skretanja strujnica).

Koefficient protoka μ zavisi i od oblika otvora.

Ova zavisnost je data u tabelici 17, a vrednosti μ su odredjene za otvore površine $A=1,286 \text{ cm}^2$.

TABELICA 17.

H [cm]	Vrednosti koefficienta protoka μ	
	Krug	Kvadrat
30,4	0,620	0,628
60,8	0,613	0,623
121,6	0,608	0,618
182,4	0,607	0,616
243,2	0,606	0,614
304,0	0,605	0,613
608,0	0,603	0,611

Primeri.

1. Kroz otvor prečnika $d=76,2 \text{ mm}$, koji se nalazi na konstantnoj dubini $H=4,88 \text{ m}$, isteklo je za $t_u=32,6 \text{ s}$ $m_u=867 \text{ kg}$ vode. Putanja mlaza vode je određena tačkom A čije su koordinate u odnosu na centar otvora $x_A=4,76 \text{ m}$ i

$Y_A = -1,22$ m. Odrediti: koeficijent brzine ϕ , koeficijent kontrakcije ψ , koeficijent protoka μ , izgubljenju energiju po jedinici težine h_1 i izgubljenju snagu P_1 .

Rešenje. Teorijska brzina je

$$v_t = \sqrt{2gH} = \sqrt{19,62 \cdot 4,88} = 9,787 \text{ m/s}.$$

Stvarna brzina se određuje iz trajektorije

$$x_A = v \cdot t, \quad y_A = \frac{g \cdot t^2}{2}.$$

kako je $t = \sqrt{\frac{2y_A}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,22}{9,81}} = 0,4986$ s,

to je

$$v = \frac{x_A}{t} = \frac{4,76}{0,4986} = 9,547 \text{ m/s}.$$

Sada je

$$\phi = \frac{v}{v_t} = \frac{9,547}{9,787} = 0,975.$$

Stvarni protok je $Q = \frac{m_u}{\rho t_u} = \frac{867}{1000 \cdot 32,6} = 0,02659 \text{ m}^3/\text{s}$,

a koeficijent protoka

$$\mu = \frac{4Q}{d^2 \pi \sqrt{2gH}} = \frac{4 \cdot 0,02659}{0,0762^2 \cdot \pi \sqrt{19,62 \cdot 4,88}} = 0,596.$$

Koeficijent kontrakcije je

$$\psi = \frac{h}{\phi} = \frac{0,596}{0,975} = 0,611.$$

Izgubljena energija po jedinici težine određena je B.j. za nivo vode u sudu i najuži presek mlaza sa stvarnom brzinom v ,

$$H = \frac{v^2}{2g} + h_1$$

$h_1 = H - \frac{v^2}{2g} = H(1 - \frac{v^2}{2g}) = H(1 - \phi^2) = 4,88(1 - 0,975^2) = 0,244$ m.

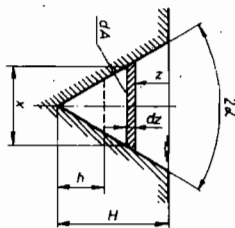
Pošto je $\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$, koeficijent gubitka ξ je

$$\xi = \frac{1}{\phi^2} - 1 = \frac{1}{0,975^2} - 1 = 0,0526.$$

Izgubljena snaga je

$$P_1 = \frac{gh_1 m_u}{t_u} = \frac{9,81 \cdot 0,244 \cdot 867}{32,6} = 63,66 \text{ W}.$$

2. Kroz otvor oblika ravnostranog trougla, visine H i uglova 2α , ističe tečnost protoka Q . Otvor je načinjen kod gornje ivice vertikalne bočne strane prizmastičnog suda koji je do vrha napunjen tečnošću. Odrediti položaj horizontalne pravce h koja deli otvor na dva dela sa istim protocima. Koeficijent protoka μ je konstantan.



Rešenje. Iz izraza za protok

$$Q = \mu \sqrt{2g} \int_0^H x(z) \sqrt{z} dz$$

i veze $x = 2(H-z) \operatorname{tg} \alpha$, posle integraljenja se dobija

$$Q = \frac{8}{15} \mu \sqrt{2gH^3} \operatorname{tg} \alpha.$$

Dalje, prema zadatku je

$$\frac{Q}{2} = 2\mu \sqrt{2g} \cdot \operatorname{tg} \alpha \int_0^{H-h} (H-z) \sqrt{z} dz,$$

a posle integraljenja i uvođenja oznake $h_1 = H-h$ je

$$\frac{Q}{2} = \frac{4}{15} \mu \sqrt{2g} \cdot \operatorname{tg} \alpha (5H\sqrt{h_1^3} - 3\sqrt{h_1^5}),$$

odnosno

$$\frac{4}{15} \mu \sqrt{2g} \cdot \operatorname{tg} \alpha (5H\sqrt{h_1^3} - 3\sqrt{h_1^5}) = \frac{4}{15} \mu \operatorname{tg} \alpha \sqrt{2gH^3}$$

$$\sqrt{h_1^5} = 5H\sqrt{h_1^3} - 3\sqrt{h_1^5}.$$

Uvođenjem nove oznake $y = \sqrt[3]{\frac{h_1}{H}}$ poslednja jednačina glasi

$$\sqrt[3]{y^5} - \frac{5}{3}y + 1 = 0,$$

čije grafičko rešenje daje približno vrednost $y = 0,265$ tj.

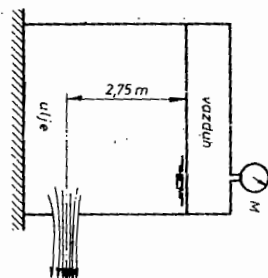
$h_1 = 0,413H$ i konačno

$$h = 0,587 \cdot H.$$

Zadaci.

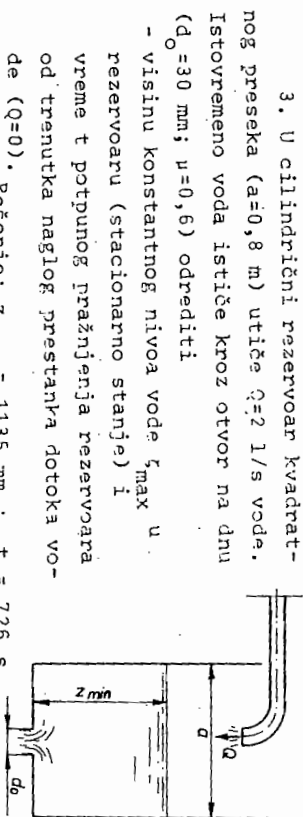
1. Ulja, gustine 720 kg/m^3 , protiče kroz otvor prečnika 76 mm , čiji su koeficijenti brzine i kontrakcije $0,95$ i $0,65$. Šta će pokazivati manometar ako je snaga mlaza ulja $5,9 \text{ kW}$.

Rešenje. $P_m = 144,6 \text{ kPa}$.



2. Struja ulja prolazi kroz otvor, prečnika 25 mm , i udara u zid koji se nalazi ispod otvora na $0,12 \text{ m}$ i na daljini od $1,5 \text{ m}$. Visina ulja nad otvorom je konstantna i iznosi $7,94 \text{ m}$, a protok ulja je $3,15 \text{ l/s}$. Odrediti koeficijente isticanja.

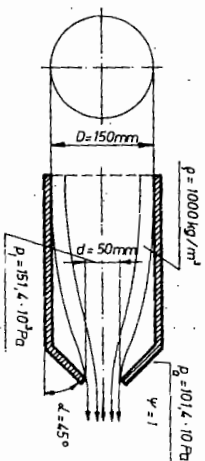
Rešenje. $\phi = 0,77$; $\mu = 0,51$; $\psi = 0,66$; $\xi = 0,69$



3. U cilindrični rezervoar kvadratnog preseka ($a=0,8 \text{ m}$) utiče $Q=2 \text{ l/s}$ vode. Istovremeno voda ističe kroz otvor na dnu ($d_0=30 \text{ mm}$; $\mu=0,6$) odrediti - visinu konstantnog nivoa vode z_{max} u rezervoaru (stacionarno stanje) i vreme t potpunog pražnjenja rezervoara od trenutka naglog prestanka dotoka vode ($Q=0$). Rešenje: $z_{\text{min}} = 1135 \text{ mm}$; $t = 726 \text{ s}$

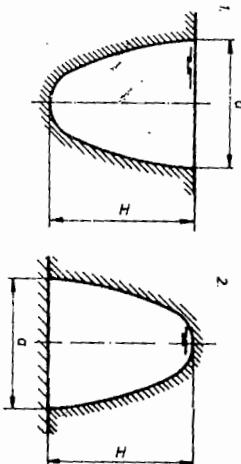
4. Za isticanje

prema slici odrediti protok Q . Koeficijent kontrakcije usvojiti i a koeficijent protoka odrediti prema tablici 17.



Rešenje. $Q = 11,9 \text{ l/s}$ ($\mu = 0,606$)

5. Voda ističe iz rezervoara kroz veliki paraboličan otvor koji može da ima dva položaja (1 i 2) prikazana na slici. U oba slučaja se gornja tvica poklapa sa nivoom vode u rezervoaru. Odrediti odnos protoka Q_1/Q_2 za konstantan i isti koeficijent protoka μ u oba slučaja.



Rešenje. $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\pi}{4}$

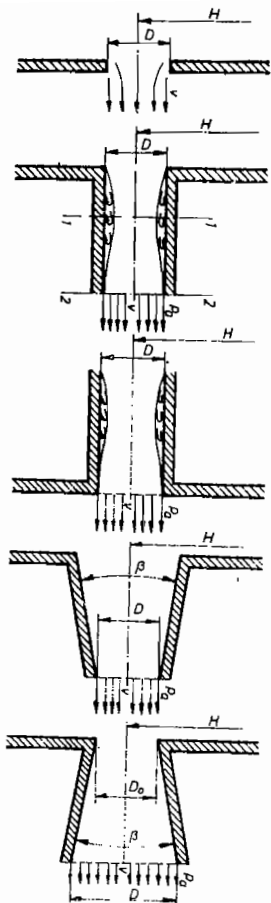
4.10.2. NAGLAVCI

Naglavci su kratki cevni elementi čija je dužina l , samo nekoliko puta veća od prečnika otvora D ($l=2+6D$). Osnovna namena naglavka je povećanje protoka pri određenom prečniku otvora D i visini nivoa tečnosti H . Formule izvedene za isticanje kroz otvore važe i za naglavke, samo su vrednosti koeficijenata drukčije. U tablici 18 date su ove vrednosti za jednostavne karakteristične slučajeve naglavaka.

TABLICA 18.

vrsta naglavka	ψ	ξ	ϕ	μ
otvor u tankom zidu	0,63	0,065	0,97	0,61
cilindrični naglavak:				
spoljašnji	1	0,49	0,82	0,82
unutrašnji	1	1	0,71	0,71
konični naglavak				
konvergentan $\beta=12,6^\circ$	0,98	0,06	0,97	0,95
divergentan $\beta=7,2^\circ$	1	3,94	0,45	0,45

Za male vrednosti Re ($Re < 40000$) vrednosti koeficijenata zavise od Re .



$$v = \phi \sqrt{2gH} \quad ; \quad Q = \frac{D^2 \pi}{4} \mu \sqrt{2gH} \quad ; \quad \mu = \phi \psi \quad ; \quad \xi = \frac{1}{\phi^2} - 1$$

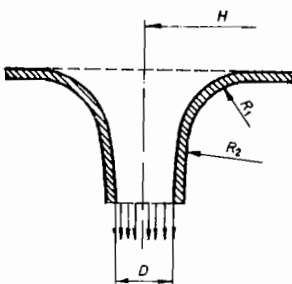
Isticanje kroz otvor u zidu velike debljine je identično isticanju kroz spojniji cilindrični naglavak. Ako je ugao β koničnog divergentnog naglavka veći od $7,2^\circ$ struja fluida neće ispunjavati ceo presek.

Isticanje kroz naglavak sa eliptično (zvonasto) zaobljenim izvodnicama (dva poluprečnika krivine) je sa najmanjim gubicima i praktično bez kontrakcije

$$\xi = 0,03 + 0,1 \quad ; \quad \psi = 1$$

$$\mu = \phi = 0,99 + 0,96$$

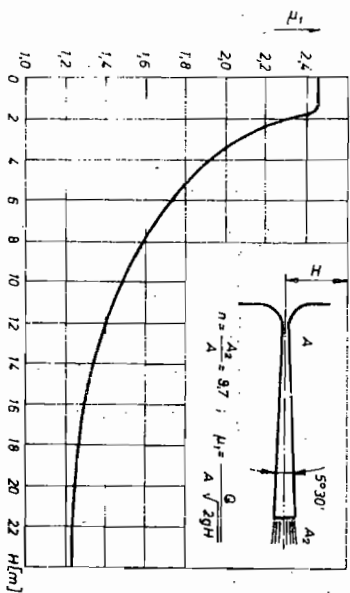
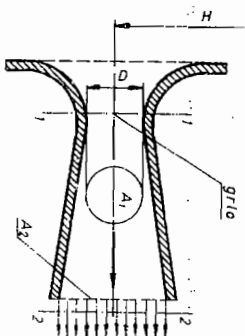
Opšti naziv za ovakve i slične vrste naglavaka je - mlaznik.



Ako se zvonasto zaobljenom naglavku doda difuzor dobija se konvergentno-divergentni naglavak koji omogućuje povećanje protoka i do 2,5 puta u odnosu na prethodni za isti prečnik grla D i visinu nivoa tečnosti H.

$$Q = \frac{D^2 \pi}{4} \mu_1 \sqrt{2gH}$$

gde je μ_1 (diagram 12) dat u funkciji od visine nivoa teč-



DIJAGRAM 12

nosti H, a za ugao $\beta = 5^\circ 30'$ kojim se postiže najveći koeficijent protoka.

Ovakav naglavak se koristi kada protok za zadatu visinu H kroz mali otvor D mora biti što je moguće veći. Međutim, praktično je primenljiv samo za visine $H=1+4$ m, jer se pri većim visinama javlja kavitacija u grlu naglavka, a nje na pojava prouzrokuje povećanje otpora i smanjenje protoka.

I pri isticanju kroz cilindrične naglavke treba obratiti pažnju na pritisak u najužem preseku mlaza. On ne sme da opadne ispod vrednosti kritičnog pritiska P_k .

Primeri.

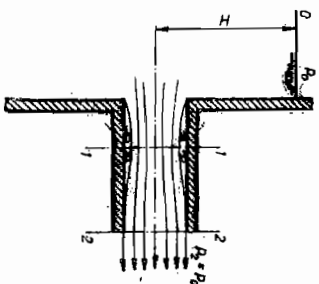
1. Odrediti najveća dozvoljenu visinu H stuba tečnosti iznad spoljašnjeg cilindričnog naglavka, pri kojoj još mlaz kroz naglavak struji punim presekom. Kritični pritisak na mestu "vena contracta" usvojiti $P_k = 0$.

Rešenje.

B.j. za preseke 1-2 daje

$$P_1 + \frac{v_1^2}{2} = P_2 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{2}$$

gde zadnji član predstavlja gubitak zbog širenja mlaza (v.4.3. - naglo proširenje



1 suženje).

Pošto je iz jednačine kontinuiteta $V_1 = \frac{1}{\psi}$ i $V_2 = \psi \sqrt{2gH}$,

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho}{2} \left(\frac{V_1^2}{\psi^2} - V_2^2 - (V_2^2 - V_1^2) \right) = 2g\phi^2 H \left(\frac{1}{\psi} - 1 \right).$$

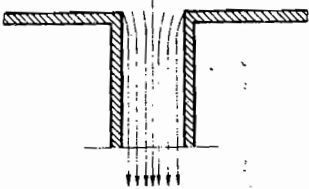
Za ψ može da se usvoji vrednost kao 1 za otvor sa oštrom ivicom $\psi=0,63$ dok je $\phi=0,82$. Zamena ovih vrednosti daje

$$P_2 - P_1 \approx 0,79 H g.$$

Ako se usvoji da ističe voda, i da je $P_1 \approx 0$, a $P_2 = P_0$, dobija se najveća moguća visina

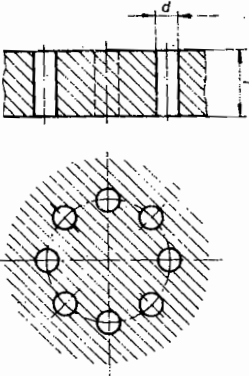
$$H_{\max} = \frac{1}{0,79} \frac{P_0}{\rho g} \approx \frac{10,33}{0,79} = 13 \text{ m}.$$

Ekperimenti su potvrdili, da se na granici $H=H_{\max}$ menja režim isticanja i umesto punog preseka isticanje se vrši samo kroz delimičan presek kako je pokazano na slici, odnosno, naglavak deštuje samo kao otvor.



2. U raketnom motoru sa tečnim gorivom, komponente

goriva se dovode u prostor za sagorevanje kroz injektorski snop tzv. "sprej injektora" koji predstavljaju obične otvore u zidu. Odrediti potreban broj injektora s kojima se dovodi oksidant za raketni motor. Protokna masa oksidanta (azotna kiselina) je $m=1,6 \text{ kg/s}$, pad pritiska kroz injektor je $\Delta P=6 \text{ at}$, pritisak u prostoru za sagorevanje $P_2=25 \text{ at}$, prečnik otvora $d=1,5 \text{ mm}$ koliknik debljine zida i prečnika otvora je $\lambda/d=0,5$. Gustina oksidanta je $\rho=1510 \text{ kg/m}^3$, a kinematička viskoznost $\nu=2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.



Koliki bi broj injektora bio potreban da je odnos $\lambda/d=2,5$?

Rešenje. Teorijska brzina proticanja je

$$V_t = \sqrt{2g \frac{\Delta P}{\rho g}} = \sqrt{19,62 \cdot \frac{6 \cdot 10^4 \cdot 9,81}{1510 \cdot 9,81}} = 28 \text{ m/s},$$

a Reynoldsov broj je

$$Re_t = \frac{V_t d}{\nu} = \frac{28 \cdot 0,0015}{2 \cdot 10^{-6}} = 21000.$$

Prema dijagramu 10 za $Re_t=21000$ sledi $\mu=0,62$.

Ukupna površina otvora svih injektora je

$$A_u = \frac{m}{\rho \mu V_t} = \frac{1,6}{1510 \cdot 0,62 \cdot 28} = 0,61 \text{ cm}^2,$$

a broj injektora

$$z = \frac{4A_u}{d^2 \pi} = \frac{4 \cdot 0,61}{d^2 \pi} = 35.$$

Za odnos $\lambda/d=2,5$ proticanje je isto kao kroz cilindrični naglavak. Prvo je potrebno odrediti režim isticanja. Kritični pad pritiska kroz injektor kada će još isticanje biti kroz puni presek je

$$\Delta P_{Kx} = \frac{P_2}{0,79} = \frac{25}{0,79} = 31,65 \text{ at}.$$

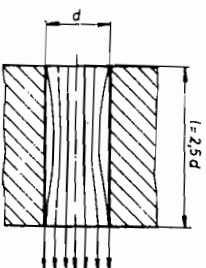
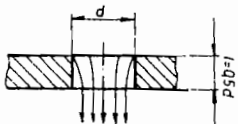
Pošto je $\Delta P_{Kx} > \Delta P$ struja azotne kiseline će proticati kroz puni presek. Koefficient protoka za ovaj slučaj je $\mu_1=0,82$ (tabela 18), a potreban broj injektora

$$z_1 = \frac{4A_u \mu_1}{d^2 \pi} = \frac{4m}{\rho \mu_1 V_t d^2 \pi} = \frac{4 \cdot 1,6}{1510 \cdot 0,82 \cdot 28 \cdot 0,0015^2 \pi} = 27.$$

Zadaci.

1. Kroz kratku horizontalnu cev prečnika $D=100 \text{ mm}$ priključenu na sud ističe voda ($t=15^\circ \text{C}$). Odrediti:

a) protok vode Q , ako je visina vode u sudu iznad ose cevi $H=9 \text{ m}$,

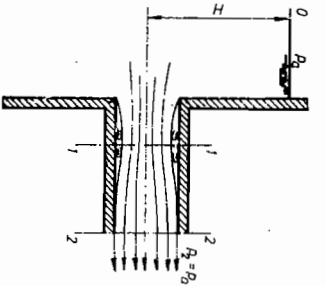


- b) pritisak p_{1V} u preseku 1-1
 c) maksimalnu visinu H_{max} za

istjecanje kroz puni presek.

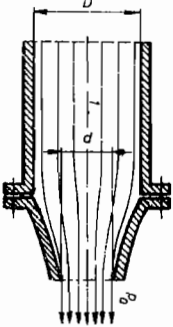
$(P_x = 4000 \text{ Pa}; P_a = 101,4 \text{ kPa}).$

Napomena. Za standardnu kratku cev stepen kontrakcije u preseku 1-1 u odnosu na prečnik D usvojitli $\psi = 0,62$. Gubici od 0-1 su izmereni i iznose $0,042V_1^2$ (V_1 - maksimalna brzina u najužem strujnom preseku).



- Rešenje. a) $(V=10,89 \text{ m/s}) \quad Q = 85 \text{ l/s}$
 b) $p_{1V} = 66500 \text{ Pa}$; c) $H_{max} = 13 \text{ m}$

2. Voda ističe kroz cev prečnika $D=100 \text{ mm}$ na čijem se kraju nalazi mlaznik prečnika $d=50 \text{ mm}$. Protok vode je $Q=25 \text{ l/s}$ a koeficijenti brzine i kontrakcije za mlaznik su $\psi=0,95$ i $\psi_c=0,93$. Koliki je pritisak p_{1m} na ulazu u mlaznik u odnosu na atmosferski pritisak koji okružuje mlaz na izlazu.

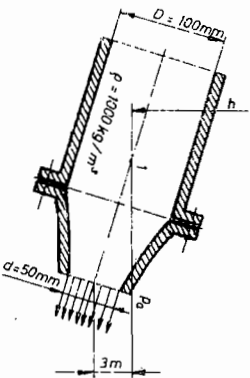


Rešenje.
$$\frac{p_1 - p_a}{\rho} = \frac{V_1^2}{2} \left(\frac{1}{\psi^2} - 1 \right)$$

$$p_{1m} = 98844 \text{ Pa} \quad \text{ili} \quad \frac{p_{1m}}{\rho g} = 10,07 \text{ m VS}$$

3. Voda ističe kroz mlaznik prikazan na slici. Pijezometarska visina u tački 1 je $h=8 \text{ m}$, a koeficijenti brzine i kontrakcije $\psi=0,962$ i $\psi_c=1$. Odrediti snagu P mlaza vode.

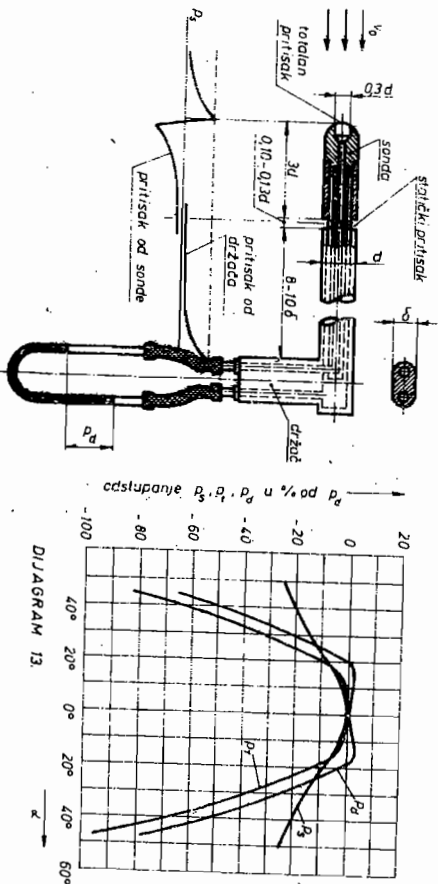
Rešenje. $P = 3,028 \text{ kW}$



4.11. MERENJE PROTOKA

Postoje mnogobrojni i vrlo raznovrsni principi, metode i instrumenti za određivanje brzine i protoka fluidne struje. Ovde će se predstaviti nekoliko "klasičnih" načina za određivanje protoka u cevima.

- Prantlova cev. Ovom cevi, kao što je već poznato, može se odrediti brzina fluidne struje u svakoj tački presečne površine cevi, na taj način naći profil brzine, a iz njega odrediti i protok. Na crtežu su dati konstruktivni podaci Prantlove cevi, a na dijagramu 13, odstupanja u merenim pritiscima kada se pravac cevi ne poklapa sa pravcem strujanja.



Otvori za statički pritisak su ravnomerno raspoređeni po obimu cevi na mestu na kome su izjednačeni uticaji smanjenog pritiska usled strujanja fluida oko vrha cevi i povećanog pritiska usled držača cevi.

Za merenje brzine struje vazduha pri normalnim atmosferskim uslovima ($P_0=101325 \text{ Pa}$ i $t_0=15^\circ\text{C}$) koeficijent $\rho/\rho_0=1/8$, te se formula za brzinu sa dovoljnom tačnošću može uprostiti, ako se dinamički pritisak P_d meri u [mm VS]

$$\frac{1}{2}\rho V_0^2 = P_d \quad V_0 = \sqrt{\frac{2P_d \rho_0}{\rho}} = 4\sqrt{P_d} \quad [\text{m/s}]$$

Dinamički pritisak se praktično ne menja pri skretanju Prantlove cevi iz pravca brzine do $\alpha=16^\circ$. Tačno pokazivanje dinamičkog pritiska je posledica približno podjednakog odstupanja statičkog i totalnog pritiska u tom, prilično širokom, pojasu skretanja cevi.

- Blenda. Protok može da se odredi izazivanjem veštačkog poremećaja i njegovim merenjem. Meri se razlika pritiska ispred i iza lokalnog otpora kojim je prouzrokovan poremećaj. U ovom slučaju unošenjem blende u fluidnu struju javlja se razlika pritiska ispred i iza nje. Izgled strujnica je pokazan na slici.

B.j. za preseke 1 i 2 glasi

$$P_1 + \frac{v_1^2}{2} = P_2 + \frac{v_2^2}{2} + gh_{1-2}$$

Ako se sada privremeno zanemari gubitak h_{1-2} , a brzina v_1 izrazi preko maksimalne brzine v_2 kao

$$v_1 = \frac{A_2 v_2}{A_1} = \psi \frac{A_2}{A_1} v_2$$

dobija se

$$P_1 - P_2 = \frac{v_2^2}{2} \left(1 - \left(\frac{\psi A_2}{A_1} \right)^2 \right)$$

odnosno

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\psi A_2}{A_1} \right)^2}}$$

a protok

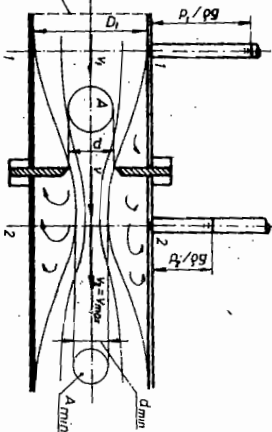
$$Q = A_2 v_2 = \psi \frac{d^2 \pi}{4} \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\psi A_2}{A_1} \right)^2}}$$

Pogodnije je izraz za protok Q predstaviti u eksperimentalnom obliku

$$Q = \psi \frac{d^2 \pi}{4} \cdot E \cdot \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}}$$

gde su: $E = \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{d}{D_1} \right)^4}} = \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}}$

ψ - koeficijent protoka dobijen eksperimentalno, koji obuhvata grešku usled ispuštanja koeficijenta kontrakcije ψ

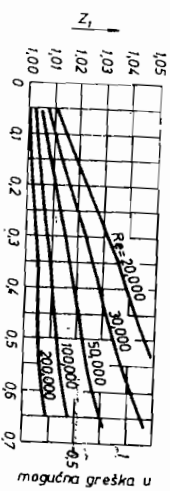
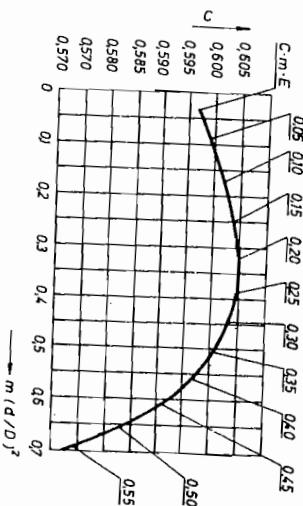
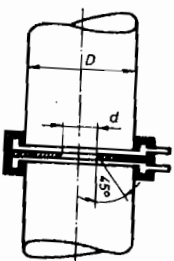


Iz izraza ispod kvadratnog korena, i gubitak h_{1-2} koji je u gornjem izvodjenju bio zanemaren.

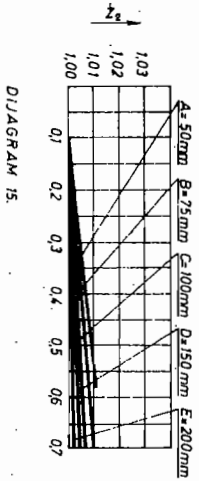
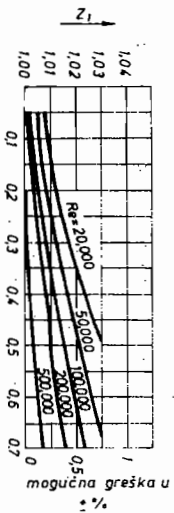
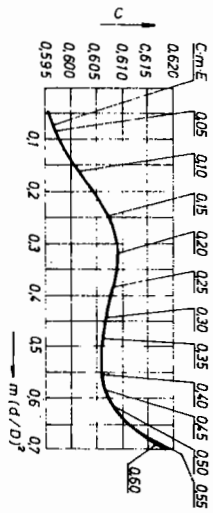
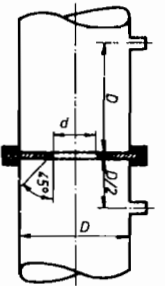
Koeficijent protoka ψ može da se predstavi kao proizvod tri faktora. Faktori z_1 i z_2 su popravni koeficijenti.

$$\psi = C \cdot z_1 z_2$$

Za dva načina izvodjenja priključaka za pritisak, vrednosti za faktore C , z_1 i z_2 su date u dijagramima 14 i 15.



DIJAGRAM 14.



Određjivanje protoka vrši se sledećim redosledom. Prvo se za usvojenju vrednost m iz prvog dijagrama odredi vrednost C . Sa tom vrednošću se odredi približno protok po formuli

$$Q = C \frac{d^2 \pi \cdot E}{4} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}$$

Za tako određeni protok nadje se brzina v u otvoru blende d i odgovarajući Re

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu}$$

Najzad se iz drugog i trećeg dijagrama nalaze popravnii koeficijenti z_1 i z_2 i konačan protok

$$Q = \frac{d^2 \pi \cdot E}{4} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}$$

gde je $\mu = C \cdot z_1 \cdot z_2$. U dijagramima 14 i 15 za vrednost z_1 su unešene vrednosti greške koja se može očekivati za izmereni protok.

Blenda izaziva smanjenje protoka kroz cev. Ako je prečnik blende veći, manji je pad pritiska ali je tačnost izmerenog protoka manja, dok manji prečnik izaziva veće priгуšenje struje. Ako za to postoji mogućnost, prečnik blende treba određivati prema najpogodnijem padu pritiska koji se unapred usvaja. Za približno poznat protok Q prema formuli

$$C \cdot m \cdot E = \frac{4Q}{\pi d^2 \sqrt{2(p_1 - p_2)}}$$

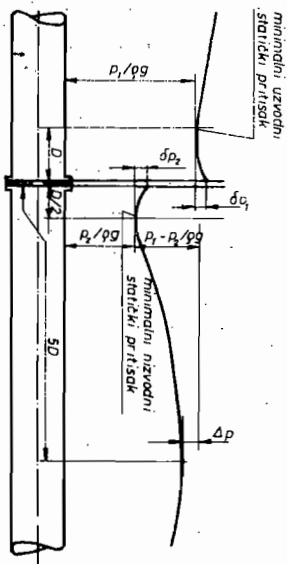
određjuje se proizvod CmE koji je unešen u prvi dijagram. Iz tog dijagrama se nalazi m i najpogodniji prečnik blende $d = D/m$.

Da bi se izbegli poremećaji koji nisu vezani za blendu preporučuje se da prava deonica cevi uzvodno bude dužine $10 \cdot D$ a nizvodno $5 \cdot D$.

Izgubljeni pritisak može da se predstavi analitičkim izrazom

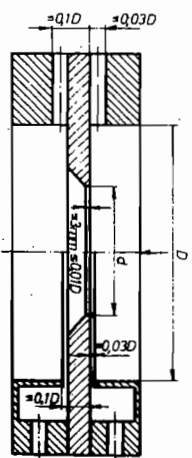
$$\Delta p = (1 - m) (p_1 - p_2)$$

Mesta na kojima se nalaze najmanji statički pritisci ispred i iza blende su određjena eksperimentalno. Njihov položaj je označen na slici.



Tačne karakteristične dimenzije normalne blende (dva načina izvođenja), sa prikliučcima za pritisak neposredno ispred i iza, date su

na slici.

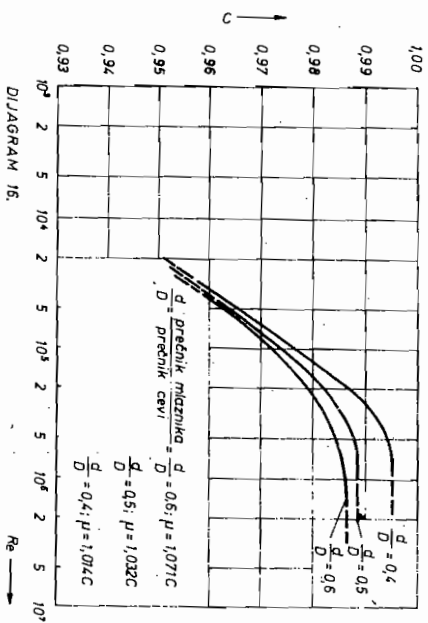


na crtežu.

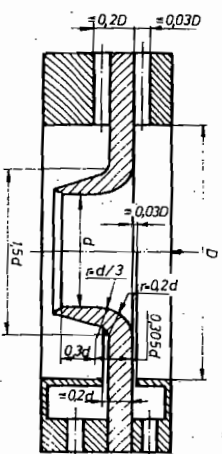
- Mlaznik. Sa mlaznikom u cevi dovoljne slobodne dužine ispred i iza njega, i priključcima za pritisak izvedenim neposredno ispred i iza njega, protok se određuje prema formuli:

$$Q = \mu \frac{d^2 \pi}{4} \cdot E \sqrt{2(P_1 - P_2)}$$

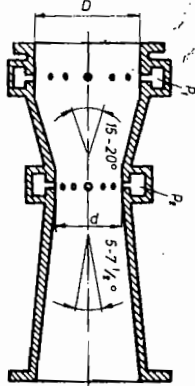
gde je koeficijent protoka dat u dijagramu 16. Dijagram važi za mlaznike sa velikim poluprečnikom krivine i visokim vrednostima $d/D = \sqrt{m}$.



Engleski standardi preporučuju izvodjenje mlaznika sa četvrtinom elipse, američki sa velikim poluprečnikom krivine, dok DIN - standardi zahtevaju izvodjenje mlaznika sa dva poluprečnika krivine. Tačne geometrijske relacije za DIN-ov normalan mlaznik (dva načina izvodjenja priključaka za pritisak) su date na slici.



- Venturi-metar. Venturi-metar se sastoji od konvergentnog, paralelnog i divergentnog dela. Priključci za pritisak se nalaze neposredno ispred konvergentne sekcije i u grlu - najužoj deonici. Uobičajeni uglovi konvergentne i divergentne sekcije su označeni na slici. U grlu Venturi-metra prečnik je $D/4 + D/2$ (D - prečnik cevi).

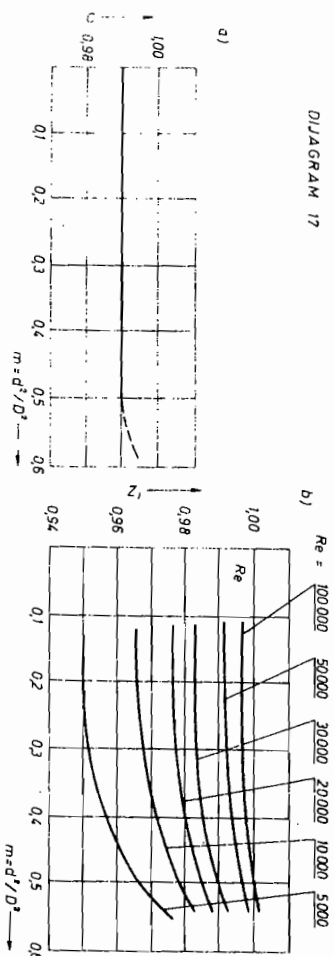


Protok se određuje prema obrascu

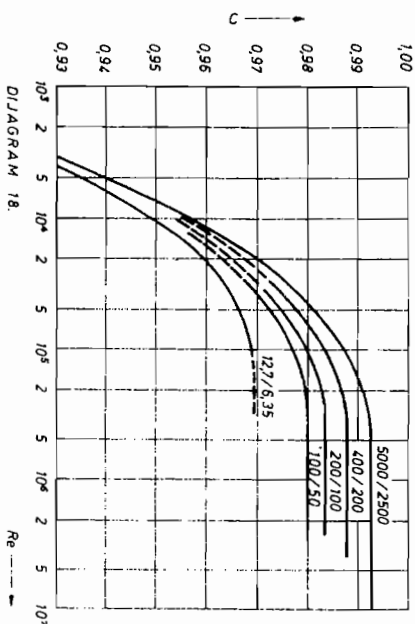
$$Q = \mu \frac{d^2 \pi}{4} \cdot E \sqrt{2(P_1 - P_2)} = C \cdot z_1 \frac{d^2 \pi}{4} \cdot E \sqrt{2(P_1 - P_2)}$$

gde su: $E = \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}$, $m = \left(\frac{d}{D}\right)^2$;

- Koeficijent protoka $\mu = C \cdot z_1$ se određuje iz dijagrama 17 (BSC).



Uz dijagram 17, prilaže se i dijagram 18 za određivanje koeficijenta protoka u prema (ASME PTC) za jednu vrednost $d/D=0,5$, ali za različite prečnike cevovoda, u funkciji od Re broja. Re broj se određuje prema prečniku i brzini struje u grlu Venturi-metra.



Priključci za pritisak se izvode kako je to pokazano na gornjoj slici, da se turbulentni uticaji ne bi odrazili na veličinu merenog pritiska.

Napomena. Razlika u vrednostima μ prema BSC i ASME PTC ukazuje da za vrlo tačna merenja protoka, ili merenja u specijalnim uslovima (izražena stišljivost; visoke temperature; različite vrste i vlažnosti gasne sredine) treba uvesti dodatne popravne koeficijente. Ove koeficijente i metod rada propisuju standardi (DIN, BSC, GOST).

Primeri.

1. Izračunati protok vode Q kroz cev prečnika $D=153$ mm sa blendom prečnika $d=102$ mm i priključcima za pritisak postavjenim na razdaljini D i $D/2$ od blende. Manometar sa živom je pri tome zabeležio razliku pritiska $p_1-p_2=254g$ ($\rho_g=10^3$ kg/m³). Kinematička viskoznost vode je $\nu=9,3 \cdot 10^{-7}$ m²/s.

Rešenje. Protok je

$$Q = \mu \frac{d^2 \pi}{4} \cdot E \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}$$

Ovde je

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{102}{153}\right)^2}} = 1,11 ; \quad \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{0,102^2 \pi}{4} = 0,008167 \text{ m}^2$$

1

$$\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,254 \cdot 9,81(13600 - 1000)}{1000}} = 7,92$$

Podrazumevajući da je $z_1 = z_2 = 1$, iz dijagrama 15 za $m=(102/153)^2=0,445$ nalazi se $C=0,607$, a vrednost za približan protok 1 Re je

$$Q = C \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot E \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} = 0,607 \cdot 0,008167 \cdot 1,11 \cdot 7,92 = 43,57 \text{ l/s}$$

$$v = \frac{4Q}{d^2 \pi} = \frac{0,04357}{0,008167} = 5,335 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{5,335 \cdot 0,102 \cdot 10^3}{9,3} = 585000$$

Iz dijagrama 15 se, za ovu vrednost Re , nalaze popravni koeficijenti z_1 i z_2

$$z_1 = 1,005 ; \quad z_2 = 1,003$$

pa je korigovani protok

$$Q = C \cdot z_1 z_2 \frac{d^2 \pi}{4} E \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} = 0,607 \cdot 1,005 \cdot 1,003 \cdot 0,008167 \cdot 1,11 \cdot 7,92 = 43,93 \text{ l/s}$$

2. Izračunati prečnik blende d koja se postavlja u cev prečnika $D=153$ mm sa priključcima za pritisak neposredno iza red i iza nje. Sa blendom se meri protok $Q=1700$ m³/h gradskog gasa čija je relativna gustina (u odnosu na vazduh) $\rho_g=0,5$. Maksimalni dozvoljeni pad pritiska $p_1 - p_2 = 748$ Pa. Koeficijent dinamičke viskoznosti gasa $\nu=1,44 \cdot 10^{-5}$ Pas; temperatura vazduha $T=289^\circ\text{K}$, a pritisak $p=101000$ Pa.

Rešenje. Pretpostavljajući $z_1 = z_2 = 1$ proizvodi

$$C \cdot m \cdot E = \frac{4Q}{D^2 \pi \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho_g}}} = \frac{4 \cdot 1700}{3600 \cdot 0,153^2 \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 748}{0,609}}} = 0,518$$

gde je

$$\rho_g = 0,5 \cdot \rho_v = 0,5 \cdot \frac{101000}{287 \cdot 289} = 0,609 \text{ kg/m}^3$$

Iz dijagrama 14 se, za $C \cdot m \cdot E = 0,518$, nalazi $C=0,580$ i odgovarajuće $m=0,67$, odnosno

$$d = D\sqrt{m} = 0,153\sqrt{0,67} = 0,126 \text{ m}.$$

Ako se sada još izvrši korekcija u odnosu na Re i D , može da se odredi stvarni pad pritiska $P_1 - P_2$.

Redom je

$$\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{0,126^2 \pi}{4} = 0,0125 \text{ m}^2,$$

$$v = \frac{1700}{3600 \cdot 0,0125} = 37 \text{ m/s},$$

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{37 \cdot 0,126 \cdot 0,609 \cdot 10^5}{1,44} = 200000.$$

Iz dijagrama 14 je $z_1=1,005$ i $z_2=1,001$, pa je

$$m' = \left(\frac{0,126}{0,153} \right)^2 = 0,693 \text{ tj. } m'^2 = 0,482,$$

odgovarajuće

$$C' = 0,573 \quad \text{ i } \quad E' = \frac{1}{\sqrt{1-m'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,482}} = 1,38,$$

i stvarni proizvod $C \cdot m \cdot E$ sa popravkama i popravnim koeficijentima z_1 i z_2

$$C' \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot m' \cdot E' = 0,573 \cdot 1,005 \cdot 1,001 \cdot 0,693 \cdot 1,38 = 0,551.$$

Stvarni pad pritiska $P_1 - P_2$ je

$$P_1 - P_2 = \frac{Q^2 \rho g}{2(C' \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot m' \cdot E')^2} = \frac{1700^2 \cdot 10^3 \cdot 9,81}{2(0,551 \cdot \frac{0,153^2 \pi}{4} \cdot 3600)^2} = 664,15 \text{ Pa}.$$

Zadaci.

1. Odrediti prečnik blende tako, da kroz cev prečnika $D=101,5$ mm protiče $Q=0,01012$ m³/s vode pri maksimalno dozvoljenom padu pritiska $P_1 - P_2=1,27$ mm vS. Kinematička viskoznost vode je $\nu=9,3 \cdot 10^7$ m²/s.

Rešenje. $d = 62,5$ mm

2. Blenda sa priključcima za pritisak raspoređenim neposredno iza nje, koji su povezani sa kosim diferencijalnim manometrom napunjenim sa kerolinom, služi za merenje protoka vazduha. Kosa cev manometra je nagnuta za 20° u odnosu na horizont, a razlika nivoa kerolina iznosi 43 mm. Relativna gustina kerolina je 0,79. Gustina vazduha je 1,2 kg/m³. Prečnici cevi i blende su: $D=305$ mm i $d=216$ mm. Odrediti srednju brzinu u vazduhu u cevi.

Rešenje. $v = 4,82$ m/s

3. Za merenje protoka špiritusa postavljen je Venturimetar. On je priključen na cevovod koji je u nizvodnom pravcu nagnut za 30° u odnosu na horizont. Ulazni prečnik je $D=305$ mm a prečnik grla $d=152,5$ mm. Rastojanje između priključaka za pritisak na ulazu i grlu Venturimetra je $h=1,22$ m uzduž ose. Prepostavljajući da je koeficijent protoka $\mu=1$, odrediti protok Q kada je razlika pritiska 254 mm Hg. Relativna gustina špiritusa je 0,82.

Rešenje. $Q = 0,178$ m³/s

4. Voda protiče kroz horizontalno postavljen Venturimetar čiji su karakteristični prečnici $D=304,8$ mm i $d=152,4$ mm. Protok je $Q=42,2$ l/s a pokazivanje diferencijalnog manometra je $P_1 - P_2=2616,6$ Pa. Odrediti koeficijent protoka μ .

Rešenje. $\mu = 0,978$

5. Mlaznik, prečnika $d=101,6$ mm, je postavljen na kraju cevi prečnika $D=254$ mm. Kroz cev i mlaznik protiče ulje gustine 851 kg/m³ i protoka 0,099 l/s. Prepostaviti da je kalibracija mlaznika predstavljena sa krivom $d/D=0,4$ iz dijagrama 16. Odrediti pokazivanje U manometra spojenog iza mlaznika, ako se u njemu nalazi živa gustine 13600 kg/m³. Kinematička viskoznost ulja je $3,39 \cdot 10^6$ m²/s.

Rešenje. $h = 0,5$ m Hg

4.12. ISTICANJE SA PROMENLJIVIM NIVOOM

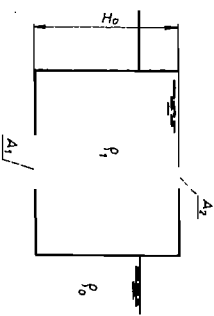
Bernulijeva jednačina je izvedena za stacionarno stanje. Međutim, ako promene brzine i protoka nisu nagle, B.j. može da se primeni i u traženju rešenja takvih problema; problema gde je, znači, nestacionarnost slabo izražena. Najveći deo takvih zadataka se odnosi na isticanja iz rezervoara.

Ne postoji potreba da se šablioniše princip rada, jer su poznate i jednostavne-potrebne operacije matematičke i hidromehaničke prirode.

U ovom poglavlju će se izložiti i neki kompleksniji zadaci.

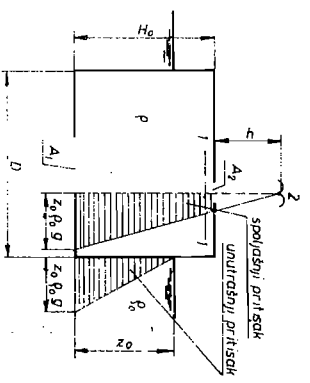
Primeri.

1. Cilindrični sud, zapremine $V=0,6 \text{ m}^3$ i visine $H_0=2 \text{ m}$, napunjen je uljem gustine $\rho_1=800 \text{ kg/m}^3$. Sud pliva na vodi gustine $\rho_0=1000 \text{ kg/m}^3$. Masa praznog suda je $m=60 \text{ kg}$. Na poklopcu suda nalazi se otvor površine $A_2=1 \text{ cm}^2$. Na dnu suda je otvor površine $A_1 > A_2$.



Na dnu suda je otvor površine $A_1 > A_2$. Odrediti: a) U početnom trenutku, dubinu uranjanja suda z_0 i maksimalnu visinu mlaza ulja h koji izbija iz otvora A_2 . Za ovaj trenutak skicirati raspored pritiska u sudu i izvan suda; b) Odrediti vreme τ posle koga će sud biti potpuno uronjen u vodu i za taj položaj ponovo skicirati raspored pritiska u sudu i izvan suda. Pri isticanju ulja i uticanju vode zanemariti gubitke, a koeficijent protoka usvojiti $\mu=1$.

Rešenje. a) Za $t_0=0$ jednačina za plivanje određuje dubinu uranjanja z_0 (stabilnost plivanja se ne proverava)



$$\frac{D^2 \pi}{4} \cdot H_0 \rho_1 g + mg = \frac{D^2 \pi}{4} \cdot z_0 \rho_0 g$$

$$z_0 = H_0 \frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{m}{V \rho_0} = H_0 \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{m}{V \rho_0} \right)$$

$$z_0 = 2(0,8 + \frac{60}{0,6 \cdot 1000}) = 1,8 \text{ m}$$

B.j. za tačke 1 - 2 (tačka 1 se nalazi u sudu neposredno ispod otvora) daje

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_a}{\rho_1} + hg$$

gde je

$$p_1 = p_a + z_0 \rho_0 g - H_0 \rho_1 g = p_a + 1,80 \rho_0 g - 2019$$

gde je

$$h = \frac{p_1 - p_a}{\rho_1} = 1,8 \frac{\rho_0}{\rho_1} - 2 = \frac{1,8}{0,8} - 2 = 0,25 \text{ m}$$

Diagrami pritiska su uneseni na slici.

b) Za neki trenutak $t > t_0$ brzina isticanja ulja kroz otvor A_2 je u zavisnosti od dubine uranjanja. Ova zavisnost se određuje iz B.j.

za 1 - 1'

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_a}{\rho_1} + \frac{v^2}{2}$$

gde je

$$p_1 = p_a + 1,80 \rho_0 g - (2-z) \rho_1 g$$

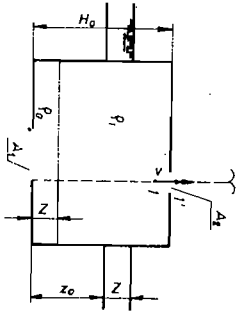
Tako je

$$v = \sqrt{2 \cdot \frac{p_1 - p_a}{\rho_1}} = \sqrt{2g(0,25 + z)}$$

Zapreminu ulja koje je isteklo ispunjava voda prema jednačini

$$A \int_0^{0,2} dz = A_2 \int_0^T v \cdot dt$$

($z=0,2$ je granica kada se i gornja površina suda nalazi pod vodom, A površina osnove suda)



$$A \int_0^{0,2} dz = A_2 \int_0^T \sqrt{2g(0,25+z)} dt$$

$$T = \frac{A}{A_2} \int_0^{0,2} \frac{dz}{\sqrt{2g(0,25+z)}} = \frac{V}{H_0 A_2 \sqrt{2g}} \int_0^{0,2} \frac{dz}{\sqrt{0,25+z}} = \frac{V}{H_0 A_2 \sqrt{2g}} (2\sqrt{0,25+z}) \Big|_0^{0,2}$$

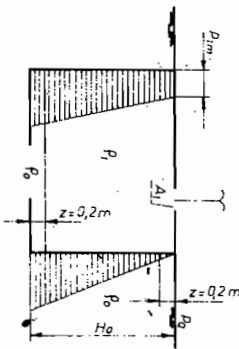
$$T = \frac{0,6}{2 \cdot 0,0001 \sqrt{2 \cdot 9,81}} (2(\sqrt{0,25+0,2} - \sqrt{0,25})) = 231,38 \text{ s}$$

Na gornjoj površini suda u sudu pritisak je

$$p_1 = p_a + (H_0 - 0,2)g(\rho_0 - \rho_1)$$

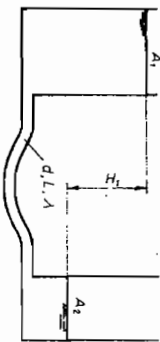
tj.

$$p_{1m} = 1,8 \cdot 9,81 \cdot 200 \text{ Pa}$$



2. Dva rezervoara kon-

stantne površine preseka A_1 i A_2 , na bilo kom nivou, spojeni su međusobno sa cevi prečnika d , dužine L i poznatog koeficijenta trenja λ . Zanimarajući



- lokalne gubitke i brzine promena nivoa vode u sudovima, naći:
- Izraz iz kojeg se može odrediti vreme za koje se razlika nivoa vode u rezervoarima promeni od H_1 do H_2 ;
 - vreme za koje će proteći $Q=3 \text{ m}^3$ vode kroz cev prečnika $d=20 \text{ mm}$ i dužine $L=150 \text{ m}$, ako je $\lambda=0,04$; $H_1=2 \text{ m}$; $A_1=8 \text{ m}^2$ i $A_2=5 \text{ m}^2$.

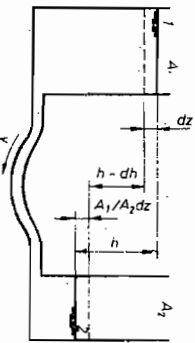
Rešenje.

- Iz B. J. za 1 - 2 sledi

$$h = \lambda \frac{L}{d} \frac{V^2}{2g}$$

odnosno

$$V = \sqrt{\frac{2gd}{\lambda L}} \cdot h^{\frac{1}{2}}$$



Ako se nakon vremena dt spusti nivo u prvom rezervoaru za dz , onda je istekla zapremlna vode $A_1 dz$. Ista ta količina vode (zapremlna) podigne nivo u drugom rezervoaru za

$$\frac{A_1}{A_2} dz.$$

Sada je razlika nivoa vode smanjena za

$$dh = dz(1 + \frac{A_1}{A_2})$$

Promena količine vode u prvom rezervoaru jednaka je količini vode koja prolazi kroz cev, tj.

$$-A_1 dz = \frac{1}{4} \cdot d^2 v \cdot dt$$

odnosno

$$dt = - \frac{4A_1 dz}{\pi d^2 v}$$

Ako sada iz ove relacije eliminišemo dz i v pomoću ranije dobijenih izraza, dobiće se funkcionalna zavisnost vremena i razlike nivoa h , dakle

$$dt = - \frac{4A_1 A_2}{\pi d^2 (A_1 + A_2)} \sqrt{\frac{\lambda L}{2gd}} \cdot h^{\frac{1}{2}} dh$$

Integraljenjem u granicama od $h=H_1$ do $h=H_2$, dobija se krajnji izraz

$$T = \frac{8A_1 A_2}{\pi d^2 (A_1 + A_2)} \sqrt{\frac{\lambda L}{2gd}} (H_1^{\frac{3}{2}} - H_2^{\frac{3}{2}}) \quad [s]$$

Napomena. Ista relacija važi i za obrnuti slučaj tj. kada je u rezervoaru 2 veći nivo i voda struji u suprotnom smeru.

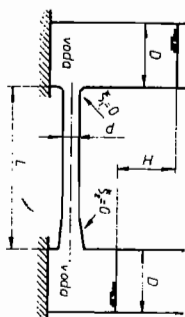
- Posle isticanja 3 m^3 , nivo vode u prvom rezervoaru opadne za $3/8 \text{ m}$, a u drugom rezervoaru poraste za $3/5 \text{ m}$, tako da je

$$H_2 = H_1 - \frac{3}{8} - \frac{3}{5} = 2 - \frac{3}{8} - \frac{3}{5} = \frac{41}{40} = 1,025 \text{ m}$$

Sada je traženo vreme

$$T = \frac{8 \cdot 8 \cdot 5}{\pi \cdot 0,02^2 (8+5)} \sqrt{\frac{0,04 \cdot 150}{19,62 \cdot 0,02}} (2^{\frac{3}{2}} - 1,025^{\frac{3}{2}}) = 30400 \text{ s}$$

3. Dva jednaka cilindrična rezervoara, prečnika $D=15$ cm, spaja cev dužine $L=1$ m i prečnika $d=5$ mm. Rezervoari su delimično napunjeni vodom ($t=15^\circ\text{C}$; $\nu=9,3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$).



a) Kolika je maksimalno moguća razlika nivoa vode u rezervoarima da bi u spojnoj cevi tečenje uvek bilo laminarno?

b) Ako je početna razlika nivoa vode u rezervoarima $H=5$ cm, odrediti vreme posle koga će razlika nivoa H_1 biti dvostruko manja od početne razlike nivoa tj. $H_1=H/2=2,5$ cm. Gubitke na ulazu i izlazu spojne cevi kao i brzinu promene nivoa u sudovima zanemariti.

Rešenje. a) B.j. za nivoe u rezervoarima je

$$gh = \lambda \frac{L \cdot v^2}{d}$$

Za laminarno strujanje važi $\lambda=64/Re$. Pošto se traži najveća razlika nivoa H , pri kojoj je strujanje još uvek laminarno, treba uzeti Re_{kr} jer će pri tome brzina biti maksimalna, pa prema gornjoj jednačini

$$H_{\max} = \frac{64v_{\max}^2}{v_{\max} \frac{L}{d} \cdot \frac{v_{\max}}{2g}} = \frac{64v_{\max}^2}{2gd} = k \cdot v_{\max}^2$$

je i visina $H=H_{\max}$. Konstanta je

$$k = \frac{64v_{\max}^2}{19,62 \cdot 0,005^2} = 0,1213$$

Za $Re_{kr}=2500$ dobija se

$$v_{\max} = \frac{2500v}{d} = \frac{2500 \cdot 9,3 \cdot 10^{-7}}{0,005} = 0,465 \text{ m/s}$$

$$H_{\max} = k \cdot v_{\max}^2 = 0,1213 \cdot 0,465^2 = 0,0264 \text{ m}$$

b) Postupak rešavanja ovog dela zadatka je dat u prvom primeru.

Relacije $k \cdot v = h$ i $dh = 2dz$ zamenjuju se u jedinačinu

$$-\frac{D^2\pi}{4} dz = \frac{d^2\pi}{4} \cdot v \cdot dt$$

$$-\left(\frac{D^2}{d^2}\right) \cdot k \cdot \frac{dh}{h} = dt$$

$$\frac{k D^2}{2(d^2)} \int \frac{dh}{h} = \int_0^t dt$$

odakle je

$$t = \left(\frac{D^2}{d^2}\right) \cdot \frac{k}{2} \cdot \ln 2 = \left(\frac{150^2}{5^2}\right) \cdot \frac{0,1213}{2} \cdot 2 \cdot 303 \cdot \log 2 = 37,85 \text{ s.}$$

4. Cilindrična cisterna, prečnika $D=2$ m i dugačka $L=6$ m, puna ulja pala je u jezero na mestu gde je dubina $H=20$ m (vidi sliku). Koefficient dinamičke viskoznošti ulja je $\nu=32,5$ cP, a gustina ulja $\rho=700$ kg/m³. Na obalu je dovezena druga, ista takva, prazna cisterna u koju se kroz crevo AC, prečnika $d=50$ mm i dugačko $l=30$ m, pretače ulje iz potopljene cisterne. Da bi voda terala ulje u gornju cisternu, probušen je otvor na dnu upale cisterne (u tački B). Traži se:

a) Da se odredi maksimalna visina temene tačke A cisterne na obali mereno od nivoa vode u jezeru, pri kojoj se još može da isprazni sva dohja cisterna;

b) Koliko traje vreme pretakanja ulja, pri visini od nivoa vode u reci do tačke A gornje cisterne od $z_0=5$ m, smatrajući da ulje teče kroz crevo laminarno i da se kinetička energija ulja u cevi i cisterni sme zanemariti. Napominje se da je koefficient otpora laminarnog strujanja u ovom slučaju $\lambda=64/Re$, i da se dodirna površina ulja i vode u potopljenoj cisterni menja (penje se) brzinom koja iznosi koliko i izvod predjenog puta po vremenu. Raditi s opštim brojevima sve dok se ne postavi integral. Napominje se da je rešenje integrala, oblika

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta d\theta}{A-B(1-\cos\theta)} = \frac{1}{B^2} (A-B - \sqrt{A(A-2B)})$$

gde su A i B konstante uvedene radi toga da bi analitički izraz bio krati za pisanje.

c) Pošto se isprazni potopljena cisterna, ubacuje se kroz crevo sabljen vazduh sve dokle cisterna ne isplivl na

površinu vode. Ako je masa prazne cisterne $m=1500$ kg, pita se kolika je najmanja zapremina vazduha u cisterni pri kojoj će cisterna početi da se podiže? Sračunati i masu tog vazduha zadržujući da je njegova temperatura jednaka okolnoj vodi, tj. ravna $T=283^{\circ}\text{K}$, da je gasna konstanta vazduha $R=287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$ i atmosferski pritisak $p_a=101,4 \text{ kPa}$.

Napomena. Koefficienti protoka za sve slučajeve su $\mu=1$.

Rešenje.

a) Voda će da potiskuje ulje iz donje cisterne u gornju u sve do-
tle, dok se ne izjednače težine odgovarajućih stubova vode i ulja, tj. pritisak u tački C može da se definiše i preko stuba vode i preko stuba ulja

$$(z + H - D)\rho_u g = (H - D)\rho g$$

$$z = (H-D) \left(\frac{\rho}{\rho_u} - 1 \right) = 18 \left(\frac{1000}{700} - 1 \right) = 7,72 \text{ m}$$

Napomena. Može se doći do rezultata i primenom B.j.

za tačke C i A ako se zanemare gubici, jer u suštini oni i nisu važni, pošto se na kraju uspostavlja ravnotežno stanje (brzine su nula pa nema ni gubitaka).

b) B.j. za tačke E i A ($z=z_0=5 \text{ m}=\text{const}$)

$$P_E = \frac{P_a}{\rho_u} + (z_0 + H - y)g + \lambda \frac{1}{d} \frac{V^2}{2A}$$

(V, V_A - se zanemaruju; $P_A=P_a$).

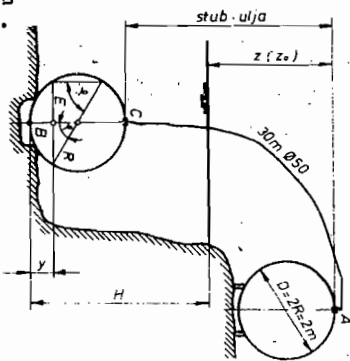
Dalje je

$$P_E = P_a + (H - y)\rho g,$$

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64\nu}{V_A d \rho_u}$$

odnosno

$$\frac{P_a}{\rho_u} + (H-y)g = \frac{P_a}{\rho_u} + (z_0+H-y)g + \frac{64\nu}{V_A d \rho_u} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{V^2}{A}$$



$$(H-y)g \cdot \frac{\rho}{\rho_u} = (z_0+H-y)g + \frac{32\nu^2}{d^2 \rho_u} V_A$$

Jednačina kontinuiteta daje

$$V_A \frac{d^2 \pi}{4} = V_E \pi \cdot 2R \sin \phi \implies V_A = \frac{8LR \sin \phi}{d^2 \pi} \cdot V_E$$

zamenom V_A i nakon sredjivanja, B.j. postaje

$$C \cdot \sin \phi \cdot V_E = A - B(1 - \cos \phi)$$

gde je

$$C = \frac{256\nu^2 L R}{d^4 \pi \rho_u g} ; \quad A = H \left(\frac{\rho}{\rho_u} - 1 \right) - z_0$$

$$B = R \left(\frac{\rho}{\rho_u} - 1 \right) ; \quad \text{jer je } y = R(1 - \cos \phi)$$

Dalje je prema zadatku

$$V_E = \frac{dY}{dt} = R \frac{d}{dt} (1 - \cos \phi) = R \cdot \sin \phi \cdot \frac{d\phi}{dt}$$

$$C \cdot \sin^2 \phi d\phi = (A - B(1 - \cos \phi)) dt$$

odakle se dobija analitički izraz za vreme trajanja pretakanja ulja

$$t = CR \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \phi d\phi}{A - B(1 - \cos \phi)} = CR \cdot \frac{\pi}{B^2} (A - B - \sqrt{A(A - 2B)}) \quad [s]$$

za date veličine je

$$A = 20 \left(\frac{1000}{700} - 1 \right) - 5 = \frac{25}{7} \text{ m}$$

$$B = 1 \left(\frac{1000}{700} - 1 \right) = \frac{3}{7} \text{ m}$$

$$C = \frac{256 \cdot 0,0325^2 \cdot 30 \cdot 6 \cdot 1}{0,05^4 \cdot \pi \cdot 700 \cdot 9,81} = \frac{34800}{\pi} \text{ s}$$

a vreme pretakanja ulja iznosi

$$t = \frac{34800}{\pi} \cdot 1 \cdot \int_0^{\pi} \frac{1}{0,432 \cdot (3,6 - 0,43 - \sqrt{3,6(3,6 - 2 \cdot 0,43)})} = 6580 \text{ s}$$

c) Najmanja zapremina vazduha dobija se iz jednakosti sile potiska i težine cisterne tj:

$V\rho g = mg$
odnosno

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{1500}{1000} = 1,5 \text{ m}^3$$

(gustina vazduha se zanemaruje u odnosu na gustinu vode).

Sada je masa vazduha

$$m_V = V\rho_V = V \cdot \frac{P_V}{RT} = 1,5 \cdot \frac{281300}{287 \cdot 283} = 5,2 \text{ kg}$$

Apsolutni pritisak vazduha P_V dobija se iz relacije

$$P_a + H\rho g = P_V + (1 + \cos\phi)\rho g$$

$$P_V = P_a + (H - 1 - \cos\phi)\rho g = 101400 + (20 - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})1000 \cdot 9,81 = 281300 \text{ Pa}$$

a ugao ϕ se izračunava preko poznate zapremine na sledeći način:

$$V = L \cdot R^2 (\phi - \frac{\sin 2\phi}{2})$$

sledi

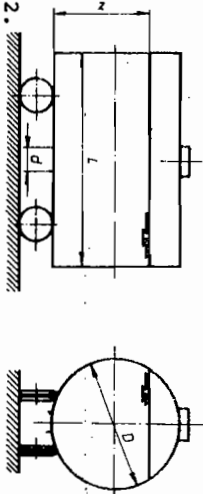
$$2\phi - \sin 2\phi = 0,5$$

odnosno

$$\phi \approx 45^\circ \text{ (tačnije } 43^\circ 30')$$

5. Odrediti

vreme praznjenja pune cisterne dužine $L=5 \text{ m}$, prečnika $D=2 \text{ m}$ i prečnika izlavnog otvora $d=0,1 \text{ m}$. Koefficient protoka usvojiti $\mu=0,62$.



Rešenje. Za vreme dt isteci će iz cisterne zapremina dV , odnosno

$$dV = \mu \frac{d^2 \pi}{4} \sqrt{2gz} \cdot dt$$

Pri tome se nivo u cisterni spusti za dz , prema jednačini

$$dV = -Adz$$

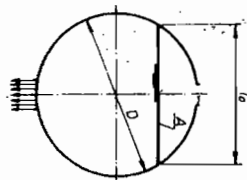
gde je A - slobodna površina u sudu. Znak minus pokazuje da se visina z smanjuje.

Izjednačavajući gornje izraze, dobija se

$$\mu \frac{d^2 \pi}{4} \sqrt{2gz} \cdot dt = -Adz$$

$$dt = - \frac{Adz}{\mu \frac{d^2 \pi}{4} \sqrt{2gz}}$$

$$t = \frac{4}{\mu d^2 \pi \sqrt{2g}} \int_0^D Adz$$



Slobodna površina je $A=bl$, gde je $b=2\sqrt{Dz-z^2}$. Sada je

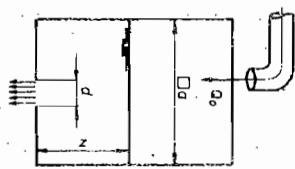
$$t = \frac{8L}{\mu d^2 \pi \sqrt{2g}} \int_0^D \sqrt{D-z} \cdot dz = -\frac{2}{3} \cdot \frac{8L}{\mu d^2 \pi \sqrt{2g}} (D-z)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^D$$

$$t = \frac{16L}{3\mu d^2 \pi \sqrt{2g}} \cdot D^{\frac{3}{2}} = \frac{16 \cdot 5}{3 \cdot 0,62^2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81}} \cdot \sqrt{\frac{8}{19,62}} = 874 \text{ s}$$

6. U prazan rezervoar kvadratnog preseka, $a=800 \text{ mm}$, utiče konstantna količina vode

$Q_0=2 \text{ l/s}$. Istovremeno kroz otvor na dnu rezervoara voda ističe. Prečnik otvora je $d=30 \text{ mm}$, a koefficient protoka $\mu=0,61$. Odrediti:

- a) pri kojoj visini z_{max} nivoa vode u rezervoaru se uspostavlja stacionarno stanje;
- b) koliko vreme je potrebno da bi se nivo vode u rezervoaru podigao za veličinu $z_{\text{max}} - z = 0,1 \text{ m}$.



Rešenje. a) z_{max} se lako određuje iz jednakosti ulaznog i izlaznog protoka vode,

$$Q_0 = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot \mu \sqrt{2gz_{\text{max}}}$$

odakle je

$$z_{\text{max}} = \left(\frac{4Q_0^2}{d^2 \pi^2 \mu^2} \cdot \frac{1}{2g} \right) = \left(\frac{4 \cdot 0,002^2}{0,03^2 \cdot \pi^2 \cdot 0,61^2} \right) \cdot \frac{1}{19,62} = 1,1 \text{ m}$$

b) Polazna jednačina je

$$a^2 dz = (Q_0 - Q) dt$$

gde je Q - protok vode koji ističe iz suda.

Zamenjujući vrednosti za Q_0 i

$$Q = \frac{d^2 \pi}{4} \mu \sqrt{2g} \sqrt{z} = \frac{0,03^2 \pi}{4} 0,61 \sqrt{19,62} \sqrt{z} = 1,91 \cdot 10^{-3} \sqrt{z}$$

u polaznu jednačinu, dobija se

$$a^2 dz = 10^3 (2 - 1,91 \sqrt{z}) dz$$

odnosno

$$10^3 a^2 \int_0^1 \frac{dz}{2 - 1,91 \sqrt{z}} = T$$

Kako je

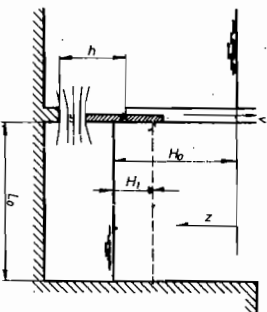
$$\int_0^1 \frac{dz}{2 - 1,91 \sqrt{z}} = - \frac{2}{1,91} + \frac{4}{1,91^2} \ln \frac{2 - 1,91}{2 - 1,91} = 2,353$$

to je

$$T = 10^3 \cdot 0,8^2 \cdot 2,353 = 1506 \text{ s} = 25 \text{ min } 6 \text{ s}$$

7. Vrata ustave, prikazane

na slici, otvaraju se kretanjem na-
više do visine $h=2 \text{ m}$, konstantnom
brzinom $v=10 \text{ mm/s}$. Odrediti visinu
 H_1 do koje će se podići nivo vode u
ustavi za vreme otvaranja vrata, kao
i vreme potpunog punjenja ustave čl-
ja je dužina $L_0=180 \text{ m}$, a početna ra-
zlika nivoa vode ispred ustave i u
ustavi je $H_0=10 \text{ m}$. Koefficient protoka kroz slobodan prolaz
ispod vrata pretpostaviti konstantnim, $\mu=0,6$. Neka je širi-
na ustave B.



Rešenje. U trenutku t, od početka podizanja vrata,

važi

$$-Adz = Qdt$$

gde je A površina ustave ($A=L_0 \cdot B$), a

$$Q = Bv\mu\sqrt{2gz}$$

zamenom A i Q u početnu jednačinu, dobija se

$$- \frac{L_0}{v\mu\sqrt{2g}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z}} = t dt$$

odnosno

$$\int_0^T t dt = - \frac{L_0}{v\mu\sqrt{2g}} \int_{H_0}^{H_1} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

Pošto je vreme otvaranja vrata

$$T = \frac{h}{v} = \frac{2}{0,10} = 200 \text{ s}$$

iz gornje jednačine može se odrediti H_1

$$-2\sqrt{z} \Big|_{H_0}^{H_1} = \frac{T^2 v \mu \sqrt{2g}}{L_0}$$

$$\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1} = \frac{T^2 v \mu \sqrt{2g}}{4 L_0}$$

tj.

$$H_1 = H_0 - \left(\sqrt{H_0} - \frac{T^2 v \mu \sqrt{2g}}{4 L_0} \right)^2 = 10 - \left(\sqrt{10} - \frac{200^2 \cdot 0,10 \cdot 0,6 \sqrt{19,62}}{180} \right)^2 = 7,155 \text{ m}$$

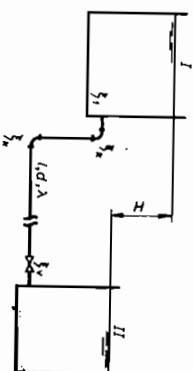
Vreme punog punjenja ustave se određuje prema

$$T_u = T + \frac{L_0}{h v \sqrt{2g}} \int_0^{H_0 - H_1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 200 + \frac{180}{2 \cdot 0,6 \sqrt{19,62}} \cdot 2 \sqrt{10 - 7,155} = 314 \text{ s}$$

Zadaci.

1. Izračunati vreme T iz-

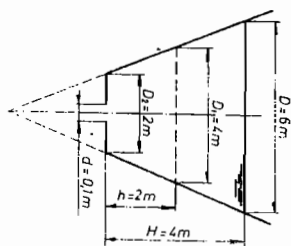
jednačavanja nivoa vode u sudovima
poprečnih preseka $A_1=1,5 \text{ m}^2$,
 $A_2=2 \text{ m}^2$, koji su spojeni pomoću
cevi dužine $l=20 \text{ m}$, prečnika
 $d=30 \text{ mm}$. Početna razlika nivoa
vode iznosi $H=2 \text{ m}$. Koefficienti



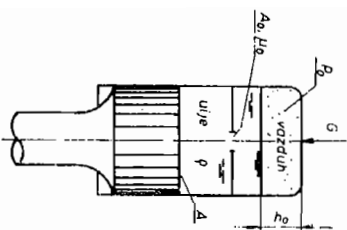
lokalnih otpora su: $\xi_1=0,5$; $\xi_k=0,25$; $\xi_v=2,33$, a vrednost ko-
ficienta trenja je $\lambda=0,03$. Proveriti režim strujanja kroz
cev u početku pretakanja vode, ako je kinematička viskoznost
vode $\nu=0,0106 \text{ cm}^2/\text{s}$ i izračunati ΔH za koliko se spustio ni-
vo vode u sudu I.

Rešenje. $T = 1 \text{ h } 3 \text{ min } 30 \text{ s}$;
 $Re = 36000$ - turbulentno strujanje; $\Delta H = 1,141 \text{ m}$

2. Koliko dugo će trajati isticanje vode kroz blendu na dnu suda prikazanog na slici, da bi se nivo vode spustio sa 4 na 2 m. Koeficijent protoka usvojititi $\mu = 0,82$ i smatrati da je koeficijent protoka konstantan.



Rešenje. $T = 8 \text{ min } 55 \text{ s}$

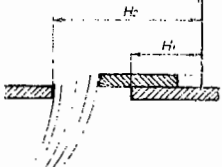


3. Hidropneumatski prigušivač udara sa drži u gornjem delu sabijen vazduh pritiska P_0 . Kada točak aviona dodirne zemlju, ulje iznad klipa prolazi kroz otvor A_0 sa koeficijentom protoka μ_0 , i sabija vazduh do pritiska P_1 . Računa se pojednostavljenja procesa prigušenja udara, smatra se da sila G deluje trenutno i da se vazduh sabija po izotermnoj promeni. Odrediti vreme T trajanja procesa tj. vreme proticanja fluida kroz otvor A_0 .

Rešenje.

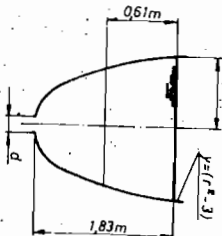
$$T = - \frac{A}{\mu A_0 \sqrt{P_0}} \int_{h_1}^h \frac{dh}{\sqrt{h-h_1}} \text{ [s]}, \text{ gde su: } h_1 = \frac{P_0}{P_1} h_0 \text{ i } P_1 = \frac{G}{A}$$

4. Vertikalna vrata se spuštaju konstantnom brzinom $v = 0,05 \text{ m/s}$ i postepeno zatvaraju kvadratni otvor u zidu. Smatrajući konstantnim nivo vode u_0 staju ($H_1 = 3 \text{ m}$; $H_2 = 4 \text{ m}$) odrediti koliko će vode isteci dok se otvor ne zatvori. Koeficijent protoka je tokom celog zatvaranja otvora konstantan i jednak $0,59$.

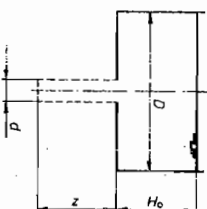


Rešenje. $V = 212 \text{ m}^3$

5. Za rezervoar prikazan na slici, odrediti vreme T za koje će se nivo vode spustiti za 0,61 m, ako je koeficijent protoka $\mu = 0,65$. Prečnik otvora je $d = 50,8 \text{ mm}$, a visina početnog nivoa je 1,83 m.



Rešenje. $T = 390 \text{ s}$



6. Odrediti visinu vertikalne cevi z, pri kojoj će se rezervoar prazniti dva puta brže nego kada se isticanje vrši kroz otvor istog prečnika. Početna visina nivoa tečnosti u rezervoaru je $H_0 = 4 \text{ m}$, a prečnik otvora (cevi) je $d = 60 \text{ mm}$. Koeficijent protoka za otvor $\mu = 0,6$. Koeficijent trenja $\lambda = 0,03$. Koeficijent ulaznog gubitka u cev $\xi_u = 0,5$.

Rešenje. Vreme praznjenja kroz otvor je

$$T = \frac{2D^2 H_0}{\mu d^2 \sqrt{2gH_0}} \text{ , a kroz cev } T_1 = \frac{2D^2 H_0}{\mu_1 d^2 \sqrt{2g(H_0 + z) + \lambda z}} \text{ , gde je}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_u + \lambda \frac{z}{D}}} \text{ ; } z = 1,63 \text{ m}$$

4.13. NESTACIONARNO STRUJANJE

B.j. za nestacionarno strujanje nestišljive tečnosti u polju zemljine teže je

$$P_1 + \frac{\rho}{2} V_1^2 + z_1 = P_2 + \frac{\rho}{2} V_2^2 + z_2 + \rho g h_1 (1-z) + \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} dx \text{ .}$$

Poslednji izraz sa desne strane je dobijen zadržavanjem člana lokalnog izvoda brzine po vremenu $\partial v / \partial t$ u trans-

formisanoj Ojlerovoj jednačini 1 njegovim integraljenjem duž strujnice (strujne cevi) dl . Deo

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$$

predstavlja promenu kinetičke energije po jedinici mase koja je usledila zbog prelaska fluidnih deliĉa iz poloŹaja 1 u poloŹaj 2 u istom vremenskom trenutku t . Ćlan

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} dl$$

predstavlja promenu, u jedinici vremena, kinetičke energije po jedinici mase u celokupnoj zapremini strujne cevi od preseka 1 do preseka 2, i uzima se u obzir kadgod brzina zavisi i od vremena; $v = v(l, t)$

Izraz

$$\frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} dl$$

naziva se inercijalnim naporom jer nestacionarnu promenu brzine unosi medju ostale ĉlanove B.j. sa nekim konaĉnim vremenom.

Najjednostavniji sluĉaj nestacionarnog strujanja prikazan je na slici. B.j. za isticanje bez gubitaka kroz cev konstantnog popreĉnog preseka ima oblik

$$\frac{p_a}{\rho} + hg = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{dv}{dt} \cdot l$$

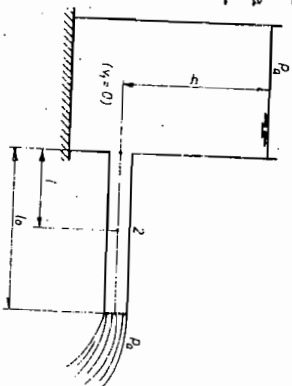
gde je

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} dl = \frac{dv}{dt} \int_1^2 dl = \frac{dv}{dt} \cdot l$$

pošto je brzina v zavisna samo od vremena a ne i od koordinata; $v = v(t)$.

Ako se presek 2 prenese na kraj cevi, dobija se

$$\frac{p_a}{\rho} + hg = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{dv}{dt} \cdot l_0$$



odnosno

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{l_0} (gh - \frac{v^2}{2})$$

Vidi se da je najjaĉe izraĉena nestacionarnost vezana za poĉetni trenutak kada je $v=0$, jer je

$$\frac{dv}{dt} = \frac{gh}{l_0}$$

Pri stacionarnom stanju, kada je $\frac{dv}{dt} = 0$, je

$$v = \sqrt{2gh}$$

Znaĉi, u poĉetnim trenucima isticanja, brzina raste od 0 do $v = \sqrt{2gh}$, a ubrzanje od maksimalne vrednosti opada do nule. Ubrzanje dv/dt je obrnuto srazmerno duŹini cevi l_0 , tj. ukoliko je veća duŹina cevi utoliko je maksimalno ubrzanje manje.

Za pribliŹnu procenu vremena trajanja nestacionarnog strujanja T u poĉetku isticanja, moŹe se smatrati da ubrzanje dv/dt ostaje konstantno, tj.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{gh}{l_0} = \frac{v}{T} = \frac{\sqrt{2gh}}{T}$$

odnosno

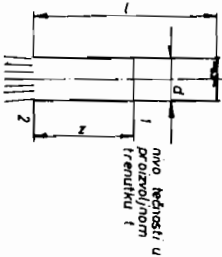
$$T = \frac{v l_0}{gh} = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot \frac{l_0}{h}}$$

- vreme uspostavljanja stacionarnog stanja raste sa duŹinom cevi, a opada sa kvadratnim korenom visine stuba teĉnosti.

Neki jednostavniji problemi ove oblasti dati su u primerima 1 zadacima.

Primeri.

1. Vertikalna cev sa otvorenim gornjim krajem, preĉnika $d=50$ mm i duŹine $l=10$ m, potpuno napunjena vodom, posle otvaranja donjeg kraja poĉinje da se prazni u atmosferu. Odrediti vreme potpunog praznjenja cevi, smatrajući da je tokom celog vremena reŹim teĉenja turbulentan sa kons-



tantnim koeficijentom trenja $\lambda=0,025$.

Rešenje. Za vertikalno naviše orijentisanu osu z i za proizvoljan trenutak t, B.j. sa gubicima i inercionim članom za preseke 1 - 2 glasi

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \lambda \frac{z}{2} \cdot \frac{v^2}{2} + z \frac{dv}{dt}$$

Posle skraćivanja je

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\lambda}{2d} v^2$$

111

$$\frac{dv}{a^2 - v^2} = k dt \quad \text{gde je: } \frac{\lambda}{2d} = k \quad 1 \quad \frac{g}{k} = a^2$$

Integral gornje jednačine sa početnim uslovom (t=0; v=0) je

$$\frac{1}{2a} \ln \frac{a+v}{a-v} = kt \quad 111 \quad v = a \frac{e^{2akt} - 1}{e^{2akt} + 1}$$

Pošto je

$$v = - \frac{dz}{dt}$$

sledi

$$z = at - \frac{1}{ak} \ln(1 + e^{2akt}) + C$$

gde se za određivanje integracione konstante C koristi uslov: t=0, z=0; tako da je

$$C = \frac{1}{ak} \ln 2$$

Zamenjujući C i a² u izraz za z, dobija se

$$z = \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot t - \frac{1}{k} \ln \left(\frac{1 + e^{2\sqrt{gk} \cdot t}}{2} \right) + \frac{1}{k}$$

Vreme potpunog pražnjenja suda T se nalazi iz gornje jednačine, za z=0,

$$\sqrt{gk} \cdot T + k t = \ln \left(\frac{e^{2\sqrt{gk} \cdot T} + 1}{2} \right)$$

111

$$e^{2\sqrt{gk} \cdot T} - 2e^{k t} \sqrt{gk} \cdot T + 1 = 0$$

odakle je

$$T = \frac{1}{\sqrt{kg}} \ln(e^{k t} + \sqrt{e^{2k t} - 1})$$

Ako se zanemari trenje (k=0) posle oslobađanja neodređeni-
sti integrala, dobija se

$$\lim_{k \rightarrow 0} T = \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

tj. vreme slobodnog pada u bezvazdušnom prostoru.

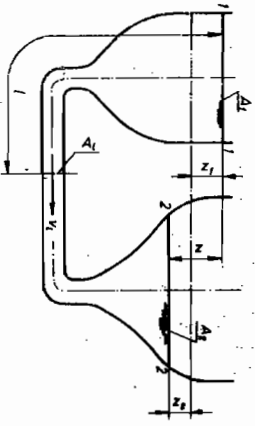
Za brojnu vrednost $k = \frac{0,025}{2 \cdot 0,05} = 0,25$ sledi

$$T = \frac{1}{\sqrt{0,25 \cdot 9,81}} \ln(e^{2 \cdot 5 + \sqrt{e^5 - 1}}) = 2 \text{ s}$$

111 približno, ako se usvoji $e^{2k t} \gg 1 \Rightarrow \sqrt{e^{2k t} - 1} = e^{k t}$,

$$T \approx \frac{1}{\sqrt{kg}} \ln(2e^{k t}) = \frac{1}{\sqrt{kg}} (\ln 2 + k t) = \frac{0,69 + 0,25 \cdot 10}{\sqrt{0,25 \cdot 9,81}} = 2,05 \text{ s}$$

2. Izvesti opšti izraz za slučaj oscilatornog kretanja tečnosti, ako su slobodni nivoi tečnosti promenljivih površina A₁ i A₂ spojeni međusobno cevovodom takodje promenljivog preseka.



Rešenje. Posmatra se slučaj kada su nivoi tečnosti u rezervoarima izvedeni iz ravnotežnog položaja prema slici. B.j. za preseke 1-2 glasi

$$\frac{v_1^2}{2} + z_1 g = \frac{v_2^2}{2} - z_2 g + \int_{z_1}^{z_2} \rho v^2 dl$$

Zbog $z_1 + z_2 = z$ sledi $\frac{dz_1}{dt} + \frac{dz_2}{dt} = \frac{dz}{dt}$

Jednačina kontinuiteta $A_1 v_1 = A_2 v_2$ se transformiše u

$$A_1 \frac{dz_1}{dt} = A_2 \frac{dz_2}{dt}$$

odakle $v_1 = \frac{dz_1}{dt} = \frac{A_2}{A_1} \frac{dz_2}{dt}$ i $v_2 = \frac{dz_2}{dt} = \frac{A_1}{A_2} \frac{dz_1}{dt}$

Zamenom u polaznu jednačinu dobija se

$$-\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + zg = \int_0^z \rho g h_{1-2} dz + \int_0^z \frac{\partial v}{\partial t} dz$$

Brzina v_2 u posmatranom preseku A_2 takodje može da se izrazi preko dz/dt na sledeći način:

$$v_2 A_2 = v_1 A_1 \quad \text{pošto je} \quad v_1 = - \frac{dz}{dt}$$

sledi

$$v_2 = - \frac{A_1}{A_2} \frac{dz}{dt}$$

Tako je

$$\int_0^z \frac{\partial v}{\partial t} dz = - \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \frac{d^2 z}{dt^2} \int_0^z \frac{dz}{A_2}$$

Zamenom u B.j. određuje se diferencijalna jednačina oscilovanja

$$\frac{d^2 z}{dt^2} \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \int_0^z \frac{dz}{A_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} + gz = \int_0^z \rho g h_{1-2}$$

Najčešće su rezervoari povezani cevovodom konstantnog preseka A i dužine L . Tada je

$$\int_0^z \frac{dz}{A} = \frac{L}{A}$$

pa se diferencijalna jednačina uprošćava na

$$\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \frac{L}{A} \frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + gz = \int_0^z \rho g h_{1-2}$$

Površine rezervoara A_1 i A_2 treba da su date u funkciji z . Ako su kolebanja s malim amplitudama, površine A_1 i A_2 se mogu smatrati konstantnim.

3. U čeličnoj cevi prečnika $d=50$ mm i dubljine zida $\delta=5$ mm kreće se voda brzinom $v=1$ m/s. Odrediti povećanje pritiska usled pojave hidrauličnog udara, koji je posledica iznenadnog potpunog zatvaranja preseka cevi. Modul stižljivosti za vodu $\epsilon=2,1 \cdot 10^9$ Pa ; mogući elastičnosti za čelik $E=20,6 \cdot 10^{10}$ Pa ; gustina čelika $\rho=7850$ kg/m³.

Rešenje. Brzina prostiranja udarnog talasa data je formulom Žukovskog

$$a = \sqrt{\frac{\frac{E}{\rho}}{1 + \frac{\epsilon d}{E \delta}}} = \sqrt{\frac{\frac{2,1 \cdot 10^9}{103}}{1 + \frac{2,1 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{20,6 \cdot 10^{10} \cdot 5 \cdot 10^{-3}}}} = 1380 \text{ m/s}$$

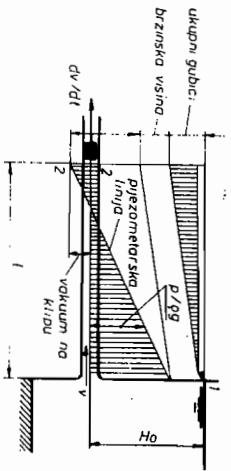
Takodje, prema formuli Žukovskog povećanje pritiska usled hidrauličnog udara je

$$p_u = v \rho c = 1 \cdot 1000 \cdot 1380 = 1380000 \text{ Pa}$$

Zadaci.

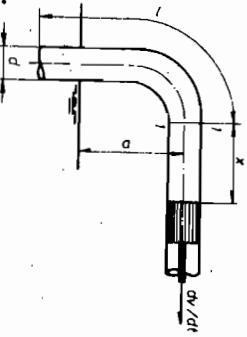
1. Klip se kreće

s konstantnim ubrzanjem $dv/dt=1,5$ m/s² i pomera tečnost u cevi, koja je priključena na rezervoar sa konstantnim nivoom tečnosti $H_0=1,5$ m. Prečnik cevi je konstantan $d=60$ mm. Odrediti pritisak na klip u momentu kada se on kreće brzinom $v=3$ m/s i nalazi se na rastojanju $l=4$ m od rezervoara. Nacrtati pjezometarsku liniju za taj vremenski trenutak. Koeficijent trenja $\lambda=0,03$; koeficijent ulaznog gubitka $\xi_u=0$.



2. Klip, koji se kreće na de-

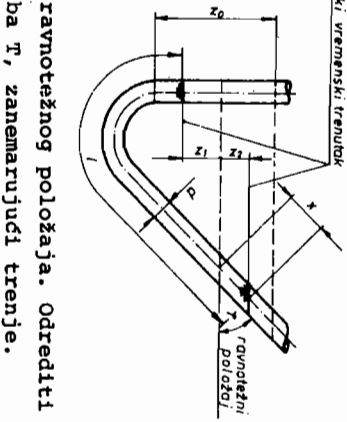
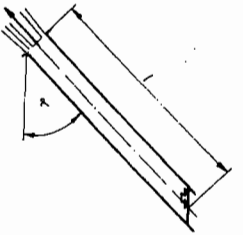
sno od preseka 1 konstantnim ubrzanjem $dv/dt=1,5$ m/s², povlači za sobom tečnost iz rezervoara. Odrediti mesto odvajanja tečnosti od klipa x_{max} ako je napon pare tečnosti $p_k=2$ m VS, a atmosferski pritisak $p_a=10$ m VS. Relativna gustina tečnosti je $\rho_r=0,8$. Dimenzije cevi: $l=5$ m, $d=90$ mm. Koeficijenti: $\lambda=0,03$, $\xi_u=1$. Visina $a=1$ m.



Rešenje. $x_{max} = 7,1$ m

3. Zanimarujući gubitke, odrediti vreme potpunog pražnjenja cevi T, ako je dužina $l=10\text{ m}$, a ugao $\alpha=45^\circ$.

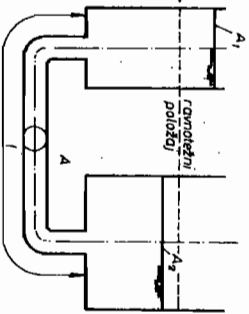
Rešenje. $T = \sqrt{\frac{2l}{g \cdot \sin \alpha}} = 1,68\text{ s}$



4. Tečnost, koja se nalazi u cevi prikazanoj na slici, izvedena je iz ravnotežnog položaja za početnu amplitudu z_0 i osciluje oko ravnotežnog položaja. Odrediti period oscilovanja tečnog stuba T, zanemarujući trenje.

Rešenje. $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(1+\sin \alpha)}}$

5. U cilindričnim sudovima konstantnog poprečnog preseka A_1 i A_2 , nalazi se tečnost koja je izvedena iz ravnotežnog položaja oko koga osciluje. Zanimarujući trenje, odrediti period oscilovanja tečnosti T. Rezervoari su spojeni sa cevi konstantnog poprečnog preseka A, koji je mnogo manji od površina A_1 i A_2 , i dužine L.



Napomena. Iskoristiti krajnju jednačinu izvedenu u primeru 2 i zanemariti član $(dz/dt)^2$.

Rešenje. $T = 2\pi \sqrt{\frac{L A_1 A_2}{g A (A_1 + A_2)}}$

4.14. BERNULIJEVA JEDNAČINA ZA SLOŽENO KRETANJE

za ravan koja se obrće jednoličnom ugaonom brzinom oko nepokretne ose, B.j. izražena preko relativnog stacionarnog kretanja u toj ravni je

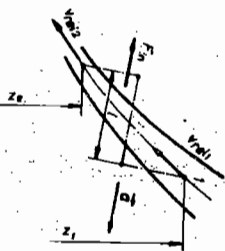
$$z_1 g + \frac{P_1}{\rho} + \frac{v_{rel1}^2}{2} = z_2 g + \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_{rel2}^2}{2} + \int g h_{1,1-2} - \frac{u_2^2 - u_1^2}{2}$$

gde su $u_2=r_2\omega$ i $u_1=r_1\omega$ obimne brzine deljica tečnosti u položajima 2 i 1 ravnih relativnog kretanja.

Ako se ravan relativnog kretanja kreće nekim konstantnim ubrzanjem a; B.j. je data oblikom

$$z_1 g + \frac{P_1}{\rho} + \frac{v_{rel1}^2}{2} = z_2 g + \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_{rel2}^2}{2} + \int g h_{1,1-2} - a x$$

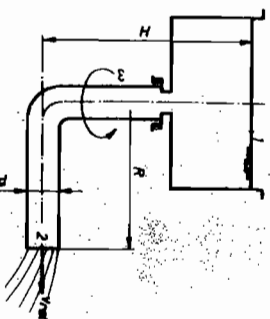
gde je x projekcija relativnog premeštaja preseka 1 i 2 na pravac dejstva sile inercije.



Primeri i zadaci ovog poglavlja se odnose samo na isticanje tečnosti iz suda koji se relativno kreće, jer problemi vezani za relativna strujanja kroz kanale spadaju u oblast hidrauličnih mašina.

Primeri.

1. Odrediti relativnu brzinu v_{rel} isticanja tečnosti iz suda koji se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω . Poznata je dužina cevi kroz koju se vrši isticanje i visina nivoa tečnosti u sudu. Gubici se zanemaruju.



Rešenje. B.j. izražena preko obrtnog koordinatnog sistema (sistem relativnog kretanja) za preseke 1-2 glasi

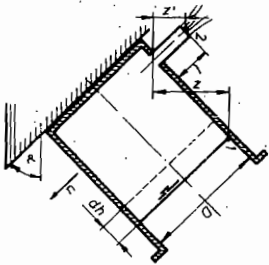
$$\frac{P_a}{\rho} + Hg = \frac{P_a}{\rho} + \frac{v_{rel2}^2}{2} - \frac{R^2 \omega^2}{2}$$

$$v_{rel2} = \sqrt{2gH + R^2 \omega^2}$$

Odatle je

2. Cilindrični rezervoar

prečnika $D=0,8$ m, klizi bez trenja niz strmu ravan $\alpha=30^\circ$. U početnom trenutku u rezervoaru je $V=0,6$ m³ tečnosti. Ova zapremina, tokom kretanja rezervoara, ističe kroz cev dužine l koja se nalazi na boku pri dnu suda. Površina preseka cevi je $A=6$ cm², koeficijent protoka kroz cev (cevni naglavak) je $\mu=0,7$. Gubici pri isticanju se zanemaruju. Odrediti koliko će tečnosti ostati u rezervoaru posle $t=60$ s.



Rešenje. Pri klizanju niz strmu ravan, bez trenja, slobodna površina tečnosti je paralelna strmoj ravni. Prema B.j. za tačke 1 i 2

$$\frac{P_a}{\rho} + (z-z')g = \frac{P_a}{\rho} + \frac{v_{rel2}^2}{2} - az$$

za $a=gs \sin \alpha$ i $z'=ls \sin \alpha$

teorijska brzina isticanja vode kroz naglavak je

$$v_{rel2} = \sqrt{2g(z-ls \sin \alpha + ls \sin \alpha)} = \sqrt{2gz}$$

a stvarna

$$v_{rel2} = \mu \sqrt{2gz}$$

Protok

$$Q = \mu A \sqrt{2gz}$$

Iz relacije

$$- \frac{D^2 \pi}{4} \cdot dh = Q dt \quad \text{gde je } dh = \frac{dz}{\cos \alpha}$$

određuje se vreme isticanja

$$T = \frac{D^2 \pi}{4} \cdot \frac{1}{\mu A \sqrt{2g}} \cdot 2(\sqrt{z_0} - \sqrt{z_1})$$

odnosno, odatle

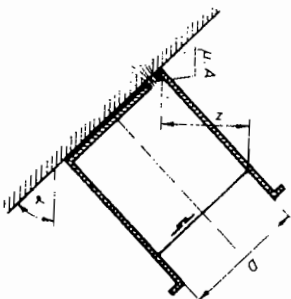
$$\sqrt{z_1} = \sqrt{z_0} - \frac{2\mu A \sqrt{2g}}{D^2 \pi} \cdot T \quad \text{gde je } z_0 = \frac{4V}{D^2 \pi} = \frac{4 \cdot 0,6}{0,8^2 \pi} = 1,194 \text{ m}$$

$$V' = \frac{D^2 \pi}{4} \frac{z_1}{\cos \alpha} = \frac{D^2 \pi}{4 \cos \alpha} (\sqrt{z_0} - \frac{2\mu A \sqrt{2g}}{D^2 \pi} \cdot T)^2 = \frac{0,8^2 \pi^2}{4 \sqrt{3}} (\sqrt{1,194} - 2 \cdot 0,7 \cdot 0,0006 \sqrt{19,62} \cdot 60)^2 = 0,552 \text{ m}^3$$

Zadaci.

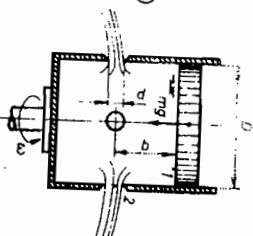
1. Cilindrični rezervoar

prečnika $D=0,8$ m klizi bez trenja niz strmu ravan $\alpha=30^\circ$. U početnom trenutku u rezervoaru je $V=0,6$ m³ tečnosti. Ova zapremina, tokom kretanja rezervoara, ističe kroz otvor na dnu kako je prikazano na slici. Površina otvora je $A=6$ cm² a koeficijent protoka $\mu=0,7$. Odrediti koliko će tečnosti ostati u rezervoaru posle $t=60$ s.



Rešenje. Za prvi :

2. Iz suda prečnika $D=0,6$ m koji se obrće oko vertikalne ose nagonom brzinom $\omega=10$ s⁻¹ ističe voda kroz četiri bočna otvora ($d=10$ mm, $\mu=0,6$, $\rho=1000$ kg/m³) određiti vreme za koje će ukupna zapremina vode iznad otvora isteći ako se oni nalaze na dubini $b=0,3$ m ispod klipa mase $m=282$ kg.



Rešenje. $T = 110$ s

4.15. VRTLOŽNO KRETANJE I RADIJALNA STRUJA

Vrtložno kretanje i radijalna struja su primeri dvodimenzijuskog strujanja u kojima strujnice nisu paralelne. Pri vrtložnom kretanju strujnice su zakrivljene usled dejstva centrifugalne sile koja je uravnotežena sa rasporedom pritiska kroz fluid. Radijalnu struju karakteriše kretanje fluida od ili ka centru.

Postoje četiri vrste vrtloga:

- a) Zarobljen vrtlog. Fluid se obrće konstantnom ugaonom brzinom u vidu čvrstog tela (v.poglavlje 2.6.2.).
- b) Slobodan (cilindrični) vrtlog. Fluid se kreće uzduž strujnica koje su horizontalni koncentrični krugovi i ne postoji promena energije struje sa poluprečnikom.
- c) Slobodan spiralni vrtlog. Ovo je kombinacija slobodnog cilindričnog vrtloga sa radijalnom strujom.
- d) Složeni vrtlog. Fluid se obrće kao čvrsto telo u centru, a spolja kao slobodan vrtlog.

Primeri.

1). Odrediti izraz kojim se predstavlja promena energije kroz horizontalne fluidne strujnice.

Za U cev sa vodom, koja se obrće sa $n=60 \text{ min}^{-1}$ oko ose na razdaljini 375 mm i 75 mm od krakova U cevi, odrediti razliku nivoa vode u kracima.

Rešenje.

Posmatra se izdvojen elementarni fluidni deo dužine Δr u horizontalnoj ravni jedinične visine, ograničen sa dve strujnice (v. sliku). Centrifugalna sila koja se uravnotežava sa razlikom pritiska je

$$dF_c = \rho \Delta r \frac{v^2}{r},$$

a) jednačina ravnoteže daje

$$\rho \Delta r \frac{v^2}{r},$$

tj.

$$\frac{\delta p}{\rho} = v^2 \frac{\delta r}{r}.$$

Promena pritiska može da se izrazi pijezometarskom visinom kao

$$\frac{dh}{dr} = \frac{v^2}{gr}.$$

Prelazeći sa strujnice poluprečnika r na strujnicu poluprečnika $r+\delta r$ promena kinetičke energije, izražena takođe visinom stuba tečnosti, je

$$\frac{(v+\delta v)^2 - v^2}{2g} = \frac{v}{g} \frac{\delta v}{r},$$

zanemarujući proizvod malih vrednosti.

Promena ukupne energije sa poluprečnikom je

$$\frac{dh}{dr} = \frac{v^2}{gr} + \frac{v}{g} \frac{dv}{dr} = \frac{v}{g} \left(\frac{v}{r} + \frac{dv}{dr} \right).$$

Za obrtanje u vidu krutog tela ugaonom brzinom

$\omega = \frac{v}{r}$ važi:

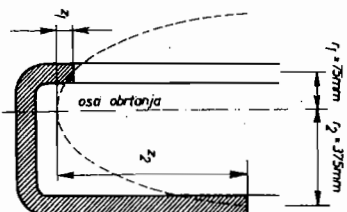
$$v = \omega r; \quad \frac{dv}{dr} = \omega \quad \text{i} \quad \frac{v}{r} = \omega,$$

te promena ukupne energije dovodi do

$$\frac{dh}{dr} = \frac{\omega r}{g} 2\omega = \frac{2\omega^2 r}{g}$$

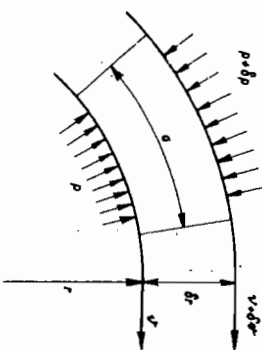
$$h = \frac{\omega^2 r^2}{g} + C.$$

Sa druge strane ukupna energija je (atmosferski pritisak nije uključen u prethodnom razmatranju)



$$\frac{p_m}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = \frac{p_m}{\rho g} + \frac{r^2 \omega^2}{2g} + z$$

te je,



$$\frac{P_m}{\rho g} + \frac{r^2 \omega^2}{2g} + z = \frac{\omega^2 r^2}{g} + C$$

Na slobodnoj površini je $\frac{P_m}{\rho g} = 0$, pa se iz gornje jednačine određuje jednačina slobodne površine

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C$$

Za problem prikazan na slici važi

$$z_2 - z_1 = \frac{\omega^2}{2g} (r_2^2 - r_1^2) = \frac{(2\pi)^2}{2g} (0,375^2 - 0,075^2) = 0,272 \text{ m}$$

Napomena. Vrtlog je zarobljen u sudu malih dimenzija. Ovakvo vrtložno kretanje ne može da se formira usamljeno u neograničenom fluidnom prostoru.

2. Naći izraz koji određuje brzinu na datom poluprečniku u slobodnom vrtlogu, a zatim odrediti razliku pritiska između dve tačke na istoj horizontalnoj ravni.

U takvom vrtlogu je tačka na slobodnoj površini i poluprečniku 150 mm, 75 mm ispod nivoa slobodne površine na zidovima velikog suda u kome je formiran slobodan vrtlog. Koliki je nivo slobodne površine na poluprečniku 300 mm?

Rešenje.

Slobodan cilindrični vrtlog ima strujnice u obliku koncentričnih krugova i ne postoji promena energije sa poluprečnikom.

$$\frac{dH}{dr} = 0$$

Iz prethodnog primera je

$$\frac{dH}{dr} = \frac{V}{g} \left(\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} \right)$$

tj.

$$\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} = 0$$

ili

$$\frac{dV}{V} + \frac{dr}{r} = 0$$

što dovodi do

$$\log(Vr) = \text{konst.}$$

Takođe je

$$vr = C$$

gde C označava jačinu vrtloga. Za bilo koji poluprečnik r brzina je (obimska)

$$v = \frac{C}{r}$$

Za dve koncentrične strujnice na poluprečnicima r_1 i r_2 sa brzinama v_1 i v_2 nema promene u energiji na horizontalnim površinama te je

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

odnosno

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{C^2}{2g} \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right)$$

Ako se vrtlog formira sa slobodnom površinom, tada takođe nema promene ukupne energije pa važi

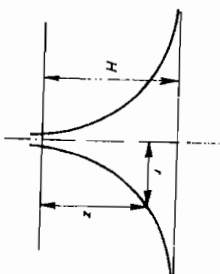
$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} = H$$

Kako je $P_1 = P_2 = P_a$

$$z_1 - z_2 = \frac{C^2}{2g} \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right)$$

ili za $r_1 = 0$; $z_1 = H$

$$H - z = \frac{C^2}{2gr^2}$$



Slobodna površina je hiperboličnog oblika sa vertikalnom osom u osi obrtanja i horizontalnim nivoom $z = H$, kako je pokazano na slici.

Za date podatke je

$$H - z = 0,075 \text{ m} \quad \text{kada je } r = 0,15 \text{ m}$$

$$\text{odnosno} \quad 0,075 = \frac{C^2}{2g \cdot 0,15^2} \quad \therefore \quad \frac{C^2}{2g} = 0,00169$$

Kada je $r = 0,3 \text{ m}$, slobodna površina se snizuje za

$$H - z = \frac{C^2}{2g \cdot 0,3^2} = 0,0188 \text{ m} = 18,8 \text{ mm}$$

Napomena. Ovako vrtložno kretanje se formira u neograničenom ili velikom konačnom, fluidnom prostoru. Ako se slobodni vrtlog uhvati i izoluje zidovima suda nestaje ili, ako se podesi da se sud i obrće, prelazi u zarobljen vrtlog. Sve vrtložne pojave vezane za opticanje teča, bez obzira na mesto i trenutak nastanka su najčešće slobodni vrtlozi (vezani vrtlog, početni vrtlog i dr. v. glavu 12.).

3. Odnediti izraz za razliku pritiska između dve tačke na rastojanjima r_1 i r_2 kada fluid struji radijalno iz ili prema centru. Zanimariti otpor trenja.

Dve nepokretne horizontalne ravne ploče spoilaš-njih prečnika 0,375 m su na rastojanju jedna od druge 12,5 mm. Kroz vertikalnu cev prečnika 50 mm dotiče $0,41 \frac{m^3}{min}$ vode i radijalno-prema periferiji ploča otiče u atmosferu. Struja je radijalna i raspored pritiska, kroz prostor između ploča na bilo kom poluprečniku, može da se zanemari. Odnediti: a) apsolutni pritisak na ulazu i b) rezultujuću silu na gornju ploču. Atmosferski pritisak je 101 kPa.

Rešenje.

Struja je radijalna,

pa prema tome strujnice su prave, odnosno poluprečnici krivina su beskonačni. Odatle sledi

$$\frac{dH}{dr} = 0,$$

ili za sve strujnice

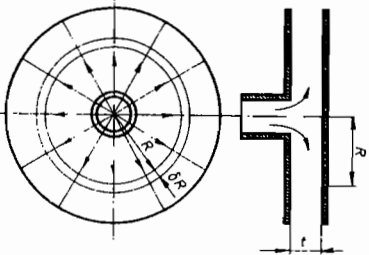
$$H = \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = \text{konst.}$$

odnosno

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}.$$

Koristeći se jednačinom kontinuiteta $Q = 2\pi R_1 v_{r1} = 2\pi R_2 v_{r2}$ sledi

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{Q^2}{8\pi^2 r^2 g} \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right).$$



Ovakav hiperbolički raspored pritiska (prema r) je isti kao i za slobodan cilindrični vrtlog.

Zamena datih vrednosti odredjuje

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{(6,48 \cdot 10^{-3})^2}{8\pi^2 (12,5 \cdot 10^{-3})^2 g} \left[\frac{1}{(0,1875)^2} - \frac{1}{(0,025)^2} \right] = -0,607 \text{ mV.S.}$$

Apsolutni pritisak na ulazu je

$$P_1 = 101000 - 0,607 \cdot 9,81 \cdot 10^3 = 95040 \text{ Pa.}$$

Rezultujuća sila pritiska na kružnom prstenu poluprečnika R širine δR gornje ploče je odredjena sa

$$dF = (p - p_a) 2R\pi \delta R = \frac{\rho g Q^2}{8\pi^2 r^2 g} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) 2R\pi \delta R.$$

Integralneći poslednji izraz između $R=R_1$ i $R=R_2$ i dodajući silu usled konstantnog pritiska p_m na površini $R_1^2 \pi$ gornje ploče i silu usled promene pravca kretanja struje, dobija se ukupna sila s kojom voda i vazduh deluju na gornju ploču

$$F = \frac{\rho Q^2}{4\pi^2 g} \left[\left(\frac{dR}{R} \frac{R dR}{R^2} \right) + \pi R_1^2 (p_a - p_1) - \rho Q v_1 \right]_{R_1}^{R_2},$$

$$F = \frac{\rho Q^2}{4\pi^2 g} \left[\ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{R_2^2 - R_1^2}{2R_2^2} \right] + \pi R_1^2 (p_a - p_1) - \frac{\rho Q^2}{2\pi R_1^2} F,$$

$$F = \frac{10^3 (6,48 \cdot 10^{-3})^2}{4\pi (12,5 \cdot 10^{-3})^2 g} \left[\ln 7,5 - \frac{0,1875^2 - 0,025^2}{2 \cdot 0,1875^2} \right] +$$

$$+ \pi \cdot 0,025^2 \cdot 5960 - \frac{10^3 (6,84 \cdot 10^{-3})^2}{2\pi \cdot 0,025 \cdot 12,5 \cdot 10^{-3}},$$

$$\uparrow F = 23,9(2,015 - 0,472) + 11,72 - 23,8 = 24,8 \text{ N}$$

Rezultujuća sila deluje odozgo naniže.

4. Šta je slobodan spiralni vrtlog? U takvom vrtlogu radijalna brzina je $0,9 \frac{m}{s}$ prema centru, u tački A, na poluprečniku $0,3 \text{ m}$ od ose. Obimna brzina u tački B na $0,9 \text{ m}$ od ose je $0,3 \frac{m}{s}$. Odrediti rezultujuću brzinu u A i ugao koji ona zaklapa sa poluprečnikom. Takođe odrediti razliku pritiska između A i B ako su obe tačke na istom nivou.

Rešenje.

Iz primera 2 i 3 se vidi da su isti rasporedi pritiska i brzina (prema poluprečniku) za slobodan cilindrični vrtlog i radijalno strujanje, te obe vrste kretanja mogu da se ostvare istovremeno. Ovakvo strujanje je u obliku spiralnog vrtloga i pokazano je na slici.

Prema primeru 2 $v_{rA} = \text{const.}$

Prema primeru 3 $v_{\theta A} = \text{const.}$,

te je

$$v_{rA} r_A = v_{rB} r_B$$

$$v_{rA} = v_{rB} \frac{r_B}{r_A} = 0,9 \frac{0,3}{0,9} = 0,3 \frac{m}{s}$$

i

$$v_{\theta A} r_A = v_{\theta B} r_B$$

$$v_{\theta A} = v_{\theta B} \frac{r_B}{r_A} = 0,3 \frac{0,9}{0,3} = 0,9 \frac{m}{s}$$

Rezultujuća brzina u A je

$$v = \sqrt{v_{rA}^2 + v_{\theta A}^2} = \sqrt{0,3^2 + 0,9^2} = 1,273 \frac{m}{s}$$

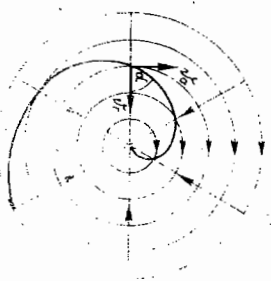
a ugao α između strujnice i poluprečnika

$$\text{tg} \alpha = \frac{v_{\theta A}}{v_{rA}} = \frac{0,9}{0,3} = 1 \quad \therefore \alpha = 45^\circ$$

Pošto nema promene energije od A do B iz Bernulijeve jednačine sledi za ($z_A = z_B$)

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + z_B$$

$$\frac{P_B - P_A}{\rho g} = \frac{(0,9^2 + 0,9^2) - (0,3^2 + 0,3^2)}{2g} = 73,4 \text{ mm.}$$



5. Fluid struji uzduž kružnih horizontalnih strujnica. Ako su duž strujnice na poluprečniku r pijeziometarska visina h i tangencijalna brzina v_θ , pokazati da je promena h u radijalnom pravcu data sa

$$\frac{dh}{dr} = \frac{v_\theta^2}{gr}$$

Složeni vrtlog u vodi je sastavljen od zarobljenog vrtloga do poluprečnika $0,15 \text{ m}$ i slobodnog vrtloga koji opkoljava zarobljeni. Dubina centra zarobljenog vrtloga je $0,6 \text{ m}$ ispod površine vode na $r \rightarrow \infty$. Odrediti ugaonu brzinu zarobljenog vrtloga.

Rešenje.

Složeni vrtlog je pokazan na slici. Prema prvom primeru je

$$z = \frac{r^2 \omega^2}{2g}$$

Iz drugog primera $v = \frac{C}{r}$ sledi

$$d = \frac{C^2}{2gr^2} = \frac{v^2}{2g}$$

Ukupna dubina je

$$h = z + d = \frac{r^2 \omega^2}{2g} + \frac{v^2}{2g}$$

Pošto je brzina na poluprečniku r , $v = r\omega$, sledi

$$h = \frac{r^2 \omega^2}{g}$$

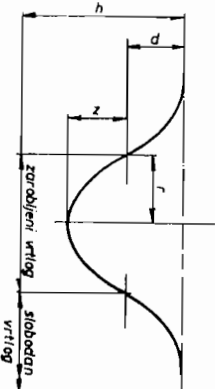
$$0,6 = \frac{0,15^2 \omega^2}{g}; \quad \omega = 16,17 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

Zadatak.

Zarobljeni vrtlog $0,3 \text{ m}$ prečnika se obrće sa 120 min^{-1} i okružen je slobodnim vrtlogom beskonačnog prečnika. Odrediti visinsku razliku slobodne površine $r \rightarrow \infty$ i centra vrtloga.

Rešenje.

$$= 0,3$$



4.16. KONTROLNA PITANJA

1. Kakva je razlika između Ojlerove dinamičke jednačine za savršen fluid i Bernulijeve jednačine?
2. Kakav je oblik Koši-Lagranževog integrala i kakvo se strujanje njime opisuje?
3. Kakve su razlike između Koši-Lagranževog integrala za nestišljivo strujanje, Bernulijevog integrala Ojlerovih jednačina za nestišljivo strujanje i Koši-Lagranževog integrala za nestišljivo i stacionarno strujanje?
4. Kakav je oblik Bernulijeve jednačine za strujanje realne tečnosti?
5. Pod kojim uslovima je izvedena Bernulijeva jednačina za složeno kretanje?
6. Kakav je karakter pojedinih članova u Bernulijevoj jednačini?
7. Kakav je oblik Bernulijeve jednačine ako je u njoj izražena energija po jedinici težine protočnog fluida?
8. Postoji li razlika u pokazivanju Pitove i Prantlove cevi u slobodnoj vazdušnoj strujii?
9. Šta predstavlja korekcionni faktor kinetičke energije?
10. U kom slučaju treba obraćunati korekcionni faktor kinetičke energije?
11. Kada se javljaju lokalni gubici?
12. Koja vrsta gubitaka postoji pri strujanju savršenog fluida?
13. U koju vrstu gubitaka spada izlazni gubitak, kada se on javlja i kako se može smanjiti?
14. Pri računju struje, da li su pritisci isti u svim računima (na mestu računja)?
15. Od kojih veličina zavisi koeficijent trenja λ pri strujanjima sa malim i velikim Re brojevima?
16. Kako se definišu hidraulički prečnik i hidraulički radijus?
17. Šta je karakteristika zatvorenog (horizontalnog ili vertikalnog) cevnog sistema?
18. Koje se veličine nalaze u izrazu za snagu turbomašine?
19. Šta je pjezometarski pritisak, a šta pjezometarska linija?
20. Da li je pjezometarski pritisak relativna veličina?

21. Objasniti kako se uštedi energija fluide struje ako se pri isticanju u rezervoar na kraju cevine deonice postavi difuzor?
 22. Na kojim mestima cevnog sistema treba očekivati najniže pritiske?
 23. Koje osnovne jednakosti treba upotrebiti pri rešavanju problema iz složenih cevovoda?
 24. Kod isticanja kroz otvore definisani su koeficijenti brzine, koeficijenti kontrakcije i koeficijenti gubitaka. Objasniti njihov smisao.
 25. Navesti metode za određivanje protoka.
 26. Objasniti fizički smisao člana $\int_1^2 (\partial v / \partial t) dt$ B. J. za nestacionarno strujanje.
 27. Kakvu je zavisnost dobio Rejnolds za određivanje režima kretanja tečnosti u cevi?
 28. Koje formule se koriste za određivanje koeficijenta trenja λ pri laminarnom i turbulentnom strujanju?
 29. Kakva je razlika u karakteru isticanja tečnosti kroz otvor u tankom zidu i otvor čiji su zidovi velike debljine?
 30. Objasniti značaj naglavaka.
 31. Kakav je oblik naglavka najefikasniji i zbog čega?
- Određiti tačan odgovor
32. Poznavanje strujanja zahteva rešavanje jednačine

$$gz + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const}, \text{ koja se odnosi na:}$$
 - a) Stacionarno, nekompresibilno strujanje bez trenja; uzduž strujnice
 - b) Jednoliko, strujanje bez trenja uzduž strujnice, gde je ρ funkcija od pritiska
 - c) Stacionarno, jednoliko, nekompresibilno strujanje uzduž strujnice
 - d) Stacionarno strujanje bez trenja uzduž strujnice, gde je ρ funkcija od pritiska
 - e) Ni jedan od ovih odgovora.
 33. Jednačina $z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = C$ ima dimenziju

- a) $\frac{Nm}{s}$; b) N ; c) $\frac{Nm}{m}$; d) $\frac{mN}{m^2}$; e) $\frac{Nm}{N}$
34. U kojim od sledećih slučajeva je moguće dobiti strujanje od nižeg prema višem pritisku:
- Strujanje kroz konvergentnu sekciju
 - Adijabatsko strujanje u horizontalnoj cevi
 - Strujanje tečnosti naviše kroz vertikalnu cev
 - Strujanje vazduha kroz vertikalnu cev naniže
 - Nemoguće je u cevnim deonicama konstantnog preseka.
35. Izgubljena energija pri turbulentnom strujanju kroz cev:
- Menja se proporcionalno brzini
 - Menja se inverzno kvadratu brzine
 - Menja se inverzno kvadratu prečnika
 - Zavisí od orijentacije cevovoda
 - Menja se približno sa kvadratom brzine.
36. Gubitak pri naglom proširenju je izražen sa:
- $\frac{v_1^2 - v_2^2}{2}$; b) $\frac{v_1 - v_2}{2}$; c) $\frac{v_1^2 - v_2^2}{2g}$; d) $\frac{(v_1 - v_2)^2}{2}$
37. Ako se gublíci zanemare, intenzitet pritiska u najvišoj tački sifona:
- Je najmanji
 - Zavisí samo od visine sifona iznad rezervoara
 - Je nezavisan od dužine nizvodnog kraka
 - Je nezavisan od protoka kroz sifon
 - Je nezavisan od gustine fluida.
38. Jednačina kontinuiteta za idealan fluid:
- Potvrđuje da veličina ulaznog fluida u bilo koju malu zapremínu mora biti jednaka nuli
 - Dokazuje da je energija konstantna uzduž struje
 - Dokazuje da je energija konstantna svugde u fluidu
 - Odnosi se samo na nevrtiložno strujanje
 - Ukazuje na postojanje potencijala brzine.
39. Reynoldsov broj je dat sa:
- $\frac{vD}{\nu}$; b) $\frac{vDn}{\rho}$; c) $\frac{vD\rho}{\nu}$; d) $\frac{vD}{n}$
40. Tangencijalni napon pri proticanju kroz okruglu cev je:
- Konstantan kroz strujni presek
 - Nula na zidu i povećava se linearno do centra

- Paraboličan kroz ceo presek
 - Nula u centru i menja se linearno sa poluprečnikom
 - Ni jedan od ovih odgovora.
41. U turbulentnoj struji kroz hrđavu cev koeficijent trenja je isti kao i za glatku cev:
- U zoni potpune turbulencije
 - Kada je koeficijent trenja nezavisan od Re broja
 - Kada je hrđavost mnogo manja od debljine laminarnog stroja
 - Svugde u prelaznoj zoni
 - Gde je koeficijent trenja konstantan.
42. Koeficijent trenja u turbulentnoj struji kroz glatku cev zavisi od sledećih veličina:
- v, D, ρ, L, n ; b) Q, L, n, ρ ; c) v, D, ρ, n ; d) v, D, n, ρ ; e) ρ, L, D, Q, v
43. U datoj hrđavoj cevi izgubljena energija zavisi od:
- λ, v, b ; b) n, ρ ; c) Re ; d) samo od Q ; e) ni jedan od odgovora.
44. U potpuno turbulentnoj zoni, hrđavih cevi:
- Hrđave i glatke cevi imaju isti koeficijent trenja
 - Laminaran sloj prekriva sve neravnine
 - Koeficijent trenja zavisi samo od Re brojeva
 - Pad pritiska se menja sa kvadratom brzine
 - Koeficijent trenja ne zavisi od relativne hrđavosti.
45. Jedinice Ojlerove jednačine kretanja su date sa:
- Sila po jedinici mase
 - Energija po jedinici težine
 - Sila po jedinici težine
 - Ni jedan od ovih odgovora.
46. Bernulijeva jednačina za stacionarno strujanje idealnog fluida pokazuje da je:
- Brzina konstantna uzduž strujnice
 - Energija je konstantna uzduž strujnice, ali može da se menja kroz strujnicu
 - Pri porastu brzine, intenzitet pritiska raste
 - Energija je konstantna kroz fluid.

47. Bernulijeva jednačina za realan fluid obuhvata energijska dejstva

- a) spoljašnjih sila, sila pritiska, viskoznih sila, sila težine,
- b) elastičnih sila, sila u polju zemljine težine, sila pritiska, sila trenja,
- c) inercijskih sila, spoljašnjih sila, sila pritiska,
- d) viskoznih sila, spoljašnjih sila, sila pritiska, inercijskih sila,
- e) nijedan od ovih odgovora.

48. Bernulijev integral Ojlerove jednačine za strujanje stišljivog fluida razlikuje se od Bernulijeve jednačine za sledeće članove

- a) inercijske sile, sile pritiska,
- b) viskozne sile, inercijske sile,
- c) viskozne sile, spoljašnje sile,
- d) spoljašnje sile,
- e) spoljašnje sile, elastične sile,
- f) nijedan od ovih odgovora.

GLAVA 5 JEDNAČINA O PROMENI KOLIČINE KRETANJA

Drugo snažno oruđe za rešavanje inženjerskih problema dobija se primenom jednačine o promeni količine kretanja. Ova jednačina se, najčešće, upotrebljava da bi se odredila sila kojom fluidna struja dejstvuje na površinu koja je ograničava.

Iako je poreklo Bernulijeve jednačine i jednačine o promeni količine kretanja isto - II Njutnov zakon, jednačina o promeni količine kretanja ima manje ograničenja od B.j. jer: važi za strujanja koja mogu biti kompresibilna i nekompresibilna, sa i bez trenja, stacionarna i nestacionarna; i ne mora da se odnosi samo na promene duž strujnice.

Treba imati u vidu da II Njutnov zakon, odnosno jednačina o promeni količine kretanja važi samo za inercijske koordinatne sisteme, tj. sisteme koji su nepokretni ili se kreću jednolikom brzinom. Najopštiji oblik jednačine je dat u poglavlju 5.4.

Ovde nije obuhvaćena primena jednačine na probleme gravitacionog sloja i kompresibilnog fluida, što se razmatra kasnije.

5.1. OSNOVNA DEFINICIJA JEDNAČINE O PROMENI KOLIČINE KRETANJA U MEHANIČI FLUIDA I PRIMEDE U VEZI NJENE PRIMENE

Njutnova definicija sile može da se interpretira izrazom

$$\frac{d}{dt}(mv) = F.$$

Izraz u zagradi se naziva količinom kretanja, i predstavlja celinu zbog toga što je masa mera za inerciju nekog tela, tako da se ona i mora izraziti preko kretanja. Gornja definicija sile je usledila zbog povezanosti mase i brzine. Masa je u opš-

tem slučaju funkcija od vremena, položaja i brzine $m = m(t; x; y; z; v)$. Samo za specijalan slučaj $m = \text{const.}$ važi dobro poznata formula $\vec{F} = m\vec{a}$.

Bitna razlika jednačine o promeni količine kretanja u mehanici čvrstog tela i mehanici fluida je ta, što se ravnoteža fluida izvodi u akciji koja nije završena u jednom periodu vremena, nego u promeni koja se beskrajno dugo prostire.

Jednačina o promeni količine kretanja - u mehanici fluida se definiše za određenu kontrolnu zapreminu - data je oblikom

$$\dot{m} = \rho Q (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

i glasi: Promena količine kretanja između dva preseka (1 i 2) ekvivalentna je sumi sila koje su uzrok toj promeni. U jednaki je: $\dot{m}\vec{v}$ - zbir svih aktivnih sila - zapreminske sile (sila zemljine teže, Njutnova privlačna sila) i sile

pritisaka - koje delimo u spoljašnje i unutrašnje. Spoljašnje sile potiču od masa koje su van naše kontrolne zapremine. Unutrašnje sile se nalaze u masi posmatrane zapremine; njihovo uzajamno dejstvo se poništava, pa je njihov zbir jednak nuli za celu zapreminu; - zbir svih sila reakcija koje se takodje dele na spoljašnje i unutrašnje ali i ovde ostaju reakcije od spoljašnjih masa, reakcije grančnih površina, sile s kojim se grančne površine suprotstavljaju kretanju fluida;

- ρ [kg/m³] - gustina fluida,
- Q [m³/s] - protok fluida,
- v_1 [m/s] - brzina fluida u određenom preseku 1.

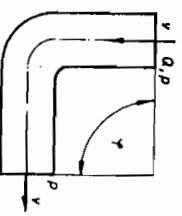
za primenu jednačine neophodno je uočiti fluidni element, u kome dolazi do promene nekih od navedenih veličina, pa ga zatim ograničiti od ostale sredine grančnim ili zamršljenim površinama - preseccima. Uz pretpostavku da je tok strujnica poznat, presecc se postavljaju normalno na njih, a uticaji sredina ispred i iza se zamenjuju silama pritiska $p_1 A_1$ koje su uperene ka kontrolnoj zapremini.

Postupak određivanja sile kojom fluid deluje na zidove cevi biće predstavljen na primeru običnog cevnog kolena.

Primer

Kroz cevno koleno $\phi=90^\circ$ konstantne površine preseka A , protiče konstantnom brzinom v , količina fluida Q , gustine ρ .

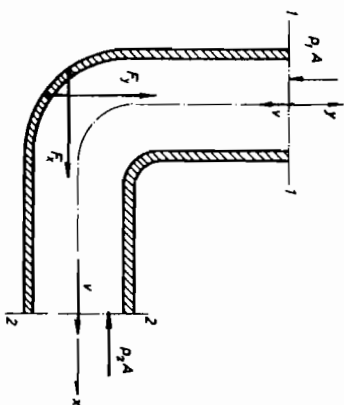
Ako se pritisci na ulazu i izlazu iz kolena smatraju isti $p_1 = p_2 = p$, odrediti silu sa kojom fluid deluje na zidove kolena.



Rešenje.

1. Izdvoji se kontrolna zapremina (presecc 1-1, 2-2 i zidovi kolena $\phi=90^\circ$; indeks 1-1 se vezuje za presecc koji prima fluid, a 2-2 za presecc kroz koji fluid napušta kontrolnu zapreminu).
2. Označe se smerovi brzina u ulaznom i izlaznom preseku i ucrtaju se smerovi pritishnih sila koje zamenjuju uticaj fluidne struje ispred i iza kolena.
3. Proizvoljno se pretpostave smerovi koordinatnih osa x i y. Ti smerovi važe i za levu stranu (sile) i za desnu stranu (brzine) jednačine o promeni količine kretanja.
4. Pretpostave se smerovi reakcija veza. To su sile sa kojima veza (luk, mlaznik, ploča i dr.) deluje na fluid ($F_x; F_y$).

Sada se mogu napisati jednačine o promeni količine kretanja za ose x i y.



$$\Sigma X = \rho Q (v_{2x} - v_{1x})$$

$$-\rho_2 A + F_x = \rho Q (v - 0)$$

$$F_x = \rho Q v + pA.$$

$$\Sigma Y = \rho Q (v_{2y} - v_{1y})$$

$$-\rho_1 A + F_y = \rho Q (0 + v)$$

$$F_y = \rho Q v + pA.$$

Pošto je u rezultatu za F_x i F_y dobijena pozitivna vrednost, reakcije veza su dobro pretpostavljenog smera. Sile F'_x i F'_y sa kojom fluid deluje na zidove kolena su istog intenziteta kao i određene sile reakcije kolena, samo su suprotnog smera.

Dakle $F'_x = \rho Q v + pA$ i $F'_y = \rho Q v + pA$ a rezultujuća sila

$$F' = (\rho Q v + pA) \sqrt{2}$$

Primebde za određivanje napadne tačke rezultujuće sile su date u 5.2.2. primer 1.

U zadacima se najčešće zanemaruje, ili naknadno obratuna sava sila težine fluida. U gornjem primeru bi ona figurisala sa -mg na levoj strani jednačine napisane za y-osu, gde je sa m označena masa fluida u kolenu između preseka 1-1 i 2-2. Nekoliko uočenih tipova problema koji se rešavaju promenom jednačine o promeni količine kretanja biće odvojeni zadacima za samostalno rešavanje.

5.2. NEPOKRETNII ELEMENTI

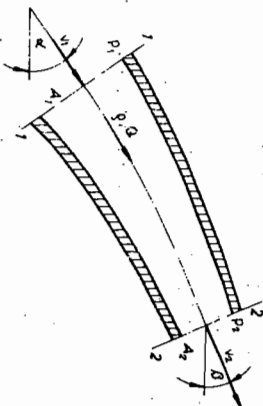
Sve potrebne napomene su obuhvaćene prethodno rešenim primerom. U zadacima koji slede posvećena je pažnja uticaju spoljašnjeg - najčešće atmosferskog pritiska p_a , određivanju "čiste reakcije veze".

5.2.1. NEPOKRETNII ELEMENTI SA JEDNIM OLAZOM I JEDNIM IZLAZOM FLUIDA

Primeri

1. Naći opšti izraz za silu kojom vodena struja deluje na zidove kolena promenljivog preseka. Poznate veličine su:

p_1, p_2 - pritisci na ulazu i izlazu kolena; A_1, A_2 - ulazni i izlazni presek kolena (normalni na strujnice); α, β - uglovi pod kojim strujnice ulaze odnosno napuštaju koleno; Q, ρ - protok i gustina vode.



Rešenje.

$$\Sigma X = \rho Q (v_{2x} - v_{1x})$$

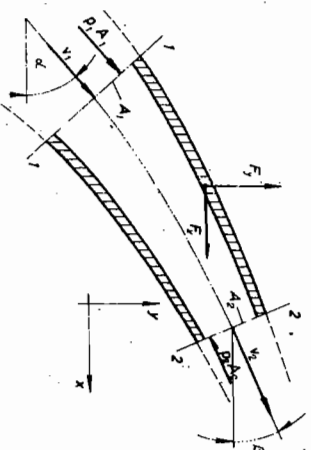
$$p_1 A_1 \cos \alpha + F_x - p_2 A_2 \cos \beta =$$

$$= \rho Q (v_2 \cos \beta - v_1 \cos \alpha)$$

$$F_x = \rho Q (v_2 \cos \beta - v_1 \cos \alpha) +$$

$$+ p_2 A_2 \cos \beta - p_1 A_1 \cos \alpha.$$

Sila kojom voda napada koleno po x-pravcu je suprotnog smera (F'_x) a istog intenziteta kao i F_x ($|F'_x| = |F_x|$).
 Smeri (F'_y) a istog intenziteta kao i F_y ($|F'_y| = |F_y|$).



$$\Sigma Y = \rho Q (v_{2y} - v_{1y})$$

$$p_1 A_1 \sin \alpha + F_y - p_2 A_2 \sin \beta = \rho Q (v_2 \sin \beta - v_1 \sin \alpha)$$

$$F_y = \rho Q (v_2 \sin \beta - v_1 \sin \alpha) + p_2 A_2 \sin \beta - p_1 A_1 \sin \alpha.$$

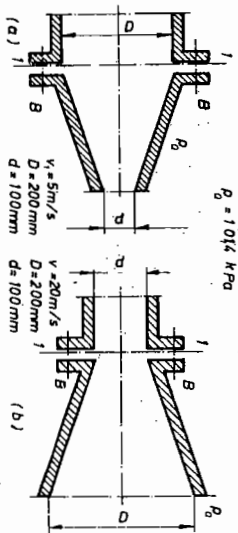
Sila kojom voda napada koleno po y - pravcu je suprotnog smera (F'_y) a istog intenziteta kao i F_y ($|F'_y| = |F_y|$).
 Smatrajući da oko izdvojenog elementa vlada atmosferski pritisak "čista reakcija" kolena se dobija ako se u gornjim jednačinama obračuna dejstvo atmosferskog pritiska. Ovo dejstvo se odražava samo na članovima $p_1 A_1$ i $p_2 A_2$ koji se zamenjuju članovima $p_{atm} A_1$ i $p_{atm} A_2$, tako da su vertikalna i horizontalna sila koje stvarno opterećuju koleno usled proticanja vode date sa:

$$F'_x = \rho Q (v_2 \cos \beta - v_1 \cos \alpha) + p_2 A_2 \cos \beta - p_1 A_1 \cos \alpha$$

$$+ F'_y = \rho Q (v_2 \sin \beta - v_1 \sin \alpha) + p_2 A_2 \sin \beta - p_1 A_1 \sin \alpha$$

2. Naći

silu kojom su opterećeni zavrtnevi B kojima je: a) za cev prečnika D povezan mlaznik, i b) za cev prečnika d povezan difuzor.

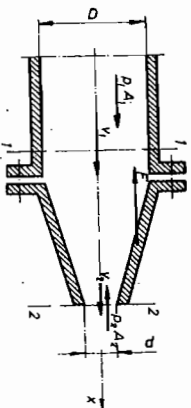


Kroz mlaznik i difuzor protiče voda. Uzeti u obzir dejstvo atmosferskog pritiska (zbog male razlike pritiska p_1 i p_a). Gubitak pri proticanju kroz mlaznik i difuzor zanemariti.

Rešenje. a) Kont-

rolna zapremina je ograničena preseccima 1-1, 2-2 i spoljašnjom površinom mlaznika.

Iz Bernulijeve jednačine za preseke 1-1 i 2-2 određuje se p_1



$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_a}{\rho}$$

$$p_1 = p_a + \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) = p_a + \frac{\rho}{2} v_1^2 \left[\left(\frac{D_1^4}{D_2^4}\right) - 1 \right]$$

$$p_1 = 101400 + 500 \cdot 25 (16 - 1) = 2,889 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Protok $Q = \frac{D_2^2 \pi}{4} \cdot v_1 = \frac{0,2^2 \pi}{4} \cdot 5 = 0,157 \text{ m}^3/\text{s}$

Jednačina o promeni količine kretanja za osu x glasi

$$IX = \rho Q (v_2 x - v_1 x)$$

$$p_1 A_1 - F - p_2 A_2 = \rho Q (v_2 - v_1)$$

$$F = p_1 A_1 - p_a A_2 - \rho Q (v_2 - v_1)$$

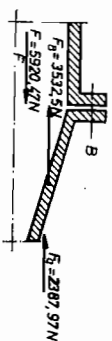
$$F = 288900 \cdot 0,0314 - 101400 \cdot \frac{0,0314}{4} - 1000 \cdot 0,157 (20 - 5)$$

$$F = 5920,47 \text{ N}$$

Reakcija F može da se rastavi na dve komponente: komponentu F_a koju na sebe prima atmosferski pritisak koji dejstvuje na spoljnu stranu omotača vazduha i rasterećuje ga i čistu reakciju F_B koja po intenzitetu predstavlja silu kojom se istežu zavrtnevi B.

$$F_B = F - F_a = F - (D^2 - d^2) \frac{\pi}{4} p_a = 5920,47 - (0,04 - 0,01) \frac{\pi}{4} \cdot 101400$$

$$F_B = 3532,5 \text{ N}$$



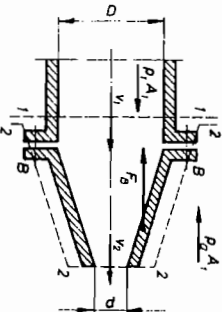
Ako se kontrolna zapremina ograniči preseccima 1-1 i 2-2 prema slici, direktno se određuje sila kojom su opterećeni zavrtnji B (na istezanje).

2-2 prema slici, direktno se određuje sila kojom su opterećeni zavrtnji B (na istezanje).

$$p_1 A_1 - F_B - p_a A_1 = \rho Q (v_2 - v_1)$$

$$F_B = (p_1 - p_a) \cdot A_1 - \rho Q (v_2 - v_1)$$

$$F_B = (288900 - 101400) \cdot 0,0314 - 157 (20 - 5) = 3532,5 \text{ N}$$



b) Za difuzor ograničen

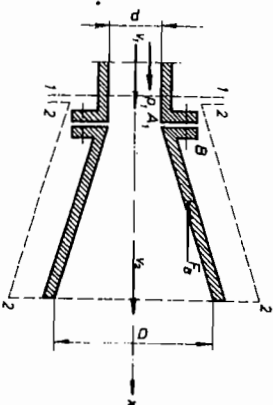
preseccima 1-1 i 2-2, prema slici, i uz pomoć Bernulijeve jednačine određuje se sila F_B na sledeći način:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_a}{\rho}$$

$$p_1 - p_a = \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2)$$

$$= -500 (400 - 25) = -187500 \text{ Pa}$$

$$IX = \rho Q (v_2 - v_1)$$



$$p_1 A_1 - F_B - p_a A_1 = \rho Q (v_2 - v_1)$$

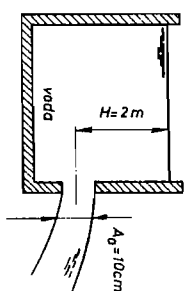
$$F_B = (p_1 - p_a) A_1 + \rho Q (v_1 - v_2) = - 187500 \frac{0,0314}{4} + 157(20-5)$$

$$F_B = 883,125 \text{ N.}$$

F_B - sila kojom voda usled proticanja deluje na difuzor i teži da odvoji difuzor od cevovoda. Zavrtnji B-B su opterećeni na istezanje.

3. Mlaz vode, gustine

1000 kg/m³, ističe kroz otvor na boku rezervoara. Nađi silu kojom on deluje na suprotnu bočnu stranu.



Rešenje. Kontrolna zapremina je predstavljena celokupnim rezervoarom ili ucrtanim cilindrom preseka A_0 koji preseca rezervoar. Vodeći računa o delovanju atmosferskog pritiska jednačina o količini kretanja glasi:

$$\Sigma X = \rho Q (v_2 - v_1)$$

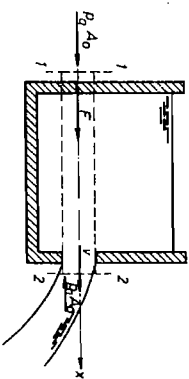
$$F + p_a A_0 - p_a A_0 = \rho Q (v - 0)$$

$$F = \rho Q v = \rho A_0 v^2 = \rho A_0 2gh$$

$$F = 1000 \cdot 0,001 \cdot 19,62 \cdot 2 = 39,24 \text{ N.}$$

Sila sa kojom mlaz, koji

ističe, deluje na zid suda je $F' = 39,24 \text{ N.}$

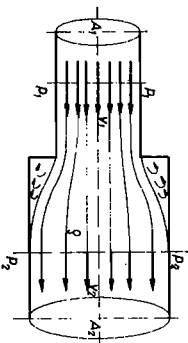


4. Pri naglom proširenju

poprečnog preseka cevovoda dolazi do promene brzine u pravcu

kretanja tečnosti, javlja se "udar", a kao posledica gubitak energije, prema Bordinoj teoremi (1766.god.), proporcionalan kvadratu razlika brzina.

Neka je, radi jednostavnosti, osa cevovoda, sasvim na-



punjenog tečnošću, horizontalna a brzine i pritisci u preseku 1-1 i 2-2 su v_1, v_2 , i p_1, p_2 . Zanimajući trenje, izvesti opšti izraz za izgublenu energiju i sračunati njenu brojnu vrednost ako je $A_2/A_1 = 2$ i $v_1 = 5 \text{ m/sec.}$

Rešenje. U preseku 1'-1'

vlada isti pritisak kao i u

preseku 1-1 jer su to dva preseka koji su beskonačno blizu

jedan drugom. Jednačinu o promeni količine kretanja treba

postaviti za preseke 1'-1' i

2-2, jer se na taj način elimi-

nira veličina A_1 , a u fizičkoj interpretaciji problema se

ne pravi nikakva aproksimacija zbog toga što je nosilac pritiska struja fluida, a ne geometrija prostora (presek 1'-1')

koga strujanje delimično ispunjava.

Jednačina o promeni količine kretanja se dopunjava sa

Bernulijevom jednačinom za preseke 1'-1' i 2-2. (Pri proticanju u realnog fluida kroz kontrolnu zapreminu, gubici energije ne ulaze eksplicitno u jednačinu o promeni količine

kretanja, jer ona opisuje promene na granicama kontrolne zapremine. Eksplicitno ovi gubici se javljaju u B.j, jer ona

važi za strujnice unutar kontrolne zapremine. U jednačini o promeni količine kretanja gubici energije su implicitno predstavljani vrednostima pritiska i brzina iz B.j.).

$\Sigma X = \rho Q (v_2 - v_1)$

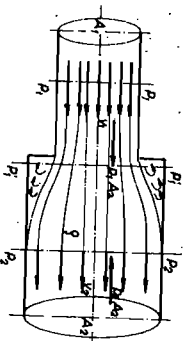
$p_1 A_2 - p_2 A_2 = \rho Q (v_2 - v_1)$

$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_1$

Iz jednačine o promeni količine kretanja se zamenjuje

izraz $(p_1 - p_2)/\rho$ u B.j. (Kada se jednačina o promeni količine kretanja postavi za preseke 1'-1' i 2-2 eliminiše se veličina A_1 , kako je već spomenuto, a na taj način se eliminiše

i sila reakcije $F = p_1 (A_2 - A_1)$, jer je ona vezana za vertikalnu prstenastu površinu $A_2 - A_1$. Samo tako može se izraz $(p_1 - p_2)/\rho$,



dobijen iz jednačine o promeni količine kretanja, uvrstiti u B.j., što je i urađeno u ovom primeru).

$$\frac{Q(v_2 - v_1)}{A_2} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + gh_1$$

$$v_2(v_2 - v_1) - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = gh_1$$

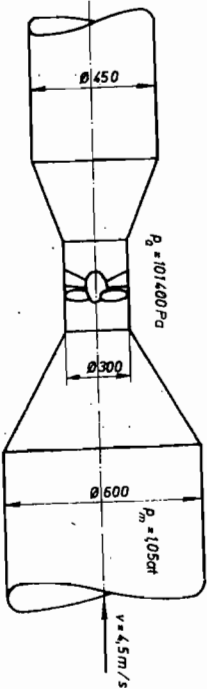
$$\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} - \frac{2v_1v_2}{2} = gh_1$$

$$\frac{(v_1 - v_2)^2}{2} = gh_1$$

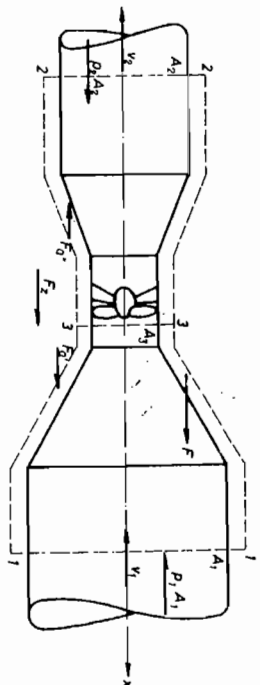
Zamena zadanih veličina daje brojnu vrednost izgubljene energije po jedinici mase protočnog fluida

$$gh_1 = \frac{(v_1 - \frac{A_1v_1}{A_2})^2}{2} = \frac{(5 - \frac{5^2}{2})^2}{2} = 3,125 \text{ Nm/Kg}$$

5. Na slici je pokazana mala vodena turbina koja apsorbuje 10 KS. Kolikom horizontalnom silom deluje voda na tunel uzimajući u obzir i dejstvo atmosferskog pritiska. Stepen korisnosti turbine $\eta = 0,8$. Gubitke zanemariti. ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$).



Rešenje. Kontrolna zapremina je ograničena preseccima 1-1, 2-2 i spoljnim graničnim površinama tunela između ta dva preseka. Ona može da obuhvati sve elemente zajedno, te tako predstavlja jednu celinu. Sa F je označena ukupna reakcija čitavog tunela između dva preseka računavajući tu i dejstvo spoljnog atmosferskog pritiska.



$$EX = \rho Q(v_2 - v_1)$$

$$p_2 A_2 + F - p_1 A_1 = \rho Q[-v_2 - (-v_1)]$$

$$F = p_1 A_1 - p_2 A_2 - \rho Q(v_2 - v_1)$$

Brzina v_2 se određuje iz jednačine kontinuiteta, a pritisak p_2 iz B.j. za preseke 1-1 i 2-2

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gh_T$$

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2) - \rho gh_T = 204405 + \frac{1000}{2} [1 - (\frac{0,6}{0,45})^4] 4,5^2 - 1000 \cdot 7,23 = 175284 \text{ Pa}$$

Napor turbine gh_T se određuje iz izraza za snagu turbine

$$P_T = \rho gh_T Q \eta$$

$$\text{gde je } Q = v_1 A_1 = 4,5 \frac{0,36\pi}{4} = 1,272 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$P_T = 75gP_{TKS} = 75 \cdot 9,81 \cdot 10 = 7357,5 \text{ W}$$

$$\text{sledi } gh_T = \frac{P_T}{\rho Q \eta} = \frac{7357,5}{1000 \cdot 1,272 \cdot 0,8} = 7,23 \text{ Nm/Kg}$$

Sila F je sastavljena iz dve komponente: F_a - sile spoljnog atmosferskog pritiska i F_z - sile kojom se zidovi (materijal) mlaznika i difuzora suprotstavljaju strujanju.

$$F = F_a + F_z$$

gde je $F_a = F'_a - F_a$ (sila F_a ima smer veće sile F'_a)

$$F_a = \left(\frac{D_1^2 \pi}{4} - \frac{D_2^2 \pi}{4}\right) p_a - \left(\frac{D_2^2 \pi}{4} - \frac{D_1^2 \pi}{4}\right) p_a$$

$$F_a = p_a (A_1 - A_2)$$

Intenzitet tražene sile - sile kojom voda opterećuje je tunel - dobija se iz

$$F_z = F - F_a = p_1 A_1 - p_2 A_2 - \rho Q (v_2 - v_1) - p_a (A_1 - A_2)$$

$$F_z = A_1 (p_1 - p_a) - A_2 (p_2 - p_a) - \rho Q (v_2 - v_1)$$

$$F_z = p_{1m} A_1 - p_{2m} A_2 - \rho Q (v_2 - v_1);$$

(razmišljanje, bez računa, može da dovede do ovog izraza tako da se i ta jednačina može smatrati polaznom).

$$F_z = 1,05 \cdot 10^4 \cdot 9,81 \frac{0,36 \pi}{4} - (175284 - 101400) \frac{0,452 \pi}{4} -$$

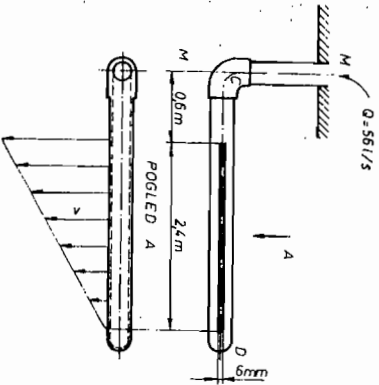
$$- 1000 \cdot 1,272 \left[\left(\frac{0,6}{0,45}\right)^2 - 1 \right] 4,5 = 12916,244 \text{ N.}$$

Sila sa kojom voda i vazduh dejstvuju na tunel je

$$F'_z = 12916,244 \text{ N.}$$

6. Na cevi CD napra-

vljen je prorez debljine 6 mm, tako da voda izlazi radialno iz cevi u vidu zavese jednake debljine od 6 mm. Brzina vode se menja linearno duž cevi, kao što je pokazano na slici, a na vrhu cevi ulazi voda sa protokom $Q=56 \text{ l/s}$. Odrediti moment oko ose M-M od strujanja vode kroz ovakav cevnii sistem. Gubljeni i težina vode u cevi se zanemaruju.



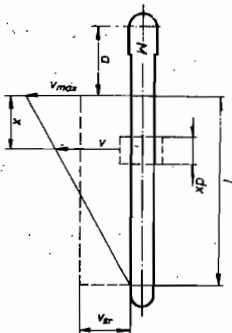
Rešenje. Elementarni

moment dM dobijen od elementarnog protoka dQ kroz elementarnu površinu $da=db \cdot dx$ za tačku

M je

$$dM = dF (a + x)$$

gde je $dF = \rho dQv$ - elementarna sila dobijena primenom zakona o promeni količine kretanja za kontrolnu zapreminu, čija je osnova elementarna površina bdx a visina spoljni prečnik cevi CD (označena je crtkasto na slici).



$$dQ = v \cdot da = v \cdot b \cdot dx$$

$$dM = \rho \cdot dQ \cdot v (a + x)$$

$$dM = \rho b v^2 (a + x) dx$$

$$M = \int_0^L \rho b v^2 (a + x) dx$$

Brzina v koja je funkcija rastojanja x može da se odredi iz odnosa

$$\frac{v}{v_{max}} = \frac{l-x}{l} \text{ kao } v = v_{max} \frac{l-x}{l}; \text{ gde je } v_{max} = 2 \cdot v_{sr}, a$$

$$v_{sr} = \frac{Q}{l \cdot b}, \text{ što važi zbog linearne promene brzine.}$$

$$\text{Tako je } v = \frac{2Q}{l \cdot b} \frac{l-x}{l}$$

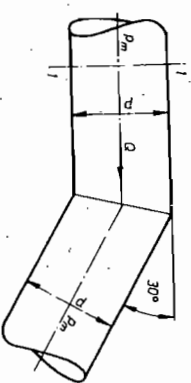
$$M = \int_0^L \rho b \left(\frac{2Q}{l \cdot b}\right)^2 \frac{(l-x)^2}{l^2} (a+x) dx$$

$$M = \frac{4 \rho Q^2}{l^4 b} \left[\frac{a}{3} + \frac{l}{12} \right] l^3$$

$$M = \frac{4}{3} \frac{\rho Q^2}{l b} \left(a + \frac{l}{4} \right) = \frac{4}{3} \frac{1000 \cdot 0,056^2}{2,4 \cdot 0,006} \left(0,6 + \frac{2,4}{4} \right) = 348,44 \text{ Nm.}$$

Zadaci.

1. Na glatkoj horizontalnoj ravni postavljena je cev konstantnog prečnika koja ima koleno pod uglom od 30° zanemarjujući...

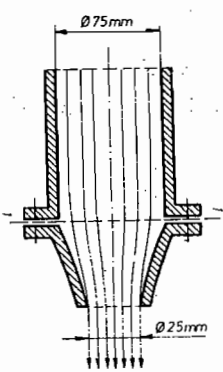


ljuje na koleno. Podaci: $d=500$ mm; $Q=400$ l/s; $P_m=20$ at.

Rešenje. $F_R = 200$ kN

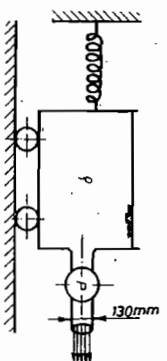


2. Kolikom silom dejstvuje mlaznik na cev, ako se zanemare gubici pri strujanju. Fluid je ulje gustine $\rho=850$ kg/m³, a nadpritisak u preseku 1-1 iznosi $P_m=7$ at.



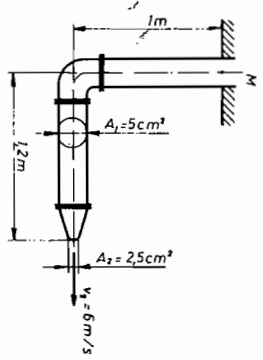
Rešenje. $F = 2426$ N

3. Kada se pumpa zaustavi (i ne ođaje otpor strujanju) sila u opruzi je 750 N. Kada pumpa radi, sila se poveća na 2500 N. Koliku snagu pumpa pređaje vodi? Nivo vode u rezervoaru je stalan. ($\rho=1000$ kg/m³).



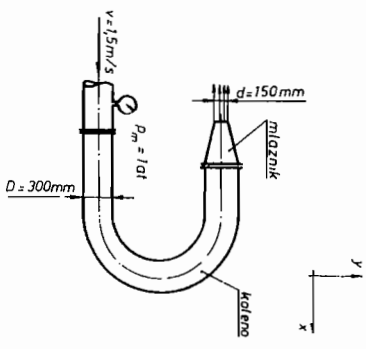
Rešenje. $P = 11,68$ kW

4. Potrebno je odrediti moment savijanja za cevovod pokazan na slici a za presek uk-lještenja (tačka M). Kroz cevovod struji voda. Uzeti u obzir težinu vode u cevovodu ne računajući mlaznik i zanemariti težinu samog cevovoda.



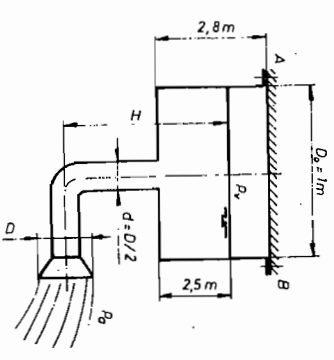
Rešenje. $M_M = 12,78$ Nm.

5. Naći silu kojom voda pri proticanju dejstvuje na sklop mlaznik - koleno prikazan na crtežu. Voda iz mlaznika ističe u vidu slobodnog mlaza. Unutrašnja zapremina kolena i mlaznika iznosi $0,4$ m³. Gubitke pri proticanju smatrati zanemarljivim. Obracunati i dejstvo atmosferskog pritiska.
Primeba: Analizirati sistem mlaz-koleno u celini.



Rešenje. $F_x = 1223$ N; $F_y = V \cdot \rho \cdot g = 3924$ N.

6. Iz rezervoara pod vakuumetarskim pritiskom $P_v = 0,4$ at ističe voda kroz difuzor prečnika $D=150$ mm u atmosferu. Odrediti: a) visinu H, ako je minimalni dozvoljen pritisak u cevovodu $P_k = 0,1$ at; b) silu kojom voda i vazduh u rezervoaru dejstvuju na sistem i opterećuju zavrtnje A i B, pod pretpostavkom da se može zanemariti težina vode u



cevi i difuzoru. Dejstvo atmosferskog pritiska uzeti u obzir ($p_a = 101,4 \cdot 10^3 \text{ Pa}$). Sve protočne gubitke zanemariti.

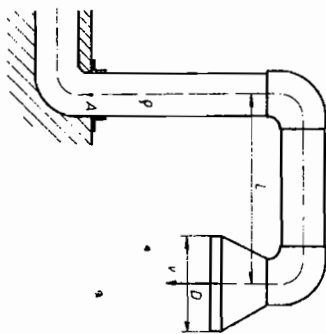
Rešenje. a) $H = 4,8 \text{ m}$; b) $F_y = 10856 \text{ N}$;

$$F_x \text{ (po osi difuzora)} = \rho Q v_D = 173,44 \text{ N};$$

$$F_A = 0; F_B = \frac{F_x (H+0,3)}{D} = 700,9 \text{ N}.$$

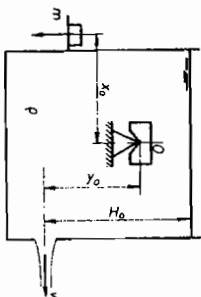
7. Na slici je pokazana

pružna pumpa za snabdevanje lokomotivskih tendera vodom. Potrebno je odrediti moment oko tačke A (podnožje pumpe) koji se javlja usled dejstva sile izazvanih strujanjem vode. Objasniti kako dejstvuje neravnomernost protoka na ovakve konstrukcije. Uzeti u obzir uticaj atmosferskog pritiska. Gubitke pri strujanju i uticaj težine vode u cevima i cevnom elementima smatrati neznačajnim.



Rešenje. $M_A = \rho \frac{D^2 \pi}{4} \cdot v^2 \cdot L$. Usled neravnomernosti protoka dolazi do promene sile kojom vodena struja napada difuzor i kolena, što izaziva pojavu vibracija.

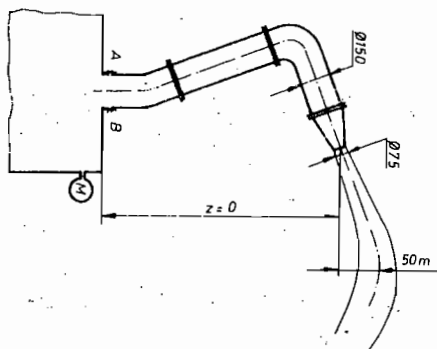
8. Rezervoar sa konstantnom visinom vode obrće se bez trenja oko tačke O. Usled isticanja vode kroz kružni otvor sa oštrom ivicom potrebno je dodati teg mase m da bi rezervoar zauzeo horizontalan položaj. Za poznat protok Q naći izraz iz koga se može odrediti stvarna brzina isticanja v.



Rešenje. $v = \frac{mgx_0}{\rho Q y_0}$.

9. Uredjaj za

gašenje požara koji se sastoji iz rezervoara sa vodom pod pritiskom, jednog kolena savijenog za 135° , jednog kolena savijenog pod 90° i mlaznika čije su dimenzije date na slici; baca vodu na visinu $h = 50 \text{ m}$. Naći sile koje opterećuju zavrtnjeve A i B, kao i potreban nadpritiskak vode ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$), u rezervoaru. Sve strujne gubitke zanemariti.

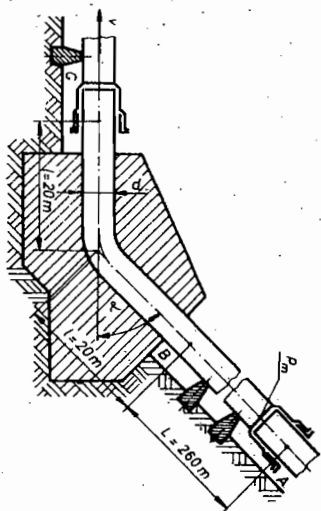


Rešenje. $p_m = 919687 \text{ Pa}$;

$$F_s = \rho Q v \sqrt{2} = 28595 \text{ N}; F_1 = \rho Q v_{1,50} + p_m A - \rho Q v \sqrt{2} = 2188 \text{ N}.$$

10. Odrediti ukupnu

hidrauličku silu koju prima anker-oslonac od dela dovodnog cevovoda hidroelektrane između dva elastična kompenzaciona spoja. Spojevi se nalaze na nagnutom ($\alpha = 45^\circ$) i horizontalnom delu cevovoda konstantnog prečnika $d = 2,5 \text{ m}$. Protok vode je $Q = 15 \text{ m}^3/\text{s}$, a nadpritiskak na početku deonice $p_m = 5 \text{ at}$. zanemariti hidrauličke gubitke.



Napomena: Između preseka A i B je postavljen niz oslonaca koji primaju trenutne normalne komponente sile na toj deonici,

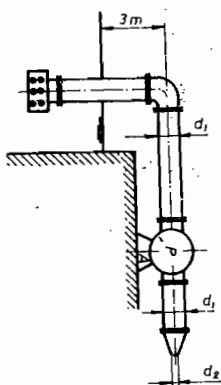
tako da se samo osna sila sa tog dela prenosi na anker-oslonac. Na delu B-C cevovoda, u opterećenje oslonca treba uračunati celokupnu težinu vode s tog dela.

Rešenje. $F_x = (\rho QV + p_1 A) \cos \alpha - (\rho QV + p_2 A) + G_{AB} \frac{\sin 2\alpha}{2}$;
 $+ F_y = (\rho QV + p_1 A) \sin \alpha + G_{AB} \sin^2 \alpha + G_{BC}$;

$F_R = 1,11 \cdot 10^7 \text{ N}$; $\beta = 67^\circ 30'$

11. Pumpa snage

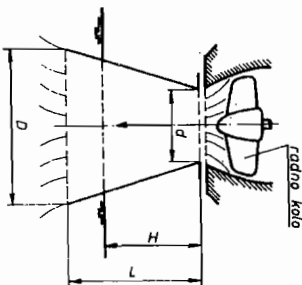
$P = 7,5 \text{ kW}$ ($\eta = 0,7$) pričvršćena zavrtnjima A za postolje, crpi vodu iz jednog rezervoara, kako je pokazano na slici i kroz cev prečnika d_1 izbacuje je u atmosferu kroz mlaznik prečnika $d_2 = 75 \text{ mm}$. Odrediti smičuću silu u zavrtnjevima A, ako se zanemare svi gubici, a pumpa smatra strujnim prostorom u kome se ne oseća dejstvo sila.



Rešenje. $F_A = \rho QVz = 13847 \text{ N}$

12. Vertikalni difuzor kružnog preseka predstavlja provodni vod

vodene turbine kroz koju protiče $Q = 5,5 \text{ m}^3/\text{s}$ vode. Ulazni i izlazni prečnici difuzora su $d_1 = 1 \text{ m}$ i $D = 2 \text{ m}$; a dužina $L = 4 \text{ m}$. Koefficient gubitka u difuzoru je $\xi_d = 0,25$. Ulazni presek difuzora se nalazi na tri metra iznad nivoa vode.



Napomena: Pretpostaviti da je pritisak u izlaznom preseku difuzora jednak okolnom pritisku, a brzinska energija potpuno izgubljena. Na spoljnu površinu difuzora pod vodom pritisak

je raspoređen po zakonu statike fluida.

Rešenje. $+F = \rho Q(V_1 - V_2) - p_1 A + G$

gde je: p_1 - vakuum na ulazu u cevi, G - težina vode u cevi nad slobodnom površinom. $F = 35023,6 \text{ N}$

13. Nacrtati dijagram kontrolne

zapremine sa karakterističnim veličinama pri obračunatom atmosferskom pritisku i odrediti ukupnu silu kojom voda dejstvuje na branu prikazanu na slici.

Podaci: širina brane $B = 10 \text{ m}$; $H = 5 \text{ m}$; $b = 1 \text{ m}$; $v = 0,61$; $Q = 50 \text{ m}^3/\text{s}$; $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

Rešenje. $F = \frac{\rho g B}{2} (H^2 - v^2 b^2) -$

$-\rho Q^2 \left(\frac{1}{vDB} - \frac{1}{HB} \right) = 846250 \text{ N}$

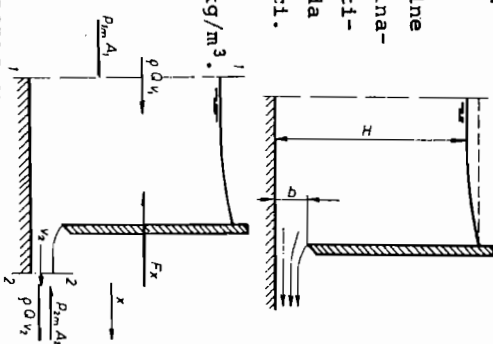
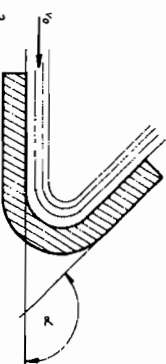
5.2.1.1. NEPOKRETNJE LOPATICE

Pri strujanju preko pokretnih i nepokretnih lopatica najčešće se smatra da su površine lopatica glatke - izuzetak je 2 zadatak u poglavlju 5.3.1. - tako da intenzitet relativne ili apsolutne brzine strujanja preko lopatice ostaje konstantan. Ukoliko je relativno ili apsolutno strujanje preko lopatice sa gubicima; B. j. za ulazne i izlazne preseke fluidnog mlaza određuje odnos brzina u tim presecima.

Primeri

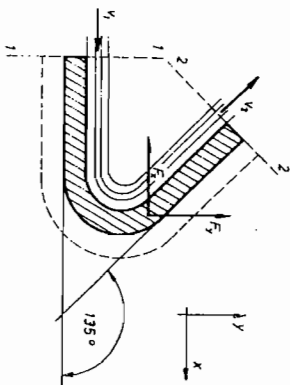
1. Odrediti silu kojom mlaz vode, pokazan na slici, dejstvuje na nepokretnu glatku lopaticu. Podaci: $\alpha = 135^\circ$;

$v_0 = 30 \text{ m/s}$; $Q = 14 \text{ l/s}$ i $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.



Rešenje. Kontrolna

zapremina se vezuje za granične površine lopatice i mlaza. Svugde na površini koja ograničava kontrolnu zapreminu vlada isti - atmosferski pritisak. Brzine mlaza na lopatici i preseccima 1-1 i 2-2 su iste, zbog toga što su pritisci u ma kom preseku vodene struje isti, a površina lopatice je glatka pa ne postoji ni trenje. Brzine u preseccima 1-1 i 2-2 su jednake brzini mlaza pre dodira sa lopaticom



$$v_1 = v_2 = v_0$$

Za usvojen poznati sistem i pretpostavljene smerove sila reakcije sledi

$$-F_x = \rho Q(-v_0 \cos 45^\circ - v_0)$$

$$F_x = 1000 \cdot 0,014 \cdot 30 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) = 716,1 \text{ N};$$

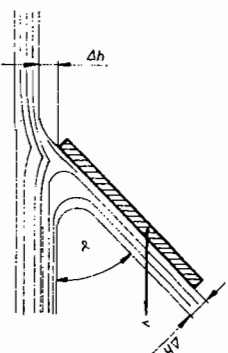
$$F_y = \rho Q(v_0 \cos 45^\circ - 0) = 1000 \cdot 0,014 \cdot 30 \frac{\sqrt{2}}{2} = 296,1 \text{ N}.$$

Komponente sile kojom voda dejstvuje na lopaticu su

$$F'_x = 716,1 \text{ N} \quad \text{I} \quad F'_y = 296,1 \text{ N}.$$

2. Ravna ploča, široka

1 m, nagnuta je prema horizontu za $\alpha=45^\circ$ i kreće se po slobodnoj površini mirne vode brzinom $v=36 \text{ km/h}$, ostavljajući za sobom sniženje nivoa vode za $\Delta h=10 \text{ mm}$. Zanimajući trenje, potrebno je odrediti reakciju vodene struje i snagu potrebnu za kretanje ploče brzinom v .



Rešenje. Može se pretpostaviti da ploča stoji a da se voda kreće prema ploči brzinom v , tako da se ovo strujanje

izjednačava sa strujanjem preko nepokretne lopatice.

Ploča se protivl kretanju vode preko njene površine samo normalnom silom R jer je ploča glatka, pa uzduž ploče ne postoji sila trenja. Okolna voda dejstvuje tangentnom silom reakcije F_s na mlaz vode. Ova tangentsila reakcije vezana je svojom napadnom tačkom za okolnu vodu. Za pogodno izabran koordinatni sistem (n, s) , ograničenu kontrolnu zapreminu i pretpostavljeni smer dejstva sile reakcije R dobija se

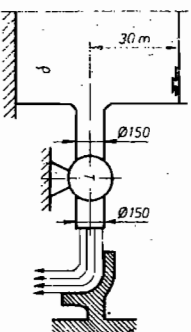
$$R = \rho Q(O+v_1 \sin \alpha) = \rho \Delta h \cdot l \cdot v^2 \sin \alpha = 1000 \cdot 0,01 \cdot 10^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 705 \text{ N}.$$

Snaga potrebna za kretanje ploče brzinom v je

$$P = R \sin \alpha \cdot v = 4,97 \text{ kW/m}.$$

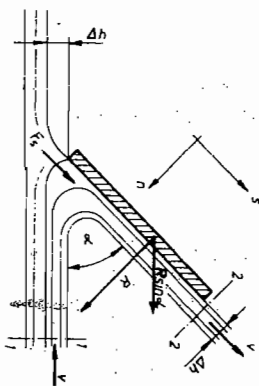
Zadaci

1. Voda iz velikog rezervoara protiče kroz turbinski sistem a zatim udara o jedan deflektor koji skreće mlaz za 90° kao što je pokazano na slici. Ako se na deflektoru javlja horizontalna sila pritiska od 900 N, koliku snagu razvija turbina. Stepen korisnosti turbinskog postrojenja iznosi 0,85.

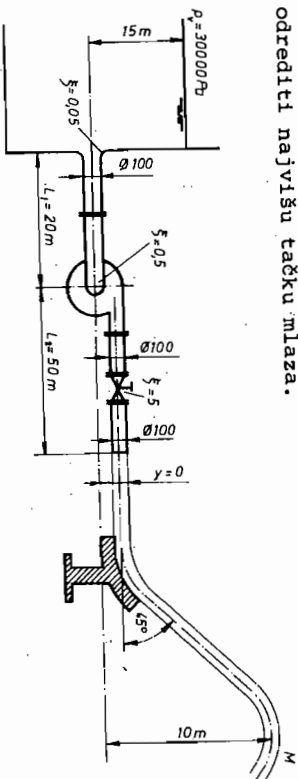


Rešenje. $P_t = 28,62 \text{ kW}$

2. Voda, konstantnog nivoa, ističe iz rezervoara i preko turbomašine upućuje se na skretnu lopaticu koja je učvršćena i idealno glatka.



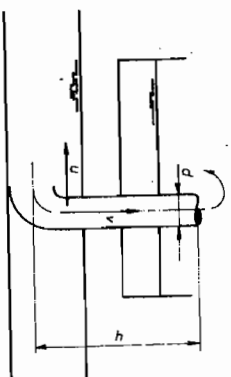
- a) Odrediti protok kroz cevodod $\varnothing 100$ mm, od komercijalnog čelika ($e=0,1$ mm).
- b) Naći silu od mlaza vode na skretnu lopaticu.
- c) Odrediti snagu i vrstu turbomašine ($\eta=0,7$).
- d) Naći tačku u kojoj se javlja najniži pritisak posmatrajući cevodod i pumpu.
- e) Za sasvim otvoren ventil $\xi=0$ i dobijenu snagu, odrediti najvišu tačku mlaza.



- Rešenje. a) ($v=19,81$ m/s), $Q=155,5$ l/s ;
 b) $\check{F}_x=908,7$ N ; $\check{F}_y=2171$ N ; c) $P=863,5$ kW ;
 d) ulaz u pumpu ; e) ($v=22,81$ m/s), $h_M=13,25$ m.

3. Lokomotiva se kreće

konstantnom brzinom $u=30$ m/s i skuplja vodu iz kanala uzduž pruge. Izlaz cevi sa kojom se vrši skupljanje je iznad ulaznog otvora za $h=0,3$ m. Prečnik cevi je $d=200$ mm. Ako se jedna trećina ulaznom otvoru: a) naći brzinu v kojom se voda doprema u tank; b) naći količinu vode koja je skupljena na putu dužine L od 0-500 m; c) za slučaj pod (b) dati sve dodatne otpore lokomotive koji su posledica državanja vode u tanku.



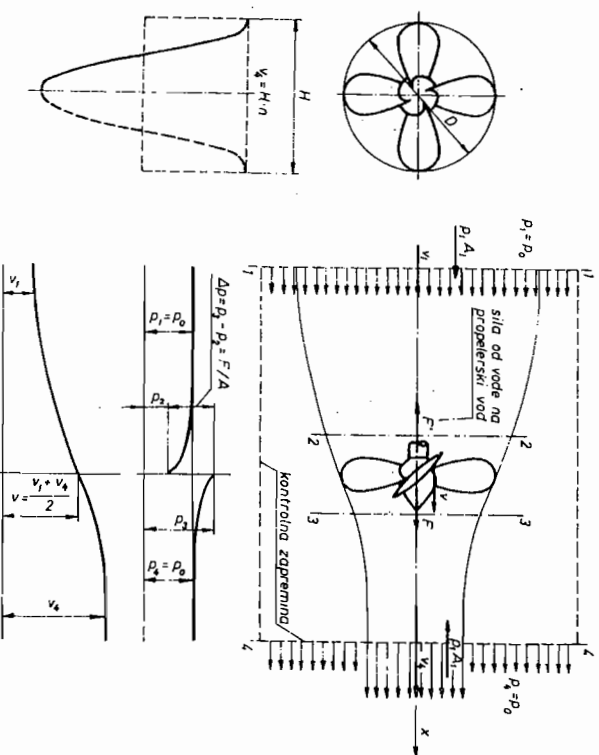
Nenavedene strujne gubitke zanemariti, koeficijent trenja kotrljanja $\mu=0,1$.

- Rešenje. a) $v = 24,38$ m/s ; b) $V = 12,76$ m³ ;
 c) dodatni otpor trenja $\check{F}_{td} = 12517$ N ; dodatni otpor usled akcije mlaza $\check{F}_x = 22966$ N

5.2.1.2. PROPELERI - SILA POTISKA

Ovde iznesena razmatranja se odnose na nepokretan propeler u fluidnoj struji ili pokretan propeler u mirnom fluidu. Dobijene zaključke je lako proširiti na pokretni propeler u fluidnoj struji.

Efekat propelera se sastoji u stvaranju promene količine kretanja fluida u kome je poronjen, a kao posledica ostvarene promene javlja se sila potiska (propulzije) kojom fluid deluje na propeler. Preko propelerskog vratila ova pokretačka sila se prenosi na ceo objekat s kojim propeler čini celinu. Jednačnom o promeni količine kretanja nije moguće tačno opisati strujne promene koje su posledica rada propelera, ali se mogu postaviti odnosi između spoljnih karakteristika Q, v i F .



Neposredno ispred i iza propelerskog diska postoji razlika pritiska preko koje se takodje može odrediti sila potiska. Napritisak iza propelera ubrzava struju pa se propeler ponaša, na neki način, slično mlazniku. Zbog toga se sila reakcije, kao i kod mlaznika, vezuje za propeler.

Za kontrolnu zapreminu označenu na slici i preseke neposredno ispred i iza propelera važi

$$F = \rho Q (v_4 - v_1) = (p_3 - p_2) A$$

gde su

$$A = \frac{D^2 \pi}{4} \quad \text{i} \quad Q = Av; \quad v \text{ je srednja aksijalna}$$

brzina strujanja fluida kroz propelerski disk.

Zamena protoka Q u gornjoj jednačini i veza sa Bernljevim jednačinama (vodedi računa da je $p_1 = p_4 = p_0$ - pritisak okolne sredine) za preseke 1, 2 i 3, 4 daje redom

$$\rho v (v_4 - v_1) = p_3 - p_2;$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v^2; \quad p_3 + \frac{1}{2} \rho v = p_4 + \frac{1}{2} \rho v_4^2$$

$$p_3 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_4^2 - v_1^2)$$

$$v = \frac{v_1 + v_4}{2}.$$

Brzina kroz rotorski disk znači, ima srednju vrednost brzina uzvodno i nizvodno od propelera.

Propeler deluje slično zavrtanju, samo što zbog tečnosti vode, pri tom vrtanju, aksijalna brzina propelera nije jednaka proizvodu broja obrtaja n sa korakom H , kolika bi bila kada bi se vrtao u čvrst materijal - veđ manja.

Tako se došlo do pojma skliza (slip). Brzina skliza je definisana kao razlika između teorijske brzine napredovanja propelera $n \cdot H = v_u$ (što odgovara brzini vode u preseku 4-4) i brzine priticanja vode propeleru v_1 ; a skliz je izražen odnosom

$$s = \frac{v_u - v_1}{v_u} = 1 - \frac{v_1}{v_u}.$$

Koeficijent korisnog dejstva propelera se dobija iz

odnosa korisne snage (dobijene iz jednačine o promeni količine kretanja) i utrošene snage.

Korisna snaga je $F \cdot v_1 = \rho Q (v_4 - v_1) v_1$ (kao da se propeler kreće brzinom v_1 kroz miran fluid).

Uložena snaga je

$$\rho \cdot \frac{Q}{2} \cdot (v_4^2 - v_1^2)$$

Stepen korisnosti je $\eta = \frac{\rho Q (v_4 - v_1) v_1}{\rho \frac{Q}{2} (v_4^2 - v_1^2)} = \frac{2v_1}{v_4 + v_1} = \frac{v_1}{v}$.

Ako se sa Δv označi

$$\Delta v = v_4 - v_1 \quad \text{tj.} \quad v_u = \Delta v + v_1,$$

stepen korisnosti može da se napiše u drugom obliku

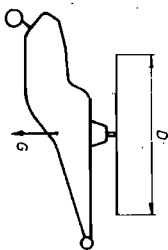
$$\eta = \frac{v_1}{v_1 + \frac{\Delta v}{2}}$$

odakle se vidi da se najveći stepen korisnosti postiže za najmanje povećanje brzine fluidne struje.

Primeri

1. Za helikopter, mase $m=2,25$ t

i rotora prečnika $D=15$ m, u mlrnom vazduhu treba odrediti: a) efektivnu vertikalnu brzinu vazduha kroz rotorski disk kada helikopter lebdi; b) putnu brzinu u ako je otpor helikoptera zadan funkcijom $F_x = 1,10 v^2$



gde je v - putna brzina u m/s, F_x - horizontalni otpor helikoptera u N. Pri kretanju brzinom u nagib rotora helikoptera je 5° u odnosu na horizontalan položaj prilikom lebdenja; c) efektivnu brzinu vazduha kroz rotorski disk za slučaj horizontalnog kretanja helikoptera (b).

Parametri vazduha su: $p = 992,77$ Pa $T = 15^\circ$ C

Napomena: Efektivna brzina vazduha se odnosi na ceo prečnik rotora. Vertikalni rotor na repu helikoptera nema uticaja na postavljene zahteve.

Rešenje. a) Jednačina o promeni količine kretanja za kontrolnu zapreminu označenu na slici daje

$$F = \rho Q v^2 = 2\rho Q v = 2\rho A v^2 = \frac{D^2 \pi}{2} \rho v^2$$

Sila $F' = |F|$ je sila sa kojom vazдушna struja deluje na rotor. Ova sila je u ravnoteži sa težinom helikoptera G tj.

$$F' = mg \quad 2250 \cdot 9,81 = \frac{15^2 \pi}{2} \cdot 1,2 \cdot v^2$$

gde je ρ određeno iz jednačine gasnog stanja za vazduh

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{99277}{287 \cdot 288} = 1,20 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{tako je } v = \frac{4500 \cdot 9,81}{225 \pi \cdot 1,2} = 7,216 \text{ m/s}$$

$$\text{b) } \begin{aligned} \text{tg } 5^\circ &= \frac{F'_x}{F'_y} \\ &= \frac{F'_x}{F'_y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'_x &= 1,1 \cdot v^2 ; F'_y = G = 22072,5 \text{ N} ; \text{tg } 5^\circ = 0,0875 ; \\ u^2 &= \frac{\text{tg } 5^\circ \cdot G}{1,1} = \frac{0,0875 \cdot 22072,5}{1,1} = 1755,7 \end{aligned}$$

Putna brzina helikoptera je $u = 41,9 \text{ m/s}$.

c) Jednačina o promeni koli-

čine kretanja za osu Y daje

$$-G = \rho Q (-v_2 \cos 5^\circ),$$

$$G = \rho \frac{D^2 \pi}{4} \cdot v \cdot v_2 \cos 5^\circ =$$

$$= \rho \frac{D^2 \pi}{4} \cdot v_2 \cos 5^\circ \cdot \frac{2u \cdot \cos 85^\circ + v_2}{2}$$

$$\text{Tako je } \frac{8 \cdot 2250 \cdot 9,81}{1,2 \cdot 225 \pi \cdot 0,9962} =$$

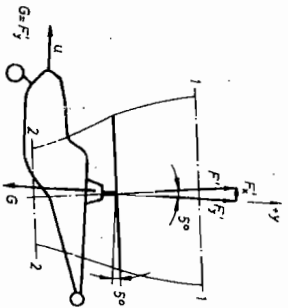
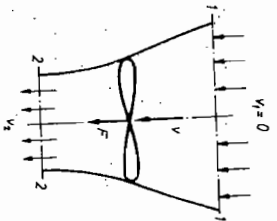
$$= (2 \cdot 41,9 \cdot 0,0872 + v_2) \cdot v_2$$

$$111 \quad v_2^2 + 7,307 v_2 - 209,075 = 0$$

$$v_2 = 12,26 \text{ m/s}$$

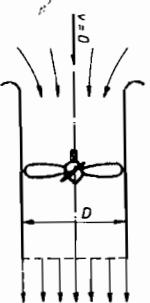
Odnosno $v = u \cos 85^\circ + v_2/2 = 41,9 \cdot 0,0872 + 12,26/2 = 9,778 \text{ m/s}$

(Mala inklinacija rotora značajno povećava koeficijent otpora helikoptera zbog učestvovanja projekcije rotorskog diska u ot-poru. $F'_{x0} = c_D (1/2 \rho D^2 \pi / 4) \cdot \sin 5^\circ \cdot u^2$



2. Odrediti silu potiska

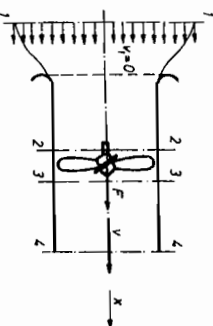
s kojom vazduh deluje na cev u kojoj se nalazi propeler vezan za nepokretno postolje i cev. Protok vazduha je $Q = 14 \text{ m}^3/\text{s}$ a gustina vazduha je $\rho = 1,22 \text{ kg/m}^3$. Prečnik propelera je $D = 1,5 \text{ m}$. Odrediti, takođe, koeficijent korisnog dejstva. Dobljene rezultate uporediti sa rezultatima rada propelera u slobodnoj vazdušnoj struji za iste podatke. Gubitke zanemariti.



Rešenje. Za kontrolnu zapreminu ograničenu preseccima 1 i 4 važi jednačina

$$F = \rho Q (v_4 - v_1)$$

gde je F - pretpostavljen smer sile od propelera i cevi.



$$F = \rho Q v = \frac{Q^2 A}{D^2 \pi} = 1,22 \frac{140^2}{1,5^2 \pi} = 11097 \text{ N}$$

Znači, vazдушna struja deluje na propeler učvršćen u cevi, silom $F' = 11097 \text{ N}$.

Za kontrolnu zapreminu ograničenu preseccima 2 i 3 određuje se doprinos propelera ukupnoj sili potiska

$$F_p + P_2 A - P_3 A = 0,$$

za pretpostavljeni smer sile od propelera +.

B.j. za preseke 1 i 2 daje vrednost pritiska p_2

$$P_2 = P_a - \frac{1}{2} \rho v^2$$

B.j. za preseke 3 i 4 određuje pritisak p_3

$$P_3 = P_a$$

Tako je

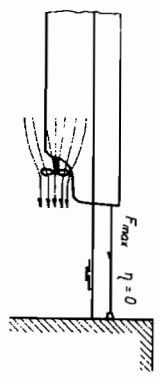
$$F_p = A (P_3 - P_2) = \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot A = \frac{1}{2} \rho Q v = 5548,5 \text{ N}$$

Sila kojom sam propeler deluje na vazдушnu struju je jednaka

polovini sile kojom propeler zajedno sa cevi (tunelom) deluje na struju. Ona je posledica porasta pritiska iza propelera.

Iz izraza za stepen korisnosti

$$\eta = \frac{\rho Q (v_4 - v_1) v_1}{\frac{1}{2} \rho Q (v_4^2 - v_1^2)} = \frac{2v_1}{v_4 + v_1}$$



se vidi da je $\eta=0$ za $v_1=0$, i η_{max} za najmanji porast v_4 .

Vucna sila $F = \rho Q (v_4 - v_1)$ je najveća za $v_1=0$ tj. kada propeler (brod) radi u mestu, a najmanja za η_{max} .

3. Vetar duva konstantnom brzinom $v_1=32,4$ km/h. Na svom putu, vetar okreće krila vetrenjače čiji je spoljašnji prečnik 2m. Krila usporuju vetar na brzinu v_4 . Pretpostavlja se da pri tom mogu da se zanemare otpori strujanja, da se vazduh sme smatrati kao da je to nestišljiv fluid i da kroz ravan krila vetar prolazi srednjom brzinom $(v_1+v_4)/2$. Temperatura vazduha je 17°C , a pritisak 101,5 kPa.

Vrhovi krila vetrenjače imaju pet puta veću obimsku brzinu od brzine kojom duva vetar. Traži se:

- a) da se odredi odnos brzina v_4/v_1 pri kojem će vetrenjača dobiti najveću snagu od vetra;
- b) da se sračuna ta snaga, kao i korisna snaga na vratilu vetrenjače, smatrajući da je stepen korisnosti jednak 0,85;
- c) da se sračuna aksijalna sila vetra i pravac ove sile;
- d) odrediti broj obrtaja krila i pritisak vazduha neposredno iza krila;
- e) skicirati strujnice koje prolaze kroz vrhove krila vetrenjače (približno).

Rešenje: B.j. za 1-4 glasi

$$\frac{P_a}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{P_a}{\rho} + \frac{v_4^2}{2} + gH_v ;$$

a) jednačina o promeni količine kretanja za preseke 2-3 i 1-4

$$F = (P_2 - P_3) \frac{D^2 \pi}{4} = \rho Q (v_1 - v_4)$$

Do izraza za napor, koji je određen B.j. za 1-4, može se doći i povezi vanjem jednačine o promeni količine kretanja sa izrazom za snagu

$$\rho g H_v Q = (P_2 - P_3) Q$$

tako što se napor gH_v zameni sa

$$gH_v = \frac{P_2 - P_3}{\rho} = \frac{4}{D^2 \pi} (v_1 - v_4) \frac{D^2 \pi}{4} v = (v_1 - v_4) \frac{(v_1 + v_4)}{2} = \frac{v_1^2 - v_4^2}{2}$$

Stepen korisnosti je odnos korisne sa raspoloživom snagom

$$\eta = \frac{gH_v}{\frac{v_1^2}{2}} = \frac{v_1^2 - v_4^2}{v_1^2} = 1 - \left(\frac{v_4}{v_1}\right)^2$$

- a) najveća snaga od vetra dobija se za $v_4=0$;
- b) za $\eta=0,85$

$$v_4 = v_1 (1 - \eta) = \frac{32,4}{3,6} (1 - 0,85) = 3,49 \text{ m/s}$$

Snaga na vratilu je

$$P = \rho g H_v \cdot Q$$

Ovde je:

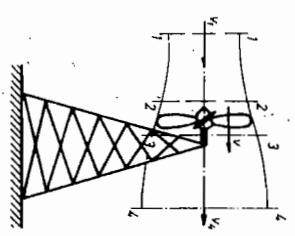
$$Q = v \cdot \frac{D^2 \pi}{4} = \frac{v_1 + v_4}{2} \cdot \frac{D^2 \pi}{4} = \frac{9 + 3,49}{2} \cdot \pi = 19,6 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\rho = \frac{P_a}{RT_a} = \frac{101500}{287 \cdot 290} = 1,219 \text{ kg/m}^3 ;$$

$$P = \frac{1}{2} v_1^2 Q \eta = 1,219 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9^2 \cdot 19,6 \cdot 0,85 = 823,3 \text{ W}$$

$$c) F' = \rho Q (v_1 - v_4) = 1,219 \cdot 19,6 (9 - 3,49) = 131,8 \text{ N}$$

$$d) n = \frac{30 \cdot v}{\pi} = \frac{30 \cdot v}{\pi} = \frac{30 \cdot 5 \cdot v_1}{\pi} = \frac{30 \cdot 5 \cdot 9}{2 \pi} = 214,9 \text{ min}^{-1}$$



Iz B.j. za 3-4 se određuje P_{3V}

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{P_a}{\rho} + \frac{v_a^2}{2}$$

$$P_{3V} = \frac{\rho}{2} (v^2 - v_a^2) = \frac{1,219}{2} (6,245^2 - 3,49^2) = 16,35 \text{ Pa}$$

e) Strujnice kroz vrhove krila vetrenjače su skicirane uz tekst i rešenje primera.

Zadaci

1. Pri protoku vazduha od $140 \text{ m}^3/\text{min}$, temperatura 15°C i atmosferskog pritiska $P_a = 101,4 \text{ kPa}$ odrediti:

- potisak kojim vazдушna struja deluje na propeler;
- prečnik propelera i pritiske ispred i iza propelera;
- skicirati linije energije i liniju rasporeda pritiska.

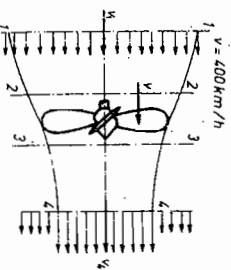
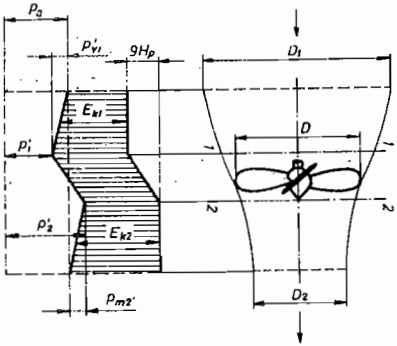
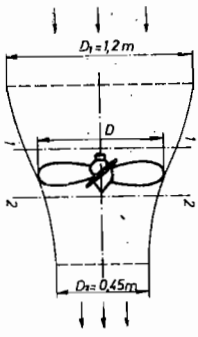
Rešenje:

- $F' = 36,12 \text{ N}$
- $D = 0,596 \text{ m}$

$$P_{v1} = 40,37 \text{ Pa}$$

$$P_{m2} = 89,20 \text{ Pa}$$

2. Avion se kreće brzinom 400 km/h kroz mliran vazduh gustine $1,3 \text{ kg/m}^3$,



i pri tome se ostvaruje protok od $450 \text{ m}^3/\text{sec}$ vazduha (nepromenjene gustine), kroz propeler prečnika 2 m . Izračunati: a) Teorijski stepen korisnog dejstva b) potisnu silu i razliku pritiska vazduha ispred i iza elise; c) potrebnu snagu za kretanje propelera - odnosno aviona. Napomena. U preseccima 2 i 3 pritisci se razlikuju od atmosferskog, a brzina vazduha se ne menja.

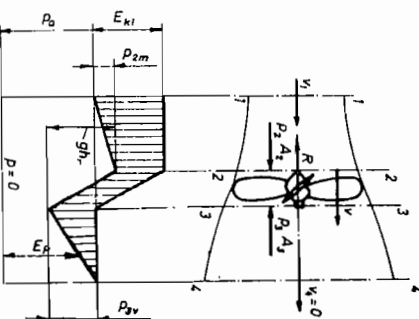
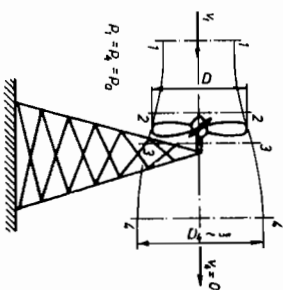
Rešenje. a) $n=0,775$; b) $F'=37674 \text{ N}$; $\Delta P=11998 \text{ Pa}$
c) $P=5400 \text{ kW}$

3. Krila vetrenjače pokreće

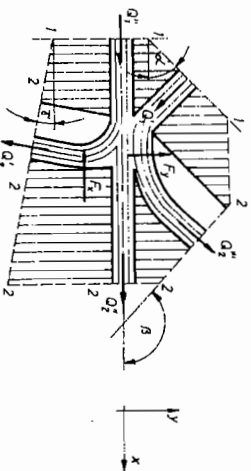
vetar koji nailazi brzinom $v_1=36 \text{ km/h}$. Koefficijent korisnog dejstva vetrenjače iznosi $n=0,85$, što je ustvari odnos snage apsorbovane od strane krila vetrenjače i snage fluidne struje koja prolazi kroz krug koji opisuju delovi krila. Prečnik krila je $D=2 \text{ m}$, a gustina vazduha $\rho=1,2 \text{ kg/m}^3$. Odrediti:

- Protok vazduha kroz vetrenjaču i snagu na vratilu vetrenjače smatrajući da su jednaki protočni preseccima neposredno ispred i iza krila, i da vetrenjača uspori vetar na nulu u preseccu 4; b) pravac i smer sile kojom vetar deluje na krila vetrenjače; c) pritiske ispred i iza krila (preseccima 2 i 3); d) skicirati liniju energije i liniju rasporeda pritiska oko krila smatrajući da je potisak dovoljno daleko ispred i iza propelera (preseccima 1-4) atmosferski.

Rešenje. a) $Q=15,7 \text{ m}^3/\text{s}$
 $P=0,85 \frac{1}{2} \rho v_1^2 = 800,7 \text{ W}$
b) $F=188,4 \text{ N}$; c) $P_{2m}=45 \text{ Pa}$
 $P_{3V}=15 \text{ Pa}$



5.2.2. NEPOKRETNI ELEMENTI SA RAZLIČITIM BROJEM ULAZA I IZLAZA FLUIDA



$$v_1' = v_1 \quad v_2' = v_2 \quad v_3' = v_3 = v$$

Jednačina o promeni količine kretanja, bez ikakvih ograničenja, može da se primeni za različit broj ulaza i izlaza fluida. Pod pretpostavkom da su pritiscni i izlaznim preseccima predstavljene kontrolne zapremine isti, jednačina o promeni količine kretanja za pretpostavljene sile reakcije glasi:

$$F_x = \rho [\int_{Q_1} v_{1x} v_{1x} - \int_{Q_2} v_{2x} v_{2x}]$$

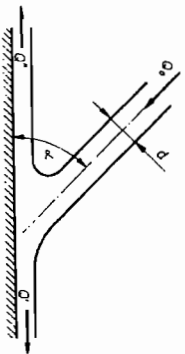
tj. $F_x = [-Q_2' v_2 \sin \alpha + Q_1' v_1 \cos(\beta - 90^\circ)] - [Q_1 v \cos(90^\circ - \alpha) + Q_2 v]$

1 $F_y = \rho [\int_{Q_1} v_{1y} v_{1y} - \int_{Q_2} v_{2y} v_{2y}]$

tj. $F_y = \rho [[-Q_2' v_2 \cos \alpha + Q_1' v_1 \sin(\beta - 90^\circ)] - [-Q_1 v \cos \alpha]]$

Primeri

1. Ravanska struja savršenog fluida širine a, udara o glatku horizontalnu ravan; pod uglom $\alpha = 45^\circ$. Odrediti protoke Q' i Q'' ; silu kojom struja dejstvuje na ploču i njenu napadnu tačku.



Rešenje. Zbog glatke površine ploče i istog atmosferskog pritiska na svim graničnim površinama označene kontrolne zapremine, u pravcu x-ose ne postoji nikakva sila, tako da jednačina o promeni količine kretanja

$$\sum F_x = \rho Q (v_{2x} - v_{1x})$$

$$0 = \rho Q v_{2x} - \rho Q v_{1x}$$

Zbog toga što postoje dva izlazna preseka, prvi član na desnoj strani može da se rastavi na dva dela. Vođeci računa o smerovima brzina (koje su istog intenziteta u šva tri preseka) i usvojenoj orijentaciji koordinatnog sistema jednčina postaje

$$0 = \rho Q_2' v_2' + \rho Q_1' (-v_1') - \rho Q_1 v_1 \cos \alpha$$

$$\text{odnosno} \quad 0 = \rho Q_2' v - \rho Q_1' v - \rho Q_1 v \cos \alpha$$

$$Q_2' - Q_1' = Q_1 \cos \alpha$$

Zajedno sa jednačinom kontinuiteta $Q_2' + Q_1' = Q_1$, određuju se protoci Q_1' i Q_2'

$$Q_1' = \frac{Q_1}{2} (1 + \cos \alpha) = \frac{Q_1}{2} (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$Q_2' = \frac{Q_1}{2} (1 - \cos \alpha) = \frac{Q_1}{2} (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$$

Jednačina o promeni količine kretanja za vertikalnu osu y određuje silu kojom se ravan protivi dejstvu mlaza.

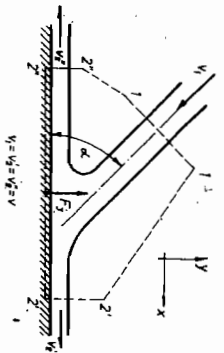
$$F_y = \rho Q [0 - (-v_1 \sin \alpha)] = \rho Q_1 v \sin \alpha$$

Sila kojom struja dejstvuje na ploču F_y' je istog intenziteta i suprotnog smera $|+F_y'| = |F_y|$.

Napadna tačka F_y' se određuje iz momentne jednačine za poznate komponentne sile $\rho Q_1' v$; $\rho Q_2' v$ i $\rho Q_1 v$.

Zbog ravanske struje i istih brzina v, visine s' i s'' su srazmerne protocima Q_1' i Q_2' ,

$$s' = \frac{a}{2} (1 + \cos \alpha) ; \quad s'' = \frac{a}{2} (1 - \cos \alpha)$$



Sile $\dot{Q}v$ i $\dot{Q}''v$ deluju u osama odgovarajućih mlazeva.

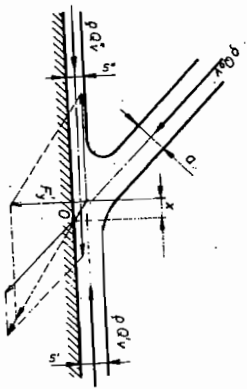
$$M_0 = 0:$$

$$F_y' \cdot x = \rho Q' v \cdot \frac{s'}{2} - \rho Q'' v \cdot \frac{s''}{2}$$

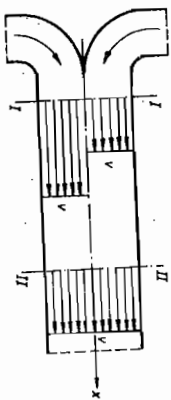
$$x = \frac{Q' s' - Q'' s''}{2 Q_0 \sin \alpha}$$

$$= \frac{Q_0 (1 + \cos \alpha) s' - \frac{Q_0}{2} (1 - \cos \alpha) s''}{2 Q_0 \sin \alpha} = \frac{(1 + \cos \alpha)^2 - (1 - \cos \alpha)^2}{8 \sin \alpha} a$$

$$x = \frac{1}{2} a \cdot \cot \alpha = \frac{1}{2} a$$



A - preseki cevi



2. U donju polovinu preseka I cevi voda ulazi brzinom v_1 a u gornju - brzinom $v_2 = \frac{1}{3}v_1$. Između preseka I i II brzine se izjednačuju zahvaljujući mešanju, i u celom preseku II brzina vode je v . Pri tome pritisak poraste od p_1 do p_2 . Odrediti: srednju brzinu vode v u preseku II; priraštaj pritiska $p_2 - p_1$; deo energije ΔE , koja se pri mešanju gubi zbog vrtloženja; masu vode Δm , koja protiče iz donjeg dela cevi u gornji pri proticanju od I do II preseka.

Rešenje. Brzina v u preseku II se određuje iz jednačine kontinuiteta

$$Q = \frac{A}{2} v_1 + \frac{A}{2} v_2 = Av = \text{const}$$

$$v = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} v_1 = \frac{2}{3} v_1$$

Jednačina o promeni količine kretanja određuje priraštaj pritiska $p_2 - p_1$.

$$\Delta X = \rho Q (v_{II} - v_I)$$

$$(p_1 - p_2) A = \rho Q_1 (v - v_1) + \rho Q_2 (v - v_2)$$

$$(p_1 - p_2) A = \rho \frac{A}{2} v_1 (2v - v_1) + \rho \frac{A}{2} \frac{1}{3} v_1 (2v - \frac{1}{3} v_1)$$

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{3} \rho v_1^2$$

Deo energije, koji se pri mešanju gubi zbog vrtloženja, dobija se iz razlike energija u oba preseka (jednakost koja zamenjuje B. J.)

$$\Delta E = E_{k1} + E_{p1} - (E_{k2} + E_{p2}) = \Delta E_k - \Delta E_p$$

gde su:

$$\Delta E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{m v^2}{2} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{A}{2} v_1^3 + \frac{A}{2} \frac{1}{3} v_1^3 - A \frac{2}{3} v_1 \frac{4}{9} v_1^2 \right) =$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{9} \rho A v_1^3$$

$$\Delta E_p = (p_2 - p_1) Q = \frac{1}{3} \rho v_1^2 A \frac{2}{3} v_1 = \frac{2}{27} \rho A v_1^3$$

$$\Delta E = \frac{1}{9} \rho A v_1^3 - \frac{2}{27} \rho A v_1^3 = \frac{1}{27} \rho A v_1^3 \quad W$$

Upoređenjem protočnih masa vode u polovini preseka I i II određuje se Δm

$$\Delta m = \rho \frac{A}{2} v_1 - \rho \frac{A}{2} v = \rho \frac{A}{2} \left(\frac{2}{3} v_1 - v \right) = \frac{1}{4} \rho A v = \frac{1}{4} m \quad \text{kg/s}$$

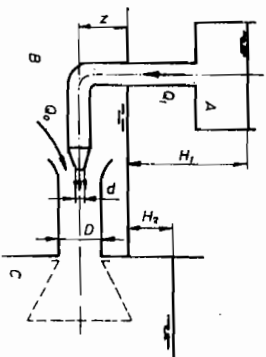
3. Vodostrojna pumpa

s cilindričnom komorom za mešanje vode dobija vodu za rad iz rezervoara A, čiji je nivo vode na visini $H_1 = 20\text{m}$, i podiže usisanu količinu vode iz rezervoara B u rezervoar C na visinu $H_2 = 5\text{m}$.

Odrediti: a) Protok radne i

ustisane vode Q_1 i Q_0 , ako je izlazni prečnik mlaznika $d = 20\text{mm}$ a prečnik komore za mešanje vode $D = 40\text{mm}$. Uzeti u obzir samo gubitke usled mešanja vode u komori i izlazni gubitak iz komore u rezervoar C.

b) Kako se menjaju protoci Q_1 i Q_0 , ako se na kraju



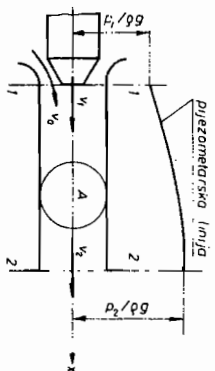
komore za mešanje vode postavi difuzor (isprekidano obeležen na slici), čija se kinetička energija na izlazu može zanemariti. Koefficient gubitka difuzora je $\xi = 0,25$. Napomena: Gubitak usled mešanja vode u komori je obuhvaćen jednačinom o promeni količine kretanja (kontrolna zapremina je komora za mešanje vode; v. prethodni primer), a gubitak u difuzoru je određen izrazom $\xi \frac{\rho}{2} v_2^2$.

Rešenje. Jednačina o promeni količine kretanja za kontrolnu zapreminu (preseki 1 i 2) daje vezu između pritiska i protoka.

$$(p_1 - p_2)A = \rho Q_1 v_1 - \rho Q_2 v_2 - \rho Q_0 v_0 \quad (1)$$

$$p_1 - p_2 = v_2 \left(\frac{Q_1 v_1 + Q_0 v_0}{Q_1 + Q_0} - v_2 \right) \dots (1)$$

ovde su: $v_1 (Q_1)$ i $v_0 (Q_0)$ - brzine (protoci) radne i usisane vode na ulazu u komoru; v_2 - brzina vode posle mešanja na izlazu iz komore (preseki 2).



Sljedeće relacije koje treba koristiti su B.j.-e za nivo vode u rezervoaru A - preseki 1 i nivo u rezervoaru B - preseki 2

$$\frac{p_a}{\rho} + (H_1 + z)g = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} \dots (2)$$

$$\frac{p_a}{\rho} + zg = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} \dots (3)$$

(ovde je z - dubina ose pumpe).

Ove jednačine su dobijene pod uslovom da je pritisak p na ulazu u komoru jednak za obe struje zbog njihove paralelnosti i male krivine; i zanemarujući gubitke na ulazu u komoru.

Pritisak na izlazu iz komore bez difuzora i sa difuzorom je određen sa B.j. za preseki 2 i nivo vode u rezervoaru C:

- bez difuzora $p_2 = (z + H_2)\rho g + p_a \dots (4)$

- sa difuzorom $p_2 = (z + H_2)\rho g - (1 - \xi)\rho \frac{v_2^2}{2} + p_a \dots (5)$

Oduzimanjem jednačina (2) i (3) dobija se

$$H_1 g = \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \quad \text{tj.} \quad v_0^2 = v_1^2 - 2gH_1$$

a) Ako se vrednosti pritiska p_1 i p_2 , koje su određene jednačinama (2) i (4) zamene u jednačinu (1) dobija se

$$\left[(z + H_2)\rho g + p_a \right] - \left[(z + H_1)\rho g - \rho \frac{v_2^2}{2} + p_a \right] = v_2 \left(\frac{Q_1 v_1 + Q_0 v_0}{Q_1 + Q_0} - v_2 \right)$$

Uključujući jednakost $v_0 = \sqrt{v_1^2 - 2gH_1}$ i jednačinu kontinuiteta

$$v_2 = \frac{Q_1 + Q_0}{A_2} = \frac{A_1 v_1 + A_0 v_0}{A_2} = \frac{A_1 v_1 + A_0 \sqrt{v_1^2 - 2gH_1}}{A_2}$$

gde je: $A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi 0,02^2}{4} = 0,000314 \text{ m}^2$;

$$A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{\pi 0,04^2}{4} = 0,001256 \text{ m}^2$$

$$A_0 = A_2 - A_1 = 0,000942 \text{ m}^2$$

Iz gornje jednačine se određuje jedna nepoznata v_1

$$g(H_2 - H_1) + \frac{v_2^2}{2} = \frac{A_1}{A_2} v_1^2 + \frac{A_0}{A_2} (v_1^2 - 2gH_1) -$$

$$- \left[\frac{A_1^2}{A_2^2} v_1^2 + 2 \frac{A_1 A_0}{A_2^2} v_1 \sqrt{v_1^2 - 2gH_1} + \left(\frac{A_0}{A_2} \right)^2 (v_1^2 - 2gH_1) \right]$$

$$(0,125 v_1^2 - 73,575) = 0,141 v_1^2 (v_1^2 - 392,4)$$

$$0,125 v_1^4 - 36,934 v_1^2 - 5413,281 = 0$$

$$v_1 = 20,07 \text{ m/s}$$

Zatim: $v_0^2 = 402,944 - 392,4 = 10,544$

$$v_0 = 3,25 \text{ m/s}$$

$$Q_1 = A_1 v_1 = 0,006302 \text{ m}^3/\text{s} = 6,3 \text{ l/s}$$

$$Q_0 = A_0 v_0 = 0,0030615 \text{ m}^3/\text{s} = 3,1 \text{ l/s}$$

b) Sa difuzorom

$$\frac{[(z+H_2)\rho g + (1-\epsilon)\rho \frac{v_2^2}{2} + p_a] - [(z+H_1)\rho g - \rho \frac{v_1^2}{2} + p_a]}{\rho} = v_2 \left(\frac{Q_1 v_1 + Q_0 v_0}{Q_1 + Q_0} - v_2 \right)$$

$$-0,109v_2^2 + 9,20 = -0,234v_1 \sqrt{v_1^2 - 392,4}^2$$

$$0,043v_1^4 - 19,48v_1^2 - 84,64 = 0$$

$$v_1 = 21,385 \text{ m/s}$$

$$v_0 = 8,057 \text{ m/s}$$

$$Q_1 = A_1 v_1 = 0,006715 \text{ m}^3/\text{s} = 6,7 \text{ l/s}$$

$$Q_0 = A_0 v_0 = 0,007590 \text{ m}^3/\text{s} = 7,6 \text{ l/s}$$

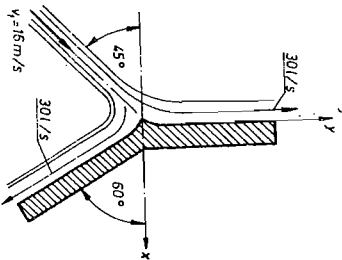
Zadaci

1. Nepokretna glatka ploča, pri-

kazana na slici, deli vodeni mlaz tako da 30 l/s teče u svakom pravcu. Ako je brzina mlaza 16 m/s, naći veličinu i smer horizontalne i vertikalne sile, kojom mlaz deluje na ploču.

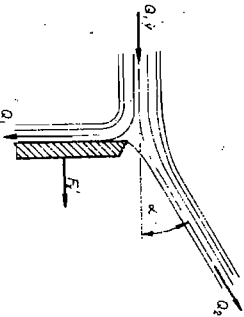
$$\text{Rešenje. } F'_x = 438 \text{ N}$$

$$+F'_y = 607,2 \text{ N}$$



2. Ravna ploča je uvedena

u slobodan mlaz vode upravno na osu mlaza, tako da otpada deo protoka Q_1 i izaziva devijaciju ostatog dela protoka za ugao α . Brzina mlaza vode je $v=30 \text{ m/s}$ a protok $Q=36 \text{ l/s}$, dok je protok otsečenog dela mlaza $Q_1=12 \text{ l/s}$. Odrediti silu F'_x kojom mlaz vode deluje na ploču kao i ugao devijacije mlaza α . Zanimariti trenje tečnosti o ploču.



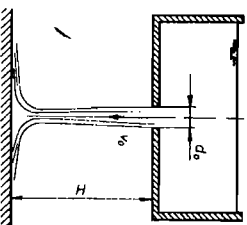
$$\text{Rešenje. } F'_x = 457,2 \text{ N}; \alpha = 30^\circ$$

3. Mlaz tečnosti ističe iz cevi čiji je prečnik d_0 sa brzinom v_0 i pri tome održava telo mase m na visini z . Gustina tečnosti je ρ . Odrediti vrtinju z u zavisnosti od v_0 . Telo preko koga skreće mlaz je glatke površine a gubi - ci se mogu zanemariti.

$$\text{Rešenje. } z = \frac{v_0^2}{2g} - \left(\frac{m}{\rho d_0^2 \pi} \right) \frac{2g}{v_0^2}$$

4. Voda ističe iz rezervoara koji ima otvor na dnu $d_0=10 \text{ mm}$, i pada vertikalno sa početnom brzinom $v_0=4 \text{ m/s}$ na horizontalnu glatku ploču, koja se nalazi na razdaljini $H=2 \text{ m}$ od ivice otvora. Odrediti silu pritiska mlaza na ravan.

$$\text{Rešenje. } +F = 2,33 \text{ N}$$



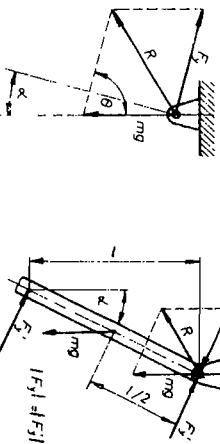
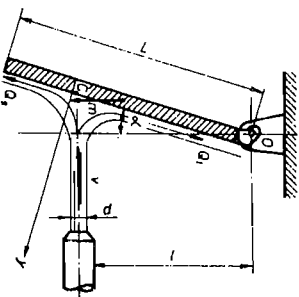
5. Pravougaona, homogena, glatka ploča mase $m=50 \text{ kg}$ i dužine $l=100 \text{ cm}$, obešena je vertikalno i može se okretati oko horizontalne ose O. Na rastojanju $l_1=70 \text{ cm}$, udara mlaz horizontalne struje vode, koja izlazi iz otvora prečnika $d=3 \text{ cm}$, sa brzinom $v=12 \text{ m/s}$. Odrediti ugao α za koliko se ploča zaokrene i reakciju R' zgloba O.

Napomena: Smatrati da se napadna tačka struje tečnosti nalazi u tački C.

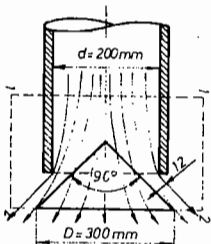
Rešenje.

$$\alpha = 36^\circ 21'$$

$$R' = 446 \text{ N}$$

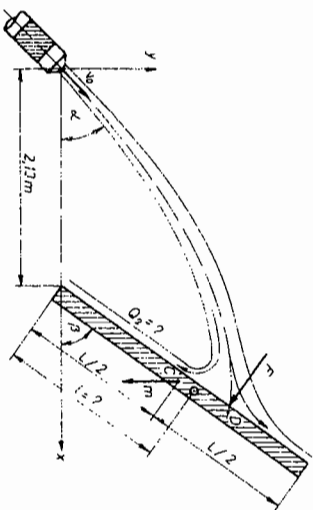


6. Izračunati silu kojom treba pridržavati koničan čep u položaju prikazanom na slici ako je brzina vode u cevi 3m/s. Površina čepa je glatka. Kontrolna zapremina je označena crtkasto.



Rešenje. $F = 1,95 \text{ kN}$

7. Iz mlaznika pravougaonog poprečnog preseka $A_0=0,6 \text{ m}$ nagutog pod uglom $\alpha=45^\circ$ prema horizontu, izbi-ja ravnanski mlaz vode brzinom $v_0=7,67 \text{ m/s}$ i udara o glatku, ravnu, ploču mase $m=3 \text{ t}$, dužine $L=3 \text{ m}$. Ploča je nagnuta pod uglom $\beta=60^\circ$ u odnosu na horizont i njen se donji kraj nalazi na udaljenju 2,13 m, od mlaznika na istoj horizontali. Odrediti količinu vode koja će se kretati niz ploču i osu oko koje se obrće ploča, ako je na slici predstavljen njen ravnotežni položaj.

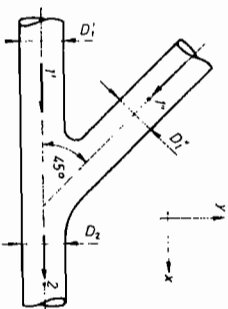


Rešenje. $x_D=3 \text{ m}$; $y_D=1,5 \text{ m}$; (udarna tačka kosog mlaza je i najviša tačka mlaza)

$$v_{xD} = v_0 \cos \alpha ; \quad v_{yD} = 0$$

$$Q_2 = \frac{Q}{2}(1 - \cos \beta) = 0,81 \text{ m}^3/\text{s} ; \quad F = 21525 \text{ N}; \quad k = 1,664 \text{ m}$$

8. Odrediti horizontalnu i vertikalnu silu kojom vodene struje pri sukeljavanju dejstvuju na račvu prikazanu na slici. Podaci: $Q_1/Q_2=0,8$; $Q_2=300 \text{ l/s}$; $\xi_{12}=0,37$; $\xi_{12}=-0,20$; $\xi_{h12}=\xi_{12} \cdot v_2^2/2$; $D_1^2=D_2^2=0,2 \text{ m}$;



$$\xi_{h12} = \xi_{12} v_2^2 / 2; \quad P_{2m} = 3 \text{ at.}$$

Rešenje. $F_x = 6892 \text{ N}$; $F_y = 8540 \text{ N}$

5.3. ELEMENTI KOJI SE KREĆU KONSTANTNOM BRZINOM

Sila kojom fluid dejstvuje na pokretan element, i pod čijim se dejstvom taj element kreće može da bude:

- aktivna sila fluidnog mlaza (npr. turbinske lopatice);
 - reaktivna sila fluidnog mlaza (npr. raketni motor).
- Ova, pokretačka, sila je ista u nepokretnom - apsolutnom i pokretnom - relativnom sistemu ako se ovaj kreće konstantnom brzinom, pod uslovom da se izražava preko odgovarajućih apsolutnih i relativnih veličina na ulazu i izlazu tog elementa. Kada je pokretačka sila aktivna sila mlaza obično se upotrebljava relativni koordinatni sistem. Kada je pokretačka sila reaktivna sila mlaza upotrebljavaće se apsolutni koordinatni sistem.

U slučajevima promenljivog kretanja (ubrzanog ili usporenog) upotrebljavaće se opšti oblik jednačine o promeni količine kretanja (poglavlje 5.4.).

5.3.1. AKTIVNA POKRETAČKA SILA

Brzina i protok, koji se nalaze u jednačini o promeni količine kretanja, u relativnom sistemu imaju vrednosti koje se razlikuju od apsolutnih. Brzina u relativnom koordinatnom sistemu tj. brzina preko ili kroz pokretni element je vektorska razlika apsolutne i prenosne brzine i naziva se relativnom brzinom. Protok preko pokretnog elementa se naziva redukovanim. Fizički smisao njegovog izraza se vidi iz prvog primera.

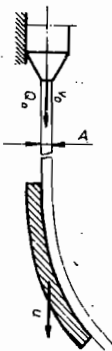
U slučaju velikog broja lopatica koje se kreću pod dejstvom mlaza (npr. turbinsko kolo koje se obrće velikom brzinom, ili ima velik broj lopatica), redukovani protok treba za-

mentli stvarnim, apsolutnim protokom, najčešće obeleženi sa Q_0 ; jer u svakom i najmanjem trenutku vremena mlaz fluida udara u novu lopaticu a da je pri tome ne susitiže. Medjutim, bez obzira na protok, obavezno se u jednačini o promeni količine kretanja unosi relativna brzina - ukoliko se radi o relativnom sistemu $v=v_0-u$, jer je lopatica (vidi sliku iz 1. primera) u bez obzira koliko kratkom vremenskom trenutku, primila količinu fluida sa brzinom v_0 a dalje je prenosi brzinom u .

Primeri

1. Odrediti veličinu

redukovanoog protoka za slučaj kada ravanski slobodan mlaz klizi preko glatke pokretne lopatice prikazane na slici. Podaci: brzina mlaza na izlazu iz mlaznika v_0 ; izlazna površina preseka mlaznika A ; brzina pokretne lopatice u .



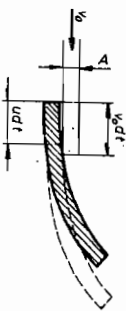
Rešenje. Q_I - redukovan protok se određuje uočavanjem položaja mlaza u odnosu na lopaticu. Lopaticu u jedinici vremena dt nosi sa sobom samo deo mlaza $A v_0 dt$ i to deo $A(v_0-u)dt$. Površina preseka mlaza A ostaje nepromenjena na celoj površini lopatice. Zapremina mlaza koji ostaje na lopatici u jedinici vremena dt je

$$Q_I dt = A(v_0-u)dt$$

odakle je $Q_I = A(v_0-u)$.

Ako se sa Q_0 označi protok fluida na izlazu iz mlaznika $Q_0 = A v_0$, i odatle zameni A u gornju jednačinu, dobija se karakterističan izraz za redukovan protok

$$Q_I = Q_0 \frac{(v_0-u)}{v_0}$$



Ovaj protok bi se slivao sa lopatice u sud, kada bi sud bio zakačen za lopaticu.

2. Nađi horizontalnu i vertikalnu silu koju

prima lopatica od slobodnog mlaza vode prema slici, ako je:

- lopatica nepokretna,

- lopatica pokretna $u=10$ m/s.

Trenje između mlaza i lopatice zanemariti. Ostali podaci: $\alpha=135^\circ$; $v_0=30$ m/s; $Q=14$ l/s.

Rešenje.

- Slučaj nepokretne lopatice.

Horizontalna sila se određuje prema $F_x = \rho Q(v_{2x} - v_{1x})$, gde je zbog nepostojanja trenja brzina mlaza vode na lopatici u svakom preseku ista, tj. $v_1=v_2=v_0$ pa sledi

$$-F_x = \rho Q[-v_0 \cos(180^\circ - \alpha) - v_0] = -\rho Q v_0 (1 - \cos \alpha)$$

$$F_x = \rho Q v_0 (1 - \cos \alpha) = 1000 \cdot 0,014 \cdot 30 \cdot (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 716,94 \text{ N.}$$

Mlaz deluje na lopaticu silom $F'_x = 716,94$ N +.

Vertikalna sila je $F_y = \rho Q(v_{2y} - v_{1y})$

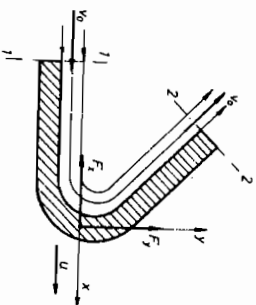
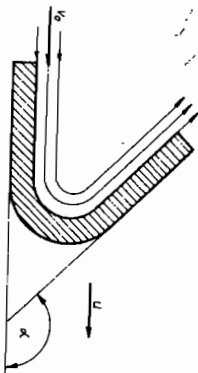
$$F_y = \rho Q [v_0 \sin(180^\circ - \alpha) - 0] = \rho Q v_0 \sin \alpha = 1000 \cdot 0,014 \cdot 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 296,94 \text{ N.}$$

Mlaz deluje na lopaticu vertikalnom silom $F'_y = 296,94$ N

- Slučaj pokretne lopatice ($Q=Q_0$).

Sila je vezana za pokretnu lopaticu, pa su zato brzina i protok koji figuriraju u jednačini o promeni količine kretanja manji (lopatica izmiče mlazu) tj.

$$v_1 = v_2 = v_0 - u = 30 - 10 = 20 \text{ m/s.}$$



Redukovan protok je dat sa

$$Q_r = Q_0 \frac{(V_0 - u)}{V_0} = 14 \frac{20}{30} = \frac{28}{3} \text{ l/s}$$

Horizontalna sila je

$$-F_x = \rho Q_r [-V_2 \cos(180^\circ - \alpha) - V_1]$$

$$F_x = \rho Q_0 \frac{(V_0 - u)^2}{V_0} (1 - \cos \alpha) = 318,64 \text{ N}$$

Horizontalna sila mlaza na lopaticu je $F'_x = 318,64 \text{ N}$.

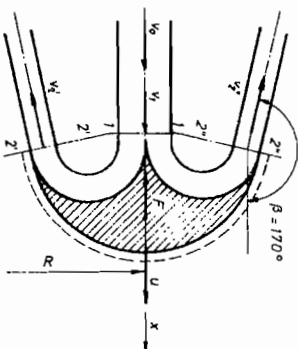
Vertikalna sila je

$$F_y = \rho Q_r [V_2 \sin(180^\circ - \alpha) - 0] = \rho Q_0 \frac{(V_0 - u)^2}{V_0} \sin \alpha = 131,97 \text{ N}$$

Vertikalna sila od mlaza na lopaticu je $F'_y = 131,97 \text{ N}$.

3. Struja vode sa proto-

kom $Q_0 = 200 \text{ l/s}$ ističe iz mlaznika sa brzinom $v_0 = 100 \text{ m/s}$ i udara u lopaticu Peltonove turbine. Sa lopatice struja silazi pod uglom $\beta = 170^\circ$. Odrediti, zanemarujuće hidraulične gubitke, pri kakvoj ugaonoj brzini obrtaja ω snaga turbine P dostiže najveću veličinu, ako je rastojanje od ose obrtanja do centra pritiska struje $R = 50 \text{ cm}$. Odrediti, takodje, koeficijent korisnog dejstva.



Rešenje. Obimna brzina centra lopatice je $u = R \cdot \omega$. Za kontrolnu zapreminu označenu na crtežu i vezanu za pokretnu lopaticu, relativna brzina struje pri dodiru sa lopaticom je

$$V_1 = V_0 - u$$

i poklapa se sa pravcima brzina v_0 i u . U slučaju odsustva

$$V_1 = V_2 = V_0 - u$$

$$V_1 = V_2 = V_0 - u$$

Jednčina o promeni količine kretanja za označene preseke i pretpostavljenu silu reakcije određuje silu reakcije F .

Obracunavajući apsolutni protok (slučaj turbinskog kola sa velikim brojem lopatica) sila reakcije je

$$-F = -\rho Q_0 v \cos(180^\circ - \beta) = \rho Q_0 v$$

$$F = \rho Q_0 (V_0 - u) [\cos(180^\circ - \beta) + 1] = \rho Q_0 (\cos 10^\circ + 1) (V_0 - u)$$

Snaga turbine je data sa

$$P = F \cdot u = \rho Q_0 (\cos 10^\circ + 1) (V_0 - u) \cdot u$$

Maksimalna snaga turbine u funkciji ugaone brzine ω određuje se prema

$$\frac{dP}{d\omega} = \rho Q_0 (\cos 10^\circ + 1) \frac{d}{d\omega} [(V_0 - R\omega) R\omega] = 0$$

Sledi

$$V_0 - 2R\omega = 0$$

$$\omega = \frac{V_0}{2R} = \frac{100}{1} = 100 \text{ s}^{-1}$$

Optimalan broj obrtaja je

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 100}{\pi} = 955,41 \text{ min}^{-1}$$

Maksimalna snaga za optimalno ω je

$$P = \rho Q_0 (\cos 10^\circ + 1) (V_0 - u) u = 1000 \cdot 0,2 (0,9848 + 1) (100 - 0,5 \cdot 100) \cdot 0,5 \cdot 100 = 990 \text{ kW}$$

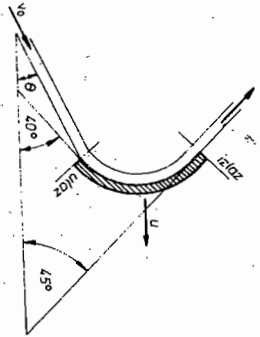
Stepen korisnosti je

$$\eta = \frac{F \cdot u}{\frac{1}{2} \rho Q_0 V_0^2} = \frac{2 (\cos 10^\circ + 1) (V_0 - u) u}{V_0^2} = \frac{2 (0,9848 + 1) 50 \cdot 50}{100^2}$$

$$\eta = 0,9924$$

4. a) Otkrediti ugao θ

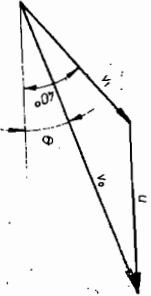
pod kojim treba usmeriti mlaz vode, pa da ne dodje do udara na lopatice kola, ako je obimna brzina lopatice $u=6$ m/s, a apsolutna brzina vode na ulazu $v_0=15$ m/s. Lopatica je glatka. Uglovi lopatice na ulazu i izlazu dati su na slici.



- b) Naći snagu P koju voda predaje lopatici ako je $Q_0=10$ l/s.
- c) Naći koeficijent korisnog dejstva η .

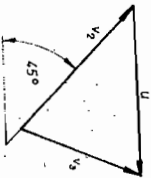
Rešenje. Iz trouglova ulaznih i izlaznih brzina određuje se relativna brzina struje preko lopatice $v=v_1=v_2$ i apsolutna brzina na izlazu sa lopatice v_3 .

Trougao ulaznih brzina



$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$$

Trougao izlaznih brzina



v_0 -apsolutna brzina na ulazu

v_3 -apsolutna brzina na izlazu

a) $v_0^2 = v_1^2 + u^2 - 2v_1u \cos 140^\circ$

$$v_1^2 = v_0^2 - u^2 - 2v_1u \cos 40^\circ$$

$$v_1^2 + 12 \cdot 0,766 v_1 - 189 = 0$$

$$v_1 = 9,91 \text{ m/s}; \cos \theta = \frac{v_1 \cos 40^\circ + u}{v_0} = \frac{9,91 \cdot 0,766 + 6}{15}$$

$$\cos \theta = 0,9067; \theta = 25^\circ;$$

$$v_3^2 = v_2^2 - u^2 - 2v_2u \cdot \cos 45^\circ = 9,91^2 + 6^2 - 2 \cdot 9,91 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 50,37$$

$$v_3 = 7,1 \text{ m/s}.$$

b) Snaga koju voda predaje lopaticama je

$$-F = \rho Q_0 (-v \cos 45^\circ - v \cos 40^\circ)$$

$$P = F \cdot u = \rho Q_0 v (\cos 45^\circ + \cos 40^\circ) u$$

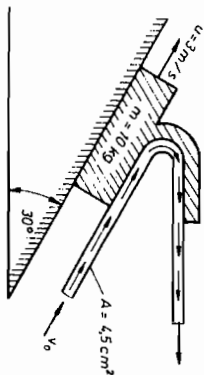
$$P = 1000 \cdot 0,01 \cdot 9,91 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 0,766\right) \cdot 6 = 874,68 \text{ W}$$

Radno kolo je sa velikim brojem lopatica.

c) Stepen korisnosti lopatičnog kola je

$$\eta = \frac{Fu}{\frac{1}{2} \rho Q v^2} = \frac{145,78 \cdot 6}{\frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 0,01 \cdot 225} = 0,777$$

5. Vodeni mlaz poprečnog preseka $A=4,5 \text{ cm}^2$ napada lopaticu učvršćenu na jednom bloku i skreće prema prikazanoj slici. Potrebno je odrediti brzinu mlaza vode v_0 dovoljnu za kretanje bloka po strmoj ravni konstantnom brzinom $u=3$ m/s. Zanemariti gravitacioni uticaj na mlaz i pretpostaviti da je koeficijent trenja između bloka i strme ravni $f=0,2$.



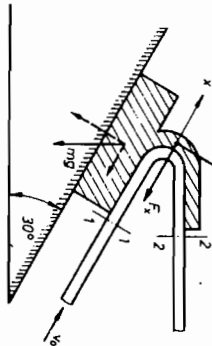
Rešenje. $v_1 = v_0 - u$,
 $v_2 = v_0 - u$.

$$Q_{I1} = Q_0 \frac{(v_0 - u)}{v_0} = A \cdot v_0 \frac{(v_0 - u)}{v_0} = A(v_0 - u),$$

$$-F_x = \rho Q_{I1} (-v_2 \cos 30^\circ - v_1)$$

$$F_x = \rho A (v_0 - u)^2 (1 + \cos 30^\circ) = 1000 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4} (v_0 - 3)^2 (1 + 0,866)$$

$$F_x = 0,84 (v_0 - 3)^2.$$



Sila od mlaza na lopaticu pravcem x ose je $F'_x = 0,84 (v_0 - 3)^2 \text{ N}$.

$$F_y = \rho Q_{I1} (v_2 \sin 30^\circ - 0)$$

$$F_y = \rho A (v_0 - u)^2 \sin 30^\circ = 1000 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4} (v_0 - 3)^2 \cdot 0,5 = 0,225 (v_0 - 3)^2$$

Sila sa kojom mlaz deluje na lopaticu u y pravcu je

$$+F'_y = 0,225 (v_0 - 3)^2 \text{ N}$$

Pošto je lopatica u dinamičkoj ravnoteži na strmoj

ravni važi $\Sigma X = 0$

$$F'_x - mg \sin 30^\circ - (mg \cos 30^\circ + F'_y) \cdot f = 0$$

$$0,84 (v_0 - 3)^2 - 10 \cdot 9,81 \cdot 0,5 - [10 \cdot 9,81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,225 (v_0 - 3)^2] \cdot 0,2 = 0$$

$$0,885 (v_0 - 3)^2 = 66,02$$

$$v_0 - 3 = 8,64$$

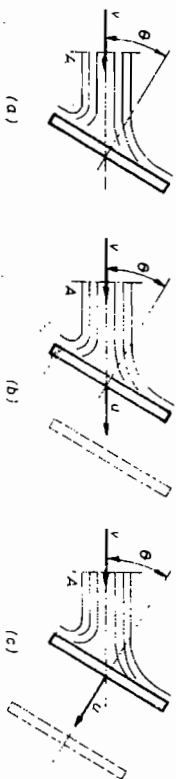
$$v_0 = 11,64 \text{ m/s}$$

Zadaci

1. Odrediti izraz za silu kojom mlaz vode, poprečnog preseka A, udara u ravnu ploču, a brzina vode v gradi sa normalom na ravnju ploče ugao θ , u slučajevima:

- a) ploča je nepokretna,
- b) ploča se kreće u pravcu mlaza brzinom u,
- c) ploča se kreće u pravcu svoje normale brzinom u.

Sračunati silu kojom mlaz vode deluje na ploču, snagu ploče i koeficijent korisnog dejstva sistema - mlaz - ploča, ako je: $A=5 \text{ cm}^2$; $v=6 \text{ m/s}$; $\theta=30^\circ$ i $u=2 \text{ m/s}$.



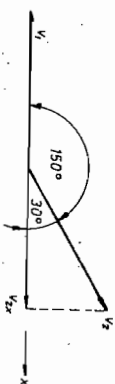
Napomena: Ploča je glatka (bez trenja), a mlaz vode se po udaru u ploču širi po ploči podjednako na sve strane.

Rešenje. a) $F' = \rho A v^2 \cos \theta$; b) $F' = \rho A (v-u)^2 \cos \theta$
 c) $F' = \frac{\rho A}{\cos \theta} (v \cos \theta - u)^2 = 5,886 \text{ N}$; $P = 11,73 \text{ W}$

$$\eta = \frac{P}{\frac{mv^2}{2}} = 21,8\%$$

2. Kolo Peltonove turbine se okreće pod dejstvom mlaza vode brzine 40 m/s. Lopatica zakreće vodu za 150° , a trenje vode o lopaticu smanjuje brzinu mlaza na izlazu za 25% od ulazne brzine. Sračunati stepen korisnosti kola kada se ono okreće sa 240 min⁻¹ a lopatice se nalaze na prečniku od 1,4 m.

Rešenje. $\eta = 81,3\%$



5.3.2. REAKTIVNA POKRETAČKA SILA

Reaktivna pokretačka sila se određuje u apsolutnom-nepokretnom koordinatnom sistemu preko vrednosti apsolutnog protoka i apsolutne brzine mlaza.

Protok je izražen sa

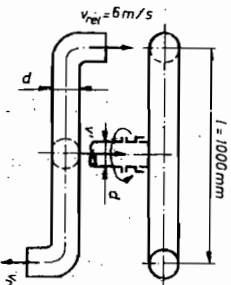
$$Q = A \cdot v_{rel}$$

gde je A deo površine omotača kontrolne zapremne kroz koju ističe (utiče) fluid relativnom brzinom v_{rel} .

Primeri

1. Segnerovo kolo, pokazano na slici, leži u horizontalnoj ravni a ozdo, kroz vertikalnu cev dobija vodu. Voda ističe kroz levi i desni krak istom brzinom 6 m/s.

Sve cevi su konstantnog kružnog preseka, prečnika 4 cm, s tim što je prečnik na kom se nalaze težišta isticaznih otvora kola jednak 1000 mm. Ako je okretanje ustaljeno a otpor za obrtanje kola iskazan momentom sile otpora jednakom $M_0 = 30 \text{ Nm}$,



pita se: a) kolika je ugaona brzina odnosno broj obrtaja kola? b) koliki je vektor sile koja se prenosi na aksijalno ležište, postavljeno ispod Segnerovog kola, ako se zanemare težine pokretnog dela kola i vode u njemu? c) koliko se snage troši za rad kola?

Rešenje. a) Spreng reaktivne sile (reaktivan moment) mlaza i otpornog momenta su isti

$$F \cdot l = M_0.$$

Reaktivna sila F je određena sa

$$F = \rho Q v.$$

gde su Q i v - vrednosti apsolutnog protoka i apsolutne brzine

$$Q = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot v_{rel} ; \quad v = v_{rel} - u = v_{rel} - \frac{1}{2} \omega.$$

Tako je

$$\frac{\rho d^2 \pi}{4} v_{rel} (v_{rel} - \frac{1}{2} \omega) = M_0.$$

Odatle je

$$\omega = \frac{2}{l} (v_{rel} - \frac{4 M_0}{\rho d^2 \pi v_{rel}}) = \frac{2}{1} (6 - \frac{4 \cdot 30}{1000 \cdot 0,042 \pi \cdot 6}) = 4,04 \text{ s}^{-1}.$$

b) Pri skretanju ukupnog protoka $2Q$ iz dovodne vertikalne u horizontalnu cev javlja se aksijalna sila

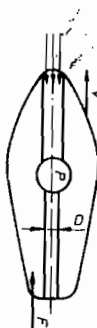
$$F_a = 2 \rho Q v' = 4 \rho Q v_{rel} = 4 \rho \frac{d^2 \pi}{4} v_{rel}^2 = 4 \cdot 1000 \cdot \frac{0,042 \pi}{4} \cdot 6^2 + F_a = 180,86 \text{ N}.$$

c) Snaga utrošena za rad kola je

$$P = M_0 \omega = 30 \cdot 4,04 = 121,2 \text{ W}.$$

2. Da bi se jedan čamac kretao brzinom $v=19,3 \text{ km/h}$ potrebna je propulzivna sila od $F=1800 \text{ N}$. Ako se pokretačka sila ostvaruje sa pumpnim sistemom prikazanim na slici, koliki treba da je protok vode Q ako je izlazna cev prečnika

$D=300 \text{ mm}$? Koliki je ukupan koeficijent korisnog dejstva ako je η pumpnog sistema 65% . Ulazna brzina vode u dovodni cevovod odgovara brzini kretanja čamca.



$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

Rešenje. Kontrolna zagrada je ceo čamac. Pritis-

ci su svugde isti i jednaki spoljnjem - okolnom. Promena brzine postoji samo na pramčanoj i kremennoj strani. Efekat je isti ako se nepokretan čamac zamisli u vodenoj struji brzine v . Za takvu postavku jednačina o promeni količine kretanja daje

$$F = \rho Q (v_2 - v_1)$$

Sila F' kojom vodena struja deluje na čamac je $|F'| = |F|$ sa smerom $+$.

$$1800 = \rho \frac{Q^2 A}{D^2 \pi} - \rho Q v$$

$$1800 = \frac{Q^2 4000}{0,32 \pi} - Q \frac{19,3}{3,6} 1000$$

odatle je

$$Q^2 - 0,379 Q - 0,127 = 0$$

$$Q = \frac{0,379 + \sqrt{0,379^2 + 4 \cdot 0,127}}{2} = 0,59 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Ukupni stepen korisnosti je proizvod stepena korisnosti pumpnog i propulzivnog sistema

$$\eta_u = \eta_{pu} \cdot \eta_p$$

gde je

$$\eta_p = \frac{F \cdot v}{E_{K2} - E_{K1}} = \frac{\rho Q (v_2 - v_1) v_1}{\frac{1}{2} \rho Q (v_2^2 - v_1^2)} = \frac{2 v_1}{v_2 + v_1}$$

Pošto su brzine $v_2 = \frac{4Q}{D^2 \pi} = \frac{0,59 \cdot 4}{0,32 \pi} = 8,351 \text{ m/s}$

i $v_1 = \frac{19,3}{3,6} = 5,36 \text{ m/s}$,

$$\eta_p = \frac{2 \cdot 5,36}{8,351 + 5,36} = 0,782.$$

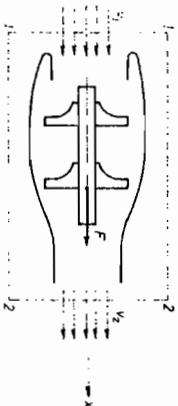
Veliki stepen korisnosti propulzivnog sistema (ali mala propulzivna sila) je posledica malog ubrzanja vodene struje - za čime uvek i treba težiti.

Ukupni stepen korisnosti je

$$\eta = \eta_p \cdot \eta_v = 0,65 \cdot 0,782 = 0,508.$$

Napomena. Ceo pumpni sistem se fiktivno može zameniti sa mlaznikom u čijim preseccima vladaju isti pritisci (crtkasto označen na crtežu).

3. Mlazni avion leti kroz miran vazduh konstantnom brzinom $v_1=804,5$ km/h, usisavajući u motor 22,7 kg/s vazduha. Ako izlazni gasovi napuštaju mlaznik sa brzinom $v_2=397$ m/s, a težinski odnos goriva i vazduha je 1:40, izračunati silu potiska na avion i označiti njen smer. Zanimariti promenu težine aviona.



Rešenje. Za zaustavljeni položaj motora (aviona) i za kontrolnu zapreminu označenu na crtežu, sa pretpostavljenim smerom sile reakcije motora, jednačina o promeni količine kretanja glasi:

$$F = \rho Q_2 v_2 - \rho Q_1 v_1$$

gde su:

$$\rho Q_1 = 22,7 \text{ kg/s};$$

$$\rho Q_2 = 22,7 \left(1 + \frac{1}{40}\right) = 22,7 \cdot 1,025 = 23,27 \text{ kg/s};$$

$$v_2 = 397 \text{ m/s}; \quad v_1 = \frac{804,5}{3,6} = 223,47 \text{ m/s}.$$

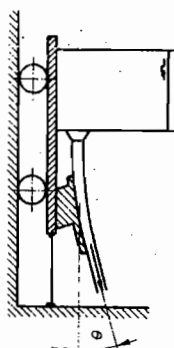
$$F = 23,27 \cdot 397 - 22,7 \cdot 223,47 = 4165 \text{ N}.$$

Sila potiska je $F' = 4165 \text{ N}$.

Zadaci

1. Iz velikog rezervoara kroz mlaznik $\phi 50$ mm ističe

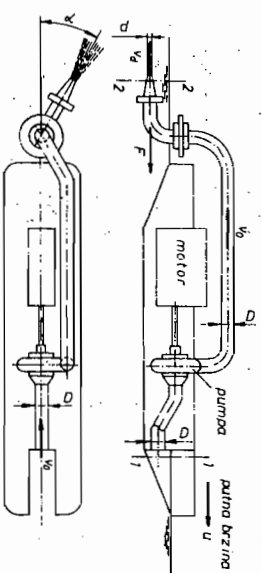
voda brzinom od 3 m/s. Ugrađeno korito skreće mlaz vode za $\theta=30^\circ$ kako je pokazano na skici. Smatrajući da je isticanje stacionarno naći: a) Silu napreznja u konopcu sa kojim su kolica pričvršćena za zid;



b) U slučaju da je za kretanje kolica potrebna upola manja sila od gore nadjene, odrediti tu brzinu, zanemarujući promenu količine vode u rezervoaru.

Rešenje. a) $F = 15,3 \text{ N}$; b) $u = 1,3 \text{ m/s}$

2. Za lučki čamac, prikazan na slici, koji se kreće dejstvom sile mlaza vode, odrediti putnu brzinu u. Podaci: Ukupna okvašena površina čamca $A=12 \text{ m}^2$; koeficijent trenja vode o okvašene površine ne zavisi od brzine kretanja i jednak je $c_f=0,4$; protok je $Q=785 \text{ l/s}$; prečnik cevovoda je $D=0,5 \text{ m}$. Ugao $\alpha=0^\circ$, prečnik mlaznika je $d=180 \text{ mm}$. Pri proticanju vode kroz cevni sistem sve visinske razlike, lokalni i gubici trenja se zanemaruju.

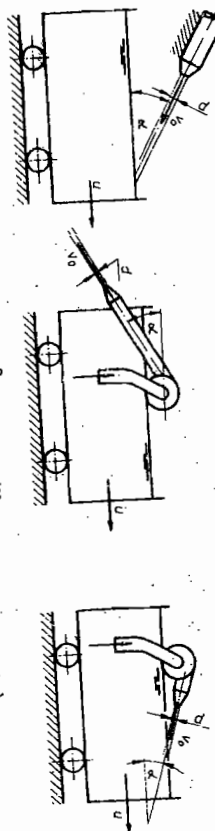


Napomena. Sila koja je potrebna za kretanje čamca brzinom u određuje se za kontrolnu zapreminu celog čamca (presecc 1 i 2) i vezana je sa brzinom u, formulom

$$F = \frac{1}{2} \rho c_f A \cdot u^2.$$

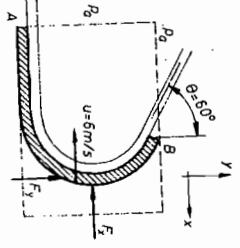
Rešenje. $(F = \rho Q(v_d - v_o) = 21088 \text{ N}) \quad u = 2,965 \text{ m/s}$

3. Kolika je sila mlaza kojom se ostvaruje jednoliko kretanje rezervoara prikazanog na slici i koliki je koeficijent korisnog dejstva ovog mlaza kao propulzivnog sredstva. Trenje, gublji i promena količina tečnosti u rezervoaru se zanemaruju.



Rešenje. a) $F = \frac{\rho d^2 \pi}{4} (v_o - \frac{u}{\cos \alpha}) (v_o \cos \alpha - u)$
 $\eta = \frac{2(v_o \cos \alpha - u)^2 u}{v_o^3 \cos \alpha}$
 b) $F = \frac{\rho d^2 \pi}{4} v_o (v_o \cos \alpha - u)$; $\eta = \frac{2(v_o \cos \alpha - u) u}{v_o}$
 c) $F=0$; $\eta=0$

4. Lopatica, glatke površine, se kreće na levo sa konstantnom brzinom $u=6 \text{ m/s}$. U nju udara mlaz vode prečnika $d=80 \text{ mm}$ suprotnog smeru brzinom $v_o=10 \text{ m/s}$, kao što je pokazano na slici. Odrediti sile F_x i F_y s kojima se lopatica protivi dejstvu mlaza.



5.4. OPŠTI OBLIK JEDNAČINE

Opšti oblik jednačine o promeni količine kretanja obuhvata sisteme sa promenljivom masom i nejednolikim kretanjem. Pošto jednačina važi samo za inercijski koordinatni sistem (nepokretan ili se kreće jednolikom brzinom) promena

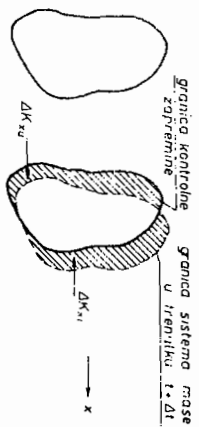
količine kretanja će se izražavati u odnosnu na apsolutni - nepokretan koordinatni sistem.

Prema drugom Njutnovom zakonu suma spoljnih sila u jednom pravcu jednaka je promeni količine kretanja u istom pravcu,

$$IX = \frac{d(mv_x)}{dt}$$

Oznaka za količinu kretanja je $K = (mv)$.

Masa m koja je u trenutku t zauzimala jedan deo prostora (kontrolnu zapreminu) i posedovala brzinu v u sledećem trenutku $t+dt$ zauzima novi deo prostora (novu kontrolnu zapreminu), brzinu $v+dv$ i masu $m+dm$.



Količina kretanja u trenutku t (u pravcu x ose) za nepokretan sistem K_{x1} jednaka je količini kretanja u kontrolnoj zapremini za isti vremenski trenutak t - K_{x1}' , jer su u tom trenutku obe mase koje su uključene u količinu kretanja iste.

U trenutku $t+dt$ količina kretanja za nepokretan sistem K_{x2} jednaka je količini kretanja u kontrolnoj zapremini K_{x2}' plus količini kretanja mase koja za vreme dt napušta kontrolnu zapreminu $\Delta K_{x1}'$, minus količina kretanja mase koja za vreme dt ulazi u kontrolnu zapreminu $-\Delta K_{xu}$

$$K_{x2} = K_{x2}' + \Delta K_{x1}' - \Delta K_{xu}$$

Promena količine kretanja u pravcu x posmatranog sistema je

ili

$$\Delta K_x = K_{x2} - K_{x1} = K_{x2}' - K_{x1}' + \Delta K_{x1}' - \Delta K_{xu}$$

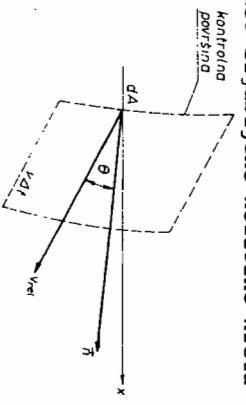
$$I \frac{d(mv_x)}{dt} = \frac{d(mv_x)}{dt} = \frac{d(mv_x)'}{dt} + \frac{dK_{x1}' - dK_{xu}}{dt}$$

Ovde je: $\frac{dK_{x1}' - dK_{xu}}{dt}$ - deo akumulisane količine kretanja u kontrolnoj zapremini, - deo količine kretanja koja se izgubila

iz kontrolne zapremine. Ovaj deo izgubljene količine kretanja može da se predstavi kao

$$\frac{dK_{x1} - dK_{xu}}{dt} = \int_A v_x \rho' v_{rel} \cos \alpha da$$

gde je \vec{v}_x - brzina fluida na graničnim površinama kontrolne zapremine u odnosu na osu x nepokretnog sistema, ρ' - gustina fluida a $v_{rel} \cos \alpha$ - elementaran protok kroz kontrolnu zapreminu (v_{rel} je brzina proticanja kroz granične površine kontrolne zapremine tj. relativna brzina).



Polazna jednačina sada dobija oblik

$$\dot{K}_x = \frac{K_{x2}' - K_{x1}'}{dt} + \int_A v_x \rho' v_{rel} \cos \alpha da$$

I slično

$$\dot{K}_y = \frac{K_{y2}' - K_{y1}'}{dt} + \int_A v_y \rho' v_{rel} \cos \alpha da$$

$$\dot{K}_z = \frac{K_{z2}' - K_{z1}'}{dt} + \int_A v_z \rho' v_{rel} \cos \alpha da$$

Apsolutne brzine v_x, v_y i v_z u zavisnosti od orijentacije usvojenog koordinatnog sistema mogu da budu pozitivne i negativne.

$$\text{Jednačina } \dot{K}_x = \frac{K_{x2}' - K_{x1}'}{dt} + \int_A v_x \rho' v_{rel} \cos \alpha da$$

predstavlja proširenje osnovnog oblika

$$\dot{K}_x = \rho Q v_{x2} - \rho Q v_{x1}$$

čija cela desna strana odgovara članu

$$\int_A v_x \rho' v_{rel} \cos \alpha da$$

Osnovni oblik se upotrebljava za elemente koji su nepokretni ili se kreću jednolikom brzinom. Sila reakcije F_x' koja pretstavlja otpornu silu u opštem obliku, takodje se nalazi na levoj strani jednačine. U odsustvu otpornih sila, pokretačkoj sili mlaza se suprotstavlja inercijalna sila

koja je uključena u desnu stranu jednačine.

Za poznatu reaktivnu pokretačku silu dinamička jednačina kretanja sistema se može izraziti kao

$$\frac{d}{dt} (m \vec{u}) = I \vec{F} \quad (\text{v. 5.4.2. primer 1.b})$$

gde u $I \vec{F}$ ulaze pokretačke i otporne sile (spoljašnje sile), a u je promenljiva brzina sistema.

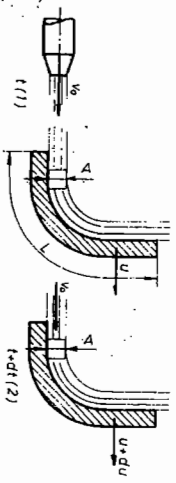
Za poznatu aktivnu pokretačku silu dinamička jednačina kretanja sistema se može izraziti kao

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = I \vec{F} \quad (\text{v. 5.4.2. primer 2.c})$$

gde u $I \vec{F}$ ulaze pokretačke i otporne sile (spoljašnje).

5.4.1. NEJEDNOLIKO KRETANJE LOPATICA

Masa fluida na lopatici (m_L), koja se kreće pod dejstvom mlaza fluida, ostaje nepromenjena - bez obzira da li se lopatica kreće jednolikom ili nejednolikom brzinom. Ovo sledi iz:



$$m_{f1} = \rho Q_{f1} t = \rho \frac{Q}{V_0} (V_0 - u) \frac{L}{V_0 - u} = \rho \frac{Q}{V_0} L$$

$$m_{f2} = \rho Q_{f2} t = \rho \frac{Q}{V_0} [V_0 - (u+du)] \frac{L}{[V_0 - (u+du)]} = \rho \frac{Q}{V_0} L$$

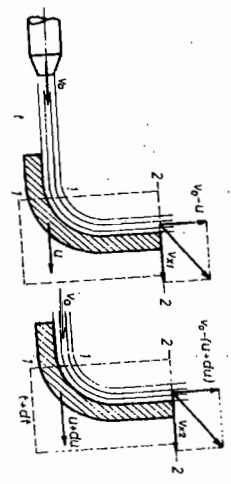
t₁ i t₂ je vreme koje je potrebno da fluidni deo predje preko lopatice dužine L u trenutku t i t+dt.

Primeri

1. Odrediti silu kojom mlaz fluida dejstvuje na lopaticu mase m₀ koja se pod njegovim dejstvom kreće promenljivom brzinom u, bez ikakvih otpornih sila.
Napomena. Pretpostaviti da je mlaz horizontalan konstantne brzine v₀ i beskonačne dužine.

Rešenje.

U trenutku t i t+dt za lopa-
ticu su vezane is-
te mase vode koje



Imaju različite br-
zine. Kontrolna zapremina obuhvata masu fluida na lopatici
i masu lopatice u trenucima t i t+dt.

Opšta jednačina o promeni količine kretanja glasi:

$$0 = \frac{K'_{x2} - K'_{x1}}{dt} + \int_A \rho v_{rel} \cos \alpha da$$

Ako se sa m = m₀ + m_f označi nepromenljiva masa lopatice i
fluida, dalje je

$$K'_{x2} = m(u+du) \quad i \quad K'_{x1} = mu,$$

$$tj. \quad \frac{K'_{x2} - K'_{x1}}{dt} = m \frac{du}{dt}$$

$$\text{Integral} \quad \int_A \rho v_{rel} \cos \alpha da = \rho Q_{x2sr} v_{x2sr} - \rho Q_{x1sr} v_{x1sr}$$

predstavlja razliku srednjih promena količina kretanja fluida
da na izlazu i ulazu lopatice tokom vremena dt. Zato je

$$v_{x2sr} = \frac{u+du+u}{2} = u + \frac{du}{2}; \quad v_{x1sr} = v_0$$

(apsolutne brzine na izlazu i ulazu lopatice tokom vremena
dt u pravcu x ose);

$$i \quad \rho Q_{x2sr} = \rho Q_{x1sr} = \rho \frac{Q_0}{v_0} \left[v_0 - \left(u + \frac{du}{2} \right) \right],$$

$$pa \text{ je} \quad \int_A \rho v_{rel} \cos \alpha da = - \rho \frac{Q_0}{v_0} \left[v_0 - \left(u + \frac{du}{2} \right) \right]^2$$

A

Inercijalna sila $m \frac{du}{dt}$ kojoj odgovara aktivna sila

mლაზა (pošto nema otpornih sila) je

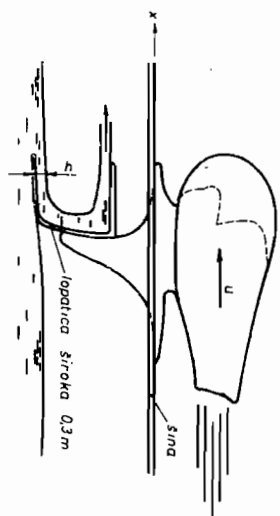
$$\left| m \frac{du}{dt} \right| = \left| F' \right| = \rho \frac{Q_0}{v_0} \left[v_0 - \left(u + \frac{du}{2} \right) \right]^2$$

Ako se na desnoj strani zanemare članovi sa du i du² aktiv-
na sila mლაზა postaje

$$F' = (F'_1)_{u=const} = \rho \frac{Q_0}{v_0} (v_0 - u)^2$$

2. Raketne

saonice se zausta-
vljavaju lopaticom
koja usput skuplja
vodu i izbacuje je
ispred saonica kako
je pokazano na sil-
ci. Celim tokom us-
poravanja, masa sao-
nica se ne menja i



jednaka je 3000 kg, a u trenutku t=0, kada lopatica, čija
je širina 0,3 m prvi put izbacila vodu, brzina saonica je
u=180 m/s. Odrediti debljinu mლაზა vode na lopatici h tako
da maksimalno usporenje saonica bude 10g i izračunati brzi-
nu saonica posle 10 s, pošto je lopatica spuštena u vodu.
Sila trenja između saonica i šina se zanemaruje.

Rešenje. Za kontrolnu zapreminu, koja se sastoji od
šaconice i lopatice sa mlazom vode preko nje, dinamička jed-
načina, u odsustvu spoljnjih sila, glasi:

$$\sum X = \frac{K_2 x - K_1 x}{dt} = 0;$$

ovde je

$$K_2 x = m(u-du) + \rho h \cdot 0,3 \left(u - \frac{du}{2} \right) 2u \quad dt$$

i

$$K_1 x = mu$$

(m - je masa rakete, lopatice i vode na lopatici).
Tako je

$$\frac{m(u-du) + \rho h \cdot 0,3 \left(u - \frac{du}{2} \right) 2u \quad dt - mu}{dt} = 0$$

$$m \frac{du}{dt} = \rho h \cdot 0,3 \left(u - \frac{du}{2} \right) 2u$$

Prema tome, sila kojom voda deluje na lopaticu koja se zaustavlja iznosi

$$F_x' = \rho h \cdot 0,3(u - \frac{du}{dt})2u$$

a sila sa kojom voda deluje na lopaticu koja se kreće jednolikom brzinom u, je

$$F_x'' = \rho h \cdot 0,3 \cdot 2u^2$$

Dinamička jednačina kretanja saonica daje

$$F_{in} = F_x'$$

$$-m \frac{du}{dt} = 2\rho h \cdot 0,3 \cdot u^2 - \rho h \cdot 0,3 \cdot u \cdot \frac{du}{dt}$$

Pošto je $du = \frac{\partial u}{\partial t} dt$, sledi

$$-m du = 2\rho h \cdot 0,3 u^2 dt - \rho h \cdot 0,3 u \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

Poslednji član sa desne strane može da se zanemari pa se dobija

$$-\frac{m}{u^2} du = 2\rho h \cdot 0,3 dt$$

$$\frac{m}{u} = 0,6\rho h \cdot t + C$$

Iz uslova $t=0$ $u=u_0$ sledi $C = \frac{m}{u_0}$, i promena brzine sa vremenom

$$u = \frac{u_0}{1 + \frac{0,6\rho h t}{m}} = \frac{180}{1 + \frac{5}{3}t} = \frac{900}{5 + ht}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{900h}{(5+ht)^2}$$

Maksimalno usporenje se dobija za $t=0$

$$-10g = \frac{900}{25} \cdot h$$

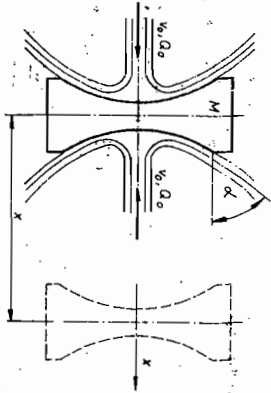
a odatle debljina mlaza na lopatici

$$h = \frac{9}{36} = 0,2725 \text{ m}$$

Brzina saonica posle 10^s iznosi

$$u_{10} = \frac{900}{5 + 0,272 \cdot 10} = 116,5 \text{ m/s}$$

3. U lopaticu, mase M, udaraju dva suprotno usmerena mlaza vode brzine v_0 (protoci Q_0), gustine ρ i laznih uglova α . Lopatica je naglo saopštena brzina v_0 u smeru levog mlaza. Zanemarujući trenje i masu tečnosti koja se nalazi uz lopaticu i pretpostavljajući da se kretanje vrši samo duž x ose, odrediti:



- zakon promene brzine lopatice u, kao i zakon kretanja lopatice u toku vremena i skicirati odgovarajuće dijagrame $u=u(t)$ i $x=x(t)$,

- maksimalno pomeranje lopatice x_{max} i početnu silu F koja lopaticu saopštava brzinu v_0 .

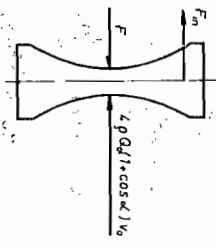
(Početna sila deluje trenutno $t=0$ i u tom trenutku pod dejstvom ove sile lopatica se pokrenula udesno brzinom v_0).

Napomena. U izrazima za silu F kojim mlazevi deluju na lopaticu zanemariti članove nižeg reda.

Rešenje. Kako sila F trenutno deluje na lopaticu mase M to za početni trenutak $t=0$, važi dinamička jednačina ravnoteže

$$F = 4\rho Q_0 (1+\cos\alpha) v_0 + F_{in}$$

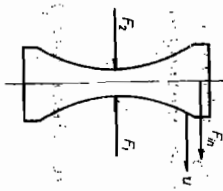
$$F = 4\rho Q_0 (1+\cos\alpha) v_0 - M \frac{du}{dt}$$



Za bilo koji trenutak $t>0$, brzina lopatice se smanjuje što se vidi iz dinamičke jednačine ravnoteže za lopaticu. S desna na levo lopaticu napada sila intenziteta F_1 , a s leva na desno sila intenziteta F_2 .

$$F_1 = \rho Q_0 \frac{(v_0 + u)^2}{v_0} (1 + \cos\alpha)$$

$$F_2 = \rho Q_0 \frac{(v_0 - u)^2}{v_0} (1 - \cos\alpha)$$



sada je

$$F_{In} - F_1 + F_2 = 0$$

$$F_{In} = 4\rho Q_0 (1 + \cos\alpha) u$$

$$-M \frac{du}{dt} = 4\rho Q_0 (1 + \cos\alpha) \cdot u$$

$$\frac{du}{u} = -k dt$$

$$k = \frac{4\rho Q_0}{M} (1 + \cos\alpha)$$

gde je

Integracija daje $\ln u = kt + C$.

Za $t=0$ je $u = v_0$, pa sledi $C = \ln v_0$, te relacija

$$u = u(t) = v_0 e^{-kt}$$

prestavljaja zakon promene brzine lopatice u funkciji vremena.

Zakon kretanja lopatice se

dobija iz sledeceg postupka

$$x = \int_0^t u dt = v_0 \int_0^t e^{-kt} dt$$

$$x = \frac{v_0}{k} e^{-kt} \Big|_0^t$$

$$x = x(t) = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt})$$

Za $e^{-kt} = 0$, odnosno za $t = \infty$, sledi $x = x_{max}$, tj. teorijsko maksimalno pomeranje lopatice je

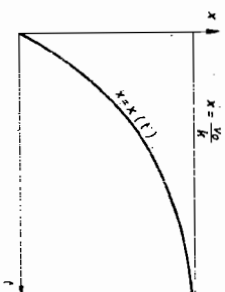
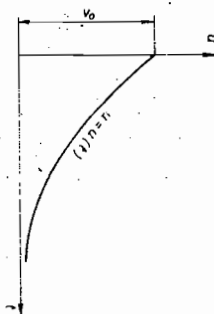
$$x_{max} = \frac{v_0}{k} = \frac{v_0 \cdot M}{4\rho Q_0 (1 + \cos\alpha)}$$

Intenzitet početne sile F koja lopaticu saopštava brzinu v_0 , dobija se iz jednačine dinamičke ravnoteže za $t=0$, pošto se prethodno u njoj zameni

$$-M \left(\frac{dv}{dt} \right)_{t=0} = 4\rho Q_0 (1 + \cos\alpha) v_0$$

(za $t=0$ sledi $u = v_0$)

$$F = 8\rho Q_0 (1 + \cos\alpha) v_0$$



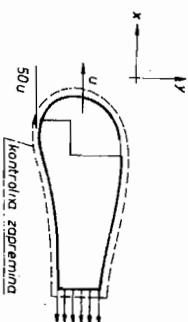
5.4.2. PROMENLJIVA MASA

Za dinamičku jednačinu tela, koje se kreće pod dejstvom aktivne ili reaktivne sile mlaza, ponekad je potrebno voditi računa o masi tela koja se tokom kretanja menja.

Ako su poznate pokretačke sile pod čijim se dejstvom kreće materijalni sistem sa promenljivom masom, kretanje se može odrediti direktno iz dinamičke jednačine kretanja.

Primeri

1. Raketne saonice mase M se 4 t uključujući i jednu tonu goriva kreću se brzinom u i pri tome na njih dejstvuje otporna sila $Ku = 50u$ (N). Odrediti maksimalnu moguću brzinu saonice u_{max} ako je izlazna brzina gasova iz raketnog mlaznika $v_{rel} = 3000$ m/s, a raketni motor sagoreva svake sekunde 100 kg goriva.



Rešenje. Polazna jednačina

$$M \dot{x} = \frac{K}{x^2} x_1' + \int_A^+ v \rho v_{rel} \cos\alpha da$$

$$-50u = \frac{K}{x^2} x_1' + (u - v_{rel}) \int_A^+ \rho v_{rel} \cos\alpha da$$

za usvojen koordinatni sistem i date podatke prelazi u gde je $(u - v_{rel})$ - apsolutna brzina mlaza goriva koje ističe iz kontrolne zapremine i nezavisna je od te količine,

$$\int_A^+ \rho v_{rel} \cos\alpha da = 100 \text{ kg/s.}$$

ma t i $t+dt$ su:

$$K_{x1}' = mu,$$

$$K_{x2}' = (m - dm)(u + du).$$

Sada je

$$-50u = \frac{(m-dm)(u+du)-mu}{dt} + (u-v_{rel})100$$

Mala veličina višeg reda dmdu zanemaruje se u odnosu na drugu, tako da je

$$-50u = \frac{mdu-u\dot{m}}{dt} + (u-v_{rel})100$$

odnosno

$$-50u = m\frac{du}{dt} - u\frac{dm}{dt} + (u-v_{rel})100$$

Ovde je

$$\frac{dm}{dt} = \int_A \rho v_{rel} \cos\theta da = 100 \text{ kg/s}; \text{ te sledi}$$

$$-50u = m\frac{du}{dt} - 100u + (u-v_{rel})100$$

$$-50u = m\frac{du}{dt} - 3000 \cdot 100$$

Kako je $m = 4000 - 100t$, dobija se

$$300000 - 50u = (4000-100t)\frac{du}{dt}$$

Ako se za početni uslov usvoji $u=0$ za $t=0$, dalje je

$$\int_0^u \frac{du}{300000 - 50u} = \int_0^t \frac{dt}{4000 - 100t}$$

Maksimalna brzina u_{max} se dobija za t_{max} , vreme kada je potpuno isteklo gorivo

$$t_{max} = \frac{1000}{100} = 10 \text{ s},$$

$$2\ln(300000 - 50u)|_0^{u_{max}} = 2\ln(4000-100t)|_0^{t_{max}}$$

$$\left(\frac{300000 - 50u_{max}}{300000}\right)^2 = \frac{4000 - 100 \cdot 10}{4000}$$

I najzad

$$u_{max} = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}}\right)6000 = 810 \text{ m/s}$$

Rešenje se može odrediti iz ravnoteže sila koje deluju na materijalni sistem (saonice + gorivo) za nepokretan koordinatni sistem. Dina mička jednaka kretanja za slučaj kada je kretanje pod dejstvom reaktivne sile je:

$$\rho Q(v_{rel}-u)-50u = \frac{d}{dt}(mu)$$

$$\rho Q(v_{rel}-u)-50u = \frac{d}{dt}[(m_0 - \rho Q t)u] = -\rho Qu + m\frac{du}{dt}$$

$$m\frac{du}{dt} = \rho Q v_{rel} - 50u$$

$$(4000-100t)\frac{du}{dt} = 100 \cdot 3000 - 50u$$

za $t=0$ i $u=0$ dobija se

$$u_{max} = 810 \text{ m/s}$$



2. Na slici je

predstavljen mlaz vode,

konstantnog prečnika

$d=25 \text{ mm}$ i brzine $v_0=10 \text{ m/s}$

koji udara o pregradu vagoneta

niže koju se skreće i sliva u vagonet.

Pretpostavlja se da mlaz usput ne menja svoj oblik (ne rasprskava se) i da uvek takav prati vagonet.

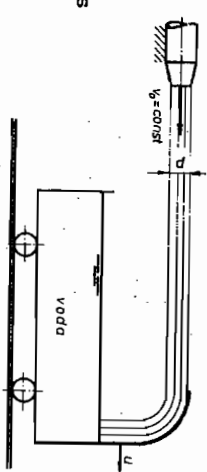
Šine ne pružaju nikakav otpor kotrljanju vagoneta i brzina vagoneta je $u(t)$. Pita se:

a) Zašto se vagonet kreće?

b) Kakvom (relativnom) brzinom stiže mlaz vagonet; i koliko vode priteče u vagonet za elementarno vreme dt ?

c) Postaviti (diferencijalnu) jednačinu za promenu količine kretanja sistema mlaz - vagonet - voda.

Rešenje. a) Sila mlaza pod čijim se dejstvom vagonet kreće predstavlja spoljnu - pokretačku silu za vagonet sa promenljivom masom vode. Njen intenzitet je



$$F = \rho \frac{Q}{V_0} (v_0 - u)^2 = \rho \frac{d^2 \pi}{4} (v_0 - u)^2 = 0,491(10-u)^2 \text{ N}$$

b)

$$v_{rel} = (v_0 - u) = (10 - u) \text{ m/s}; \quad dm = \rho Q_T dt = 0,491(10 - u) dt$$

c) Jednačina o promeni količine kretanja za vagonet sa promenljivom masom vode je

$$dF = \frac{K_1 - K_1'}{dt} - v_0 \rho Q_T$$

Spoljne sile, zbog zanemarivanja trenja i horizontalnog kretanja vode ne postoje, kao i sile reakcije jer se vagonet slobodno kreće. Količine kretanja u kontrolnoj zapremini u trenucima $t+dt$ i t su

$$K_2' = (m+dm)(u+du) \quad \text{i} \quad K_1' = mu$$

Pretpostavlja se da se apsolutna brzina vagoneta u povećava ($du > 0$). Izraz $-v_0 \rho Q_T$ predstavlja količinu kretanja koja je pridodata kontrolnoj zapremini.

Đalje je

$$0 = \frac{(m+dm)(u+du) - mu}{dt} - v_0 \rho \frac{d^2 \pi}{4} (v_0 - u)$$

zanemarivanjem male veličine $dmdu$ i zamenom $\frac{dm}{dt} = \rho \frac{d^2 \pi}{4} (v_0 - u)$ dobija se

$$\frac{du}{dt} = \rho \frac{d^2 \pi}{4} (v_0 - u)^2$$

Gornji izraz je identičan dinamičkoj jednačini kretanja sistema pod dejstvom aktivne pokretačke sile F

$$\frac{du}{dt} = \rho \frac{d^2 \pi}{4} (v_0 - u)^2 = F$$

3. Na kolicima, koja se kreću horizontalno, postavljena je pumpa i rezervoar sa vodom. Iz rezervoara pumpa, kapaciteta $Q=85 \text{ l/s}$, tera vodu kroz mlaznik $\varnothing 50 \text{ mm}$ paralelno kretanju kolica. Odrediti brzinu kolica posle 1 min, ako

je početna masa kolica i rezervoara vode bila $m_0 = 7500 \text{ kg}$ i početna brzina $u=0$. Zanimati sve otpore i trenja.

Rešenje. Brzina mlaza

vode je

$$v_{rel} = \frac{Q}{A} = \frac{40}{d^2 \pi} = \frac{4 \cdot 0,085}{0,052 \pi} = 43,3 \text{ m/s}$$

Apsolutna brzina vode je $(v_0 - u)$, pa je sila kojom mlaz deluje na kolica

$$F = \rho Q (v_{rel} - u) = 1000 \cdot 0,085(43,3 - u) = 85(43,3 - u)$$

Ubrzanje kolica se određuje iz dinamičke jednačine kretanja pod dejstvom reaktivne sile

$$\frac{d}{dt}(mu) = F$$

$$\frac{d}{dt}[(m_0 - \rho Q t)u] = \rho Q (v_{rel} - u)$$

$$m \frac{du}{dt} = \rho Q v_{rel}$$

Zamenom se dobija

$$(m_0 - \rho Q t) \frac{du}{dt} = 3680,5$$

i posle sredjivanja ova diferencijalna jednačina glasi

$$du = 3680,5 \frac{dt}{7500 - 85t}$$

Odatle je

$$u = - \frac{3680,5}{85} \ln(7500 - 85t) + \ln C$$

Konstanta C određuje se iz početnih uslova

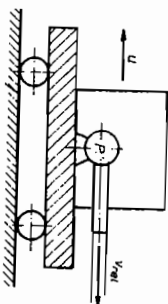
$$t=0 \quad \text{i} \quad u=0 \quad \ln C = \frac{3680,5}{85} \ln 7500$$

pa je

$$u = \frac{3680,5}{85} \ln \frac{7500}{7500 - 85t} = 43,3 \ln \frac{7500}{7500 - 85t}$$

Brzina kolica posle 1 min je

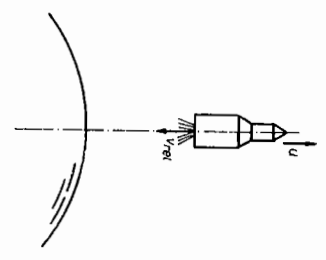
$$u = 43,3 \ln \frac{7500}{7500 - 85 \cdot 60} = 378 \text{ m/s}$$



Zadaci

1. Posmatra se treci stepen

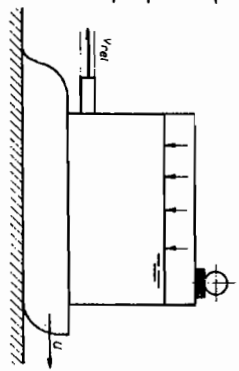
rakete za istraživanje svemira. Prva dva stepena donela su treci stepen na takvu razdaljinu od Zemlje da se gravitaciona sila i sila trenja mogu zanemariti za vreme kretanja trecjeg stepena. Treci stepen se pokrece u trenutku kada je drugi stepen dostigao najveću visinu i kada je njegova brzina u odnosu na Zemlju jednaka nuli. Motori ovog završnog stepena su podešeni tako da je brzina gasova na izlaznom grlu mlaznika konstantna i iznosi v_{rel} . Kolika je krajnja brzina trecjeg stepena rakete u funkciji od zadatih parametara:



M - masa rakete [kg],
 m_0 - masa goriva u trenutku pokretanja trecjeg stepena [kg].

Rešenje. $u_{max} = v_{rel} \cdot \ln \frac{M + m_0}{M}$

2. Tank sa vodom na saonici kreće se iz stanja mirovanja po podlozi bez trenja, zahvaljujući mlazu vode koji ističe konstantnom brzinom za vreme celog puta, iz tanka. Konstantna brzina isticanja se postiže sa kompresorom koji je ugrađen na tanku i stvara odgovarajući napor pritiska u njemu. Sračunati maksimalno iznamljiva i povratnu polju postizu sionice sa tankom.



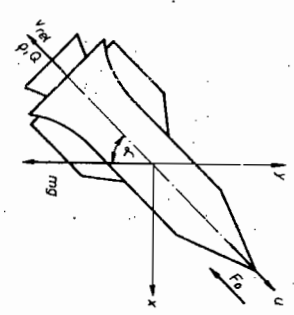
Podaci: - relativna brzina isticanja vode je 10 m/s,
 - tank je napunjen sa 50 litara vode,
 - površina izlaznog preseka cevi je 3 cm²,
 - masa praznog tanka, kompresora i saonica, je 100 kg.

Rešenje. (t = 3.3/3 s)

$\left(\frac{du}{dt}\right)_{max} = 0.3 \text{ m/s}^2$

$v_{max} = 4 \text{ m/s}$

3. Za prikazani položaj rakete u polju Zemljine teže dati izraze za pokretacku silu i dinamičku jednacinu kretanja.



Rešenje.

$F = \rho Q (v_{rel} - u)$

m_0 -masa rakete i goriva u trenutku t=0.

$\frac{d}{dt} [(m_0 - \rho Q t) u] + F_O + (m_0 - \rho Q t) g \cos \alpha = \rho Q (v_{rel} - u)$

111 $(m_0 - \rho Q t) \frac{du}{dt} + F_O + (m_0 - \rho Q t) g \cos \alpha = \rho Q v_{rel}$

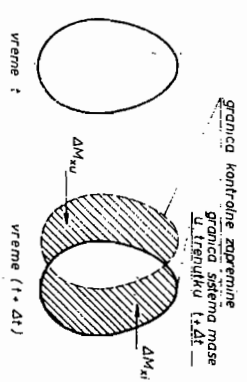
5.5. PROMENA MOMENTA KOLIČINE KRETANJA

Slično opštem obliku jednačine o promeni količine kretanja može se uspostaviti veza izmedju momenta spoljašnjih sila ΣM_x i promene momenta količine kretanja dM_x/dt u obliku

$\Sigma M_x = \frac{dM_x}{dt}$

$\Sigma M_x = \frac{M_x^1 - M_x^0}{dt} + \frac{dM_x^1 - dM_x^0}{dt}$

111 $\Sigma M_x = \frac{M_x^1 - M_x^0}{dt} + \int_A \vec{r}_x \rho v_{rel} \cos \alpha da$



Ovde je: M_x - moment količine kretanja posmatranog sistema oko ose x

$\frac{dM_{x1} - M_{x1'}}{dt}$ - promena momenta količine kretanja mase fluida u kontrolnoj zapremini oko ose x za vreme dt;

$\frac{dM_{xu} - dM_{xu}}{dt} = \int_A v_{rx} \rho v_{rel} \cos \theta da$ - razlika promene momenta količine kretanja fluida koji napušta i koji ulazi u kontrolnu zapreminu za vreme dt;

\vec{v} - vektor apsolutne brzine fluida koji napušta (ulazi -) površinu da u vremenu dt;

R_x - normalno rastojanje od ose x do vektora brzine \vec{v} ;

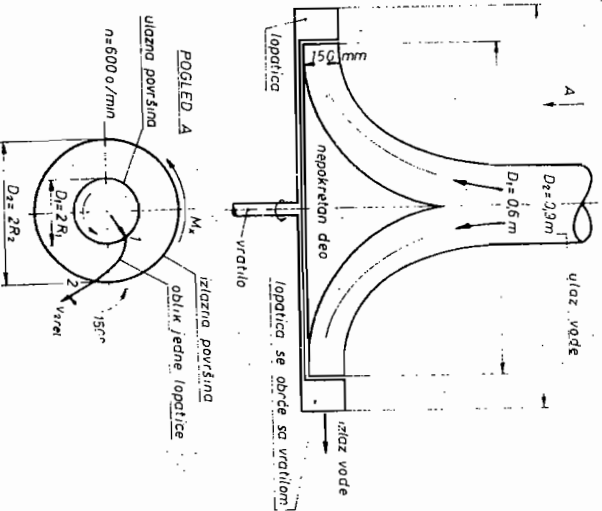
$\rho v_{rel} \cos \theta da$ - elementaran protok kroz kontrolnu zapreminu.

Primeri

1. U turbinsko

kolo voda ulazi radialno sa $v_1 = 50$ m/s. Kolo se obrće sa konstantnim brojem obrtaja $n = 600$ min⁻¹. Za ostale podatke date na slici odrediti snagu koju voda predaje turbinu.

Rešenje. Snaga koju voda predaje turbini je određena sa $P = M \omega$.



za stacionarno strujanje i kontrolnu zapreminu ograničenu ulaznom i izlaznom površinom i paralelnim horizontalnim diskovima turbinskog rotora, moment promene količine kretanja je jednak

$$M = \rho Q v_2 r_2 - \rho Q v_1 r_1$$

Zbog radialnog ulaza vode $v_{1t} = 0$, je

$$M = \rho Q R_2 (R_2 \omega - v_{2rel} \cos 30^\circ),$$

gde je

$$v_{2rel} \cos 60^\circ = 2R_2 \cdot \pi \cdot 0,15 = v_1 2R_1 \pi \cdot 0,15$$

$$v_{rel} = \frac{2v_1 R_1}{R_2} = \frac{50 \cdot 0,3 \cdot 2}{0,45} = 66,66 \text{ m/s.}$$

Tako je $M = \rho v_1 R_2 2R_1 \pi (R_2 \frac{\pi n}{30} - v_{rel} \cos 30^\circ) = 1000 \cdot 50 \cdot 0,6 \cdot \pi \cdot 0,45 \cdot (0,45 \frac{1600}{30} - 66,66 \frac{1,73}{2}) = 42390(28,26 - 57,66) = -1,24 \cdot 10^6 \text{ Nm,}$

negativan predznak označava momenat suprotan kretanju.

Snag. $M \omega = 1,24 \cdot 10^6 \cdot 20\pi = 78257 \text{ kW}$

2. Cen-

trifugalna pum-pa prikazana na slici ima stalan protok $Q = 30$ l/s. Spoljni prečnik kola je 200 mm, unutrašnji 150 mm, a visina lopatice je 20 mm.

Odrediti snagu koju kolo odatje vodi ako se ono obrće sa 1200 min⁻¹. $\theta_1 = 20^\circ$ i $\theta_2 = 80^\circ$.

Rešenje.

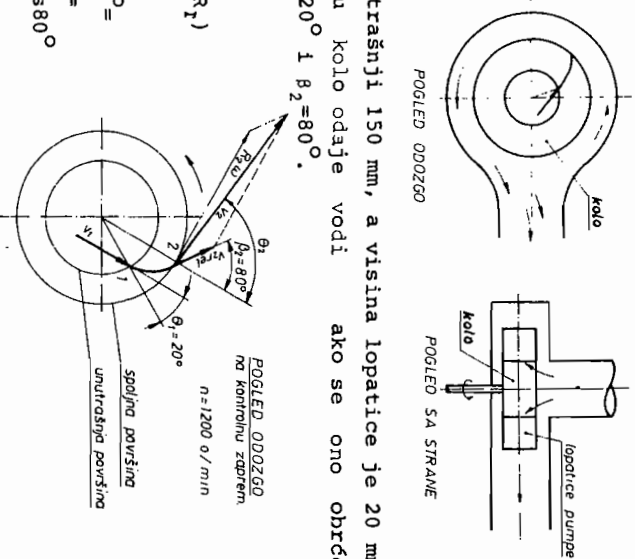
$$M = \rho Q (v_2 r_2 - v_1 r_1)$$

gde je:

$$Q = 2R_1 \pi 0,02 \cdot v_1 \cos 20^\circ =$$

$$= 2R_2 \pi 0,02 \cdot v_2 \cos 80^\circ =$$

$$= 2R_2 \pi 0,02 \cdot v_{2rel} \cos 80^\circ$$



$$v_1 = \frac{0}{2R_2 \pi \cdot 0,02 \cdot \cos 20^\circ} = \frac{0,03}{0,15\pi \cdot 0,02 \cdot 0,9397} = 3,389 \text{ m/s,}$$

$$v_{zrel} = \frac{0}{2R_2 \pi \cdot 0,02 \cdot \cos 80^\circ} = \frac{0,03}{0,2\pi \cdot 0,02 \cdot 0,1736} = 13,755 \text{ m/s,}$$

$$v_{1t} = v_1 \sin 20^\circ = 3,389 \cdot 0,342 = 1,160 \text{ m/s,}$$

$$v_{zt} = R_2 \omega + v_{zrel} \sin 80^\circ = 0,1 \frac{\pi 1200}{30} + 13,755 \cdot 0,9848 = 26,1 \text{ m/s,}$$

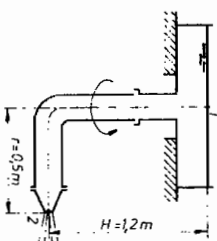
$$M = 1000 \cdot 0,03(26,1 \cdot 0,1 - 1,16 \cdot 0,075) = 75,69 \text{ Nm}$$

Snaga koju je kolo odalo vodi.

$$P = M\omega = 75,69 \cdot 40\pi = 9,506 \text{ kW.}$$

Zadaci

1. Voda ističe iz nepokretnog su-
da kroz cev koja se obrće konstantnim bro-
jem obrtaja $n=200 \text{ min}^{-1}$ i na čijem se kra-
ju nalazi mlaznik prečnika $d=20 \text{ mm}$. Odre-
điti protok kroz cev i potreban spoljni
moment za njeno obrtanje. Hidrauličke i
mehaničke otpore zanemariti.



$$\text{Rešenje. } Q = 3,62 \text{ l/s ; } M = 18,94 \text{ Nm}$$

2. Za prvi primer iz poglavlja 5.3.2. primenom jed-
načine o promeni momenta količine kretanja potvrditi dobiže-
ne rezultate.

5.6. KONTROLNA PITANJA

1. Kada je potrebno upotrebiti inercijalni koordinat-
ni sistem?
2. Ako je poznata aktivna pokretačka sila mlaza, kako
glasi dinamička jednačina kretanja?

3. Ako je poznata reaktivna pokretačka sila, kako
glasi dinamička jednačina kretanja?

4. Čemu je jednaka promena količine kretanja kada
je materijalni sistem sa promenljivom masom i kreće se pro-
menljivom brzinom?

5. Kakva je razlika između osnovnog i opšteg oblika
jednačine o promeni količine kretanja?

6. Čemu je jednak stepen korisnosti kod propeleraz?

7. Čemu je jednaka promena momenta količine kretanja?

8. Kada stacionaran mlaz udari u čvrstu nagnutu pov-
ršinu:

- a) Količina kretanja u pravcu brzine mlaza se ne menja,
- b) N postoji sila s kojom mlaz deluje na površinu,
- c) Struja se deli u delove koji su direktno proporcio-
nalni uglu nagiba površine,
- d) Brzina se smanjuje u onim delovima mlaza koji su
zaokrenuti za više od 90° a povećava se u ostalim,
- e) Količine kretanja komponenti paralelnih ploči se
ne menjaju. (naći tačan odgovor)

9. Sa sledeće liste odabirati tačne postavke za anali-
ziranje struje mlaza koji skreće preko nepokretne ili pokret-
ne lopatice:

- a) Količina kretanja mlaza se ne menja,
- b) Absolutna brzina mlaza se ne menja preko lopatice,
- c) Fluidna struja dodiruje lopaticu bez udara,
- d) Struja iz mlaznika je stacionarna,
- e) Površina poprečnog mlaza se ne menja,
- f) Trenje između lopatice i mlaza se ne menja,
- g) Mlaz napušta lopaticu bez brzine,
- h) Brzina je jednaka kroz preseke mlaza pre i posle
dodirivanja lopatice.

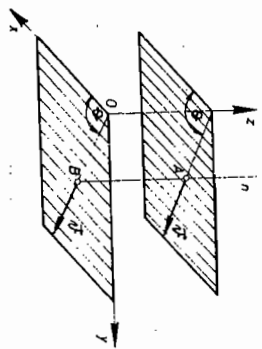
GLAVA 6
DVODIMENZIJSKA STRUJANJA

6.1. RAVANSKO STRUJANJE SAVRŠENOG
NESTIŠLJIVOG FLUIDA

Za ravansko strujanje je karakteristično da su sve strujne linije paralelne u odnosu na neku fiksiranu ravan i da sve brzine u odgovarajućim tačkama ravnji, paralelnih fiksiranoj ravni, imaju istu veličinu, pravac i smer.

Kao primer ravanskog strujanja može da posluži, uz izvesno ograničenje, kretanje vode kroz velike pravougaone kanale.

U prirodi nema ravnjskih strujanja, jer se slike strujanja razlikuju čak i kad su ravni paralelne. Ali su ponekad međusobne razlike tako male (kao u navedenom primeru) da pretpostavka o istovetnosti strujanja ne dovodi do pogrešnih zaključaka.



Ravansko strujanje, kao što će se videti kasnije, vrlo lako podležu specijalnom matematičkom opisivanju, što dozvoljava ispitivanje prirode mnogih pojava, koje se do danas ne bi mogle proučiti ako bi se ispitivale u prostoru - trodimenzijski.

U stvari, ravansko kretanje trebalo bi smatrati vrstom uprošćenog opšteg kretanja, kada se kretanje fluida može posmatrati u jednoj od paralelnih ravni, npr. u ravni Oxy, a da ipak izvedeni zaključci važe i za strujanje kroz sve ostale paralelne ravni.

Da bi se što više približili stvarnosti, pretpostaviće se, da se fluid pri ravanskom strujanju nalazi izme-

dju dve ravni koje su paralelne sa ravni strujanja i koje su udaljene jedna od druge za jedinicu dužine. Pri tome se pretpostavlja, da fluid slobodno klizi preko tih ravni (ne postoji nikakav otpor trenja). Prema tome, protok kroz ma koju krivu u ravni znači da fluid prolazi u jedinici vremena kroz odgovarajuću cilindričnu površinu koja se graniči dvema paralelnim ravnima, čije je rastojanje jednako jedinici.

Pri ravanskom strujanju, brzina fluida je uvek paralelna ravni Oxy, pa je

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}, \quad v_z = 0.$$

Da bi strujno polje postalo ravansko, pored uslova $v_z = 0$, potrebno je još da brzina \vec{v} , kao uopšte i sve ostale veličine koje se odnose na ravansko strujanje, ne zavise od promenljive z. Zato izvod po z ma koje veličine moraju biti jednak nuli pri ravanskom strujanju, odnosno

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0.$$

Sada je vrtlog

$$2\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k},$$

i može se zaključiti da je vektor $\vec{\omega}$ uvek normalan na ravan strujanja.

Nadalje, jednačina kontinuiteta nestišljivog fluida je

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

a gradijent ma kakve skalarne funkcije U

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j}.$$

STRUJNA FUNKCIJA. Diferencijalna jednačina strujni-
ca pri ravanskom strujanju

$$v_x dy - v_y dx = 0,$$

može da se integriše ako se leva strana dovede do totalnog
diferencijala $d\psi$ neke funkcije ψ . Pošto je ova jednačina eg-
zaktna, jer iz jednačine kontinuiteta $\text{div } \vec{v} = 0$ direktno sle-
di jednakost drugih izvoda

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x},$$

tj. potreban i dovoljan uslov egzaktnosti, onda njena leva
strana predstavlja totalan diferencijal pa se može neposred-
no staviti

$$d\psi = v_x dy - v_y dx,$$

a kako je uopšte totalan diferencijal funkcije dve promen-
ljive

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy,$$

to se poređenjem oba izraza nalazi

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Prema tome, jednačina strujnice određuje funkciju
 ψ koja zavisi od promenljivih x i y , a u opštem slučaju i od
vremena t . Tako se diferencijalna jednačina strujnica svodi
na

$$d\psi = 0,$$

a posle integriranja se dobija

$$\psi(x, y, t) = C = \text{konst.}$$

Za proizvoljne vrednosti konstante C dobija se sistem krivih u
ravni. Ustvari je to skup strujnica, odnosno sistem strujnih
površi u prostoru. Funkcija ψ ima veliki značaj za proučava-
nje ravanskog strujanja, i naziva se strujna funkcija.

Kada je strujanje ustaljeno, funkcija ψ ne zavisi
od vremena, i strujnice su postojane u ravni Oxy gde se pok-
lapaju s putanjama fluidnih delića.

Primenom strujne funkcije može se naći vrtlog

$$2\vec{\omega} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \vec{k} = - \Delta \psi \vec{k}.$$

Funkcija ψ može da posluži i za srtačunavanje pro-
toka kroz proizvoljnu krivu AB u ravni Oxy , jer je prema de-
finiciji

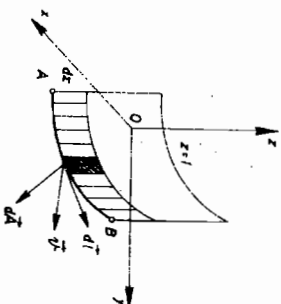
$$Q = \int_A^B (\vec{v}, d\vec{A}).$$

Kako je $d\vec{A} = [dx, dzk]$,
lako se dobija da je

$$(\vec{v}, d\vec{A}) = dz \cdot dv_y$$

i pošto ψ ne zavisi od z , za
protok se dobija

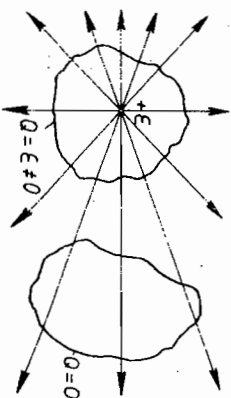
$$Q = \int_{z=0}^{z=1} \int_A^B dv_y = \int_A^B (v_y|_B - v_y|_A),$$



tj. protok kroz krivu AB jednak je razlici vrednosti koje
ima strujna funkcija u krajnjim tačkama krive.

Kada je ψ jednoznačna funkcija, onda je protok
kroz zatvorenu krivu jednak nuli, jer je $\psi_A = \psi_B$. Međutim,
ako je ψ višeznačna funkcija može se desiti da je $\psi_A \neq \psi_B$,
iako se tačke A i B poklapaju. Iz kinematike se zna da jed-
načina kontinuiteta $\text{div } \vec{v} = 0$ nije zadovoljena u tačkama gde
se nalaze izvori ili ponori.

Tada nije više ni protok kroz
zatvorenu površinu, koja opko-
ljava te tačke, jednak nuli
već ima pozitivnu vrednost $+e$
za izvor i negativnu vrednost
 $-e$ za ponor.



To znači, da pri ravanskom strujanju funkcija ψ mora biti višeznačna kada se u strujnoj ravni nalaze izvori ili ponori. Medjutim, protok kroz zatvorenu krivu, koja ne obuhvata izvore ili ponore, jednak je nuli čak i kad je funkcija ψ višeznačna.

POTENCIJALNO STRUJANJE. Ako ravansko strujanje ima potencijal brzine \vec{v} (\vec{v} = grad ϕ) biće

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

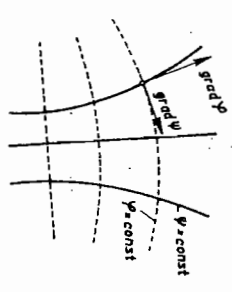
Kako je s druge strane $v_x = \partial \psi / \partial y$ i $v_y = -\partial \psi / \partial x$, sledi važna veza funkcija ϕ i ψ

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Gornje jednačine se nazivaju Koši-Rimanovim (Cauchy-Riemann) jednačinama. One pokazuju da strujnice ($\psi = \text{const.}$) i ekvipotencijalne linije

($\phi = \text{const.}$) predstavljaju dva sistema uzajamno ortogonalnih linija u ravni. Zato je i

$$\begin{aligned} (\text{Grad } \phi, \text{ Grad } \psi) &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \\ &= -v_x v_x + v_y v_y = 0. \end{aligned}$$



Svaka od funkcija ϕ i ψ zadovoljava Laplasovu jednačinu (harmonijske funkcije). Za funkciju ϕ iz jednačine kontinuiteta

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \Delta \phi = 0,$$

a za funkciju ψ iz uslova da u potencijalnom strujanju nema vrtloga tj. iz

$$\text{rot } \vec{v} = 0 \text{ sledi } \Delta \psi = 0.$$

Ovo je vrlo važno svojstvo funkcija ϕ i ψ . Naime, ako postoji kretanje fluida potencijala ϕ i strujne funkcije ψ , onda može da postoji i kretanje potencijala $-\psi$ i strujne funkcije ϕ . Samo se jedna od funkcija mora naći iz Laplasove jednačine, dok se druga dobija iz Koši-Rimanovih jednačina. Postupak iznalaženja jedne funkcije ako je poznata druga tj. postupak rešavanja Koši-Rimanovih jednačina prikazan je u primerima.

U polarnim koordinatama je

- brzina: $\vec{v} = \text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{\theta}_0 = v_r \vec{r}_0 + v_\theta \vec{\theta}_0$, sledi

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

- strujnica: $[\vec{v}, d\vec{r}] = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{r}_0 & r \vec{\theta}_0 & \vec{z}_0 \\ v_r & v_\theta & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} (rv_r d\theta - v_\theta dr) \vec{z}_0 = 0$,

odnosno

$$\frac{dr}{rv_r} = \frac{d\theta}{v_\theta}$$

- strujna funkcija: $d\psi = -v_\theta dr + rv_r d\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta$, sledi

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

- Koši-Rimanove jednačine

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

- Laplasova jednačina (npr. za funkciju ϕ):

$$\Delta \phi = \text{div grad } \phi = 0,$$

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \right], \quad \Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0. \end{aligned}$$

VAŽNE NAPOMENE

1. Strujna funkcija ψ postoji nezavisno od toga, da li je kretanje neurtložno ili ne.
 2. Potencijal brzine ϕ može da postoji samo za neurtložno kretanje.
 3. Ako je kretanje neurtložno, onda postoji potencijal brzine.
 4. Jedan deo tečnosti može da ima neurtložno kretanje, drugi deo - urtložno. Potencijal brzine postoji u tom i samo u tom delu tečnosti, gde je kretanje neurtložno.
 5. Kada se tečnost kreće, onda urtložni deo tečnosti može da zauzima različite oblasti prostora. Postojanja potencijala brzine važi za onaj deo tečnosti, koji se kreće neurtložno, a ne važi za onu oblast prostora, koju privremeno zauzima taj deo tečnosti. Medjutim, jedina kontinuiteta div $\vec{v} = 0$ mora da se zadovolji u svim tačkama fluidnog prostora, ukoliko ni jedna tačka ne skriva izvor niti ponor.
 6. Karakter strujanja pri neurtložnom kretanju pod dejstvom konzervativnih sila zavisi samo od grančnih uslova. Osobito, ako tečnost nema slobodnu površinu, onda karakter strujanja pri acikličnom neurtložnom kretanju zavisi samo od kretanja tih granica, a ne od polja spoljašnjih sila, koje utiče samo na pritisak.
- SLAGANJE STRUJANJA. Ravansko potencijalno strujanje potpuno je određeno funkcijom potencijala ϕ i strujnom funkcijom ψ . Ove funkcije daju analitičku i grafičku predstavu o kretanju. Da bi predstavljale nekakvo strujanje funkcije ϕ i ψ moraju da zadovoljavaju Koši-Rimanove jednačine, a pored toga, zadovoljavaju i Laplasovu jednačinu.

Izaka su određene dve funkcije ϕ_1 i ψ_1 , koje zadovoljavaju jednačine

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x}.$$

Njima odgovara potencijalno strujanje brzinskog potencijala ϕ_1 i strujne funkcije ψ_1 . Neka su ϕ_2 i ψ_2 drugi par funkcija koje, takodje, zadovoljavaju jednačine

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_2}{\partial x}.$$

Ove funkcije određuju novo strujanje brzinskog potencijala ϕ_2 i strujne funkcije ψ_2 .

Koši-Rimanove jednačine su linearne te ih zadovoljavaju i funkcije

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad \text{i} \quad \psi = \psi_1 + \psi_2,$$

a ovima odgovara nekakvo novo strujanje brzinskog potencijala ϕ i strujne funkcije ψ . Dakle, sabiranjem pojedinih funkcija koje zadovoljavaju potrebne uslove dolazi se do zbirnih funkcija koje, takodje, zadovoljavaju iste te uslove. Drugim rečima, od prostih kretanja mogu se dobiti vrlo složena kretanja, a kako funkcije ϕ i ψ mogu menjati svoje uloge, može se zaključiti da i nekoliko osnovnih funkcija mogu pružiti predstavu o ogromnom broju raznolikih strujanja.

PRIMENA FUNKCIJA KOMPLEKSNE PROMENLJIVE;

KOMPLEKSNI POTENCIJAL I KOMPLEKSNA BRZINA. Teorija analitičkih funkcija (jedna klasa funkcija kompleksnih promenljivih) pruža inženjerima mnogo korisnih matematičkih modela. Naime, mnoge matematičke teoreme se uprošćavaju, ako se realna promenljiva razmatra kao specijalan slučaj kompleksne promenljive. Kompleksne promenljive se upotrebljavaju za opisivanje vektora u ravni, te prema tome, analitičke funkcije kompleksne promenljive opisuju ravansko skalarno i vektorsko

polje. Na kraju, analitičke funkcije omogućuju konformno preslikavanje jedne ravni na drugu.

Svaka analitička funkcija može da se napiše kao

$$W(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y) \quad [L^2R^{-1}],$$

tj. može da se rastavi na realan i imaginaran deo. Medjutim, funkcije $\phi(x,y)$ i $\psi(x,y)$ nisu proizvoljne već su vezane Koši-Rimanovim uslovima

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

Koji predstavljaju potreban i dovoljan uslov da bi se dve realne funkcije od dve promenljive x i y mogle predstaviti jednom analitičkom funkcijom od samo jedne kompleksne promenljive z .

Pored toga, Koši-Rimanovi uslovi obezbeđuju da analitičke funkcije poseduju svojstvo jednoznačnog izvoda, tj.

$$\frac{dW}{dz}$$

je jednoznačno u svakoj tački z - ravni. Medjutim, ako u nekoj tački z - ravni analitička funkcija gubi svojstvo jednoznačnog izvoda, onda je to njena singularna tačka.

Koši-Rimanovi uslovi daju i sledeću važnu jedna-

kost

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial W}{\partial x} = -i \frac{\partial W}{\partial y},$$

a preko istih uslova se lako zaključuje da svaka funkcija $\phi(x,y)$ i $\psi(x,y)$ zadovoljavaju Laplasovu jednačinu, tj. važi

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{i} \quad \Delta \psi = 0.$$

Tako se sada može izvući jedan važan zaključak, da realan i imaginaran deo jedne proizvoljne analitičke funkcije je

$$W = \phi + i\psi$$

može se uvek smatrati potencijalnom brzine ϕ i strujnom funkcijom ψ ravnanskog potencijalnog strujanja.

Funkcija $W(z)$ naziva se kompleksnim potencijalom strujanja i igra veliku ulogu pri proučavanju ravnanskog potencijalnog strujanja. Ova veza mehanike fluida i teorije analitičkih funkcija omogućuje rešavanje čitavog niza problema iz strujanja.

Iz kompleksnog potencijala neposredno se nalazi brzina strujanja, ne tražeći prethodno ni potencijal ϕ , ni strujnu funkciju ψ . Naime, izvod analitičke funkcije po z

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} &= \frac{d\phi + i d\psi}{dx + i dy} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} + i \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{1 + iy} = \\ &= \frac{v_x + i v_y}{1 + iy} = \frac{v_x (1 + iy) - i v_y (1 + iy)}{(1 + iy)^2} = v_x - i v_y = \vec{v} \end{aligned}$$

naziva se kompleksnom brzinom.

Apsolutna vrednost kompleksne brzine je

$$|\vec{v}| = \left| \frac{dW}{dz} \right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v$$

i predstavlja intenzitet vektora brzine \vec{v} .

Ako je θ ugao između vektora brzine \vec{v} i pozitivnog pravca x -ose, onda je

$$v_x = v \cos \theta, \quad v_y = v \sin \theta$$

pa se može pisati i

$$\frac{dW}{dz} = \vec{v} = v(\cos \theta - i \sin \theta) = v e^{-i\theta}.$$

Zaustavne tačke u strujanju nalaze se na mestu gde je brzina jednaka nuli, odnosno

$$\frac{dW}{dz} = 0.$$

KOMPLEKSNI POTENCIJAL NEKIH OSNOVNIH STRUJANJA.

- JEDNOLIKO STRUJANJE. Neka je kompleksni potencijal

$$W = \phi + i\psi = az = (a_1 - ia_2)(x + iy),$$

gde je a - proizvoljan konstantan kompleksni broj, odnosno a_1 i a_2 su realne konstante.

Razdvajanjem realnog i imaginarnog dela dobija se

$$\phi = a_1x + a_2y, \quad \psi = a_1y - a_2x.$$

Potencijal i strujna funkcija su ovde jednoznačne funkcije te cirkulacija Γ obrazovana po makakvoj zatvorenoj krivi i protok kroz makakvu zatvorenu krivu moraju biti jednaki nuli.

Iz kompleksne brzine

$$\vec{v} = \frac{dW}{dz} = a = a_1 - ia_2,$$

dobija se

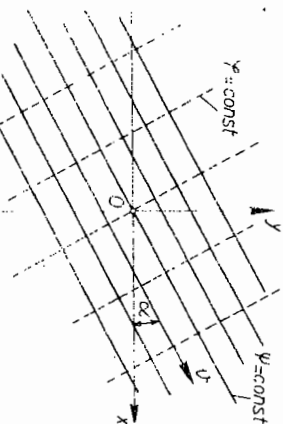
$$v_x = a_1 \quad ; \quad v_y = a_2.$$

Kako je $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \text{const.}$

$$i \text{ tg } \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{a_2}{a_1} = \text{const.}$$

strujanje je jednoliko (vidi sliku).

Kad je $a_1 = 0$ fluid teče paralelno y-osi; za $a_2 = 0$ strujanje je paralelno x-osi.



- STRUJANJE U POLJU OSAMLJENOG VRTLOGA. Ako je kompleksni potencijal dat izrazom

$$W = -ia \ln z,$$

gde je a - realna konstanta. Uvođenjem polarnih koordinata r i θ lako se razlaže gornja funkcija na realan i imaginarni deo

$$W = -ia \ln(re^{i\theta}) = -ia(\ln r + i\theta) = a\theta - ia \ln r,$$

$$\phi = a\theta = a \cdot \arctg \frac{y}{x} \quad ; \quad \psi = -a \cdot \ln r = -a \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ovi izrazi predstavljaju potencijal i strujnu funkciju strujanja u polju osamljenog vrtloga. Ekvipotencijalne linije $\phi = \text{const.}$ predstavljaju prave koje prolaze kroz koor-

dinatni početak, a strujnice $\psi = \text{const.}$ su koncentrične kružnice sa centrom u koordinatnom početku (vidi sliku).

Pošto je potencijal višeznačna funkcija, to se pri izračunavanju cirkulacije nailazi na dva slučaja:

- kada proizvoljna zatvorena kriva ne obuhvata singularitet (koordinatni početak), tada je

$$\Gamma = 0,$$

- kada ga ona obuhvata

$$\Gamma = \int_C (\vec{v}, d\vec{l}) = \int_0^{2\pi} a d\theta = 2a\pi.$$

Dobijeni izraz za cirkulaciju daje fizičko značenje konstanti a

$$a = \frac{\Gamma}{2\pi}$$

a kompleksni potencijal može da se napiše kao

$$W = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z.$$

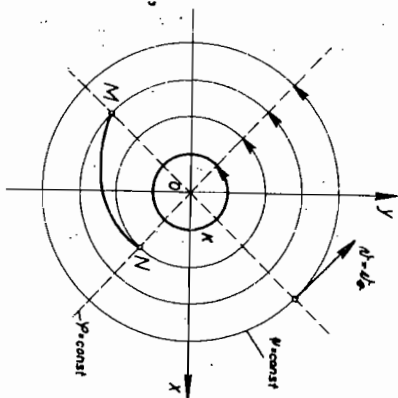
Za kompleksnu brzinu dobija se izraz

$$\vec{v} = \frac{dW}{dz} = -\frac{i\Gamma}{2\pi z}$$

a odavde je

$$v_r = 0 \quad ; \quad v_\theta = \frac{a}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Fluid kruži u strujnoj ravni oko koordinatnog početka po koncentričnim krugovima suprotno od kazaljke na satu ($a > 0$, $\Gamma > 0$), a brzine opadaju sa rastojanjem r . Kada $r \rightarrow 0$ brzina raste u beskonačnost, a pošto takve nisu poznate u prirodi, ova oblast se izoluje - singularna oblast. Pretpos-



tavlja se da se u njoj fluid okreće kao čvrsto telo ($\omega = \text{const.}$) i naziva se vrtložnim jezgrom.

Protok kroz krivu MN jednak je

$$Q = \psi_M - \psi_N = \frac{\Gamma}{2\pi} (\ln r_M - \ln r_N),$$

tj. zavisi samo od razdaljine krajnjih tačaka krive do vrtložnog jezgra. Zato je protok kroz makakvu zatvorenu krivu uvek jednak nuli (funkcija ψ je jednoznačna). Prema tome, u posmatranom strujnom polju nema ni izvora ni ponora.

- STRUJANJE U POLJU OSAMLJENOG IZVORA (PONORA).

Kompleksni potencijal dat izrazom

$$W = a \ln z$$

gde je a - realna konstanta, izražen u polarnim koordinatama r i θ razlaže se na

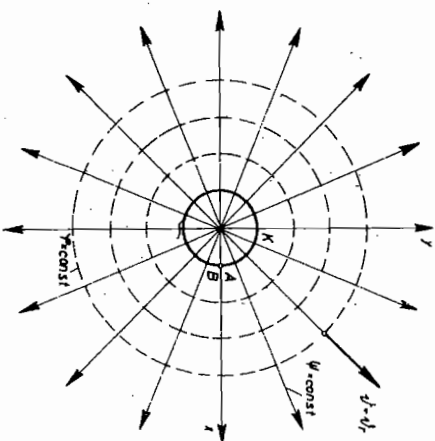
$$\phi = a \ln r \quad \text{i} \quad \psi = a\theta.$$

Ovi izrazi predstavljaju potencijal i strujnu funkciju strujanja u polju osamljenog izvora (za $a < 0$ ponor). Ekvipotencijalne linije $\phi = \text{const.}$ su koncentrične kružnice sa centrom u koordinatnom početku, dok su strujnice $\psi = \text{const.}$ prave koje prolaze kroz koordinatni početak (vidi sliku).

Kako je strujna funkcija višeznačna, to protok kroz svaku zatvorenu krivu koja opkoljava singularnu tačku (koordinatni početak) je jednak

$$Q = \psi_B - \psi_A = a(2\pi + \theta) - a\theta = 2\pi a.$$

Izdašnost izvora ϵ (ponora $-\epsilon$) definiše se kao protok kroz površinu koja ga opkoljava-



va, tako da je $\epsilon = 2\pi a$, a odavde i fizičko značenje konstante a

$$a = \frac{\epsilon}{2\pi},$$

te može da se napiše

$$W = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln z.$$

Za kompleksnu brzinu dobija se izraz

$$\vec{v} = \frac{dW}{dz} = \frac{\epsilon}{2\pi z},$$

a odavde je

$$v_r = \frac{a}{r} = \frac{\epsilon}{2\pi r} \quad \text{i} \quad v_\theta = 0.$$

Kod strujanja u polju osamljenog izvora ($a > 0$; $\epsilon > 0$) fluid struji radijalno iz koordinatnog početka u beskonačnost, dok je kod ponora ($a < 0$; $\epsilon < 0$) radijalno strujanje fluida suprotno - iz beskonačnosti u koordinatni početak. Kako brzina fluida opada sa r , u beskonačnosti fluid miruje dok je u koordinatnom početku brzina beskonačno velika. Zato se pri likom razmatranja strujanja ova tačka izdvaja - singularna tačka.

Brzinski potencijal je jednoznačna funkcija te je cirkulacija jednaka nuli bez obzira na položaj i oblik zatvorene krive.

- STRUJNA POLJA DOBIJENA SPECIJALNIM IZBOROM FUNKCIJE $W(z)$. Razmatra se analitička funkcija

$$W(z) = az^n = ar^n(\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

sa realnim i imaginarnim delom

$$\phi = ar^n \cos n\theta \quad \text{i} \quad \psi = ar^n \sin n\theta.$$

Nulte strujnice se dobijaju iz uslova $\psi = 0$, koji se svodi na

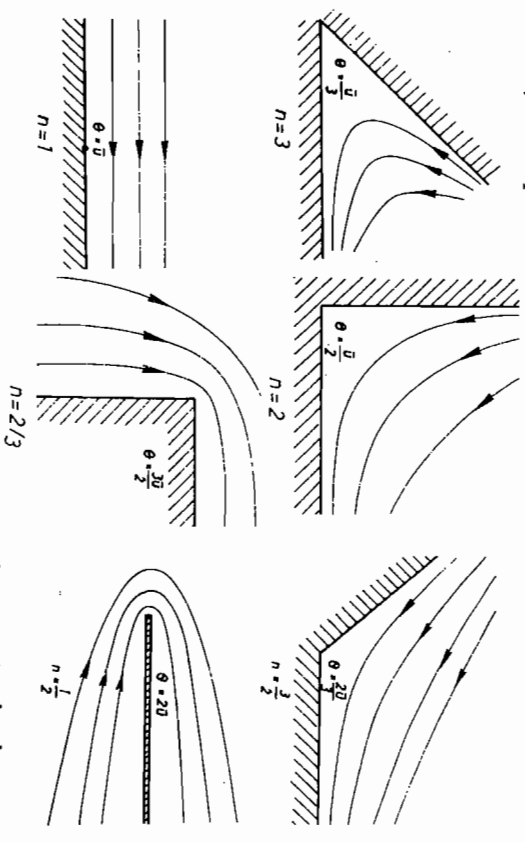
$$\sin n\theta = 0, \quad \text{odnosno} \quad n\theta = 0 \quad \text{i}$$

$$n\theta = \pi,$$

a odavde je

$$\theta = 0 \quad \text{i} \quad \theta = \frac{\pi}{n}$$

tako da data analitička funkcija - kompleksni potencijal predstavlja strujanje u oblasti između ravnih površina (nulte strujnice, kao uostalom i svake druge strujnice, mogu se zamišljati kao krute i neprobodne površine nekih tela) koje se seku pod uglom π/n . Neke vrednosti parametra n daju karakteristične slučajeve strujanja prikazane grafički, kao npr.



Postoji očigledna promena karaktera strujanja u blizini preseka ravnih graničnih površina, kada n opada preko jedinice, pošto je

$$\bar{v} = \frac{dW}{dz} = na^n z^{n-1} = nar^{n-1} e^{i(n-1)\theta}$$

a intenzitet brzine

$$|\bar{v}| = |na| r^{n-1}$$

tj. brzina je srazmerna sa r^{n-1} , pa u zaustavnoj tački $v = 0$, odnosno $r = 0$ postoje sledeći slučajevi:

- za $n > 1$, $v = 0$
- za $n = 1$, $v = a$
- za $n < 1$, $v = \infty$.

Odavde sledi važan zaključak, da kod svakog potencijalnog strujanja u tački krute površine gde postoji diskontinuitet obzirom na pravac tangente na površinu, brzina fluida je jednaka nuli kada je ugao na fluidnoj strani manji od π , a brzina je beskončna kada je ovaj ugao veći od π .

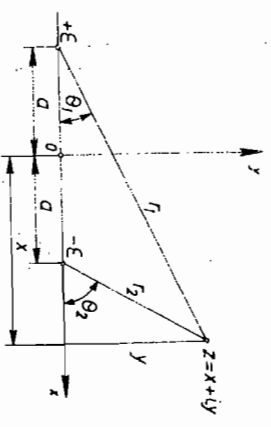
Medjutim, prilikom strujanja realnog fluida pre nego što struja stigne do tačke diskontinuiteta ($\theta < \pi$) nastupice odvajanje fluida od čvrste površine zbog usporjenja koje nastaje ispred zaustavne tačke stvarajući jedan stojeći vrtlog u uglu, a u slučaju tačke diskontinuiteta sa $\theta > \pi$ odvajanje struje nastupice na mestu diskontinuiteta čvrste površine, izuzev ako je promena pravca tangente dovoljno mala.

KOMPLEKSNI POTENCIJAL ZBIRNIH STRUJANJA. Funkcija je kompleksnih potencijala (analitičke funkcije) mogu se sabirati. Time se dolazi do velikog broja raznogolikih strujanja koja se lako proučavaju. Najveći značaj imaju ona strujanja kod kojih nulta strujnica obrazuje zatvorenu krivu, jer se tada može zamisliti da zamenjuje krutu površinu (telo) i da fluid struji okolo nje.

IZVOR I PONOR JEDNAKIH IZDAŠNOSTI. Neka se izvor i ponor izdašnosti $+e$ i $-e$ nalaze na realnoj osi na rastojanju $-a$ i $+a$ od koordinatnog početka. Kompleksni potencijal zbirnog strujanja iznosi

$$W(z) = \frac{e}{2\pi} \ln(z+a) - \frac{e}{2\pi} \ln(z-a) = \frac{e}{2\pi} \ln \frac{z+a}{z-a}$$

Ako se uvedu moduli r_1 i r_2 i argumenti θ_1 i θ_2 koji definišu macku tačku z u ravni z po-lazeći od izvora i ponora (koaksijalne ili dipolarne koordinate) onda može da se napiše



$$z+a = x+aiy = r_1 e^{i\theta_1} \quad \text{I} \quad z-a = x-aiy = r_2 e^{i\theta_2}$$

a kompleksni potencijal

$$W(z) = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} - i \frac{\epsilon}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1)$$

Sada je potencijal

$$\phi = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

a strujna funkcija

$$\psi = -\frac{\epsilon}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) = -\frac{\epsilon}{2\pi} \arctg \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$$

Nulla strujnica

$\psi = 0$ je x-osa, dok su ostale strujnice

$$x^2 + y^2 - 2 Cay = a^2$$

kružnice čiji centri leže na imaginarnoj osi, a sve prolaze kroz tačke u kojima su smešteni izvor i ponor.

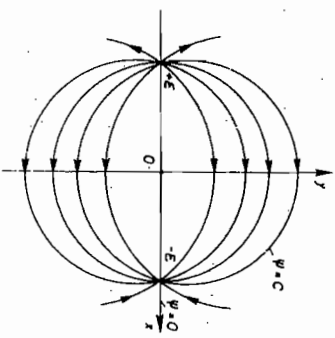
Izraz za kompleks-

nu brzinu dobija se kao izvod kompleksnog potencijala po promenljivoj z.

U ovom strujanju proizvoljno je rastojanje 2a između izvora i ponora. Medjutim, kada ovo rastojanje teži nuli ($a \rightarrow 0$) izvor i ponor padaju u istu tačku, a da bi se strujanje održalo mora se neizмерно povećati izdašnost izvora i ponora, jer bi inače ponor progutao sav fluid što izlazi iz izvora i nikakvo kretanje ne bi došlo do izražaja.

Ovakav par izvor - ponor zove se dvopol.

Moment dvopola je jednak proizvodu rastojanja 2a i izdašnosti ϵ i mora biti konstantan



$$M = \lim_{a \rightarrow 0} 2ae = \text{const.}$$

Da bi se našao kompleksni potencijal za strujanje oko dvopola, prvo se u izraz

$$W = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln \frac{z+a}{z-a}$$

zameni ϵ sa $M/2a$, a zatim potraži granična vrednost kada $a \rightarrow 0$

$$W = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{M}{4\pi a} \ln \frac{z+a}{z-a} = \frac{M}{2\pi z}$$

Dobijeni izraz predstavlja kompleksni potencijal dvopola smeštenog u koordinatnom početku. Iz kompleksnog potencijala se nalazi

$$\phi = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{M}{2\pi r} \cos \theta$$

$$\psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{M}{2\pi r} \sin \theta$$

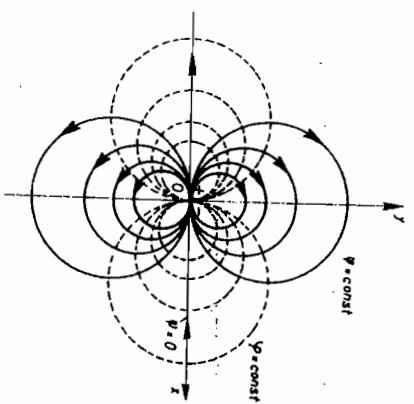
Strujnice $\psi = \text{const.}$

su kružnice koje dodiruju x-osu u koordinatnom početku, a ekvipotencijalne linije $\phi = \text{const.}$ su takodje kružnice koje u istoj tački tangiraju y-osu.

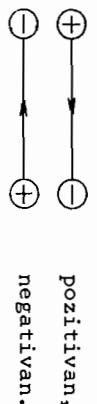
Ako je dvopol orijentisan pod nekim uglom α prema x-osi, a nalazi se u tački z_1 , onda je njegov kompleksni potencijal

$$W(z) = \frac{M e^{i\alpha}}{2\pi(z-z_1)}$$

Moment dvopola ima obeležje vektorske veličine, jer nije svejedno kako je on orijentisan, tj. nije svejedno da li izvor leži levo od ponora ili obratno, kao što nije svejedno na kakvoj pravi se nalaze, iako njihovo rastojanje



iščekzava. Pravaoc i smer momenta dvopola M računava se od izvora ka ponoru, a predznak se usvaja prema



Iz kompleksnog potencijala dvopola

$$W = \frac{M}{2\pi z}$$

dobija se

$$\vec{v} = \frac{dW}{dz} = -\frac{M}{2\pi z^2} = -\frac{M}{2\pi r^2} e^{-2i\theta}$$

Brzina fluida u polju dvopola iščekzava u beskrajnosti kao $1/r^2$, dok je u koordinatnom početku neizmerno velika - singularna tačka.

Dvopol nastaje od izvora i ponora iste izdašnosti e smeštenih u istoj tački, pri čemu se proizvod njihove izdašnosti i rastojanja održava konstantnim.

- JEDNOLIKO STRUJANJE KAO ZBIRNO STRUJANJE. Ovo

strujanje se može smatrati da je nastalo od izvora u $-\infty$ i ponora u $+\infty$. U ovom slučaju izvor i ponor su simetrično smešteni u tačkama $\pm z_s$ čije rastojanje se posle proteže u beskonačnost, dok se odnos jačine (izdašnosti) i rastojanja održava konstantnim, da bi se održala konstantna brzina u blizini koordinatnog početka.

Kompleksni potencijal za ovaj par je

$$W = \frac{e}{2\pi} \ln(z+z_s) - \frac{e}{2\pi} \ln(z-z_s)$$

U koordinatnom početku je

$$\vec{v} = v e^{-i\alpha} = \frac{dW}{dz} \Big|_0 = \frac{e}{2\pi} \left(\frac{1}{z+z_s} - \frac{1}{z-z_s} \right) \Big|_{z=0} = \frac{e}{\pi z_s} = \frac{e}{\pi r_s} e^{-i\alpha}$$

a iz drugog i zadnjeg člana jednakosti nalazi se

$e = r_s \pi v$
pa je kompleksni potencijal

$$W = \frac{r_s v}{2} (\ln(z+r_s e^{i\alpha}) - \ln(z-r_s e^{i\alpha}))$$

Ako se sada uvede smena $\zeta = z/r_s e^{i\alpha}$ i zanemari imaginarna konstanta $\ln(-1) = i\pi$, logaritamske funkcije u zagradi se razvijaju u stepeni red, a zbog velikog rastojanja izvora i ponora je $\zeta \ll 1$ te je dovoljno tačno zadržati se na prva dva člana, dobija se za kompleksni potencijal

$$W(\zeta) = r_s v \zeta$$

a nakon vraćanja na promenljivu z

$$W(z) = v z e^{-i\alpha}$$

Ovde je v - intenzitet brzine jednolike struje, a α - ugao koji brzina, odnosno strujnice, zaklapaju sa pozitivnom x-osom.

Za jednoliko strujanje paralelno x-osi ($\alpha=0$) kompleksni potencijal je

$$W = v z$$

a ako je jednolika struja paralelna y-osi ($\alpha=\pi/2$) onda je

$$W = -i v z$$

- IZVOR U JEDNOLIKOJ STRUJI (STRUJANJE OKO POLUTELA)

Neka je izvor izdažnosti ϵ smešten u koordinatnom početku, a jednolika struja brzine v_0 u pravcu negativne x-ose.

Tada je

$$W(z) = v_0 z + \frac{\epsilon}{2\pi} \ln z,$$

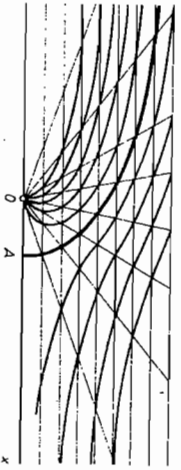
$$\bar{v} = \frac{dW}{dz} = v_0 + \frac{\epsilon}{2\pi z}$$

$$z = \frac{\epsilon}{2\pi v} \quad (\text{tačka A})$$

jedinstvena zaustavna tačka. Ona se nalazi na pozitivnom delu realne ose na mestu gde se brzine fluida jednolike struje i izvora poništavaju. Strujna funkcija je oblika

$$\psi = -v_0 y + \frac{\epsilon}{2\pi} \arctg \frac{y}{x} = v_0 y + \frac{\epsilon}{2\pi} \theta$$

a slika strujanja se lako dobije Renkinovom metodom (vidi 6.1.1.)



Strujnice su simetrične u odnosu na x-osu kroz koju fluid ne protiče. Linija koja razdvaja strujnice iz izvora i jednolike struje prolazi kroz zaustavnu tačku A i deli strujanje na dva dela. Zato se može predpostaviti da ona predstavlja čvrstu granicu. Tada strujna funkcija opisuje poremekaj u jednolikoj struji nastao zbog prisustva ove čvrste granice tj. opstrujavanja savršenog fluida oko polutela.

Koturi polutela pripada strujnica koja prolazi kroz

tačku A, te iz strujne funkcije za $y=0$ i $\theta=0$ (koordinate tačke A) sledi

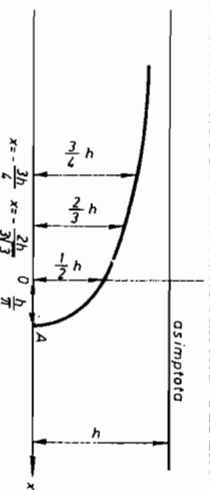
$$\psi = 0,$$

a jednačina tražene strujnice biće

$$y = \frac{\epsilon}{2\pi v_0} \theta,$$

u kojoj je sadržana i čvrsta granica i pozitivan deo x-ose.

Nadalje, u $z = \frac{\epsilon}{2v_0} = h$ kada $\theta \rightarrow 0$ ($x \rightarrow -\infty$) te prava $y=h$ predstavlja asimptotu, a zbog simetrije postoji asimptota $y=-h$ (polutelo u beskonačnosti ima konstantnu širinu jednaku $2h$).



Sada jednačina čvrste granice može da se napiše i u obliku

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{h} \operatorname{tg} \frac{\pi y}{h}, \quad OA = \frac{h}{\pi}$$

Npr. nalazi se da je $\frac{x}{h} = 31,9$ za $\frac{y}{h} = 0,99$.

Ovi rezultati dozvoljavaju da se izvedu nekoliko interesantnih fizičkih interpretacija.

Strujanje definisano funkcijom ψ može se shvatiti kao strujanje oko jednog kraja dugačkog zatupljenog tela npr. dugačko ostrvo u širokoj reci. S druge strane, ako se posmatra samo deo krive iznad x-ose dobija se slika strujanja pri dnu okeana pod uslovom da se ordinate dna menjaју od 0 do h dovoljno postepeno. Istu sliku možemo posmatrati kao strujanje vazduha pri nailasku na okomitu stenu. Interesantno je primetiti da je tačka A (zaustavna tačka) najbolje zaštićeno mesto.

Ujedinitim, i svaku drugu strujnicu možemo smatrati da predstavlja moguću čvrstu granicu. Time se pruža mogućnost boljeg opisanja npr. površine zemlje preko koje duva vetar, ali na njima neće postojati zaustavne tačke.

njih strujanja za praksu nastaje slaganjem strujanja oko osamljenog dvopola c jednolikim strujanjem. Ako moment dvopola dejstvuje u pravcu pozitivne x-ose, a isti pravac i smer ima jednoliko strujanje, onda kompleksni potencijal ima vrednost

$$W(z) = v_0 z + \frac{M}{2\pi z},$$

a odavde je

$$\phi = x(v_0 + \frac{M}{2\pi} \frac{1}{x^2+y^2}) = (v_0 r + \frac{M}{2\pi r}) \cos\theta$$

i

$$\psi = y(v_0 - \frac{M}{2\pi} \frac{1}{x^2+y^2}) = (v_0 r - \frac{M}{2\pi r}) \sin\theta.$$

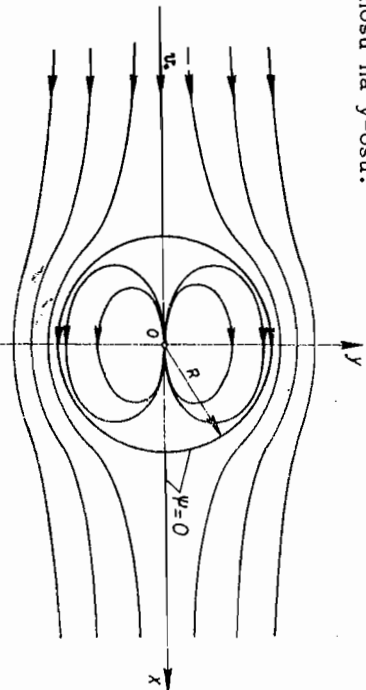
Ako je $\psi=0$ biće

$$y = 0 \quad \text{i} \quad x^2+y^2 = R^2,$$

pri čemu je sa R označen izraz

$$R = \sqrt{\frac{M}{2\pi v_0}},$$

tj. nulte strujnice su x-osa i centralna kružnica poluprečnika R. Slika i ovog strujanja lako se dobija Renkinovom metodom (v.6.1.1.). Strujnice su simetrične i u odnosu na x i u odnosu na y-osu.



U ovom se slučaju nulta strujnica zatvara i obrazuje ograničeno strujno telo - cilindar, pošto mu je presek s ravni strujanja centralna kružnica poluprečnika R, a osa

upravna na ravan strujanja. Omotač cilindra može se smatrati čvrstom površinom, te ne uzimati u obzir strujanje u njemu. Tako se dobija slika strujanja oko cilindra kojem fluid dolazi iz daleka konačnom brzinom v_0 . Ovo je jedno od najvažnijih strujanja jer je osnovno za čitav niz različitih strujanja koja imaju velik praktičan značaj.

Strujna funkcija se može izraziti u funkciji od R

smenom

$$M = 2\pi v_0 R^2$$

koja ujedno momentu dvopola daje geometrijsko tumačenje, tako da se dobija

$$\psi = v_0 (r - \frac{R^2}{r}) \sin\theta, \text{ odnosno } W(z) = v_0 (z + \frac{R^2}{z}),$$

a odavde je radijalna i kružna brzina u makojoj tački polja

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = v_0 (1 - \frac{R^2}{r^2}) \cos\theta, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -v_0 (1 + \frac{R^2}{r^2}) \sin\theta.$$

Za $r = R$ (kontura tela) sledi

$$v_r = 0 \quad \text{i} \quad v_\theta = v = -2v_0 \sin\theta.$$

Znak minus pokazuje da je brzina suprotnog smera od smera merenja ugla θ . Maksimalna brzina se dobija za ugao $\theta = \pi/2$ i iznosi $v_{\theta \max} = \pm 2v_0$, a za $\theta = 0$ i $\theta = \pi$, $v_\theta = 0$ - zaustavne tačke.

Na velikom rastojanju od cilindra pritisak u strujni je P_0 jer nema poremećaja od cilindra. Ako se zna ovaj pritisak, pošto su poznate jednolika brzina i raspored brzina na cilindru, može se iz Koši-Lagran, jednačine napisane za dovoljno daleke tačke i tačke na konturi cilindra, dobiti raspodela pritiska po konturi cilindra.

Iz Koši-Lagranove jednačine

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} = \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2},$$

zbog $v = -2v_0 \sin\theta$ sledi dalje

a odavde je za površinu cilindra

$$p - P_0 = \frac{1}{2} \rho v^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) ,$$

$$C_p = 1 - 4 \sin^2 \theta ,$$

gde je C_p - koeficijent pritiska definisan kao odnos porastta pritiska nad pritiskom u neporemećenoj struji i dinamičkog pritiska, tj.

$$C_p = \frac{p - P_0}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} .$$

Ovde je p - makoji statički pritisak, a P_0 i v_0 - statički pritisak i brzina neporemećenog strujanja.

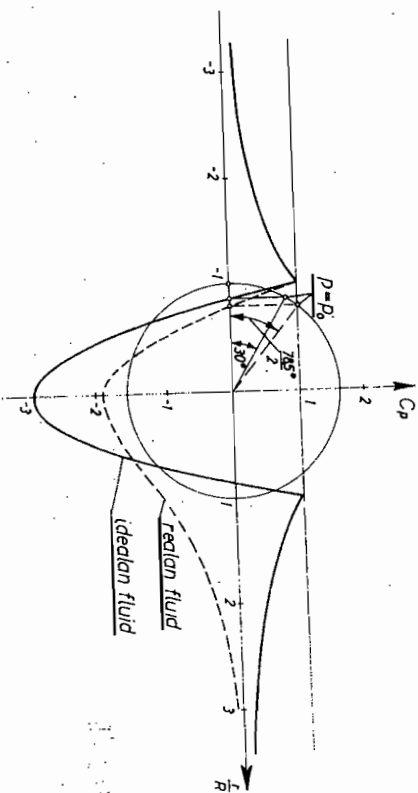
Duž dolazeće nulte strujnice $\theta = \pi$ gde je brzina

$$v_r = v = -v_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \quad \text{jer je} \quad v_\theta = 0 ,$$

za koeficijent pritiska se dobija

$$C_p = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left(2 - \left(\frac{R}{r}\right)^2\right) .$$

Sada se može grafički prikazati promena koeficijenta pritiska duž nultih strujnica pri strujanju fluida oko cilindra.



Raspored statičkog pritiska po površini cilindra

je

$$p = P_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) .$$

Odavde se lako zaključuje da je ukupni otpor cilindra jednak nuli, jer se pritisci u simetričkim tačkama poništavaju. Isto je i sa silom uzgona. Neslaganje ovog teorijskog rezultata sa svakodnevnim iskustvom u pogledu strujanja fluida oko tela, poznato je kao Dalamberov (D'Alembert) paradoks. Razlog neslaganja je potpuno zanemarivanje viskoznošti.

Aciklično strujanje je zbog

$$\Gamma = \oint (\nabla \cdot d\vec{l}) = \phi_A - \phi_A = 0 ,$$

jer je potencijal ϕ jednoznačna funkcija.

- STRUJANJE OKO KRUŽNOG CILINDRA SA CIRKULACIJOM.

(Ciklično strujanje oko cilindra.) Ako fluid opstrujava kružni cilindar, a cirkulacija je pri tom stalna i jednaka $-\Gamma$, onda se kompleksnom potencijalu iz predhodnog strujanja dodaje još jedan član, te sada glasi

$$W(z) = v_0 \left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z ,$$

a odavde je

$$\phi = v_0 r \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

$$\psi = v_0 r \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r ,$$

jer vrtlog ima samo kružnu brzinu (radijalna je jednaka nuli) te ne menja sliku granične površine - cilindra.

I u ovom slučaju nulta strujnica se ne poklapa sa centralnom kružnicom poluprečnika R , već to čini strujnica

$$\psi = C = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r .$$

Kako se i kompleksni potencijal određuje s tačnošću do aditivne kompleksne konstante, to bi izraz za kompleksni potencijal trebalo utoliko promeniti što bi se u poslednji član umesto z uveo odnos z/R . Ovim bi se postiglo da nulta struj-

nica ukviruje krug $r=R$.

Iz kompleksne brzine

$$\bar{v} = \frac{dW}{dz} = v_0 \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z}$$

nalaze se koordinate zaustavnih talaka ($\bar{v}=0$) rešavanjem jednačine

$$2\pi v_0 z^2 + i\Gamma z - 2\pi v_0 R^2 = 0$$

Kako položaj zaustavnih tačaka zavisi od diskriminante

$$\Delta = -\Gamma^2 + 16\pi^2 v_0^2 R^2$$

to postoje tri slučaja:

a) Kada je $\Delta > 0$; $\Gamma < 4\pi v_0 R$, brzina postaje nula u tačkama

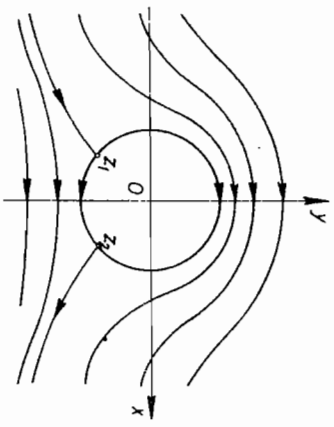
$$z_1 = -\frac{i\Gamma}{4\pi v_0} - \sqrt{R^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 v_0^2}} \quad \text{i}$$

$$z_2 = -\frac{i\Gamma}{4\pi v_0} + \sqrt{R^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 v_0^2}}$$

Tačke z_1 i z_2 su

simetrične prema y-osi, jer se njihove koordinate razlikuju samo znakom apscise. Negativan znak ordinate pokazuje da tačke leže ispod x-ose. Kako koordinate x i y zaustavnih tačaka zadovoljavaju jednačinu

$$x^2 + y^2 = R^2$$

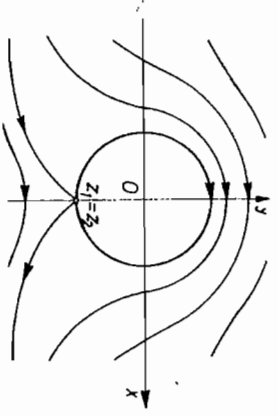


to tačke pripadaju donjem delu centralne kružnice, kako je pokazano na slici strujanja.

b) Kada je $\Delta = 0$, odnosno $\Gamma = 4\pi v_0 R$, zaustavne tačke su

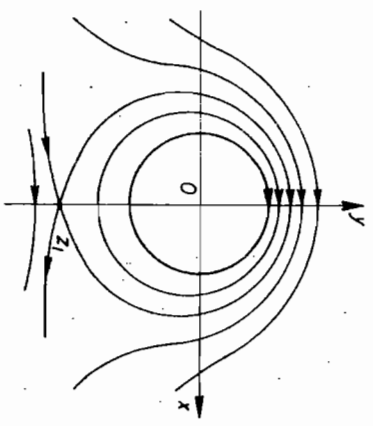
$$z_1 = z_2 = -\frac{i\Gamma}{4\pi v_0}$$

tj. zaustavne tačke se poklapaju i to na mestu gde ordinatna osa seče donji deo centralne kružnice (vidi sliku strujanja).



c) Kada je $\Delta < 0$,

odnosno $\Gamma > 4\pi v_0 R$, zaustavne tačke leže na ordinatnoj osi, ali su različito udaljene od koordinatnog početka. Jedna od njih pada unutar centralne kružnice i pripada strujanju u kružnici. Ona nema značaja za opstrujavanje valjka pa zato nije ni označena na slici.



Primenom Koši-Lagranžove jednačine za tačke u neuznemirenoj struji, gde je pritisak p_0 i brzina v_0 , i tačke na površini cilindra, gde je pritisak p i brzina

$$v = v_0 = -2v_0 \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi R}, \quad \text{jer je } v_r = 0,$$

dobije se zakon promene statičkog pritiska po površini cilindra u obliku

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{1}{2}\rho \left(-2v_0 \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi R}\right)^2$$

Pritisak je normalan na površinu cilindra i na elementarnoj površini $Rd\theta$ izazvaće, u opštem slučaju, silu

$$dF = pRd\theta,$$

sa horizontalnom i vertikalnom komponentom

$$-dF_x = pR \cos\theta d\theta,$$

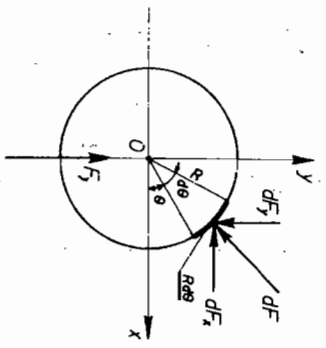
$$-dF_y = pR \sin\theta d\theta.$$

Komponente ukupne

sile su

$$-F_x = \int_0^{2\pi} pR \cos\theta d\theta = 0, \quad -F_y = \int_0^{2\pi} pR \sin\theta d\theta = \rho v \Gamma$$

$F_x = 0$ može da se shvati iz simetrije strujnog polja



u odnosu na y-osu.

$F_y = \rho v \Gamma$ je rezultat od velike važnosti u mehanici fluida, jer pokazuje da je za dobijanje sile uzgona potrebna i cirkulacija Γ i brzina v_0 .

Uzgon se može dobiti obrtanjem cilindra u realnom fluidu koji struji, jer usled delovanja viskoznosti cilindar prouzrokuje dodatno strujanje oko njega. Ovo obrtno kretanje cilindra može se aproksimovati dodavanjem cirkulacije strujanju oko dvopola kod savršenog fluida.

Ova pojava je još davno poznata i kao rezultat toga bila je ideja da se za pogon brodova upotrebe obrtni cilindri - Fletnerovi rotor, kao i da obrtni cilindri zamenu krila kod aviona. Medjutim, iako je za dobijanje sile uzgona potrebna relativno mala sila, zbog glomaznosti cilindara i drugih tehničkih poteškoća, potpuno je napuštena ideja o praktičnom korišćenju ove pojave, dok je u vazduhoplovstvu i završena.

Primeri:

1. Komponenta brzine u pravcu x ose pri ravanskom strujanju nevtrotložnog, nestišljivog fluida je

$$v_x = x^2 - 2x - y^2.$$

Orediti: a) Komponentu brzine u pravcu y ose v_y uz uslov

$$v_y = 0 \text{ za } y = 0;$$

b) Strujnu funkciju ψ .

Rešenje.

a) Iz uslova nevtrotložnosti $\text{rot } \vec{v} = 0$ sledi

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

odnosno

$$v_y = \int \frac{\partial v_x}{\partial y} dx + f(y) = - \int 2y dx + f(y) = -2xy + f(y).$$

Da bi se odredila funkcija $f(y)$ prvo se u gornjoj jednakosti (prvi i zadnji član) nadje parcijalni izvod po y

$\frac{\partial v_x}{\partial y} = -2x + f'(y)$,
a zatim se koristi uslov nestišljivog strujanja za koje se jednačina kontinuiteta svodi na

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

odakle sledi druga relacija za $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ tj.

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} = 2 - 2x.$$

Izjednačavajući desne strane dobijenih relacija za $\frac{\partial v_x}{\partial y}$, nalazi se

$$f'(y) = 2,$$

odnosno

$$f(y) = 2y + C.$$

Komponenta brzine u pravcu y ose je

$$v_y = 2y - 2xy + C,$$

a granični uslov $v_y = 0$ za $y = 0$ daje $C = 0$, te je konačno

$$v_y = 2y(1-x).$$

b) Pošto su poznate komponente brzine v_x i v_y i koristeći njihovu vezu sa strujnom funkcijom ψ , poznatim postupkom određuje se strujna funkcija, tj. iz

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

sledi

$$\psi = \int v_x dy + f(x) = x^2 y - 2xy - \frac{y^3}{3} + f(x),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2xy - 2y + f'(x) = -v_y = 2xy - 2y,$$

$$f'(x) = 0, \text{ odnosno } f(x) = C,$$

i konačno

$$\psi = x^2 y - 2xy - \frac{y^3}{3} + C.$$

2. Obimska projekcija brzine ravnanskog potencijalnog strujanja nestišljivog fluida data je izrazom

$$v_{\theta} = \frac{a}{r^2} \cos \theta .$$

Određiti radijalnu projekciju brzine, kompleksni potencijal i strujnu funkciju, ako su granični uslovi:

$$v_r(x=0, y=1) = -a, \quad W(i) = a.$$

Naći razliku pritisa između tačaka A(1, 0) i B(0, 1), datim u Dekartovim koordinatama, pod pretpostavkom da je strujna ravan horizontalna.

Rešenje.

Jednačina kontinuiteta za nestišljivo strujanje glasi

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} = 0 .$$

Iz poznate obimske projekcije brzine nalazi se izvod

$$\frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} = -\frac{a}{r^2} \sin \theta ,$$

tako da se integriranjem, jednačina kontinuiteta svodi na

$$rv_r = -\frac{a}{r} \sin \theta + f(\theta) .$$

Funkcija f(θ) se određuje korišćenjem uslova nevrtnosti

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial r}(rv_{\theta}) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{z}_0 = 0$$

koji se za ovaj slučaj svodi na

$$r \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = -\frac{a}{r} \cos \theta .$$

kako je izvod f'(θ) jednak

$$r \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = -\frac{a}{r} \cos \theta + f'(\theta) ,$$

to se, izjednačavanjem desnih strana jednačina, dolazi do

$$f(\theta) = C = \text{const.}$$

Korišćenjem graničnog uslova $v_r(r=1, \theta=\pi/2) = -a$ nalazi se

$$C = 0 ,$$

i konačno je

$$v_r = -\frac{a}{r^2} \sin \theta .$$

Iz kompleksne brzine

$$\vec{v} = v_x - iv_y = (v_r - iv_{\theta}) e^{-i\theta} = \left(-\frac{a}{r^2} \sin \theta - i \frac{a}{r^2} \cos \theta \right) e^{-i\theta} = -\frac{ia}{z^2} ,$$

jer je

$$\begin{aligned} v_x &= v_r \cos \theta - v_{\theta} \sin \theta \\ v_y &= v_r \sin \theta + v_{\theta} \cos \theta , \end{aligned}$$

nalazi se kompleksni potencijal datog strujanja

$$W = \int \vec{v} dz + C = -ia \int \frac{dz}{z^2} + C = \frac{ia}{z} + C ,$$

i pošto drugi granični uslov W(i) = a daje C=0, sledi

$$W = \frac{ia}{z} .$$

Gornji izraz predstavlja kompleksni potencijal strujanja u polju osamljenog dvopola u koordinatnom početku ($z_0=0$), čiji je moment $M=2\pi a$, a deluje u pravcu koji sa pozitivnom x-osom gradi ugao $\alpha=\pi/2$.

Kako je dalje

$$W = \phi + i\psi = \frac{ia}{z} = \frac{ia}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) ,$$

to se za strujnu funkciju dobija izraz

$$\psi = \frac{a}{r} \cos \theta = \frac{ax}{x^2+y^2} .$$

Iz Koci-Lagranžove jednačine za tačke A i B

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} = \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2}$$

dobija se

$$P_B - P_A = \frac{1}{2}\rho (v_A^2 - v_B^2) .$$

Kako je u tački A (r=1, θ=0) kvadrat brzine jednak

$$v_A^2 = v_{rA}^2 + v_{\theta A}^2 = a^2 ,$$

a u tački B (r=1, θ=π/2) kvadrat brzine jednak

$$v_B^2 = v_{rB}^2 + v_{\theta B}^2 = a^2 ,$$

vidi se da je

$$v_A = v_B$$

tako da gornja relacija za traženu razliku pritiska daje

$$P_B - P_A = 0 ,$$

odnosno

$$P_A = P_B .$$

3. Pokazati da komponente brzine

$$v_x = U\left(1 - \frac{ay}{x^2+y^2} + \frac{b^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) ; v_y = U\left(\frac{-ax}{x^2+y^2} + \frac{2b^2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

predstavljaju potencijalno ravansko kretanje tečnosti i objasniti smisao članova koji ulaze u izraz za kompleksni potencijal.

Rešenje.

Da bi strujanje bilo potencijalno (nevertložno), mora da bude zadovoljen uslov rot $\vec{v} = 0$ koji se dalje svodi na

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$U\left(\frac{a(x^2+y^2) - 2ax^2 + 2b^2y(x^2+y^2)^2 - 2b^2xy \cdot 2(x^2+y^2) \cdot 2xy}{(x^2+y^2)^4}\right) =$$

$$= U\left(\frac{-a(x^2+y^2) - 2ay^2 + -2b^2y(x^2+y^2)^2 - b^2(x^2-y^2) \cdot 2(x^2+y^2) \cdot 2xy}{(x^2+y^2)^4}\right) .$$

Ako sada u levu i desnu stranu gornje jednakosti pomnožimo sa $(x^2+y^2)^3/U$, nakon sredjivanja dobija se

$$a(y^4 - x^4) + 2b^2y(y^2 - 3x^2) = a(y^4 - x^4) + 2b^2y(y^2 - 3x^2) .$$

Sada je očigledno jednakost zadovoljena, a zadano strujanje je potencijalno.

Da bi se objasnio smisao članova koji ulaze u izraz za kompleksni potencijal, definišaće se prvo kompleksna brzina datog strujanja

$$\vec{v} = v_x - iv_y = U\left(1 - \frac{ay}{x^2+y^2} + \frac{b^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) - iU\left(\frac{-ax}{x^2+y^2} + \frac{2b^2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) .$$

Nakon sredjivanja, izraz za kompleksnu brzinu može da se napiše kao

$$\vec{v} = U\left(1 - ia \frac{x - iy}{x^2+y^2} + b^2 \frac{x^2 - y^2 - i2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) .$$

Ovako napisan izraz za kompleksnu brzinu je najpogodniji da se na jednostavan i lak način uvede kompleksna promenljiva z umesto realnih promenljivih x i y , imajući u vidu da je

$$\bar{z} = x - iy$$

$$\bar{z}^2 = x^2 - y^2 - i2xy$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 .$$

Sada se izraz za kompleksnu brzinu transformiše u

$$\vec{v} = U\left(1 - ia \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} + \frac{b^2 \bar{z}^2}{(z \cdot \bar{z})^2}\right) ,$$

i konačno

$$\vec{v} = U - \frac{iaU}{z} + \frac{b^2U}{z^2} .$$

Kompleksni potencijal datog strujanja dobija se preko kompleksne brzine na sledeći način:

$$W = \int \vec{v} dz + C ,$$

$$W = \int \left(U - \frac{iaU}{z} + \frac{b^2U}{z^2} \right) dz + C ,$$

$$W = Uz - iaU \ln z - \frac{Ub^2}{z} + C$$

Da bi se objasnili pojedini članovi u izrazu za kompleksni potencijal, podseća se da su kompleksni potencijali sledećih osnovnih strujanja:

- jednolika struja u pravcu pozitivne x-ose

$$W = vz$$

- vrtlog pozitivne cirkulacije Γ smešten u koordinatnom početku

$$W = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$$

- dvopol smešten u koordinatnom početku čiji moment M deluje u pravcu x-ose u pozitivnom smeru

$$W = \frac{M}{2\pi z}$$

Upoređivanjem odgovarajućih članova u izrazu za kompleksni potencijal i kompleksnih potencijala osnovnih strujanja može se zaključiti da

- prvi član u izrazu za kompleksni potencijal datog strujanja predstavlja jednoliku struju u pravcu pozitivne x-ose, brzine $v=U$;
- drugi član predstavlja vrtlog pozitivne cirkulacije $\Gamma=2\pi aU$, smešten u koordinatnom početku;
- treći član predstavlja dvopol smešten u koordinatnom početku čiji je moment $M=-2\pi b^2U$, a deluje u pravcu x-ose u negativnom smeru.

Pošto integraciona konstanta C (u opštem slučaju kompleksna konstanta) ne menja sliku strujanja može se na kraju zaključiti da je dato složeno strujanje tečnosti nastalo kao rezultat zbirnog strujanja sledeća tri osnovna strujanja: jednolike struje, vrtloga i dvopola. Tako dobijeno složeno strujanje predstavlja ciklično strujanje oko cilindra.

4. Pokazati da komponente brzine ravanskog strujanja tečnosti

$$v_r = akr^n e^{-k(n+1)\theta}, \quad v_\theta = ar^n e^{-k(n+1)\theta}$$

zadovoljavaju jednačinu kontinuiteta, i odrediti strujnu funkciju ψ ako je $\psi(0,0)=0$. Pokazati takođe, da je brzina tečnosti u svakoj tački jednaka

$$v = \frac{n+1}{r} \psi \sqrt{k^2+1}$$

gde je ψ - strujna funkcija.

Rešenje.

Jednačina kontinuiteta za ravansko strujanje tečnosti u polarnim koordinatama glasi

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

Ako se sada u gornju jednačinu uvrste vrednosti za v_r i v_θ dobija se

$$\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot akr^n e^{-k(n+1)\theta}) + \frac{\partial}{\partial \theta}(ar^n e^{-k(n+1)\theta}) =$$

$$= ak(n+1)r^n e^{-k(n+1)\theta} + ar^n e^{-k(n+1)\theta} (-k(n+1)) = 0$$

Kada su poznate komponente brzine, strujna funkcija ψ određuje se na sledeći način:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = rv_r = r \cdot akr^n e^{-k(n+1)\theta}$$

$$\psi = akr^{n+1} \int e^{-k(n+1)\theta} d\theta + f(r) = -\frac{ar^{n+1}}{n+1} e^{-k(n+1)\theta} + f(r)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -ar^n e^{-k(n+1)\theta} + f'(r) = -v_\theta = -ar^n e^{-k(n+1)\theta}$$

$$f(r) = C$$

Kako je za granični uslov $\psi(0,0)=0$ i $C=0$, dobija se konačan izraz za strujnu funkciju

$$\psi = -\frac{ar^{n+1}}{n+1} e^{-k(n+1)\theta}$$

Brzina tečnosti u svakoj tački jednaka je

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{a^2 k^2 r^{2n} e^{-2k(n+1)\theta} + a^2 r^{2n} e^{-2k(n+1)\theta}} = \\ &= ar^n e^{-k(n+1)\theta} \sqrt{k^2 + 1} = -\frac{n+1}{r} \left(-\frac{ar^{n+1}}{n+1}\right) e^{-k(n+1)\theta} \sqrt{k^2 + 1} = \\ &= -\frac{n+1}{r} \psi \sqrt{k^2 + 1} \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

5. Potencijal brzine ravnanskog strujanja savršenog i nestišljivog fluida dat je izrazom

$$\phi = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}$$

Određiti: a) radijalnu i kružnu (cirkularnu) komponentu brzine, kao i ukupnu brzinu;

- b) strujnu funkciju ψ ako je $\psi(0,0)=0$;
 c) skicirati strujne i ekvipotencijalne linije i označiti smer tečenja.

Rešenje.

a) Radijalna komponenta brzine je

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2}$$

a kružna komponenta

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \sqrt{r} \left(-\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2}$$

Sada je ukupna brzina

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\frac{1}{4r} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4r} \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{r}}$$

b) Pošto je poznat potencijal brzine ϕ , strujna funkcija ψ može da se odredi iz Koši-Rimanovih jednačina, ali kako su poznate komponente brzina v_r i v_θ jednostavnije je naći ψ koristeći njihovu vezu, tj.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = v_r, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -v_\theta$$

prva jednačina daje

$$\psi = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} + f(r),$$

a druga

$$f(r) = \text{const.} = C.$$

Iz graničnog uslova $\psi(0,0)=0$ sledi $C=0$ i konačno je tražena strujna funkcija

$$\psi = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}.$$

c) Da bi se nacrtala slika strujanja, potrebno je prvo odrediti i nacrtati linije-strujnice $\psi=0$ (nulte strujnice) jer linije $\psi=C$ predstavljaju opstrujavanje fluida oko nulnih strujnica, te ih je tako lakše nacrtati. Iz strujne funkcije za $\psi=0$ dobija se

$$\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{r} \frac{1 - \cos \theta}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}} = 0,$$

a odavde sledi jednakost $\sqrt{x^2 + y^2} = x$ koja daje jednačinu nulne strujnice

$$y = 0 \quad \text{uz uslov} \quad x > 0.$$

Prema tome, nulta strujnica $\psi=0$ je pozitivni deo x-ose.

Ostale strujnice $\psi=C$ predstavljene su jednačinom

$$x + C^2 = \frac{y^2}{4C^2}$$

gde je C parametar. Za različite vrednosti parametara C dobija se familija parabola koje su simetrične u odnosu na x-osu, a temena parabola koja se takodje nalaze na x-osi pomereni su u levo od koordinatnog početka za C^2 .

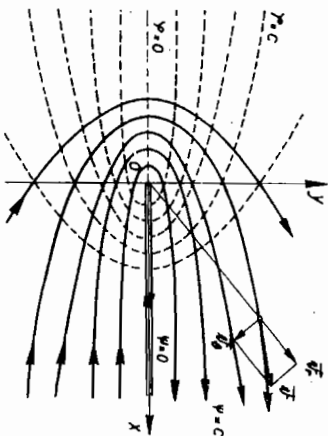
Pravac strujanja se lako zaključuje iz komponenta brzine. Naime, u oblasti u kojoj je $\theta < \frac{\pi}{2}$ komponente brzine su

$$v_x = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} > 0, \quad v_y = -\frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} < 0$$

koje jednoznačno određuju smer strujanja kako je pokazano na slici.

Ekvipotencijalne

linije se određuju na isti način. Crtanje ovih linija, kada su već nacrtane strujnice, olakšava činjenica da su ove dve familije linija ($\phi = \text{const.}$ i $\psi = \text{const.}$) međusobno ortogonalne. Iz uslova $\phi = 0$, i $\theta = \pi, 3\pi, \dots$



tj. negativni deo x-ose predstavlja nultu ekvipotencijalnu liniju. Ostale linije $\phi = C$ prikazane su na slici.

6. Funkcija potencijala brzine ravnanskog potencijalnog strujanja nestišljivog fluida je

$$\phi = y^2 - x^2 + \frac{1}{2}.$$

Određiti linije konstantnog pritiska uz pretpostavku da je strujna nava horizontalna.

Rešenje.

Iz potencijala brzine nalaze se komponente brzine kao odgovarajući parcijalni izvodi

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -2x, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2y$$

a odavde, kvadrat intenziteta brzine u ma kojoj tački je

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = 4(x^2 + y^2).$$

Koši-Lagranžova jednačina

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C = \text{const.}$$

zbog konstantnog pritiska svodi se na

$$x^2 + y^2 = C_1, \quad C_1 = \frac{1}{2}(C - \frac{p}{\rho}) = \text{const.}$$

linije konstantnog pritiska su centralne kružnice.

7. Zadati je potencijal brzine ravnanskog strujanja nestišljivog fluida

$$\phi = ay(y^2 - 3x^2), \quad a > 0.$$

Određiti kompleksni potencijal W, ako je W(0) = 0.

Rešenje.

Koristeći se vezom funkcija ϕ i ψ s analitičkom funkcijom $W(z)$, dovoljno je poznavati samo ϕ , ili samo ψ , da bi se odredila analitička funkcija W. Time se postupak nalaženja kompleksnog potencijala, u ovom slučaju, znatno olakšava.

Veza funkcija ϕ i ψ s analitičkom funkcijom $W(z)$ sastojala bi se u sledećem:

Svaka analitička funkcija $W(z)$ može se napisati u obliku

$$W(z) = W(x+iy) = \phi(x,y) + i\psi(x,y) = \phi + i\psi.$$

Isto tako važe jednakosti

$$W(x+iy) + \bar{W}(x-iy) = 2\phi(x,y), \quad W(x+iy) - \bar{W}(x-iy) = 2i\psi(x,y).$$

gde je $\bar{W}(\bar{z}) = \bar{W}(x-iy) = \phi - i\psi$ konjugovana kompleksna funkcija od kompleksne funkcije $W(z)$.

Ako se stavi da je $x = \frac{1}{2}z, y = -\frac{i}{2}z$, gornje jednakosti

daju

$$W(z) = 2\phi\left(\frac{1}{2}z, -\frac{i}{2}z\right) - \bar{W}(0), \quad W(z) = 2i\psi\left(\frac{1}{2}z, -\frac{i}{2}z\right) + \bar{W}(0).$$

Neka je $W(0) = \alpha + i\beta$ i $\bar{W}(0) = \alpha - i\beta$. Tada je

$$2\alpha = W(0) + \bar{W}(0) = 2\phi(0, 0), \quad 2i\beta = W(0) - \bar{W}(0) = 2i\psi(0, 0).$$

Prema tome, ako je poznata funkcija $\phi(x, y)$ ili $\psi(x, y)$, može se odrediti $W(z)$ iz jednakosti

$$W(z) = 2\phi\left(\frac{1}{2}z, -\frac{i}{2}z\right) - \phi(0, 0) + i\beta, \quad (1)$$

$$W(z) = 2i\psi\left(\frac{1}{2}z, -\frac{i}{2}z\right) - i\psi(0, 0) + \alpha, \quad (2)$$

gde su β i α - proizvoljne realne konstante (određuju se iz graničnih uslova).

Sada se za zadati potencijal brzine ϕ iz jednakosti (1) nalazi kompleksni potencijal

$$W(z) = 2 \cdot a \left(-\frac{i}{2}z\right) \left(\left(-\frac{i}{2}z\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}z\right)^2\right) - 0 + i\beta$$

odnosno, nakon sredjivanja

$$W(z) = ia z^3 + i\beta.$$

Iz uslova $W(0) = 0$ sledi $\beta = 0$, te je

$$W(z) = ia z^3.$$

8. Slaganjem kompleksnih potencijala ravnanskog potencijalnog strujanja, paralelnog x-osi, i dvopola, dobija se kompleksni potencijal ravnanskog strujanja ako cilindra bez cirkulacije

$$W = v_0 z + \frac{M}{2\pi z}.$$

Određiti prečnik cilindra koji je dobijen zamenom nulte strujnice čvrstim zidom, brzinu na površini cilindra za ugao $\theta = 60^\circ$ ako je brzina u beskonačnosti $v_0 = 5$ m/s i pritisak na površini cilindra za ugao $\theta = 30^\circ$ ako je pritisak u beskonačnosti $P_0 = 150$ kPa.

Rešenje.

Rastavljanjem kompleksnog potencijala zbirnog strujanja na realni i imaginarni deo

$$W = \phi + i\psi = \left(v_0 r + \frac{M}{2\pi r}\right) \cos\theta + i\left(v_0 r - \frac{M}{2\pi r}\right) \sin\theta$$

Iako se dolazi do strujne funkcije

$$\psi = \left(v_0 r - \frac{M}{2\pi r}\right) \sin\theta,$$

a odavde, za $\psi = 0$, dolazi se do jednačina nulnih strujnica

$$\sin\theta = 0 \quad \text{odnosno} \quad \theta = 0 \quad \text{i} \quad \theta = \pi \quad (x\text{-osa})$$

$$v_0 r - \frac{M}{2\pi r} = 0, \quad r = \frac{M}{2\pi v_0} = R^2 \quad (\text{centralna jednačina kružnice})$$

Prečnik cilindra koji je dobijen zamenom nulte strujnice čvrstim zidom je

$$D = 2R = \sqrt{\frac{2M}{\pi v_0}}.$$

Da bi se odredila brzina u makojoj tački strujne ravni predhodno će se u izraz za strujnu funkciju uvesti poluprečnik cilindra, tako da izraz za strujnu funkciju postaje

$$\psi = v_0 \left(r - \frac{R^2}{r}\right) \sin\theta,$$

a odavde slede prosti izrazi za radijalnu i kružnu brzinu

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = v_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos\theta,$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -v_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin\theta.$$

Za $r = R$ (površina cilindra) sledi

$$v_r = 0, \quad v_\theta = v = -2v_0 \sin\theta,$$

a znak minus pokazuje da je brzina suprotna od smera merenja ugla θ .

Sada je tražena brzina

$$v = 2v_0 \sin\theta = 2 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ = 5\sqrt{3} \text{ m/s}$$

Pritisak na površini cilindra se izračunava iz Koši-Lagranž. jednačine napisane za tačke u beskonačnosti, u kojima je pritisak P_0 i brzina v_0 , i tačke na površini cilindra u kojima je pritisak p i brzina $v=2v_0 \sin\theta$, tj.

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

$$p = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2(1-4 \sin^2\theta)$$

Kako je za ugao $\theta = 30^\circ$ izraz u zagradi jednak nuli, tj.

$$1-4 \sin^2\theta = 1-4 \sin^2 30^\circ = 1-4 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

to traženi pritisak iznosi

$$p = P_0 = 150 \text{ kPa}$$

Napomena. Kako je izraz $1-4 \sin^2\theta=0$ još i za $\theta=150^\circ$, $\theta=210^\circ$ i $\theta=330^\circ$, to pri potencijalnom strujanju postoje četiri tačke na površini cilindra u kojima vlada isti statički pritisak kao i u neporemećenoj struji. U stvari, postoji dva para takvih tačaka koje su simetrične u odnosu na x-osu a njihov centralni ugao iznosi 60° . Pri strujanju realnog fluida oko cilindra, eksperimentalno je utvrđeno da postoji samo jedan par takvih tačaka a njihov centralni ugao iznosi $78,5^\circ$. Na ovom principu su zasnovane cilindrične sonde za merenje pritiska, brzine i pravca brzine u nekoj tački realne fluidne struje.

9. Dat je kompleksni potencijal $w^2=z^2-1$. Dokazati da je $y^2(1+x^2) = x^2$ jednačina strujne linije za koju je $w = 1$. Smatrajući da je ta linija čvrsta granična površina, pokazati da dati kompleksni potencijal opisuje opticanje ove granice ravnomernom strujom.

Rešenje.

Da bi se dokazao prvi deo zadatka polazi se od izraza za kompleksni potencijal

$$w^2 = z^2 - 1$$

koji može da se napiše i kao

$$(\phi + iy)^2 = (x + iy)^2 - 1$$

odnosno

$$\phi^2 - \psi^2 + 2\phi\psi i = x^2 - y^2 + 2xyi - 1$$

Kako je ova jednakost zadovoljena ako su posebno jednaki njeni realni i imaginarni delovi, to se ista svodi na dve jednačine

$$\phi^2 - \psi^2 = x^2 - y^2 - 1$$

$$2\phi\psi = 2xy$$

iz kojih se jednoznačno određuje strujna funkcija ψ u obliku

$$\frac{x^2 y^2}{\psi^2} - \psi^2 = x^2 - y^2 - 1$$

Sada se za $\psi = 1$ gornja jednačina svodi na

$$x^2 y^2 - 1 = x^2 - y^2 - 1$$

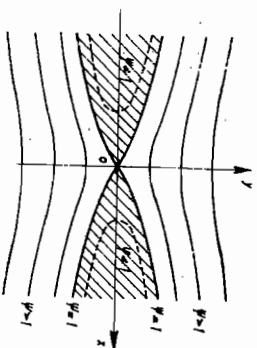
odnosno

$$y^2(1+x^2) = x^2$$

što se i trebalo dokazati.

Da bi se uradio i drugi deo zadatka, potrebno je u XOY ravni grafički prikazati funkciju

$$\frac{x^2 y^2}{\psi^2} - \psi^2 = x^2 - y^2 - 1$$



uzimajući bar tri konstantne vrednosti za strujnu funkciju ψ ($\psi < 1$, $\psi = 1$, $\psi > 1$).

Zadaci.

1. Za ravansko potencijalno strujanje nestišljivog fluida s projekcijom brzine na osu x,

$$v_x = -e^x \sin y,$$

odrediti projekciju brzine na osu y, potencijal brzine, strujnu funkciju i kompleksni potencijal pod uslovom da je $v_y = -1$, $\phi = 0$ i $\psi = 1$ za $x=y=0$.

Rešenje.

$$v_y = -e^x \cos y; \quad \phi = -e^x \sin y; \quad \psi = e^x \cos y; \quad w = ie^z$$

2. Kod ravanskog potencijalnog strujanja nestišljivog fluida gustine ρ , u vertikalnoj ravni Oxy, projekcija brzina su

$$v_x = 4ax \quad \text{i} \quad v_y = -4ay.$$

Odrediti potencijal brzine, strujnu funkciju i zakon rasporeda pritiska ako se pretpostavi da je pritisak u koordinatnom početku P_0 , a y-osa usmerena naviše.

Rešenje.

$$\phi = 2a(x^2 - y^2) + C; \quad \psi = 4axy + C; \quad p = p_0 - \rho g y - 8a^2 \rho (x^2 + y^2)$$

3. Potencijal brzine ravanskog strujanja nestišljivog fluida je $\phi = ay(y^2 - 3x^2)$, $a > 0$.

Odrediti strujnu funkciju ψ , ako je $w(0,0) = 0$, nacrtati strujnu sliku i sračunati protoke kroz konturu K_1 ograničenu tačkama A(0,1) i B(2,1) i konturu K_2 : $x^2 + y^2 = 1$.

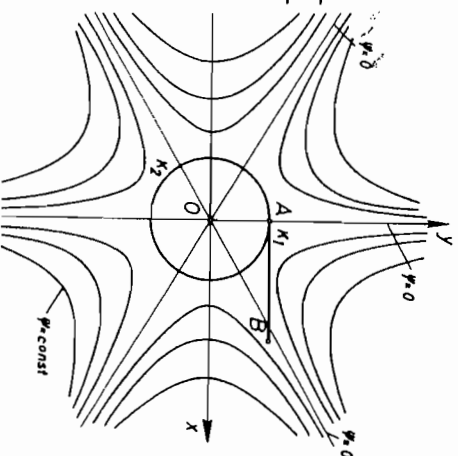
Rešenje.

$$\psi = ax(x^2 - 3y^2) \\ Q_1 = 2a; \quad Q_2 = 0$$

4. Za ravansko strujanje nestišljivog fluida, određeno potencijalom brzine u polarnom koordinatnom sistemu

$$\phi = \frac{a}{r} \cos \theta, \quad a > 0$$

naći strujnu funkciju $\psi(r, \theta)$, kompleksni potencijal $w(z)$ ako je granični uslov $w(a) = 1$ i protok kroz konturu koja spaja tačke A(a, $\pi/2$) i B(a, 0), pri čemu su tačke A i B zadate u polarnim koordinatama.



Rešenje.

$$w(r, \theta) = -\frac{a}{r} \sin \theta + C; \quad w(z) = \frac{a}{z}; \quad Q = 1$$

5. Za ravansko strujanje nestišljivog fluida, određeno potencijalom brzine

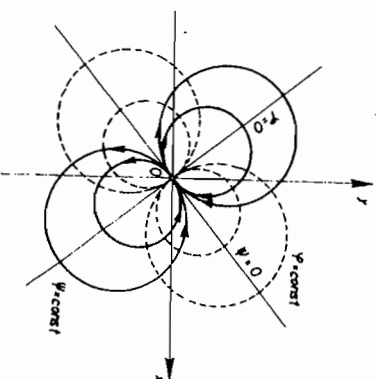
$$\phi(x, y) = \frac{ax+by}{x^2+y^2},$$

naći strujnu funkciju, kompleksni potencijal i kompleksnu brzinu za granični uslov $w(a+ib) = 1$, i skicirati strujnu sliku.

Rešenje.

$$w(x, y) = \frac{bx-ay}{x^2+y^2} + C$$

$$w(z) = \frac{a+ib}{z}; \quad \vec{v} = -\frac{a+ib}{z^2}$$



6, Strujna funkcija ravnanskog strujanja nestišljivog fluida je $\psi = -2x^3 + 6x^2y + 6xy^2 - 2y^3$. Ispitati da li je ovo strujanje nevrtložno, i ako jeste, odrediti funkciju potencijala brzine i brzine fluida u tačkama $A(1,1)$ i $B(2,2)$.

Rešenje.

$$\Delta\psi = 0 ; \phi = 2x^3 + 6x^2y - 6xy^2 - 2y^3 + C ; V_A = 12\sqrt{2} ; V_B = 48\sqrt{2}$$

7, Za ravnansko strujanje, određeno strujnom funkcijom

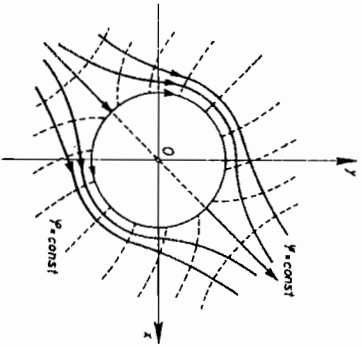
$$\psi = (y-x)\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right),$$

odrediti kompleksni potencijal i kompleksnu brzinu ako je $W(1)=2$. Zatim, odrediti nultu strujnicu i skicirati strujno polje.

Rešenje.

$$W = (1-i)z + \frac{1+i}{z}$$

$$\vec{v} = 1-i - \frac{1+i}{z^2} ; \text{nulte strujnice } y=x \text{ i } x^2+y^2=1$$



8) Naći funkciju kompleksne promenljive z , čiji je imaginarni deo

$$2x(x^2-3y^2) + \frac{1}{2}(x^2-y^2) + xy$$

Rešenje.

$$W(z) = 2iz^3 + \frac{1}{2}(1+i)z^2 + \alpha$$

9, Strujna funkcija ravnanskog strujanja nestišljivog fluida, gustine ρ , je

$$\psi = Cxy$$

Pokazati da je ovo strujanje nevrtložno, naći funkciju potencijala brzine ϕ za graničan uslov $\phi(0,0)=0$ i, zanemarujući sile gravitacije, sračunati maksimalni pritisak u sistemu ako je u tački $(1,1)$ relativni pritisak nula.

Rešenje.

$$\Delta\psi = 0 ; \phi = \frac{C}{2}(x^2-y^2) ; P_{max} = P_a + \rho C^2$$

10, Za ravnansko strujanje određeno kompleksnim potencijalom $W(z) = (1+2i)\ln(z-3-4i)$ naći protoke tečnosti i cirkulacije brzine po zatvorenim konturama određene jedinačinama

$$K_1: x^2+y^2=16 \text{ i } K_2: x^2+y^2=36$$

Rešenje.

$$Q_1 = 0 ; Q_2 = 2\pi ; \Gamma_1 = 0 ; \Gamma_2 = -4\pi$$

11, Za ravnansko strujanje nestišljivog fluida, određeno kompleksnim potencijalom

$$W(z) = m \ln\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad m > 0$$

odrediti: tačke u kojima se nalaze izvori i ponori, potencijal brzine $\phi(r,\theta)$, strujnu funkciju $\psi(r,\theta)$, granice strujnog polja i protok kroz krivu koja spaja tačke $z_1 = i$ i $z_2 = 1/2$.

Rešenje.

Izvori u $z = \pm 1$, ponor u $z = 0$;

$$\phi(r,\theta) = \frac{m}{2} \ln(r^2 - 2 \cos 2\theta + \frac{1}{r^2})$$

$$\psi(r, \theta) = \text{marctg} \left(\frac{r^2+1}{r^2-1} \text{tg} \theta \right);$$

$$x=0, y=0, x^2+y^2=1; \quad Q = \frac{1}{2} \pi \text{ m}$$

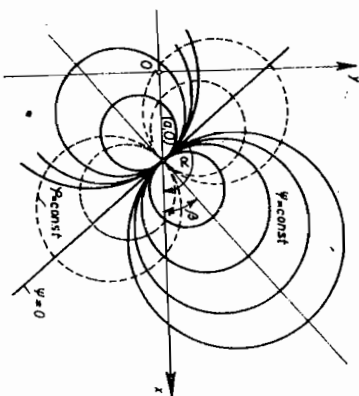
12) Ravansko strujanje nestišljivog fluida određeno je kompleksnim potencijalom

$$W(z) = \frac{A-iB}{2\pi} \ln \frac{z-a}{z-b}$$

gde su a, b, A, B realne konstante (A>0 i B>0).

a) Odrediti fizički smisao naznačenih konstanti.

b) Naci graničnu vrednost W(z) za slučaj da istovremeno A-iB \rightarrow kada b+a i izraz (b-a)(A-iB) ima uvek konstantnu vrednost različitu od nule i jednaku Re i α .



c) Skicirati sliku strujanja određenu pod b).

Rešenje.

a) Posmatrano zbirno strujanje dobijeno je slaganjem strujanja u polju izvora izdašnosti A i vrtloga cirkulacije B, smeštenih u tački z=a, i strujanja u polju ponora izdašnosti -A i vrtloga cirkulacije -B, smeštenih u tačku z=b.

$$b) \quad W(z) = \frac{\text{Re } i\alpha}{2\pi} \frac{1}{z-a}$$

13) Za ravansko strujanje nestišljivog fluida, određeno kompleksnim potencijalom

$$W(z) = az^{-2},$$

odrediti potencijal brzine, strujnu funkciju i skicirati sliku strujanja.

Rešenje.

$$\phi(x, y) = \frac{a(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\psi(x, y) = \frac{2axy}{(x^2+y^2)^2}$$

Napomena. Ovo strujanje je poznato pod nazivom strujanje u polju dvostrukog dvopola.

14) Odrediti nulte strujnice $\psi = 0$ za ravansko strujanje nestišljivog fluida određeno kompleksnim potencijalom $z^2 = 4W^2$.

Rešenje.

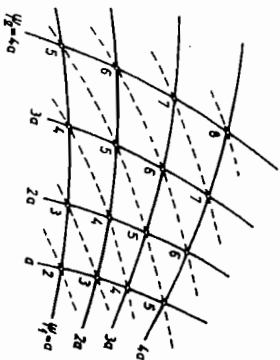
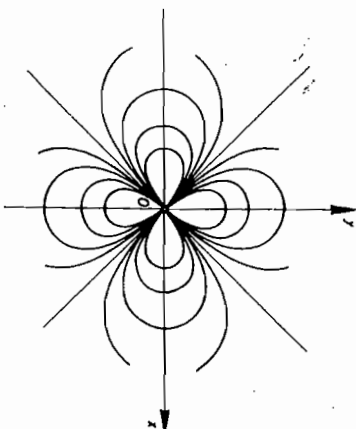
$$x = 0 \quad \text{ i } \quad y = 0$$

6.1.1. RENKINOVA METODA

Pored čisto analitičkog puta, nova strujanja se mogu dobiti i čisto grafičkim putem - Renkinova metoda.

Ako se strujna funkcija ψ predstavi kao suma dve funkcije $\psi = \psi_1 + \psi_2$, mogu se nacrtati strujnice $\psi = \text{const}$. Ako su poznate krive $\psi_1 = \text{konst}$. i $\psi_2 = \text{konst}$.

Prema ovoj metodi, usvaja se mala veličina "a" i nacrtaju krive



$\psi_1 = a, 2a, 3a, 4a, \dots$ i $\psi_2 = a, 2a, 3a, 4a, \dots$. Na taj način se dobija mreža, na kojoj tačke s jednakom vrednošću strujne funkcije ocrtaavaju strujnicu zbirnog strujanja $\psi = \text{const}$. Otkca ove mreže mogu biti proizvoljno mala (ako se uzme dovoljno mala veličina a) te se mogu smatrati paralelogramima, kod kojih dijagonale predstavljaju strujnice zbirnog strujanja.

Primer.

Renkinovom metodom nacrtati sliku zbirnog strujanja nastalog slaganjem jednolikog strujanja paralelnog x-osi, brzine $v_0 = 1 \text{ cm/s}$ i dvopola, smeštenog u koordinatnom početku momenta $M = 72\pi \text{ cm}^2/\text{s}$ (ciklično strujanje oko kružnog cilindra).

Rešenje.

Zbog veće preglednosti i potpune simetrije, nacrtaće se slika strujanja (na sledećoj strani) samo u gornjoj poluravni ($y > 0$). Strujna funkcija ovako zadatog jednolikog strujanja je

$$\psi_1 = v_0 y = y$$

te su strujnice $\psi_1 = \text{const}$, prave paralelne sa x-osom. Strujna funkcija drugog osnovnog strujanja (dvopola) je

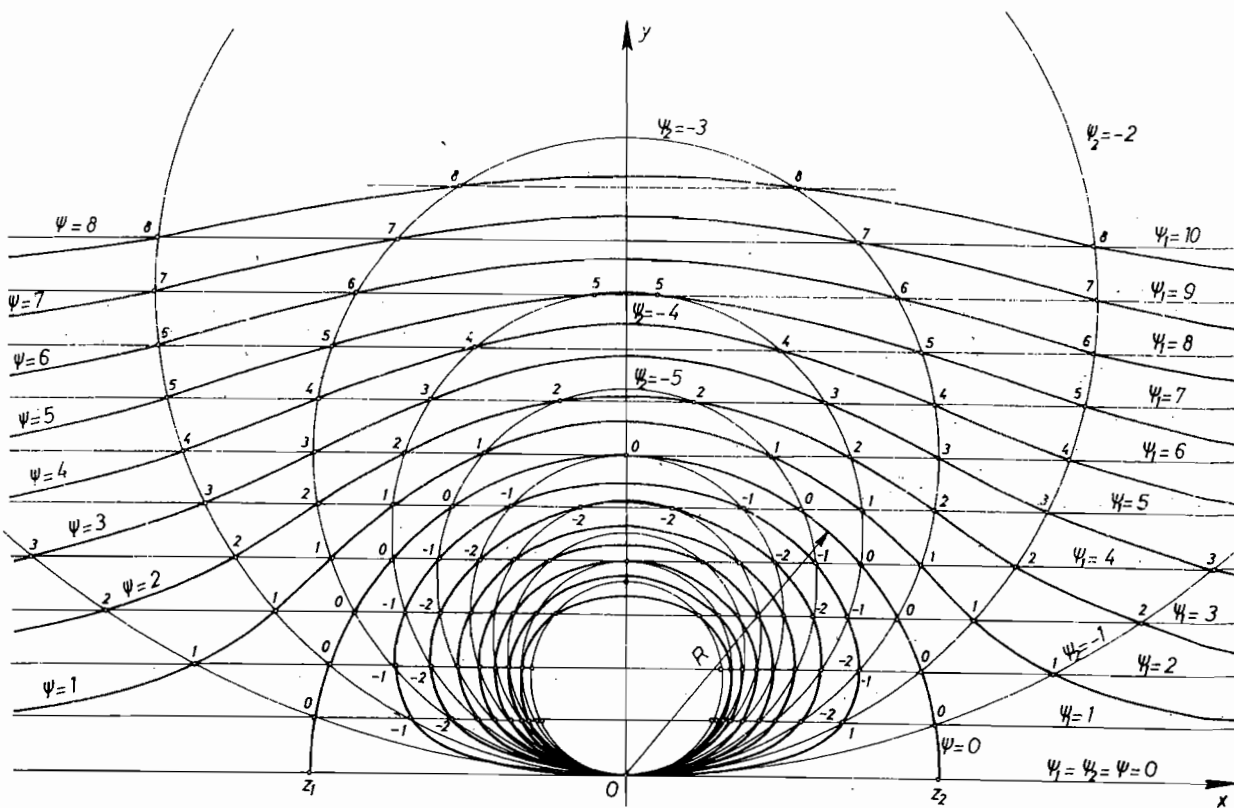
$$\psi_2 = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = -36 \frac{y}{x^2 + y^2},$$

odnosno

$$x^2 + \left(y + \frac{18}{\psi_2}\right)^2 = \left(\frac{18}{\psi_2}\right)^2$$

a strujnice $\psi_2 = \text{const}$, su krugovi koji tangiraju x-osu u koordinatnom početku.

Ako se usvoji da je $a = 1 \text{ cm}^2/\text{s}$ onda gornjoj poluravni pripadaju sledeće strujnice predstavljene tabelarno.



K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\psi_j = K\alpha$	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$y=4$	$y=5$	$y=6$	$y=7$	$y=8$	$y=9$	$y=10$
K	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10
$\psi_2 = K\alpha$	$r=\infty$	$r=10$	$r=9$	$r=8$	$r=7$	$r=6$	$r=5$	$r=4$	$r=3$	$r=2$	$r=1$

Strujnice $\psi = \text{const.}$ dobijene su grafički spažanjem tačaka u kojima strujna funkcija ψ ima istu vrednost. Nulte strujnice $\psi=0$ su x-osa i centralna kružnica poluprečnika $R=6$ cm, što se moglo zaključiti i iz

$$M = 2\pi v_0 R^2$$

odakle, za date podatke, nalazi se $R = 6$ cm.

Tačnija slika strujanja dobila bi se da se usvojilo $\alpha < 1$, ali bi se onda izgubila preglednost prikazane metode, što se ovom prilikom želelo izbeći.

Napomena. U ovom poglavlju nisu predviđeni zadaci za vežbu, jer u drugim poglavljima studentima stoje na raspolaganju niz primera zbirnih strujanja (izvor, ili ponor, u jednolikoj struji; strujanje u polju dva izvora, ili dva ponora, ili izvora i ponora; strujanje u polju izvora, ili ponora, i vrtloga; ciklično strujanje oko cilindra i dr.) čija se tačna slika strujanja lako dobija ovom metodom.

6.1.2. HIDRODINAMICKI SINGULARITETI U RAVANSKOM STRUJANJU

Mnoga rešenja za potencijalno strujanje dobijaju se kombinacijom prostih poznatih strujanja. Pošto sva upotrebljena prosta strujanja uključuju matematički singularne funkcije, ovaj postupak, baziran na principu superpozicije, naziva se metodom singulariteta.

Postoje tri nezavisna singulariteta: izvor (ponor); vrtlog; dvopol, i četvrti - jednoliko strujanje, za koje se može reći da nastaje od izvora u $-\infty$ i ponora u $+\infty$ jednake izdašnosti. Neposredno se zaključuje da se svi singulariteti mogu dobiti manipulacijom kompleksnog potencijala za izvor.

Prosta strujanja mogu se matematički kombinovati jednostavnim sabiranjem strujnih i potencijalnih funkcija. Algebarsko sabiranje potencijalnih funkcija ekvivalentno je vektorskom sabiranju brzina. Isto tako, mogu se sabirati i funkcije kompleksnog potencijala, čime se dolazi do velikog broja različitih strujanja koja se lako proučavaju. Najveći značaj ova zbirna strujanja imaju onda kad nulta strujnica obrazuje zatvorenu krivu, jer se tada može zamisliti da predstavlja čvrstu površinu-telo i da fluid struji oko nje.

Primeri.

1. U ravnanskom strujanju, izvori izdašnosti ϵ smešteni su u tačkama $(-1, 0)$ i $(1, 0)$, a ponor izdašnosti 2ϵ smešten je u koordinatnom početku. Pokazati da su strujne linije ovog zbirnog strujanja date jednačinom

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 + Kxy,$$

gde je K konstanta.

IZVOR	$W(z) = \frac{\epsilon}{2U} \ln z ; \quad \varphi = \frac{\epsilon}{2U} \ln r ; \quad \psi = \frac{\epsilon}{2U} \theta$ $W(z) = \frac{\epsilon}{2U} \ln(z - z_0) \text{ u tački } z = z_0$
PONOR	$W(z) = -\frac{\epsilon}{2U} \ln z ; \quad \varphi = -\frac{\epsilon}{2U} \ln r ; \quad \psi = -\frac{\epsilon}{2U} \theta$ $W(z) = -\frac{\epsilon}{2U} \ln(z - z_0) \text{ u tački } z = z_0$
VRTLOG	$W(z) = -\frac{i\Gamma}{2U} \ln z ; \quad \varphi = \frac{\Gamma}{2U} \theta ; \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2U} \ln r$ $W(z) = \frac{i\Gamma}{2U} \ln z ; \quad \varphi = -\frac{\Gamma}{2U} \theta ; \quad \psi = \frac{\Gamma}{2U} \ln r$
DVOPOL	$W(z) = \frac{M e^{i\alpha}}{2Uz} ; \quad \varphi = \frac{M \cos(\alpha - \theta)}{2Ur} ; \quad \psi = \frac{M \sin(\alpha - \theta)}{2Ur}$ $W(z) = \frac{M}{2Uz} ; \quad \varphi = \frac{Mx}{2Ur^2} ; \quad \psi = -\frac{My}{2Ur^2}$
JEDNOLINO STRUJANJE	$W(z) = U z e^{i\alpha} ; \quad \varphi = U r \cos(\theta - \alpha) ; \quad \psi = U r \sin(\theta - \alpha)$ $W(z) = U z ; \quad \varphi = U x ; \quad \psi = U y$

Rešenje.

Ispolšte, kompleksni potencijal zbirnog strujanja dobija se algebarskim sabiranjem kompleksnih potencijala osnovnih strujanja. U ovom slučaju kompleksni potencijali osnovnih strujanja su:

- izvor izdašnosti ϵ smešten u tački $(-1, 0)$

$$W_1 = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z+1)$$

- izvor izdašnosti ϵ smešten u tački $(1, 0)$

$$W_2 = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z-1)$$

- ponor izdašnosti 2ϵ smešten u koordinatnom početku

$$W_3 = -\frac{\epsilon}{\pi} \ln z$$

Kompleksni potencijal zbirnog strujanja je

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$

odnosno

$$W = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z+1) + \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z-1) - \frac{\epsilon}{\pi} \ln z$$

koji se može napisati kao

$$W = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(1-z^{-2}) = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(1-r^{-2} \cos 2\theta + r^{-2} \sin 2\theta)$$

Da bi se ovaj izraz nastavio na realni i imaginarni deo (pošto se traži strujna funkcija, potrebno je da se odredi imaginarni deo analitičke funkcije W) podseća se da je

$$\ln z = \ln(x+iy) = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta = \ln \sqrt{x^2+y^2} + i \arctg \frac{y}{x}$$

Za strujnu funkciju dobija se

$$\psi = \frac{\epsilon}{2\pi} \arctg \frac{r^{-2} \sin 2\theta}{1-r^{-2} \cos 2\theta} = C = \text{const.}$$

odnosno

$$\frac{r^{-2} \sin 2\theta}{1-r^{-2} \cos 2\theta} = \frac{\sin 2\theta}{r^{-2} \cos 2\theta} = \text{tg } \frac{2\pi C}{\epsilon} = C_1 = \text{const.}$$

Koristeći poznate trigonometrijske relacije

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

drugi i četvrti član gornje jednakosti svode se na

$$r^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + \frac{2}{C_1}\sin\theta\cos\theta$$

Kako je dalje $\sin\theta = y/r$, $\cos\theta = x/r$ i ako se uvrsti $K=2/C_1$, može se gornja jednačina napisati kao

$$r^4 = x^2 - y^2 + Kxy$$

$$\text{odnosno } (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 + Kxy$$

što se i trebalo pokazati.

2. Ravansko potencijalno strujanje nestišljivog fluida sastoji se iz izvora izdašnosti 6π u tački $(-2, 0)$ i jednolike struje u pravcu x-ose konstantne brzine $v_x = b$.

Određiti: kompleksni potencijal ovog strujanja i konstantu b , odnosno brzinu jednolikog strujanja, iz uslova da se zaustavna tačka nalazi u tački $(1, 0)$, zatim nacrtati izraz za strujnu funkciju i skicirati strujnu sliku.

Rešenje.

Kompleksni potencijal strujanja u polju izvora izdašnosti $e=6\pi$, koji se nalazi u tački $z_0 = -2$, je

$$W_1 = 3\ln(z+2),$$

a za jednoliko strujanje, $v = v_x = b$, je

$$W_2 = bz.$$

Kompleksni potencijal zbirnog strujanja je

$$W = W_1 + W_2 = 3\ln(z+2) + bz.$$

Iz kompleksne brzine

$$\vec{v} = \frac{dW}{dz} = \frac{3}{z+2} + b$$

za $\vec{v} = 0$, dobija se položaj zaustavne tačke

$$z_L = x+iy = -\frac{2b+3}{b},$$

a da bi se ona poklopila s tačkom $(1, 0)$, kako je zadatkom traženo, nalazi se

$$b = -1.$$

Izraz za strujnu funkciju dobija se iz kompleksnog potencijala

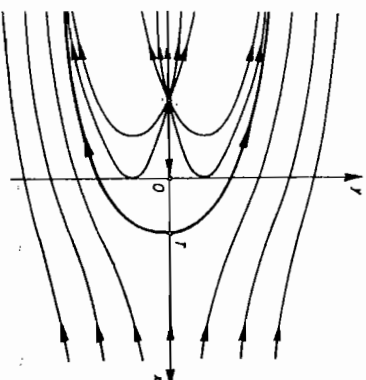
$$W = -z + 3\ln(z+2),$$

čiji je imaginarni deo jednaka

$$v = -y + 3 \arctg \frac{y}{x+2}.$$

Tačna slika ovog

strujanja, prikazanog na slici, lako se dobija Renkinovom metodom (vidi 6.1.1.)



3. Neka se u tački $A(a, 0)$ nalazi izvor izdašnosti e , a u tački $B(-a, 0)$ ponor izdašnosti $-e$ i neka postoji jednoliko strujanje brzine v u pravcu AB; neka je nadalje odnos izdašnosti izvora i brzine jednolike struje jednak $2\pi b$. Pokazati da strujna funkcija ovog zbirnog strujanja ima oblik

$$W = -vy + vb \arctg \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2},$$

i dokazati da se karakteristične veličine elipse (dužina $2a$, širina $2d$), koja razdvaja jednoliku struju od tečnosti koja ističe iz izvora (multa strujnica), određuju iz formula

$$d = \sqrt{a^2 + 2ab}, \quad \operatorname{tg} \frac{d}{a} = \frac{2ad}{d^2 - a^2}.$$

Rešenje.

$$\text{Iz odnosa } \frac{e}{v} = 2\pi b,$$

nalazi se izdašnost izvora, odnosno ponora,

$$e = 2\pi vb,$$

a sabiranjem kompleksnih potencijala pojedinih strujanja, dolazi se do kompleksnog potencijala zbirnog strujanja u obliku

$$W = -vz + vb \ln \frac{z-a}{z+a}.$$

Rastavljanjem gornjeg izraza na realni i imaginarni deo, nalazi se strujna funkcija (imaginarni deo) u obliku

$$\psi = -vy + vb \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2},$$

što je i trebalo pokazati.

Da bi se dokazao drugi deo zadatka polazi se od jednačine nulte strujnice

$$\operatorname{tg} \frac{y}{b} = \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$$

koja je dobijena iz strujne funkcije za $\psi = 0$.

Kako za elipsu važi da je za $x = 0$, $y = d$, to kada se ove vrednosti uvrste u jednačinu nulte strujnice, dolazi se do formule za d u traženom obliku

$$\operatorname{tg} \frac{d}{b} = \frac{2ad}{d^2 - a^2}.$$

Međutim, drugom smenom $y = 0$, $x = \lambda$ desna strana transformisane jednačine nulte strujnice

$$x^2 + y^2 - a^2 = \frac{2ay}{\operatorname{tg} \frac{y}{b}},$$

postaje neodređena $0/0$. Da bi se izbegla ova neodređenost, mora se prethodno na neodređeni izraz primeniti l'Hopitalovo pravilo. Nakon toga jednačina nulte strujnice glasi

$$x^2 + y^2 - a^2 = 2ab \cos^2 \frac{y}{b}.$$

Sada se gornjom smenom dolazi do druge formule

$$\lambda = \sqrt{a^2 + 2ab},$$

čime je dokaz završen.

Zadaci.

1. Ako se u tačkama $A(a, 0)$ i $B(-a, 0)$ nalaze izvori, a u tačkama $C(0, a)$ i $D(0, -a)$ ponori, pri čemu su svi jednake izdašnosti e , pokazati da kružnica, koja prolazi kroz ove četiri tačke, predstavlja strujnicu zbirnog strujanja.

Rešenje.

Jednačina strujnice

$$\psi = e/4 \text{ glasi } x^2 + y^2 = a^2.$$

2. Neka se u tački $A(a, 0)$ nalazi izvor izdašnosti e , a u tački $B(b, 0)$ ponor izdašnosti $-e$ i neka postoji jednoliko strujanje konstantne brzine v u pravcu BA . Naći zaustavne tačke ovog zbirnog strujanja i dokazati da u zavisnosti od veličine brzine jednolike struje, zaustavne tačke leže na liniji AB ili na simetrali duži AB . Pretpostaviti da je $a > 0$, $b > 0$ i $a > b$.

Rešenje.

$$T_{1,2} = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-b}{4}\right)^2 - \frac{e}{2\pi v}}$$

Za $D > 0$ odnosno $v > \frac{2e}{\pi(a-b)}$ zaustavne tačke leže na liniji AB , a za $D < 0$ odnosno $v < \frac{2e}{\pi(a-b)}$ one leže na simetrali duži AB .

3. Dat je izraz $\frac{1}{\pi i} \ln \frac{z-z_0}{z-c}$.

a) Odrediti konstante A i C tako da ovaj izraz predstavlja kompleksni potencijal ravnanskog potencijalnog strujanja nestišljivog fluida u polju izvora izdašnosti $e_1 = 2\pi$ u tački z_0 i izvora izdašnosti $e_2 = \pi$ u koordinatnom početku. Tačku z_0 odrediti iz uslova da se zaustavna tačka

poklapa sa tačkom T(1,1).

b) Odrediti potencijalnu i strujnu funkciju i nacrtati sliku strujanja sa smerom strujanja.

c) Odrediti cirkulaciju Γ i protok Q kroz konturu datu jednačinom $x^2+y^2-6(x+y)+17=0$.

Rešenje.

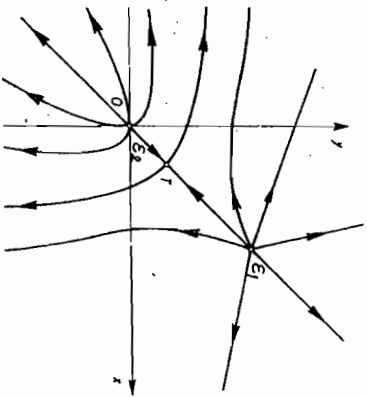
a) $A = \frac{1}{\pi i}$; $C = -\frac{1}{2}$; $z_0 = 3+3i$

b)

$\phi = \frac{1}{2} \ln((x^2+y^2-6(x+y)+18)\sqrt{x^2+y^2})$

$\psi = \arctg \frac{y-3+\frac{1}{2}\arctg \frac{y}{x}}{x-3+\frac{1}{2}\arctg \frac{y}{x}}$

c) $\Gamma = 0$; $Q = 2\pi$



4. Ravansko strujanje

nestišljivog fluida određeno je sa dva vrtloga konstantnih cirkulacija Γ i $-\Gamma$ smeštenih u tačkama $z_0 = \pm a$, gde je a realna i pozitivna konstanta.

a) Odrediti kompleksni potencijal $W(z)$, potencijal brzine $\phi(x,y)$ i strujnu funkciju $\psi(x,y)$.

b) Pokazati da su ekvipotencijalne linije i strujnice krugovi i naći položaj one strujnice koja se može zameniti ravnim zidom.

c) Sračunati protok između oba vrtloga isključujući oko svakog vrtloga po jedan krug prečnika 0,01a, kao i cirkulaciju brzine po konturama $K_1: x^2+y^2-2ax=0$ i $K_2: x^2+y^2-2a^2=0$.

Rešenje.

a) $W(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z+a}{z-a}$

$\phi(x,y) = \frac{\Gamma}{2\pi} \arctg \frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$, $\psi(x,y) = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}$

b) $x^2+y^2-2aC_1y-a^2=0$, $\frac{1}{C_1} = \operatorname{tg} \frac{2\pi\theta}{\Gamma}$

$x^2+y^2-2a \frac{1+C_2}{1-C_2} x + a^2 = b$, $\ln C_2 = \frac{2\pi\psi}{\Gamma}$

$x=0$ (y-osa je nulta strujnica)

c) $Q = 1,75\Gamma$; $\Gamma_1 = -\Gamma$; $\Gamma_2 = 0$

5. Za ravansko strujanje nestišljivog fluida

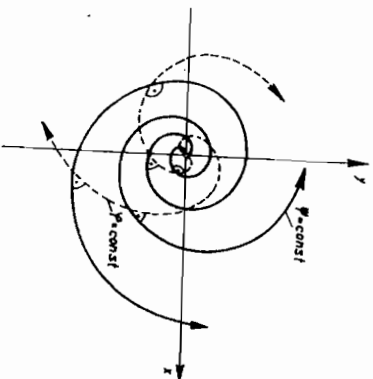
u polju osamljenog izvora izdašnosti e i osamljenog vrtloga cirkulacije Γ , smeštenih u tački $z_0 = a$, skicirajte strujnu sliku.

Rešenje.

$r = C_1 e^{\frac{\Gamma\theta}{e}}$, $\ln C_1 = -\frac{2\pi y}{\Gamma}$

$r = C_2 e^{-\frac{\Gamma\theta}{e}}$, $\ln C_2 = \frac{2\pi\phi}{e}$

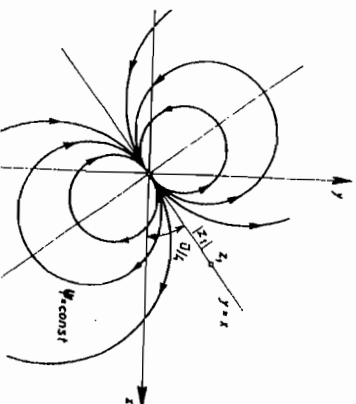
$z = a + re^{i\theta}$



6. Za ravansko potencijalno strujanje nestišljivog fluida određeno ponorom izdašnosti e , smeštenim u koordinatnom početku, i izvorom iste izdašnosti, smeštenim u promenljivoj tački

$z_1 = |z_1| e^{i\pi/4}$,

odrediti izraz za kompleksni potencijal $W(z)$, strujnu funkciju $w(r,\theta)$ i skicirati strujnu sliku pod uslovom da $e|z_1| \rightarrow M$ kada $|z_1| \rightarrow 0$ i $e \rightarrow \infty$, gde je M konstanta.



Rešenje.

$$W(z) = -\frac{M}{2\pi^2} e^{i\pi/4}$$

$$\psi(r, \theta) = \frac{M}{2\pi r^2} \sin(\theta - \frac{\pi}{4})$$

6.1.2.1. METOD LIKA

Neka je ravansko potencijalno strujanje nestišljivog fluida određeno sa dva izvora jednake izdašnosti ϵ , smešteni u tačkama $A(a,0)$ i $B(-a,0)$. Kompleksni potencijal ovog zbirnog strujanja je

$$W = \phi + i\psi = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z^2 - a^2) = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(x^2 - y^2 - a^2 + 2ixy)$$

a strujna funkcija

$$\psi = \frac{\epsilon}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2},$$

odnosno

$$x^2 - 2xy \operatorname{ctg} \frac{2\pi\psi}{\epsilon} - y^2 = a^2.$$

Strujnice $\psi = \text{const.}$ su ravnostrane hiperbole s centrima u koordinatnom početku. Ako se gornja relacija napiše u obliku

$$(x - y \operatorname{ctg} \frac{\pi\psi}{\epsilon})(x + y \operatorname{ctg} \frac{\pi\psi}{\epsilon}) = a^2$$

Iako se zaključuje da se asimptote, koje se dobijaju kada se svaki član proizvoda na levoj strani izjednači s nulom, seku pod pravim uglovima. Zadajući sada veličini

$$\frac{\pi\psi}{\epsilon}$$

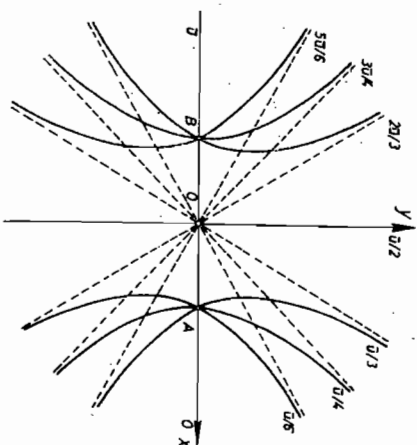
redom vrednosti

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi,$$

dobija se prikazana slika strujanja na kojoj isprekidane li-

nije predstavljaju asimptote.

Nulte strujnice su koordinatne ose, jer je $\psi = 0$ za $x=y=0$, dok se zaustavna tačka ($v=0$) nalazi u koordinatnom početku.



Pošto nulta strujnica može da se zameni čvrstom graničnom površinom (npr. y-osa) onda se odavde zaključuje da će gornji kompleksni potencijal predstavljati i strujanje u polju izvora izdašnosti ϵ koji se nalazi na udaljenju a od ravnog čvrstog zida.

Ovaj zaključak ima velik teorijski značaj jer predstavlja osnovu metoda lika.

Izvor izdašnosti ϵ u tački B naziva se likom izvora izdašnosti ϵ u tački A u odnosu na datu ravnu barijeru (y-osu), koju možemo smatrati ravnim ogledalom.

Ovo je, ujedno, najprostiji slučaj metoda lika, koji se može opisati na sledeći način.

Pretpostavi se, da se u tečnosti koja ima jednu ili više granica C, nalazi sistem S izvora i ponora. Ako se van oblasti koju zauzima tečnost, stavi sistem S' izvora i ponora, i omogućiti tečnosti da se prošire po celoj oblasti, i ako se pri tom dobije C kao strujnica, onda se kaže da sistem S' predstavlja lik sistema S u odnosu na granicu C.

Opšti metod lika u odnosu na ravan. Ako funkcija

$$f(z) = \frac{\epsilon_K}{2\pi} \ln(z - z_K)$$

predstavlja kompleksni potencijal izvora i ponora koji se

nalaze u poluravnini $y > 0$, onda prisustvo ravnog zida duž prave $y=0$ dovodi do kompleksnog potencijala

$$W = f(z) + \bar{f}(z) = \int \frac{e^k}{2\pi} \ln(z-z_k) + \int \frac{e^k}{2\pi} \ln(z-\bar{z}_k)$$

pošto je za $y=0$ W realna funkcija, te $y=0$ predstavlja strujnicu $\psi=0$. Pored toga, ako tačke z_k leže u oblasti $y < 0$, onda tačke \bar{z}_k leže u oblasti $y > 0$, tako da njihovo uvođenje ne dovodi do novih singulariteta u oblasti $y > 0$.

Analogno ovom, ako svi izvori i ponori leže u poluravnini $x > 0$, onda prisustvo ravnog zida duž prave $x=0$ dovodi do kompleksnog potencijala

$$W = f(z) + \bar{f}(-z) = \int \frac{e^k}{2\pi} \ln(z-z_k) + \int \frac{e^k}{2\pi} \ln(-z-\bar{z}_k)$$

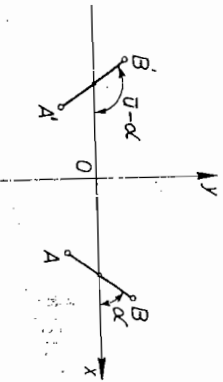
pošto je sada za $x=0$ i $\psi=0$.

Ovaj metod važi i za vrtloge, s tom razlikom, što lik vrtloga u odnosu na ravan zid ima suprotan smer obrtanja od osnovnog vrtloga. Tako, na primer, za vrtlog konstantne i pozitivne cirkulacije Γ , koji se nalazi na y -osi, a na udaljenju $a > 0$ od x -ose (čvrstog zida), kompleksni potencijal glasi

$$W = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z+ia}{z-ia}$$

Metod lika može da se primeni i na dvopol. U tu

svrhu, dvopol momenta M čija osa zaklapa sa x -osom ugao α (vidi sliku), može se posmatrati kao granični slučaj izvora u tački A i ponora u tački B . Sada su tačke A' i B' likovi izvora i ponora u odnosu na y -osu koja predstavlja čvrstu površinu. Granična vrednost ($A+B$ i $A'+B'$) daje lik dvopola momenta M



čija osa zaklapa sa x -osom ugao $\pi-\alpha$. Prema tome, koristeći se opštim metodom lika, kompleksni potencijal usamljenog dvopola momenta M smeštenog u tački z_0 u prisustvu ravnog zida duž prave $x=0$, biće

$$W = \frac{M}{2\pi} \left(\frac{e^{ia}}{z-z_0} - \frac{e^{-ia}}{z+\bar{z}_0} \right)$$

LIK IZVORA U ODNOSU NA KRUŽNI CILINDAR. Traženje lika izvora u odnosu na kružni cilindar, zasniva se na jednoj vrlo važnoj teoremi - teoremi o kružnici, koja će zbog toga prethodno biti izložena sa dokazom.

Teorema o kružnici (Milne - Thomson-ova teorema).

Neka u ravni z postoji dvodimenzijnsko nevertložno strujanje nestišljive neviskozne tečnosti. Neka ne postoje čvrste granice i neka je kompleksni potencijal ovog strujanja dat funkcijom $f(z)$, pri čemu su sve tačke, u kojima ova funkcija nije definisana (singularne tačke), udaljene od koordinatnog početka više od a . Ako se u ovo strujanje tehnosti stavi cilindar, čiji preseka sa strujnom ravni z daje kružnicu $C: |z|=a$, onda je kompleksni potencijal novog strujanja dat funkcijom

$$W = f(z) + \bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right)$$

Dokaz. Kako je na kružnici C $\bar{z}=a^2/z$, jer je

$$z = ae^{i\theta}, \quad \bar{z} = ae^{-i\theta}, \quad \text{odnosno} \quad \bar{z} = \frac{a^2}{z} = \frac{a^2}{ae^{i\theta}} = \frac{a^2}{z}$$

to se vidi da je data funkcija W realna na kružnici C i, prema tome, je $\psi=0$, odnosno, kružnica C je nulta strujnica.

Ako se tačka z nalazi van kružnice C , onda se tačka a^2/z nalazi unutar nje, i obratno. Kako se sve singularne tačke funkcije $f(z)$ po pretpostavci, nalaze van kružnice C , to se sve singularne tačke funkcije $\bar{f}(a^2/z)$ na-

laze unutar C; naime, funkcija $f(a^2/z)$ nema singularitete u beskonačnosti, pošto funkcija $f(z)$ nema singularitete u nuli. Na taj način, funkcija W ima iste singularitete kao i funkcija $f(z)$ te, prema tome, W predstavlja kompleksni potencijal novog strujanja. Time je dokaz završen.

Neka se sada u tački $z_0=b$, gde je b - realna vredina, nalazi izvor izdašnosti ϵ . Kompleksni potencijal ovog strujanja je

$$W = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z-b) .$$

Ako se pored izvora u strujnu ravan postavi cilindar poluprečnika a s centrom u koordinatnom početku, takav da je $b > a$, onda je, prema teoremi o kružnici, kompleksni potencijal novog strujanja

$$W = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z-b) + \frac{\epsilon}{2\pi} \ln\left(\frac{a^2}{z} - b\right) ,$$

koji može, dodavanjem konstante

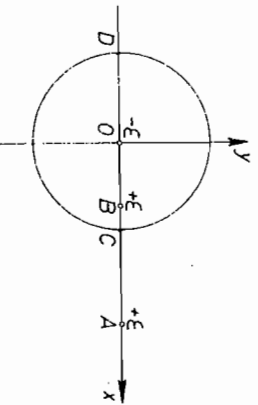
$$\frac{\epsilon}{2\pi} \ln\left(-\frac{1}{b}\right) ,$$

da se napiše u obliku

$$W = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z-b) + \frac{\epsilon}{2\pi} \ln\left(z - \frac{a^2}{b}\right) - \frac{\epsilon}{2\pi} \ln z .$$

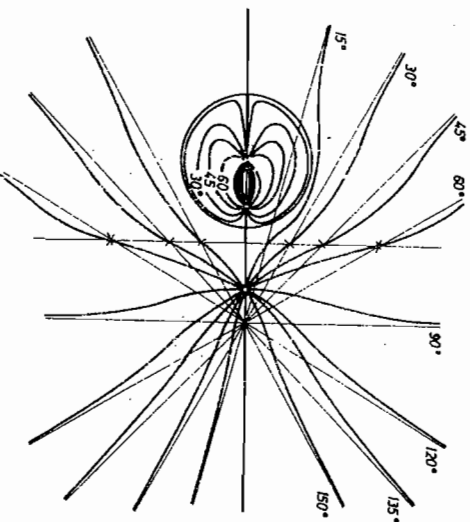
Sada se lako zaključuje da ovaj kompleksni potencijal (vidi sliku) daje:

- izvor izdašnosti ϵ u tačku A, $z_0=b$;
- izvor izdašnosti ϵ u tački B, $z_0=a^2/b$;
- ponor izdašnosti $-\epsilon$ u koordinatnom početku.



Zbog $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = a^2$, tačke A i B su inverzne u odnosu na kružni presek cilindra i tačka B mora da se nalazi unutar cilindra.

Lik izvora, koji se nalazi izvan kružnog cilindra, u odnosu na taj cilindar, predstavlja sistem koji se sastoji od izvora jednake izdašnosti u tački inverzije i ponora iste izdašnosti u centru cilindra. Strujnice ovog strujanja su prikazane na slici.



Oдавде sledi, da je lik izvora unutar cilindra i ponora iste izdašnosti u centru cilindra, izvor iste izdašnosti koji se nalazi u tački inverzije datog izvora.

Brzina u ma kojoj tački P ovog strujanja je

$$v = \left| \frac{dW}{dz} \right| = \frac{\epsilon}{2\pi} \left| \frac{z^2 - a^2}{(z-b)z(z - a^2/b)} \right| = \frac{\epsilon}{2\pi} \frac{\overline{PC} \cdot \overline{PD}}{\overline{PA} \cdot \overline{PO} \cdot \overline{PB}} ,$$

gde su C i D - tačke u kojima prava AB seče kružnicu. Ako se tačka P nalazi na kružnici, onda su trouglovi OBP i OPA slični, te važi relacija

$$\overline{PB} : \overline{PA} = a : b .$$

Dobijanje lika ostalih singulariteta (ponor, vrtlog i dvopol) u odnosu na kružni cilindar, takodje se zasniva na teoremi o kružnici [39], ali se ovde dalje neće izvoditi.

Primeri.

1. Neka ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema xOy predstavljaju nepokretne čvrste granice i neka se u tački A(a,b), sa $a>0$ i $b>0$, nalazi izvor izdašnosti ϵ .

Naci strujnu funkciju i pokazati da jednačina

$$xy(x^2 - y^2 - a^2 + b^2) = 0$$

odredjuje nulte strujnice.

Rešenje.

Kako se u ravni strujanja nalazi samo jedan izvor izdašnosti ϵ u tački $z_A = a+ib$, to prema opštem metodu lika u odnosu na ravan, početna funkcija glasi

$$f(z) = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z-a-ib)$$

Prisustvo čvrste granice koju predstavlja x-osa dovodi do kompleksnog potencijala

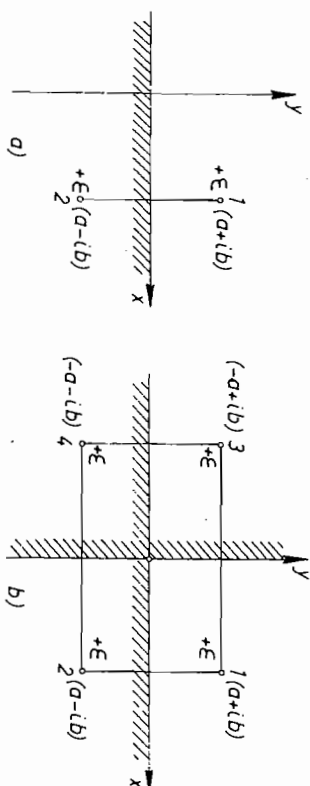
$$W_1 = f(z) + \bar{f}(z) = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z-a-ib) + \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z-a+ib)$$

Da bi i y-osa postala čvrsta granica mora se funkcija W_1 uzeti kao nova početna funkcija, tako da

$$W = W_1(z) + \bar{W}_1(-z) = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z-a-ib) + \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z-a+ib) + \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(-z-a+ib) + \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(-z-a-ib)$$

predstavlja kompleksni potencijal strujanja u polju osamlje-

nog izvora izdašnosti ϵ u tački A(a,b) u prisustvu čvrstih ravnih granica koje čine ose Dekartovog sistema.



Kompleksni potencijal W može se napisati i pomoću slike b) direktno tj. ne moraju se napisati formule opšteg metoda lika. Naime, radi jasnoće, nacrtana je i slika a) koja predstavlja izvor 1 i njegov lik 2 u odnosu na čvrstu granicu (ogledalo) koju predstavlja x-osa. Kompleksni potencijal ovog strujanja je W_1 . Na slici b) osnovni izvor 1 u prisustvu dve čvrste granice (ogledala), koje predstavljaju ose Dekartovog sistema, dobija tri lika u tačkama 2, 3 i 4. Sabiranjem kompleksnih potencijala za izvor i njegova tri lika dolazi se do istog izraza za kompleksni potencijal W, tj.

$$W = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z-a-ib) + \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z-a+ib) + \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z+a-ib) + \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z+a+ib)$$

Prividna razlika kod trećeg i četvrtog člana u izrazima za W nestaje već prilikom njihovog množenja. Međutim, u slučaju neparanog broja izvora u prisustvu čvrste vertikalne površine (npr. y-ose) kod opšte metode lika javlja se razlika u konstanti kod kompleksnog potencijala $\ln(-1) = i\pi$ koja može da se odbaci-zanemari, pošto ne remeti sliku strujanja.

Nakon sredjivanja, dobija se izraz za

$$W = \frac{\epsilon}{2\pi} \rho_n (z^4 - 2z^2(a^2 - b^2) + (a^2 + b^2)^2),$$

$$W = \frac{\epsilon}{2\pi} \rho_n ((x+iy)^4 - 2(x+iy)^2(a^2 - b^2) + (a^2 + b^2)^2).$$

Strujna funkcija ovog strujanja je

$$\psi = \frac{\epsilon}{2\pi} \rho_n \arctg \frac{4xy(x^2 - y^2 - a^2 + b^2)}{(x^2 - y^2 - a^2 + b^2)^2 - 4(x^2 y^2 + a^2 b^2)},$$

a odavde, za $\psi = 0$, sledi jednačina nulnih strujnica u obliku

$$xy(x^2 - y^2 - a^2 + b^2) = 0,$$

što se i trebalo pokazati.

2. Za ravansko potencijalno strujanje tečnosti, gustine ρ , u polju osamljenog vrtloga konstantne cirkulacije $-\Gamma$ u tački $(0, a)$ u prisustvu ravne čvrstog zida koji predstavlja x-osu, dokazati da se strujnice $\psi = \text{const.}$ ne mogu poklopiti s linijama konstantnog pritiska $p = \text{const.}$

Pretpostaviti da je strujna poluravan $y > 0$ horizontalna.

Rešenje.

Da bi se našao izraz za kompleksni potencijal za zadato strujanje, primenjujući metod lika, mora se osnovnom vrtlogu dodati njegov lik u odnosu na x-osu (ogledalo). Lik zadatog vrtloga je takodje vrtlog, ali pozitivne konstantne cirkulacije Γ u tački $(0, -a)$. Kompleksni potencijal, za osnovni vrtlog i njegov lik, glasi

$$W = \frac{i\Gamma}{2\pi} \rho_n \frac{z - ia - i\Gamma}{z + ia - i\Gamma} \rho_n \frac{x + i(y-a)}{x + i(y+a)} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \rho_n \frac{x^2 + y^2 - a^2 - 2iax}{x^2 + (y+a)^2},$$

a strujna funkcija

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \rho_n \sqrt{\frac{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 x^2}{(x^2 + (y+a)^2)^2}} = \frac{\Gamma}{2\pi} \rho_n \frac{x^2 + (y-a)^2}{x^2 + (y+a)^2},$$

jer važi jednakost

$$(x^2 + y^2 - a^2) + 4a^2 x^2 = (x^2 + (y-a)^2)(x^2 + (y+a)^2).$$

Za strujnice $\psi = \text{const.}$ dobija se izraz

$$\frac{x^2 + (y-a)^2}{x^2 + (y+a)^2} = C,$$

gde je

$$\ln C = \frac{4\pi\psi}{\Gamma} = \text{const.}$$

Iz Koši-Laranzove jednačine za makoju tačku horizontalne strujne poluravni

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} = K = \text{const.}$$

za $p = \text{const.}$ sledi relacija

$$v^2 = 2(K - \frac{P}{\rho}) = \text{const.}$$

Kako su komponente brzine fluida u makojoj tački

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{a(x^2 - y^2 + a^2)}{(x^2 + (y-a)^2)(x^2 + (y+a)^2)}$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{2axy}{(x^2 + (y-a)^2)(x^2 + (y+a)^2)},$$

a kvadrat intenziteta brzine

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \frac{a^2 \Gamma^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(x^2 + (y-a)^2)(x^2 + (y+a)^2)},$$

to se jednačina linija konstantnog pritiska $p = \text{const.}$ dobija u obliku

$$(x^2 + (y-a)^2)(x^2 + (y+a)^2) = C_1$$

gde je

$$C_1 = \frac{\rho a^2 \Gamma^2}{2\pi^2 (OK-p)} = \text{const.}$$

Upoređenjem izraza za strujnice i linije $p=\text{const.}$ dolazi se do traženog dokaza.

3. Prostor s jedne strane ($y>0$) beskonačno dugačkog ravnog zida $y=0$, ispunjen je neviskoznom tečnošću konstantne gustine ρ koja se kreće brzinom v_0 u pravcu pozitivne x -ose. Dvopol momenta M , koji deluje u pravcu pozitivne x -ose, nalazi se u tački $z_0=ia$.

Određiti kompleksni potencijal ovog strujanja i pokazati da je pritisak tečnosti na zidu maksimalan u tačkama $x=\pm a\sqrt{3}$, a minimalan u koordinatnom početku.

Takodje pokazati da se za $M=8\pi a^2 v_0$ zaustavne tačke poklapaju sa tačkama maksimalnog pritiska tečnosti na zidu.

Rešenje.

Da bi se ostvarilo traženo strujanje, tj. da bi se uzelo u obzir prisustvo čvrstog ravnog zida na mestu x -ose, mora se dvopolu, momenta M , u tački z_0 dodati njegov lik koji je takodje dvopol, istog momenta i pravca delovanja kao i osnovni dvopol, ali se nalazi u tački $z'_0 = -ia$.

Prema tome, traženo strujanje nastaje kao zbirno strujanje koje nastaje od jednolike struje i dva dvopola, tako da je kompleksni potencijal ovog strujanja

$$W = v_0 z + \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z-ia} + \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z+ia} = v_0 z + \frac{M}{\pi} \frac{z}{z^2+a^2}$$

Ako se u izraz za kompleksnu brzinu

$$v = \frac{dW}{dz} = v_0 + \frac{M}{\pi} \frac{a^2 - z^2}{(z^2+a^2)^2}$$

izvrši smena $z=x$, tj. $y=0$, dobija se brzina u makojoj tački na čvrstoj graničnoj površini $y=0$, u obliku

$$v_x = v_0 + \frac{M}{\pi} \frac{a^2 - x^2}{(x^2+a^2)^2}, \quad v_y = 0.$$

Koši-Lagranžova jednačina napisana za strujnicu $y=0$ daje raspored pritiska duž granične površine, tj.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v_x^2}{2} = \text{const.}$$

Odavde se lako zaključuje da za maksimalan pritisak sledi minimalna brzina i obratno.

Tačke u kojima je brzina v_x ekstremna, dobijaju se iz

$$v'_x = \frac{dv_x}{dx} = \frac{M}{\pi} \frac{2x(x^2-3a^2)}{(x^2+a^2)^3} = 0$$

čije je rešenje

$$x = 0 \quad \text{i} \quad x = \pm a\sqrt{3}.$$

Kako je

$$(v''_x)_{x=\pm a\sqrt{3}} = \left(\frac{M}{\pi} \frac{6x(x^3-2x^2+a^2x+6a^2)}{(x^2+a^2)^4} \right)_{x=\pm a\sqrt{3}} = \frac{3M}{64a^4\pi} > 0$$

to je u ovim tačkama brzina minimalna a pritisak maksimalan, a kako je

$$(v''_x)_{x=0} = 0,$$

da se ne bi tražili viši izvodi, koristi se prvi izvod.

Naime, kako je za $x=+0$, $v'^2_x < 0$ a za $x=-0$, $v'^2_x > 0$, već odavde može da se zaključi da je u ovoj tački brzina maksimalna, a pritisak minimalan, što je i trebalo pokazati.

Za $M=8\pi a^2 v_0$ kompleksni potencijal ovog strujanja postaje

$$W = v_0 z \left(1 + \frac{8a^2}{z^2+a^2} \right),$$

a kompleksna brzina

$$\vec{v} = v_0 \left(1 + 8a^2 \frac{a^2 - z^2}{(z^2 + a^2)^2} \right)$$

Zaustavne tačke ($\vec{v}=0$) slede iz jednačine

$$z^4 - 6a^2 z^2 + 9a^4 = 0,$$

čije je rešenje

$$z_{1,2} = \pm a\sqrt{3},$$

odnosno

$$x_{1,2} = \pm a\sqrt{3}.$$

4. Izvor i ponor jednake izdašnosti ϵ smešteni su u tačkama $(\pm a/2, 0)$ u unutrašnjosti čvrste kružne granice date jednačinom $x^2 + y^2 = a^2$.

Pokazati da su strujnice $\psi = \text{const.}$ ovog strujanja date jednačinom

$$\left(r^2 - \frac{a^2}{4} \right) (r^2 - 4a^2) - 4a^2 y^2 = Ky(r^2 - a^2),$$

gde je $r^2 = x^2 + y^2$.

Rešenje.

Lik izvora, koji se nalazi izvan kružnog cilindra, u odnosu na taj cilindar, predstavlja sistem koji se sastoji od izvora jednake izdašnosti u tački inverzije i ponora iste izdašnosti u centru cilindra.

Medjutim, važi i obratno. Lik izvora unutar cilindra i ponora iste izdašnosti u centru cilindra je izvor iste izdašnosti koji se nalazi u tački inverzije datog izvora, odnosno, lik ponora unutar cilindra i izvora iste izdašnosti u centru cilindra je ponor iste izdašnosti koji se nalazi u tački inverzije datog ponora.

Kako se u ovom slučaju u unutrašnjosti kružne granice nalaze izvor i ponor iste izdašnosti, to se može sma-

trati da se u centru takodje nalaze izvor i ponor jednake izdašnosti tako da se oni poništavaju, ali ta dva sistema imaće u svojim inverznim tačkama za likove izvor odnosno ponor jednake izdašnosti.

Na slici je prikazan raspored singulariteta koji čine dato strujanje. Kako za inverzne tačke važi relacija

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA}' = a^2$$

odnosno

$$\overline{OB} \cdot \overline{OB}' = a^2$$

to zbog $\overline{OA} = \overline{OB} = a/2$ sledi jednakost

$$\overline{OA}' = \overline{OB}' = \frac{a^2}{\overline{OA}} = \frac{a^2}{\overline{OB}} = 2a.$$

Sada je kompleksni potencijal ovog strujanja

$$W = \frac{\epsilon}{2\pi} (\ln(z-2a) + \ln(z-\frac{a}{2}) - \ln(z+2a) - \ln(z+\frac{a}{2})),$$

odnosno

$$W = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln \frac{z^2 - \frac{5}{2}az + a^2}{z^2 + \frac{5}{2}az + a^2} = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln \frac{x^2 - y^2 - \frac{5}{2}ax + a^2 + iy(2x - \frac{5}{2}a)}{x^2 - y^2 + \frac{5}{2}ax + a^2 + iy(2x + \frac{5}{2}a)}$$

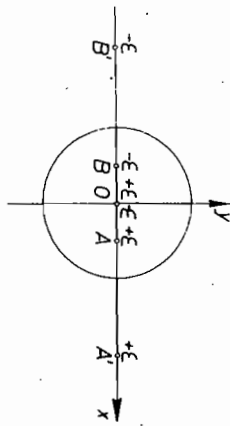
Strujna funkcija je oblika

$$\psi = \frac{\epsilon}{2\pi} \arctg \frac{5ay(x^2 + y^2 - a^2)}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - \frac{17}{4}a^2(x^2 + y^2) + a^4 - 4a^2y^2},$$

ili, ako se uvede $r^2 = x^2 + y^2$,

$$\psi = \frac{\epsilon}{2\pi} \arctg \frac{5ay(r^2 - a^2)}{r^4 - \frac{17}{4}a^2r^2 + a^4 - 4a^2y^2}$$

Kako važi jednakost



$$r^4 - \frac{17}{4}a^2r^2 + a^4 = (r^2 - \frac{a^2}{4})(r^2 - 4a^2)$$

i ako se izvrši smena

$$K = 5a \cdot \text{ctg} \frac{2\pi\psi}{\epsilon}$$

izraz za strujnicu $\psi = \text{const.}$ može se napisati u obliku

$$(r^2 - \frac{a^2}{4})(r^2 - 4a^2) - 4a^2y^2 = Ky(r^2 - a^2)$$

što je i trebalo da se pokaže.

Zadaci.

1. U tečnosti, ograničenoj osama x i y, u prvom kvadrantu na simetrali ugla xOy na rastojanju a od koordinatnog početka nalazi se izvor izdašnosti e.

Određiti kompleksni potencijal $W(z)$ ovog strujanja.

Rešenje.

$$W(z) = \frac{e}{2\pi} \ln(z^4 + a^4)$$

2. Između čvrstih granica $\theta = \pi/4$ i $\theta = -\pi/4$ postoji ravnansko kretanje idealne tečnosti nastalo od izvora izdašnosti e u tački $r=a$, $\theta=0$ i ponora iste izdašnosti u tački $r=b$, $\theta=0$.

Napisati izraz za strujnu funkciju u polarnim koordinatama.

Rešenje.

$$\psi(r, \theta) = \frac{e}{2\pi} \arctg \frac{r^4(a^4 - b^4) \sin 4\theta}{r^6 - r^4(a^4 + b^4) \cos 4\theta + a^4b^4}$$

3. Dokazati neposrednim računom, da je radijalna brzina na kružnom cilindru $x^2 + y^2 = a^2$, prouzrokovana izvo-

rom izdašnosti e u tački $(2a, 0)$ i njegovim likom u odnosu na isti kružni cilindar, jednaka nuli i pokazati da je kon-tura ovog cilindra jedna od strujnica datog strujanja.

Rešenje.

$$\text{Iz } \bar{w} = \frac{e}{2\pi} \cdot \frac{z^2 - a^2}{z(z-2a)(z-\frac{a}{2})} = (V_r - iV_\theta)e^{-i\theta} \text{ sledi } (V_r)_{r=a} = 0,$$

$$\text{a iz } \psi = \frac{e}{2\pi} \arctg \frac{y(x^2 + y^2 - a^2)}{(x^2 + y^2)(x - \frac{5}{2}a) + a^2x} = 0 \text{ sledi } x^2 + y^2 = a^2.$$

4. Neka kružnica poluprečnika 2a, koju polovi y-osa, obrazuje zajedno sa tom osom čvrstu granicu i neka se na x-osu nalazi izvor izdašnosti e na rastojanju a od centra kružnice.

Dokazati, da se jednačina strujnica $\psi = \text{const.}$ može da napiše u obliku

$$(r^4 + 16a^4) \cos 2\theta - 17a^2r^2 = (r^4 - 16a^4) \sin 2\theta \cdot \text{ctg} \frac{2\pi\psi}{\epsilon}$$

i da je nagib tangente strujnice $\psi = e/\epsilon$ u izvoru $\pi/2$, a u ponoru $\pi/4$.

Rešenje.

$$\text{Iz } W(z) = \frac{e}{2\pi} \ln \frac{z^4 - 17a^2z^2 + 16a^4}{z^2} \text{ za } z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

dobija se jednačina strujnica u traženom obliku.

Iz jednačine strujnice $\psi = e/\epsilon$: $(r^4 + 16a^4) \cos 2\theta - 17a^2r^2 = 0$ nalazi se

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{(r^4 + 16a^4) \sin 2\theta}{2r^3 \cos 2\theta - 17a^2r} \text{ , a kako je } \frac{dr}{d\theta} = \frac{r \sin \theta y' + r \cos \theta}{\cos \theta y' - \sin \theta}$$

Iako se pokazuje da je u izvoru ($r=a$, $\theta=0$) $y' = \infty$, a u ponoru ($r=0$) $y' = 1$.

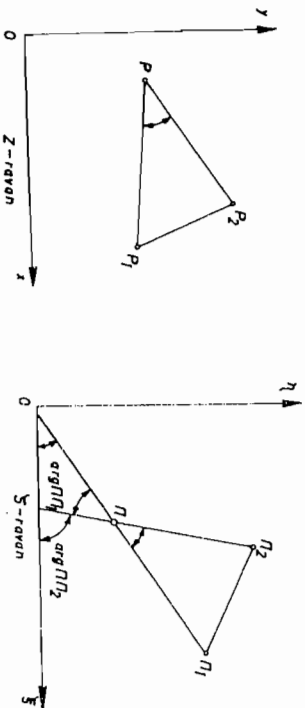
6.1.3. PRIMENA KONFORMNOG PRESLIKAVANJA

Analiitičke funkcije omogućavaju konformno preslikavanje jedne ravni na drugu, odnosno jednog strujanja u drugo, što zaslužuje posebnu pažnju u mehanici fluida jer primenom konformnog preslikavanja dobijaju se mnoga, i raznolika, strujanja.

Neka analitička funkcija

$$\zeta = \zeta(z)$$

uzajamno jednoznačno i neprekidno preslikava neku oblast ravni $z=x+iy$ na oblast ravni $\zeta = \xi+i\eta$.



Neka su dalje, vrednosti z, z_1, z_2 predstavljene tačkama P, P_1, P_2 u ravni z i neka su odgovarajuće vrednosti ζ, ζ_1, ζ_2 predstavljene tačkama Π, Π_1, Π_2 u ravni ζ .

Tada je

$$\frac{\zeta_1 - \zeta}{\zeta_1 - z} = \frac{\zeta(z_1) - \zeta(z)}{z_1 - z}, \quad \frac{\zeta_2 - \zeta}{\zeta_2 - z} = \frac{\zeta(z_2) - \zeta(z)}{z_2 - z}$$

Ako se sada pretpostavi da su razlike $z_1 - z$ i $z_2 - z$ proizvoljno male, dobija se

$$\frac{\zeta_1 - \zeta}{z_1 - z} = \frac{d\zeta}{dz}, \quad \frac{\zeta_2 - \zeta}{z_2 - z} = \frac{d\zeta}{dz}$$

odnosno

$$\frac{\zeta_1 - \zeta}{z_1 - z} = \frac{\zeta_2 - \zeta}{z_2 - z} = \frac{d\zeta}{dz}$$

Izjednačujući module i argumente gornje jednakosti, dolazi se do sledećih odnosa:

$$\frac{\Pi\Pi_1}{PP_1} = \frac{\Pi\Pi_2}{PP_2} = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$$

tj. prilikom preslikavanja dužine se povećavaju, ili skraćuju, u odnosu $|d\zeta/dz| : 1$,

$$\arg \Pi\Pi_1 - \arg PP_1 = \arg \Pi\Pi_2 - \arg PP_2 = \arg \frac{d\zeta}{dz}$$

odakle je

$$\arg \Pi\Pi_2 - \arg PP_2 = \arg PP_1$$

odnosno

$$\angle \Pi_1 \Pi_2 = \angle P_1 P_2$$

tj. prilikom preslikavanja postoji rotacija za uvek isti ugao jednak $\arg d\zeta/dz$, odakle sledi i jednakost presečnih uglova pre i posle preslikavanja.

Prema tome, posmatrano preslikavanje ima sledeće osobine:

- ugao pod kojim se seku makroje dve krive pre i posle preslikavanja ostaje nepromenjen, što znači, da linije je $\phi = \text{const.}$ i $w = \text{const.}$ i nakon preslikavanja zadržavaju ortogonalnost u presečnim tačkama;

- postoji sličnost odgovarajućih beskonačno malih trouglova, tj. figure u beskonačno maloj oblasti transformišu se u sebi slične - zadržavaju oblik. Za konačne figure sličnost ne važi.

Zbog ovih osobina, preslikavanje makrojom analitičkom funkcijom

$$\zeta = \zeta(z)$$

naziva se konformnim preslikavanjem.

Sličnost beskonačno malih figura u osnovnoj i preslikanoj ravni ne važi u oblasti gde je $dz/dz=0$, ili $z \rightarrow \infty$ (singularne tačke), pa se one prilikom proučavanja ograničuju od ostalog prostora gde je preslikavanje pouzdano konformno.

Radi proučavanja ravanskih strujanja konformno preslikavanje se primenjuje u dva slučaja:

1. Uzimaju se razne, unapred odabrane, analitičke funkcije preslikavanja, da bi se iz jednog proučenog strujanja izvela nova, koja ne treba dalje proučavati. Ovo je ujedno i jednostavniji slučaj.

2. Traži se analitička funkcija kojom bi se preslikalo nepoznato strujanje u neko već proučeno. Ovo je obrnuto, i daleko teži, zadatak od prethodnog i ima daleko veći značaj za praktične ciljeve. To je ujedno i osnovni zadatak teorije konformnih preslikavanja: za zadate oblasti S i \bar{S} potrebno je sastaviti funkciju koja će oblast S konformno preslikati u oblast \bar{S} . Taj zadatak može da se reši odabiranjem i kombinovanjem elementarnih analitičkih funkcija.

Kako je kompleksni potencijal u ravni z $w=w(z)$ a funkcija preslikavanja $\zeta=\zeta(z)$, to se eliminisanjem z uspostavlja neposredna veza

$$w(z) = w(\zeta)$$

odnosno, iz uslova jednakosti kompleksnih funkcija sledi

$$\phi(x,y) = \phi(\xi,\eta), \quad \psi(x,y) = \psi(\xi,\eta)$$

odakle proizilazi da je funkcija

$$w(\zeta) = \phi(\xi,\eta) + i\psi(\xi,\eta)$$

kompleksni potencijal novog preslikanog strujanja u ravni ζ .

I u osnovnom i u preslikanom strujanju strujnica-

ma i ekvipotencijalnim linijama pripadaju jednake konstante, pa su zbog

$$Q = \psi_B - \psi_A \quad \text{i} \quad \Gamma = \phi_B - \phi_A,$$

jednaki protoci i cirkulacije.

Nadalje, iz

$$\bar{v}(z) = \frac{dw(z)}{dz} = \frac{dw(\zeta)}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \bar{v}(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{dz},$$

sledi

$$\frac{\bar{v}(z)}{v(\zeta)} = \frac{d\zeta}{dz},$$

tj. odnos kompleksnih brzina u konformno preslikanim strujanjima jednak je izvodu funkcije preslikavanja u posmatranoj tački.

TRANSFORMACIJA ŽUKOVSKOG. Jedno od najprostijih i najvažnijih preslikavanja dvodimenzijskih strujanja tehnosti predstavlja transformacija koju je uveo Žukovski. Napisana u obliku

$$z = \zeta + \frac{\zeta^2}{c^2}$$

preslikava krug poluprečnika ℓ u ravni ζ u "teorijski aeroprofil" u ravni z . Žukovski je tako postavio temelj daljem proučavanju strujanja u vezi s konkretnim tehničkim problemima (hidraulične mašine, vazduhoplovstvo i dr.).

Medjutim, napisana u obliku

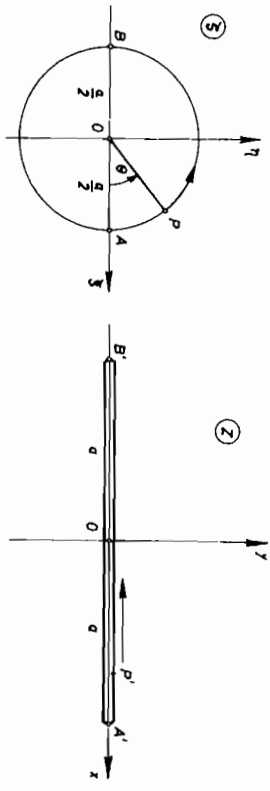
$$z = \zeta + \frac{c^2}{4\zeta}$$

preslikava centralnu kružnicu, $|\zeta| = c = (a+b)/2$ uz pretpostavku da je $a^2 - b^2 = c^2$ u ravni ζ u centralnu elipsu u ravni z , datu jednačinom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Za $b=0$, kružnica $|z|=c=a/2$ u ravni ζ preslikava se duž $A'B'$ dužine $2a$ u ravni z (vidi sliku), datu jednačinom

$$z = \frac{a}{2}e^{i\theta} + \frac{a}{2}e^{-i\theta} = a \cos \theta .$$



Nadalje, iz $z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta}$

$$\zeta^2 - z\zeta + \frac{c^2}{4} = 0 ,$$

$$\zeta = \frac{1}{2}(z \pm \sqrt{z^2 - c^2}) .$$

čije je rešenje
 Znak plus ispred kvadratnog korena znači da se mora uzeti onaj deo funkcije $\sqrt{z^2 - c^2}$ koji je realan i pozitivan, kada se tačka z nalazi na realnoj pozitivnoj osi izvan elipse. Kada je veličina $|z|$ vrlo velika romnje rešenje se svodi na približne jednakosti

$$\zeta = z \quad \text{ili} \quad \zeta = 0 ,$$

u zavisnosti od usvojenog znaka ispred korena (pozitivan ili negativan).

Prema tome, transformacija

$$\zeta = \frac{1}{2} (z + \sqrt{z^2 - c^2}) , \quad c^2 = a^2 - b^2$$

preslikava spoljašnost elipse s poluosama a i b u ravni z na spoljašnjost kruga poluprečnika $(a+b)/2$ u ravni ζ .

STRUJANJE OKO RAVNE PLOČE. Polazi se od cikličnog strujanja oko valjka poluprečnika a u ravni ζ čiji je kompleksni potencijal

$$W(\zeta) = v_{\infty} \zeta e^{-i\alpha} + \frac{v_{\infty} a^2 e^{i\alpha}}{\zeta} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \zeta .$$

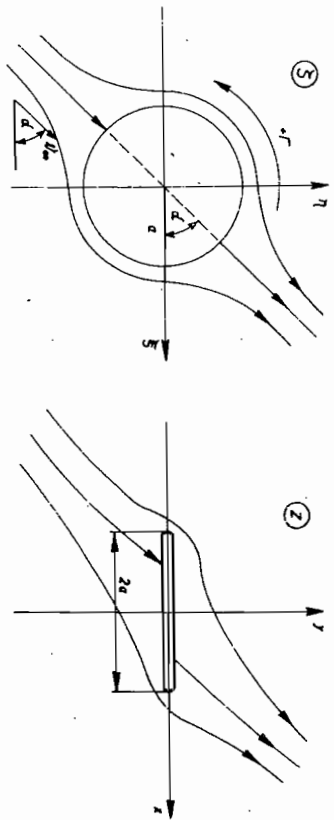
Transformacijom Žukovskog

$$z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right) ,$$

$$\zeta = z + \sqrt{z^2 - a^2}$$

odnosno
 preslikava se ciklično strujanje oko valjka u ravni ζ u strujanje oko ravne ploče (vidi sliku) dužine $2a$ u ravni z , čiji kompleksni potencijal, nakon sredjivanja, glasi

$$W(z) = v_{\infty} z - i v_{\infty} \sqrt{z^2 - a^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z + \sqrt{z^2 - a^2}) ,$$



v kompleksna brzina

$$\bar{v}(z) = v_{\infty} - i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{v_{\infty} z + \sqrt{z^2 - a^2}}{\sqrt{z^2 - a^2}} .$$

Iz ovog izraza se lako zaključuje da je brzina na oba kraja ploče ($z=\pm a$) beskonačna. Kako prema postulatu Šeplijfina-Žukovskog cirkulacija oko ravne ploče (aeroprofil-a) mora da bude tolika da obezbedi konačnu brzinu na kraju

ploče, to iz postulata proizilazi da cirkulacija ovde nije proizvoljna veličina, već takva da važi

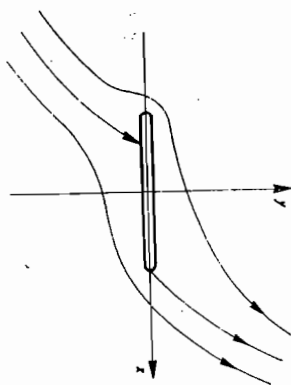
$$v_{y\infty} \cdot a + \frac{\Gamma}{2\pi} = 0,$$

a odavde je

$$\Gamma = -2\pi a v_{y\infty}.$$

Za ovu vrednost cirkulacije, kompleksna brzina postaje

$$\bar{v}(z) = v_{x\infty} - i v_{y\infty} \sqrt{\frac{z-a}{z+a}}.$$



Teorema Kutta-Žukovskog. Ako nepokretni profil krila opstupa s cirkulacijom Γ navansko jednoliko strujna vaskuhna konstantne brzine v_{∞} , onda na krilo deluje sila uzgora jednaka $\rho v_{\infty} \Gamma$ i normalna na pravac brzine v_{∞} . Pravac vektora sile uzgora dobija se obrtanjem vektora v_{∞} za pravu ugao u smeru suprotnom od smeru cirkulacije Γ .

Pošto je sila uzgora

$$F_L = -\rho v_{\infty} \Gamma = 2\pi \rho a v_{\infty}^2 \sin \alpha,$$

za koeficijent uzgona se dobija

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 \cdot 2a} = 2\pi \sin \alpha.$$

Koeficijent uzgona C_L ima veliki praktični značaj (ravanske rešetke kod hidrauličnih mašina, aeroprofil i dr.).

Primeri.

1. U kompleksnoj ravni z zadato je strujanje u polju izvora izdašnosti e u tački $A(0, a)$ i ponora iste izdašnosti u tački $B(a, 0)$, $a > 0$.

a) Odrediti strujnu funkciju i nacrtati strujnu sliku.

b) Ako se ovo strujanje izloži jednolikoj pravolinijskoj struji čije su komponente brzine $v_{ox} = -b$ i $v_{oy} = b(b > 0)$, odrediti b tako da se zaustavna tačka zbirnog strujanja nalazi na polovini rastojanja između izvora i ponora.

c) Funkcijom preslikavanja zdatom implicitno

$$\frac{z-ia}{z-a} e^{-\frac{2(1+i)z}{a}} = \zeta^i,$$

preslikati strujanje u ravan ζ i nacrtati strujnu sliku.

Rešenje.

a) Kompleksni potencijal zbirnog strujanja u ravni

$$z \text{ je } w_1(z) = \frac{e}{2\pi} \ln \frac{z-ia}{z-a} + \frac{e}{2\pi} \ln \frac{x^2+y^2-a(x+y)+i(a^2-ax-ay)}{(x-a)^2+y^2},$$

a strujna funkcija

$$w(x, y) = \frac{e}{2\pi} \arctg \frac{a^2-a(x+y)}{x^2+y^2-a(x+y)}$$

iz jednačine

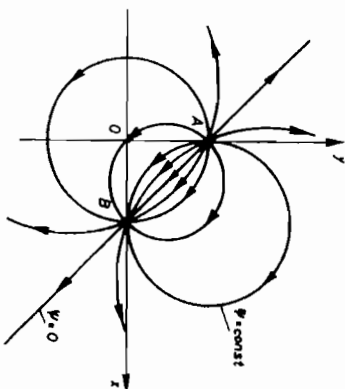
strujnica

$$\frac{a^2-a(x+y)}{x^2+y^2-a(x+y)} = \operatorname{ctg} \frac{2\pi w}{e} = \frac{1}{\zeta},$$

odnosno

$$x^2+y^2+a(C-1)(x+y)-Ca^2 = 0$$

zaključuje se da su strujnice $w = \text{const}$. kružnice koje prolaze kroz tačke A i B , prikazane na slici, a nulta strujnica je prava $y = -x+a$.



b) Ako se strujanje zdatom kompleksnim potencijal-

Im $W_1(z)$ izloži jednolikoj pravolinijskoj struji, čiji je kompleksni potencijal

$$W_2(z) = -b(1+i)z,$$

onda je kompleksni potencijal novog zbirnog strujanja

$$W(z) = -b(1+i)z + \frac{\epsilon}{2\pi} \ln \frac{z-ia}{z-a},$$

a kompleksna brzina

$$\bar{v}(z) = -b(1+i) + \frac{\epsilon}{2\pi} \left(\frac{1}{z-ia} - \frac{1}{z-a} \right).$$

Ako se u izraz za kompleksnu brzinu uvedu zadati uslovi, tj. da se za $\bar{v}(z) = 0$ nalazi položaj zaustavne tačke i da se ona mora nalaziti na mestu

$$z = \frac{a}{2} (1+i)$$

tj. na polovini rastojanja od izvora do ponora, dobija se izraz za konstantu b u obliku

$$b = \frac{\epsilon}{a\pi}.$$

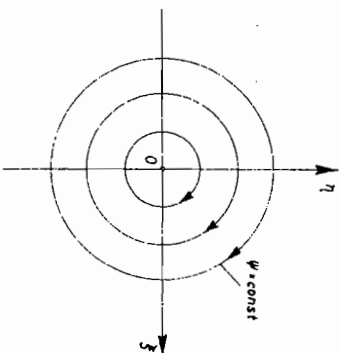
c) Sada je kompleksni potencijal

$$W(z) = \frac{\epsilon}{2\pi} \left(\ln \frac{z-ia}{z-a} - 2 \ln(1+i)z \right),$$

a funkcija preslikavanja, nakon logaritmovanja, glasi

$$\ln \frac{z-ia}{z-a} - 2 \ln(1+i)z = i \ln \zeta$$

tako da se nakon preslikavanja (smehom promenljivih) za kompleksni potencijal strujanja u ravni ζ dobija izraz



$$W(\zeta) = \frac{i\epsilon}{2\pi} \ln \zeta,$$

odakle se lako zaključuje da u ravni ζ postoji strujanje u polju osamljenog vrtloga negativne cirkulacije $\Gamma = \epsilon$ smeštenog u koordinatnom početku ($\zeta_0 = 0$). Slika strujanja je prikazana na predhodnoj strani.

2. U kompleksnoj ravni z zadato je strujanje u polju vrtloga negativne cirkulacije Γ u tački $(0, a)$ i vrtloga pozitivne cirkulacije Γ u tački $(0, -a)$, $a > 0$.

a) Odrediti brzinsko polje duž x-ose i na osnovu toga izračunati onu najveću brzinu jednolike struje u pozitivnom pravcu x-ose pri kojoj će se zaustavna tačka zbirnog strujanja nalaziti na x-osi.

b) Funkcijom preslikavanja

$$\zeta = \frac{z-ia}{z+ia} i$$

preslikati strujanje u ravni ζ i nacrtati strujnu sliku.

Rešenje.

a) Sabiranjem kompleksnih potencijala za strujanja u polju zadatih vrtloga

$$W_1(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z-ia) \quad \text{i} \quad W_2(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z+ia)$$

dobija se kompleksni potencijal zbirnog strujanja

$$W(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z-ia}{z+ia}.$$

Kompleksna brzina je

$$\bar{v}(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{z-ia} - \frac{1}{z+ia} \right),$$

a odavde, za $y=0$, dobija se brzinsko polje duž x-ose

$$(\bar{v}(z))_{y=0} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{x-ia} - \frac{1}{x+ia} \right) = -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{a}{x^2+a^2},$$

odnosno

$$v_x = -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{a}{x^2+a^2}, \quad v_y = 0.$$

Oдавде се може закључити да је x-osa strujnica ovog strujanja ($w=0$) јер је у свим njenim tačkama brzina fluida paralelna s njom ($v_y=0$).

Iz izraza za v_x sledi da se najveća brzina jednolike struje dobija za $x=0$, tj.

$$v_0 = \frac{\Gamma}{a\pi}$$

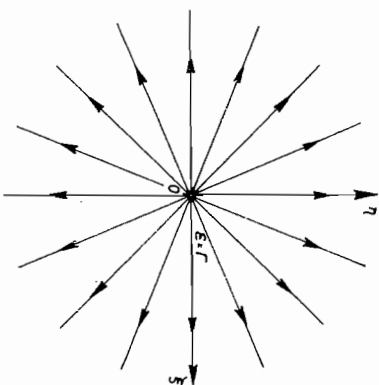
a zaustavne tačke novog zbirnog strujanja, za $a \ll 1$, леже на x-osi јер је njihov položaj određen izrazom

$$z_{\pm} = \pm \sqrt{1-a^2}.$$

b) Ako se predhodno data funkcija preslikavanja logaritmuje, a zatim u kompleksnom potencijalu strujanja u ravni z izvrši smena promenljivih dobija se kompleksni potencijal strujanja u ravni ζ u obliku

$$W(\zeta) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \zeta.$$

Prema tome, u ravni ζ postoji strujanje u polju osamljenog izvora izdašnosti $e=\Gamma$ smeštenog u koordinatnom početku.



3. Jednolika brzina ravnoskor potencijalnog strujanja nestišljivog fluida oko cilindra jediničnog poluprečnika data је projekcijama $v_x=v_y=1$.

a) Napisati izraz za kompleksni potencijal datog strujanja.
b) Funkcijom preslikavanja

$$\zeta^2 = e^{\frac{1+i+(1-i)z^2}{z}} - 1$$

preslikati dato strujanje u ravan ζ i nacrtati strujnu sliku.

c) Sračunati protok kroz konturu $K: \zeta^2 + \eta^2 - 2 = 0$ i razliku pritiska (u metrima stuba posmatranog fluida) između tačaka $A(1,0)$ i koordinatnog početka.

Rešenje.

a) Kompleksni potencijal datog zbirnog strujanja direktno sledi iz Miln-Tomsonove teoreme. Naime, kako је kompleksni potencijal jednolikog strujanja, čije su komponente brzine $v_x=v_y=1$, jednak

$$W_1(z) = (1-i)z = f(z),$$

onda је

$$\bar{F}(z) = (1+i)z \quad \text{i} \quad \bar{F}(1/z) = (1+i)/z,$$

a traženi kompleksni potencijal datog zbirnog strujanja glasi

$$W(z) = f(z) + \bar{F}(1/z) = (1-i)z + \frac{1+i}{z}.$$

b) Iz kompleksnog potencijala strujanja u ravni z i funkcije preslikavanja, koja nakon sredjivanja i logaritmovanja, glasi

$$\ln(\zeta^2+1) = (1-i)z + \frac{1+i}{z},$$

sledi kompleksni potencijal strujanja u ravni ζ u obliku

$$W(\zeta) = \ln(\zeta^2+1).$$

Isti kompleksni potencijal može da se napiše u obliku

$$W(\zeta) = \ln(\zeta-i) + \ln(\zeta+i)$$

odakle sledi, da novo preslikano strujanje čine dva izvora

iste izdašnosti $\epsilon=2\pi$ smeštenih u tačkama $\zeta_0=\pm i$. Multe strujnice su $\zeta=n=0$, dok su ostale strujnice $w=\text{const}$. ravnostane hiperbole (vidi poglavlje 6.1.2.1.).

c) Kontura K je centralna kružnica poluprečnika $R=\sqrt{2}$ i pošto ona obuhvata oba izvora, protok kroz konturu K iznosi

$$Q = \oint_{K_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 2\pi + 2\pi = 4\pi$$

Iz kompleksne brzine

$$\vec{v}(\zeta) = \frac{2\zeta}{\zeta^2+1}$$

nalazi se brzina u tačkama $O(\zeta=0)$ i $A(\zeta=1)$:

$$(\vec{v}(\zeta))_{\zeta=0} = v_O = 0 \quad \text{i} \quad (\vec{v}(\zeta))_{\zeta=1} = v_A = 1$$

a iz Koši-Lagran, jednačine za tačke O i A , zbog $v_O=0$, sledi tražena razlika pritiska

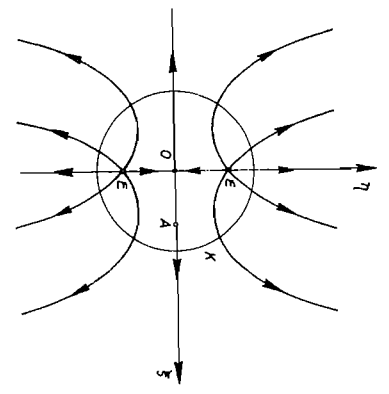
$$\frac{P_O - P_A}{\rho g} = \frac{v_A^2}{2g} = \frac{1}{19,62} = 0,051 \text{ m ST}$$

4. Neka je

$$\vec{v}(z) = \frac{3z}{z^2-z-2}$$

kompleksna brzina potencijalnog strujanja nestišljivog fluida.

a) Odrediti kompleksni potencijal $W(z)$, ako je $W(3) = \ln 4$, i pokazati iz kojih je osnovnih strujanja nastalo ovo zbirno strujanje.



- b) Odrediti raspodelu brzina duž y-ose.
- c) Funkcijom preslikavanja

$$z-2 = (z+1)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{ik}{z}}$$

preslikati strujanje u ravan ζ .

Rešenje.

- a) Iz poznate kompleksne brzine nalazi se

$$W(z) = \int \vec{v}(z) dz + C$$

pošto je

$$\int \vec{v}(z) dz = \int \frac{3z dz}{z^2-z-2} = \int \frac{2dz}{z-2} + \int \frac{dz}{z+1} = 2 \ln(z-2) + \ln(z+1)$$

to je

$$W(z) = 2\ln(z-2) + \ln(z+1) + C$$

Za date granične uslove sledi

$$W(3) = 2\ln(3-2) + \ln(3+1) + C = \ln 4$$

odakle je

$$C = 0$$

i konačno

$$W(z) = 2\ln(z-2) + \ln(z+1) = \ln(z^2-3z+4)$$

Kako je strujanje u polju osamljenog izvora dato kompleksnim potencijalom

$$W(z) = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z-z_0)$$

to se dato zbirno strujanje dobija sabiranjem sledeća dva osnovna strujanja:

$W_1(z) = 2\ln(z-2)$ - strujanje u polju izvora izdašnosti $\epsilon=4\pi$, smeštenog u tački $z_0=2$, i

$W_2(z) = \ln(z+1)$ - strujanje u polju izvora izdašnosti $\epsilon=2\pi$, smeštenog u tački $z_0=-1$.

b) Raspored brzine fluida duž y-ose određuje se

$$iz \quad \vec{v}(z) = v_x - i v_y = \frac{3z}{z^2 - z - 2} + \frac{1}{z+1} = \frac{2}{x-2+iy} + \frac{1}{x+1+iy}$$

jer za $x=0$ slede komponente brzine fluida u svim tačkama y-ose (raspored brzina fluida), tj. iz

$$(\vec{v}(z))_{x=0} = \frac{2}{-2+iy} + \frac{1}{1+iy}$$

sledi

$$v_x = -\frac{3y^2}{y^4+5y^2+4} \quad i \quad v_y = \frac{3y(y^2+2)}{y^4+5y^2+4}$$

c) Data funkcija preslikavanja, nakon logaritmovanja i sredjivanja, može da se napiše u obliku

$$iz = 2\ln(z-2) + \ln(z+1),$$

a smenom promenljivih dolazi se do kompleksnog potencijala strujanja u ravni ζ

$$W(\zeta) = i\zeta,$$

koji predstavlja jednoliko strujanje paralelno n-osi a usmereno u njenom negativnom smeru.

5. a) Odrediti funkciju preslikavanja $\zeta = \zeta(z)$ tako da se ravansko strujanje nestišljivog fluida u polju osamljenog izvora, izdašnosti ϵ smeštenog u koordinatnom početku, u kompleksnoj ravni z preslika u potencijalno strujanje u kompleksnoj ravni ζ poznatog potencijala brzine

$$\phi(\xi, \eta) = a(\xi^2 - \eta^2),$$

ako je realna konstanta $a > 0$ i ako važi granični uslov da je $\psi(0,0) = 0$.

b) Naći kompleksnu brzinu preslikanog strujanja u kompleksnoj ravni ζ kao i komponente brzine u pravcu ξ i η ose.

c) Skicirati sliku strujanja u kompleksnoj ravni ζ i naznačiti smer strujanja.

d) Napisati izraz za maksimalan pritisak u horizontalnoj kompleksnoj ravni ζ ako u tački $A(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ vladava pritisak p_0 .

Rešenje.

a) Pošto je poznat potencijal brzine $\phi(\xi, \eta)$, Koši-Rimanovi uslovi

$$\frac{\partial \phi(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \phi(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi}$$

daju sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 2a\xi$$

$$\frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 2a\eta,$$

iz kojih se, posle integraljenja i korišćenja datog graničnog uslova, određuje strujna funkcija

$$\psi(\xi, \eta) = 2a\xi\eta.$$

Sada se može napisati kompleksni potencijal strujanja u kompleksnoj ravni ζ

$$W(\zeta) = \phi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta) = a(\xi^2 - \eta^2 + i2\xi\eta) = a\zeta^2,$$

a kako je kompleksni potencijal strujanja u kompleksnoj ravni z

$$W(z) = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln z,$$

to iz jednakosti $W(\zeta) = W(z)$ sledi

$$a\zeta^2 = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln z$$

pa je tražena analitička funkcija preslikavanja

$$\zeta = \sqrt{\frac{\epsilon}{2\pi a}} k n z$$

b) Iz $W(\zeta) = a\zeta^2$ sledi kompleksna brzina

$$\bar{v}(\zeta) = \frac{dW(\zeta)}{d\zeta} = 2a\zeta,$$

a rastavljanjem ovog izraza na realni i imaginarni deo

$$\bar{v}(\zeta) = v_{\xi} - i v_{\eta} = 2a(\xi + i\eta),$$

nalaze se komponente brzine u pravcu ξ i η ose

$$v_{\xi} = 2a\xi, \quad v_{\eta} = -2a\eta.$$

c) Iz uslova $W=0$

slede jednačine nultih strujnica

$$\xi = 0 \quad (\eta\text{-osa})$$

$$\eta = 0 \quad (\xi\text{-osa}).$$

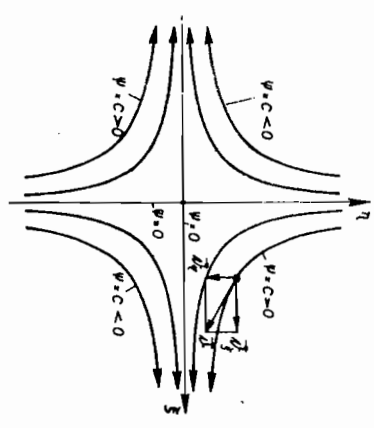
Ostale strujnice $W=C$ date su jednačinom

$$\eta = \frac{C}{2a\xi} \quad (\text{hiperbole}).$$

Pravac strujanja se određuje preko komponentata brzine kako je pokazano na slici. Pošto je zadatkom dato da je $a>0$ onda u kvadrantu u kome je $\xi>0$ i $\eta>0$ mora da važi

$$v_{\xi} = 2a\xi > 0, \quad v_{\eta} = -2a\eta < 0.$$

d) U opštem slučaju, maksimalni pritisak u horizontalnoj ravni strujanja, postiže se na mestu gde je brzina strujanja fluida jednaka nuli - zastavna ili stagna-



ciona tačka. Prema tome, Koši-Lagranž jednačina napisana za takvu tačku u horizontalnoj kompleksnoj ravni ζ (koordinatni početak, jer je $\bar{v}(\zeta)=0$ za $\zeta=0$) i datu tačku A, glasi

$$\frac{P_{max}}{\rho} = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v_A^2}{2},$$

gde je v_A brzina fluida u tački A jednaka

$$v_A = \sqrt{v_{\xi}^2 + v_{\eta}^2} = \sqrt{(2a\xi)^2 + (-2a\eta)^2} = \sqrt{a^2(\xi^2 + \eta^2)} = a|z|.$$

Nakon zamenjivanja i sredjivanja dobija se izraz za maksimalni pritisak u obliku

$$P_{max} = P_0 + 2a^2\rho.$$

6. Posredstvom transformacije Žukovskog

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{k^2}{z} \right)$$

preslikati iz kompleksne ravni z u kompleksnu ravan ζ

a) Krug koji prolazi kroz tačku $B(k,0)$ i poluprečnika $k_1 = k(1+\delta)$, gde je δ mala pozitivna veličina, a centar mu se nalazi u tački M na negativnom delu x-ose (vidi sliku), i

b) Krug sa centrom u tački M, koja se nalazi na pravu povučenoj kroz tačke $B(k,0)$ i $C(0,b)$, poluprečnika $BM = k_2$ (vidi sliku pod b).

Rešenje.

a) Iz trougla MPP', pošto je $OM = k_1, -k = k\delta$, sledi

$$(\text{rcos}\theta + k\delta)^2 + r^2 \sin^2\theta = k_1^2.$$

Posle dizanja na kvadrat i zanemarivanja članova koji sadrže δ^2 dobija se

$$\left(\frac{r}{\lambda}\right)^2 + 2 \frac{r}{\lambda} \delta \cos \theta - (1 + 2\delta) = 0$$

odakle je

$$\left(\frac{r}{\lambda}\right)_{1,2} = -\delta \cos \theta \pm \sqrt{\delta^2 \cos^2 \theta + 1 + 2\delta}$$

Odavde se, zanemariivanjem člana $\delta^2 \cos^2 \theta$, stavljanjem da je $\sqrt{1+2\delta} \approx 1+\delta$ i odbacivanjem drugog korena zbog toga što je $r/\lambda > 0$, dobija

$$r = \lambda(1 + \delta(1 - \cos \theta))$$

Posle ubacivanja ovog izraza u transformaciju Žukovskog, rastavljanja na realni i na imaginarni deo

$$\xi = \frac{1}{2} \left(r + \frac{r^2}{r} \right) \cos \theta \quad i \quad \eta = \frac{1}{2} \left(r - \frac{r^2}{r} \right) \sin \theta$$

pri čemu je za tačke na krugu stavljeno da je $z = re^{i\theta}$, i uzimanja u obzir da je δ malo, dobijaju se sledeće parametarske jednačine preslikanog kruga u ravni ζ :

$$\xi = \lambda \cos \theta \quad i \quad \eta = \lambda \frac{\delta(1 - \cos \theta)}{1 + \delta(1 + \cos \theta)} \sin \theta$$

Kako se iz ovih jednačina vidi da je $\eta(\theta) = -\eta(-\theta)$, to se zaključuje da je preslikana kontura simetrična u odnosu na ξ -osu, pri čemu koordinate karakterističnih tačaka na konturi iznose:

za $\theta = 0$	je	$\xi = \lambda$	i	$\eta = 0$;
za $\theta = \pi/2$	je	$\xi = 0$	i	$\eta = \lambda\delta = \lambda_1 - \lambda$;
za $\theta = \pi$	je	$\xi = -\lambda$	i	$\eta = 0$.

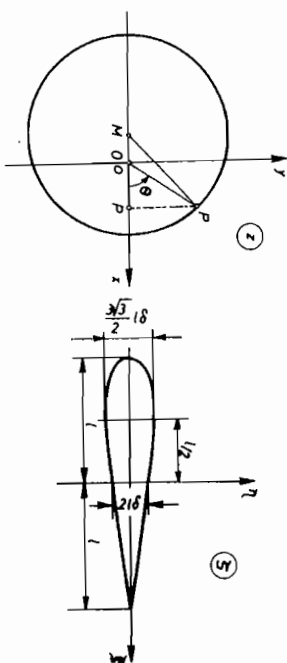
S druge strane se ispitivanjem prvog izvoda dobijene funkcije u parametarskom obliku

$$\frac{d\eta}{d\theta} = \frac{d\eta/d\theta}{d\xi/d\theta} = \delta \frac{2\cos^2 \theta - \cos \theta - 1}{\sin \theta}$$

dolazi do sledeće vrednosti

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 0 \quad \text{za} \quad \theta = 0 \quad i \quad \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\xi(2\pi/3) = -\frac{\lambda}{2}, \quad \eta(2\pi/3) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \lambda \delta$$



$$\frac{d\eta}{d\xi} = \infty \quad \text{za} \quad \theta = \pi$$

tako da se sad može približno nacrtati izgled preslikanog konture u kompleksnoj ravni ζ , koja predstavlja simetrični aeroprofil Žukovskog prikazan na slici.

b) Za preslikavanje zadatog kruga u kompleksnu ravan ζ koristi se grafička metoda, koja se zasniva na подели transformacije Žukovskog na sledeća dva dela:

$$\zeta_1 = \frac{1}{2} z \quad i \quad \zeta_2 = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{z}$$

Primenom prvog dela transformacije, odnosno stavljanjem u jednačinu kruga u ravni z

$$(x + \lambda_1 \cos \alpha - \lambda)^2 + (y - \lambda_1 \sin \alpha)^2 = \lambda^2$$

gde je $\alpha = \arctg b/\lambda$, i da je $x = 2\xi_1$ i $y = 2\eta_1$, dobija se

$$\left(\xi_1 + \frac{\lambda_1 \cos \alpha - \lambda^2}{2} + \eta_1 - \frac{\lambda_1 \sin \alpha}{2} \right)^2 = \frac{\lambda_1^2}{4}$$

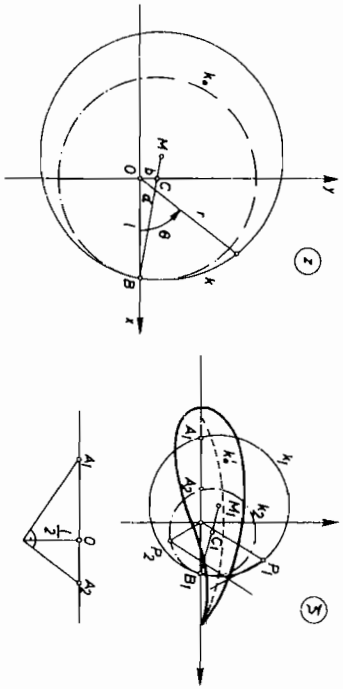
Prema tome se dati krug K (vidi sliku) preslikava u krug K_1 koji prolazi kroz tačku $B_1(\lambda/2, 0)$, poluprečnika $\eta_1 B_1 = \lambda_1/2$ i sa centrom na pravci pod istim nagibom α prema ξ -osi kao i u ravni z .

Kako je iz drugog dela transformacije

$$x = \frac{\xi_2}{2} \frac{\eta_2}{\xi_2^2 + \eta_2^2} \quad \text{i} \quad y = -\frac{\xi_2}{2} \frac{\eta_2}{\xi_2^2 + \eta_2^2}$$

to posle zamene u jednačinu kruga u ravni z sledi

$$\xi_2^2 + \eta_2^2 - \frac{\xi_2(2\xi_1 \cos \alpha - \xi_2)}{2\xi_1 \cos \alpha - \xi_2} \xi_2 - \frac{\xi_2 \sin \alpha}{2\xi_1 \cos \alpha - \xi_2} \eta_2 = \frac{\xi_2^3}{4(2\xi_1 \cos \alpha - \xi_2)}$$



I u ovom slučaju se dobija krug K_2 koji prolazi kroz tačku B_1 a centar mu je na pravu $M_1 B_1$. Iz jednačine krugova K_1 i K_2 može se izvesti odnos

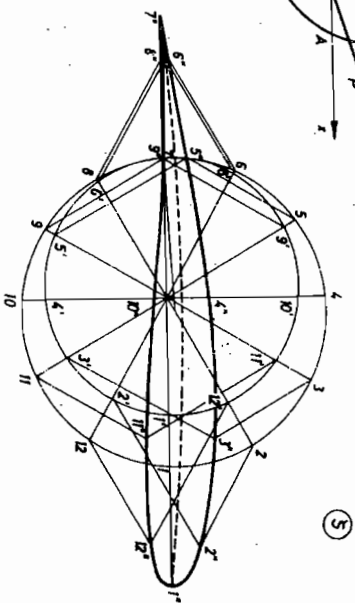
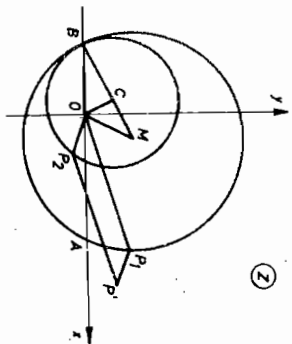
$$\overline{OA_1} : \frac{\xi}{2} = \frac{\xi}{2} : \overline{OA_2}$$

na osnovu koega se grafički određuje položaj centra kruga K_2 .

Proizvoljna tačka P na krugu K u ravni z se prvim delom transformacije preslikava u tačku P_1 na krugu K_1 sa istim argumentom θ kao i kod tačke P, dok se drugim delom transformacije tačka P preslikava u tačku P_2 na krugu K_2 .

Kao što se iz same transformacije vidi tački P_2 odgovara argument tačke P sa promenjenim znakom. Geometrijskim sabiranjem potega $\overline{OP_1}$ i $\overline{OP_2}$ dobija se tačka P' - slika tačke P u ravni ζ . Sprovođeci izloženi postupak za niz proizvoljnih tačaka P dobije se aeroprofil Župovskog koji ira zatupljenu prednju (napadnu) ivicu i oštru zadnju (izlaznu) ivicu kojoj odgovara tačka n na krugu.

Radi uporedjenja, data je u ravni ζ i slika kruga K_0 sa centrom u tački C. Prema osnovnoj osobini konformnog preslikavanja imaju slika K'_0 kruga K_0 i gornja i donja strana aeroprofila na oštroj ivici aeroprofila zajedničku tangentu.



Na slici je prikazan profil krila dobijen konstruisanjem vektora položaja u intervalu od 30° . Na profilu krila i na krugu postoji jednak broj odgovarajućih tačaka.

Zadaci.

1. Ravanski izvor nestišljivog fluida, izdašnosti ϵ , koji se nalazi u tački $z_0 = i - a$ ($a > 0$, realna konstanta) kompleksne ravni z, preslikati pomoću funkcije preslikavanja $\zeta = \frac{1}{z}$ u kompleksnu ravan ζ . Odrediti kompleksni potencijal pre-slikanog strujanja.

Rešenje.

$$w(\zeta) = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln \frac{\zeta + 1}{\zeta - a}$$

2. Odrediti kompleksni potencijal ravanskoj strujanja nestišljivog fluida u kompleksnoj ravni ζ nastalo preslikavanjem jednolikog strujanja, čije su komponente brzine $v_x = v_0$ i $v_y = 0$, iz kompleksne ravni z pomoću funkcije preslikavanja

$$\zeta = \frac{C}{z}$$

($C > 0$, realna konstanta).

Rešenje.

$$W(\zeta) = \frac{M}{2\pi\zeta}, \quad M = 2\pi v_0 C$$

3. U koordinatnom početku kompleksne ravni ζ nalazi se izvor izdašnosti $e=2\pi$. Strujanje u polju datog izvora preslikati funkcijom

$$(z+i)\zeta = (z-i)e^{iz}$$

u kompleksnu ravan z i odrediti položaj zaustavnih tačaka.

Rešenje.

$$W(z) = iz + \ln \frac{z-i}{z+i}; \quad T_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$$

4. Ravansko potencijalno strujanje savršenog nestišljivog fluida dato je kompleksnim potencijalom

$$W(z) = \ln(z^2 + 6z^2 + 9z)$$

a) Iz kojih se osnovnih strujanja sastoji dato strujanje; odrediti položaj zaustavnih tačaka.

b) Funkcijom preslikavanja

$$\zeta = \frac{a+ib}{2\ln(z+3)+\ln z}, \quad (a > 0, b > 0, a > b)$$

preslikati dato strujanje u ravan ζ ; odrediti strujnu funkciju i nacrtati strujnu sliku sa smerom strujanja.

c) Sračunati protok kroz konturu datu tačkama A ($a, 0$) i B($b, 0$) i razliku pritiska između ove dve tačke.

Rešenje.

a) $W_1(z) = \ln z$ (izvor izdašnosti $e=2\pi$ smešten u tački $z=0$) i $W_2(z) = 2\ln(z+3)$ (izvor izdašnosti $e=4\pi$ smešten u tački $z_0 = -3$); $T = -1$

b)

$$W(\zeta) = \frac{a+ib}{\zeta} = \frac{M e^{i\alpha}}{2\pi\zeta}$$

$$M = 2\pi \sqrt{a^2+b^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{b}{a}$$

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{D\xi - a\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

c)

$$Q = \frac{a-b}{a}; P_A - P_B = \rho \frac{a^4 - b^4}{2a^4 b^4} (a^2 + b^2)$$

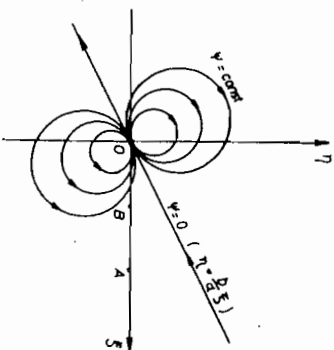
5. U kompleksnoj ravni ζ zadato je strujanje u polju izvora izdašnosti e smeštenog u tački $(0, i)$ i vrtloga pozitivne cirkulacije Γ smeštenog u tački određenoj kompleksnim brojem n . Funkcijom preslikavanja

$$\zeta = \frac{z+a}{z+b}, \quad (a \neq b)$$

preslikati zbirno strujanje u kompleksnu ravan z .

Odrediti konstante a, b i n tako, da tačka u kojoj je smešten izvor bude jedina "nepokretna" tačka date transformacije i da preslikavanjem dobijeni izvor, ponor i dva vrtloga suprotnih cirkulacija budu razmešteni samo u dvema tačkama ravni z . Koje su to tačke?

Napomena. Pod "nepokretnom" tačkom neke transformacije podrazumeva se tačka koja prilikom preslikavanja zadr-



žava isti položaj u odnosu na koordinatni početak. U ovom slučaju je ta tačka određena izrazom $z=(z+a)/(z+b)$.

Rešenje.

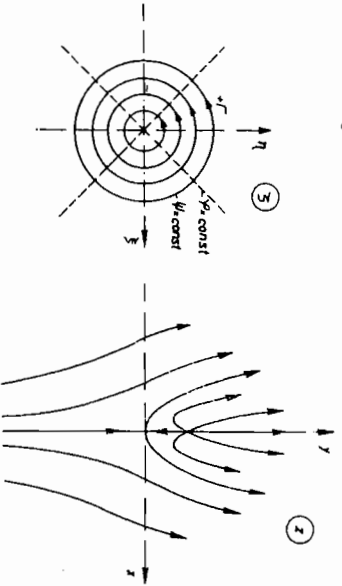
$$a=1 ; b=1-2i ; n=i ; z'_0=i ; z''_0=-b=-1+2i$$

6. U koordinatnom početku kompleksne ravni ζ smešten je vrtlog pozitivne cirkulacije Γ . Kako će strujanje da se dobije u kompleksnoj ravni z , ako je funkcija preslikavanja

$$\zeta=(z-i)ia e^z ,$$

i ako se konstanta a odredi iz uslova da se zaustavna tačka strujanja u ravni z nalazi u koordinatnom početku?

Rešenje.



$$W(\zeta)=-\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln \zeta$$

$$W(z)=\frac{\Gamma}{2\pi}ln(z-i)-\frac{i\Gamma}{2\pi}z$$

U ravni z u tački $z_0=i$ postoji izvor izdašnosti $e=\Gamma$, čije je strujanje kombinovano sa jednolikim strujanjem brzine $v_0=\Gamma/2\pi$ u pozitivnom pravcu y -ose.

7. Transformacijom Žukovskog

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{b^2}{z} \right)$$

preslikati iz kompleksne ravni z u kompleksnu ravan ζ

- a) Krug poluprečnika l sa centrom u koordinatnom početku, i
 b) Krug koji prolazi kroz tačke $A(-l,0)$ i $B(l,0)$ a centar mu je u tački $C(0,b)$.

Rešenje.

$$a) z=le^{i\theta} , \zeta=l\cos\theta \quad (\xi=l\cos\theta \quad \eta=0)$$

Dati krug se preslikava u duž veličine $2l$ prema slici a).

b) $z=re^{i\theta}$, a nakon preslikavanja dobijaju se parametarске jednačine u obliku

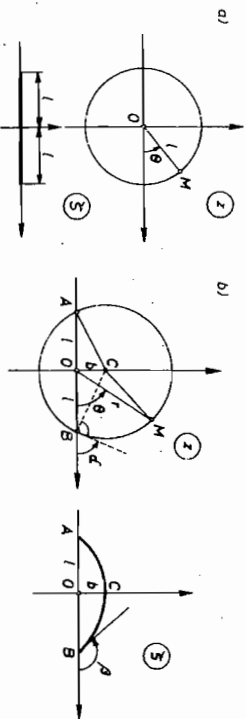
$$\xi = +\sqrt{b^2 \sin^2 \theta + l^2} \cdot \cos \theta \quad ; \quad \eta = b \sin^2 \theta$$

odakle se eliminisanjem parametra θ dobija jednačina kruga

$$\xi^2 + \eta^2 - (b - \frac{l^2}{b})\eta = l^2$$

koji prolazi kroz tačke A' , B' i C' . Pošto je $\eta > 0$, preslikavanjem se u stvari dobija kružni luk $A'B'C'$ prema slici b).

Takodje, važi relacija $\theta = 2\alpha$.



8. Brzina u beskrajnosti jednolikog strujanja, u kome se nalazi cilindar poluprečnika a , nagnuta je pod uglom α prema x -osi. Kompleksni potencijal ovog strujanja glasi

$$w(z) = v_0 (ze^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{i\alpha}) .$$

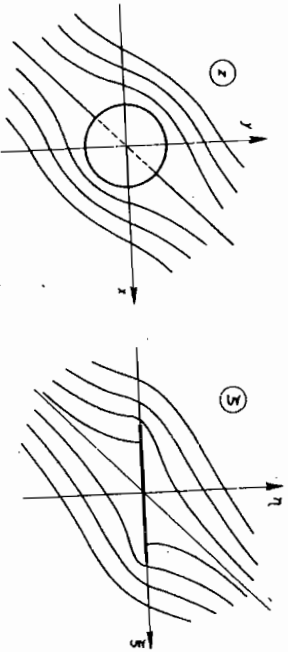
Ako je funkcija preslikavanja

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z} ,$$

odrediti preslikano strujanje u ravni ζ .

Rešenje.

Kružni cilindar $x^2 + y^2 = a^2$ se posredstvom zadate transformacije preslikava u ploču $\xi = 2a \cos \theta$, $\eta = 0$.



9. Kompleksni potencijal acikličnog strujanja oko kružnog cilindra poluprečnika a , za slučaj da je brzina u beskrajnosti jednaka v_0 , dat je u kompleksnoj ravni z izrazom

$$w(z) = v_0 (z + \frac{a^2}{z}) .$$

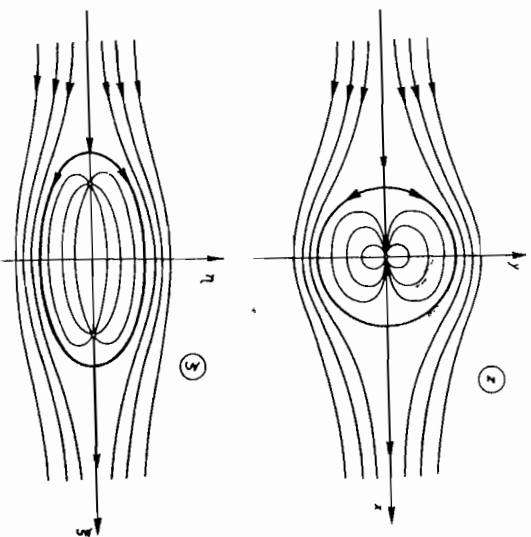
Ako je funkcija preslikavanja

$$\zeta = z + \frac{c^2}{z} , \quad \text{sa} \quad 0 < c < a ,$$

odrediti preslikano strujanje u kompleksnoj ravni ζ .

Rešenje.

$$w(\zeta) = v_0 \left(\frac{\zeta}{2} + \sqrt{\frac{\zeta^2}{4} - c^2} + \frac{a^2}{2} \left(\frac{\zeta}{2} - \sqrt{\frac{\zeta^2}{4} - c^2} \right) \right)$$



10. Odrediti funkciju preslikavanja koja jednolično strujanje tečnosti čija je brzina v_0 paralelna realnoj x-osi kompleksne ravni z , preslikava u kompleksnoj ravni ζ koje nastaje kombinacijom izvora i ponora jednakih izdažnosti $\epsilon = 2\pi$. Pri tome je izvor smešten u tački $\zeta_1 = -c_0$, a ponor u tački $\zeta_2 = c_0$ ($c_0 > 0$, realna konstanta).

Rešenje.

$$\zeta = c_0 \frac{e^{v_0 z^2} + 1}{e^{v_0 z^2} - 1}$$

11. Kompleksni potencijal ravanskog strujanja nestišljivog fluida je

$$w(z) = (a - ib)z^2 ,$$

gde su a i b realne i pozitivne konstante.

a) Odrediti strujnu funkciju $\psi(x, y)$ i odnos konstanti a/b tako da protok kroz konturu omeđjenu tačkama $A(0, \sqrt{3})$ i $B(2, \sqrt{3})$ bude jednak nuli.

b) Za nadjeni odnos a/b odrediti nulte strujnice, nacrtati ih i skicirati strujnu sliku sa naznačenim smerom strujanja.

c) Kojom bi funkcijom preslikavanja $z=f(\zeta)$ trebalo preslikovati kompleksni potencijal $W(z)$ da bi se dobilo zbirno strujanje u polju osamljenog izvora izdačnosti $2\pi a$ i vrtloga pozitivne cirkulacije $2\pi b$ smeštenih u koordinatnom početku ravnini ζ .

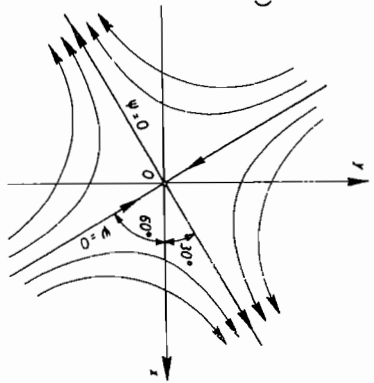
Rešenje.

a) $w(x,y) = 2axy - b(x^2 - y^2)$

$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$; $y = -\sqrt{3}x$

c) $z = \sqrt{3}\pi\zeta$



6.1.4. SILE NA TELU U STRUJI SAVRŠENOG FLUIDA

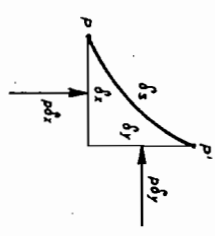
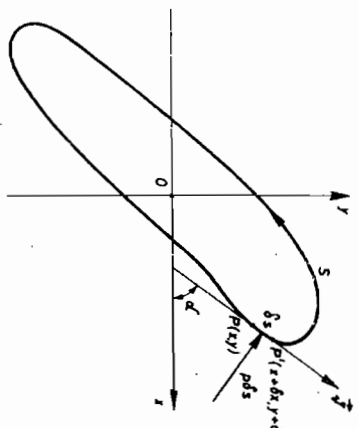
Kada se dugačak cilindar proizvoljnog preseka postavi normalno na ravan strujanja nestišljivog fluida, koji sadrži hidrodinamičke singularitete, na cilindar deluju sile koje teže da proizvedu, u opštem slučaju, translaciju i rotaciju tog cilindra. Zadatak je da se izračuna glavni vektor-rezultanta pritisnih sila i glavni moment tih sila.

Kad ravanstrujanje ima potencijal ovi vektori se mogu izraziti primenom kompleksnog potencijala. Prvi je tu metodu uveo Žukovski 1906. godine, a opštu teoriju dali su nezavisno jedan od drugog Blazijus i Čapljigin 1910. godine. Ovde će ova teorija biti izložena kao Blazijusova teorema.

BLAZIJUSOVA TEOREMA. Nestišljiv fluid se kreće, konstantno i nevrtiložno bez uticaja spoljašnjih sila, paralelno xOy ravni pored nepokretnog cilindra čiji je presek u toj ravni proizvoljna zatvorena kriva S. Kompleksni potencijal ovog strujanja je W. Tada je delovanje pritisnih sila fluida na cilindar ekvivalentno sili po jedinici dužine koja ima komponente [X,Y] i momentu M po jedinici dužine, gde je

$X+iX = -\frac{\rho}{2} \int_S \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz$; $M = \text{Re} \left(-\frac{\rho}{2} \int_S \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 z dz\right)$

Dokaz.



Na slici je prikazana proizvoljna zatvorena kriva S (cilindrar) u ravni xOy. Luk PP' je deo krive S dužine delta s. Ako je p pritisak koji vlada u tački P, onda je p delta s sila po jedinici dužine koja deluje na luk delta s i normalna je na krivu S. Neka je alpha ugao koji tangenta na krivu S u tački P gradi sa x-osom. Tada su komponente ove sile

$\delta X = -p \delta s \cdot \sin \alpha = -p \delta y$; $\delta Y = p \delta s \cdot \cos \alpha = p \delta x$

Odavde je

$X = -\int_S p dy$; $Y = \int_S p dx$

odnosno

$X+iX = \int_S p(dx-idy)$

Iz Koši-Lagranžove jednačine koja u ovom slučaju glasi

$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C$,

$p = \rho C - \frac{\rho}{2} v^2$,

tako da izraz za silu postaje

$X+iX = \rho C \int_S (dx-idy) - \frac{\rho}{2} \int_S v^2 (dx-idy)$.

Prvi član na desnoj strani je jednak nuli, jer predstavlja integral od konstante duž zatvorene krive. Sa-

da je
$$Y+iX = -\frac{\rho}{2} \int_S \left[v^2 \left(\frac{dx}{ds} - i \frac{dy}{ds} \right) ds = -\frac{\rho}{2} \int_S v^2 (\cos\alpha - i \sin\alpha) ds ,$$

a zbog
$$\frac{dW}{dz} = \bar{v} = v e^{-i\alpha} \quad i \quad dz = dx + i dy = d s e^{i\alpha} ,$$

sledi
$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \int_S \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz ,$$

što je i trebalo dokazati.

Da bi se dokazao drugi deo teoreme, polazi se od izraza
$$\delta M = \rho x \delta x + \rho y \delta y ,$$

koji predstavlja moment komponentata sile $[-p\delta y, p\delta x]$ za tačku 0 - koordinatni početak.

Sada je ukupni moment za tačku 0 jednak

$$M = \int_S \rho (x dx + y dy) ,$$

$$M = -\frac{\rho}{2} \int_S v^2 (x dx + y dy) .$$

Kako je s druge strane

$$z \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz = (x+iy) v^2 e^{-2i\alpha} (dx+idy)$$

$$= (x+iy) v^2 e^{-2i\alpha} e^{i\alpha} ds$$

$$= v^2 (x+iy) (\cos\alpha - i \sin\alpha) ds$$

$$= v^2 (x+iy) (dx - i dy)$$

$$= v^2 (x dx + y dy) + i v^2 (y dx - x dy) ,$$

upoređivanjem, dolazi se do izraza

$$M = \text{Re} \left(-\frac{\rho}{2} \int_S \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 z dz \right) ,$$

čime je dokaz završen.

Integrali za $Y+iX$ i za M izračunavaju se koristeći teoremu o reziduumu (račun ostatka) koja glasi:

Ako je tačka $a \neq \infty$ izolovani singularitet analitičke funkcije $f(z)$, tada se koeficijent A_{-1} u razvoju

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n (z-a)^n ,$$

u okolini tačke a , zove reziduum (ostatak) funkcije $f(z)$ za singularitet $z=a$ i označava $\text{Res } f(z)$.

Reziduum A_{-1} dat je pomoću formule

$$A_{-1} = \text{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S f(z) dz ,$$

gde je S krug $|z-a|=r$ takav da na njemu i u njegovoj unutrašnjosti nema drugih singulariteta osim a .

Ovaj razvoj je konvergentan i jedinstven u navedenom krugu i zove se Lorantov (Laurent) red.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n (z-a)^n \quad \text{zove se pravilni deo,} \quad a \quad \sum_{n=-1}^{-\infty} A_n (z-a)^n$$

glavni deo Lorantovog reda.

Sada formule za izračunavanje sile i njenog momenta za koordinatni početak, kojom fluid deluje na nepokretni cilindar, postaju

$$Y+iX = -\rho i A_{-1} = -\rho i \text{Res}_{z=a} \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 ,$$

$$M = \text{Re}(-\rho i A_{-1}) = \text{Re}(-\rho i \text{Res}_{z=a} z \left(\frac{dW}{dz} \right)^2) .$$

Primeri.

1. Odrediti rezultantu pritishnih sila, kao i moment ove sile u odnosu na koordinatni početak, kojom fluid deluje na nepokretnan kružni cilindar poluprečnika R , ako je strujanje dato kompleksnim potencijalom

$$W = v_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z .$$

Rešenje.

Iz kompleksnog potencijala W nalazi se

$$\bar{v} = \frac{dW}{dz} = v_0 + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} - \frac{v_0 R^2}{z^2}$$

Kako je analitička funkcija \bar{v} već data u obliku Loranolovog reda, to je i analitička funkcija

$$\bar{v}^2 = \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 = v_0^2 + \frac{i v_0 \Gamma}{\pi} \frac{1}{z} - \left(\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 2v_0^2 R^2\right) \frac{1}{z^2} - \frac{i v_0 \Gamma R^2}{\pi} \frac{1}{z^3} + \frac{v_0^2 R^4}{z^4}$$

u obliku Loranolovog reda, te je odavde

$$A_{-1} = \text{Res}\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 = \frac{i v_0 \Gamma}{\pi}$$

Isto tako, iz

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 = v_0^2 z + \frac{i v_0 \Gamma}{\pi} - \left(\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 2v_0^2 R^2\right) \frac{1}{z} - \frac{i v_0 \Gamma R^2}{\pi} \frac{1}{z^2} + \frac{v_0^2 R^4}{z^3}$$

sledi

$$A_{-1} = \text{Res}\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 = \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} - 2v_0^2 R^2$$

Sada je ukupna sila kojom fluid deluje na nepokretnan kružni cilindar jednaka

$$Y + iX = -\rho r i A_{-1} = \rho v_0 \Gamma$$

a moment te sile u odnosu na koordinatni početak je

$$M = \text{Re}(-\rho r i A_{-1}) = \text{Re}\left(\frac{\rho \Gamma^2}{4\pi} i + 2\rho v_0^2 R^2 i\right)$$

Odavde je

$$X = 0, \quad Y = \rho v_0 \Gamma, \quad M = 0$$

što znači da na cilindar u ovom slučaju deluje vertikalna sila usmerena na gore, a njena linija dejstva prolazi kroz koordinatni početak.

2. Pokazati da je

$$W = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z-ia}{z+ia}$$

kompleksni potencijal neprekidnog toka oko kružnog cilindra u prisustvu čvrste granice $y=0$.

Naci silu kojom fluid deluje na cilindar po jedinici njegove dužine.

Rešenje.

Stavljajući $W = \phi + i\psi$ u izraz za kompleksni potencijal (vidi poglavlje 6.1.2.1. primer 2.) nalazi se

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left| \frac{z-ia}{z+ia} \right| = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{x^2 + (y-a)^2}{x^2 + (y+a)^2}$$

odakle za $\psi=0$ sledi

$$y = 0$$

dok su ostale strujnice $\psi = \text{const.}$ date relacijom

$$\frac{x^2 + (y-a)^2}{x^2 + (y+a)^2} = C, \quad \text{gde je } \ln C = \frac{4\pi\psi}{\Gamma}$$

tj. strujnice $\psi = \text{const.}$ su krugovi koji se ne seku a centri im se nalaze na y-osi. Jedna od strujnica $\psi = \text{const.}$ prikazana je na slici i predstavlja trag kružnog cilindra u ravni strujanja, dok se nulta strujnica (x-osa) može zamisliti čvrstim zidom.

Nadalje, iz kompleksnog potencijala sledi

$$\frac{dW}{dz} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{z-ia} - \frac{1}{z+ia} \right) = -\frac{\Gamma a}{\pi} \frac{1}{z^2 + a^2}$$

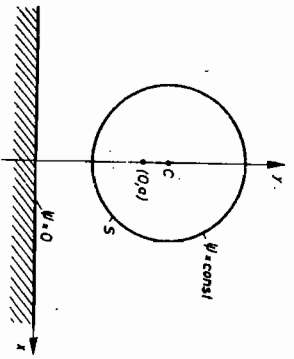
tako da je tražena sila

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \oint_S \frac{\Gamma^2 a^2}{\pi^2} \frac{dz}{(z^2 + a^2)^2} = -\frac{\rho \Gamma^2 a^2}{2\pi^2} \oint_S \frac{dz}{(z^2 + a^2)^2}$$

Jedini polovi (singularne tačke) podintegralne funkcije su u $z = \pm ia$, ali samo pol $z = ia$ leži unutar S. Prema tome, traži se samo reziduum u $z = ia$.

$$\text{Iz } \frac{1}{z^2 + a^2} = \frac{1}{(z-ia)(z+ia)} = \frac{1}{2ia} \left(\frac{1}{z-ia} - \frac{1}{z+ia} \right)$$

sledi



$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2+a^2)^2} &= \frac{1}{4a^2} \left(\frac{1}{(z-ia)^2} + \frac{1}{(z+ia)^2} - \frac{1}{(z-ia)(z+ia)} \right) \\ &= -\frac{1}{4a^2} \left(\frac{1}{(z-ia)^2} + \frac{1}{(z+ia)^2} - \frac{1}{ia(z-ia)} - \frac{1}{-ia(z+ia)} \right) \\ &= -\frac{1}{4a^2} \left(\frac{1}{(z-ia)^2} + \frac{1}{(z+ia)^2} + \frac{1}{4ia^3} \left(\frac{1}{z-ia} - \frac{1}{z+ia} \right) \right). \end{aligned}$$

Kako je podintegralna funkcija napisana u obliku Lorantovog reda, to neposredno sledi

$$A_{-1} = \operatorname{Res}_{z=ia} \frac{1}{(z^2+a^2)^2} = \frac{1}{4ia^3}.$$

Sada je

$$Y+iX = -\frac{\rho L^2 a^2}{2\pi^2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{4ia^3} = -\frac{\rho L^2}{4\pi a},$$

odnosno $X = 0, Y = -\frac{\rho L^2}{4\pi a}.$

Rezultat pokazuje da fluid deluje na cilindar vertikalnom silom usmerenom na dole.

Napomena. Rezidijum podintegralne funkcije može se naći ne prikazujući istu u obliku Lorantovog reda. Direktno nalaženje rezidijuma analitičke funkcije prikazano je u sledećem primeru.

3. Pokazati da su

$$X = \frac{\rho e^2}{4g\pi a}, \quad Y = 0$$

komponente ukupne sile kojom fluid iz izvora, izdašnosti e smeštenog u tački $z_0 = 3a$, deluje na nepokretan kružni cilindar dat jednačinom $|z| = a.$

Rešenje.

Pri izradi ovog primera koristice se dve teoreme koje će ovde biti izložene bez dokaza.

Teorema 1. Rezidijum pola (singularne tačke) $a \neq \infty$ reda k analitičke funkcije $f(z)$ dat je formulom

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z-a)^k f(z)).$$

Ako je $z=a$ prost pol (prvog reda), tada je rezi-

dijum dat sa

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z).$$

Teorema 2. Košijeva teorema o rezidijumima. Ako je $f(z)$ regularna funkcija (ima izvod za svako z) na zatvorenoj konturi S i unutar nje, osim u njenim polovima z_1, z_2, \dots, z_k koji pripadaju unutrašnjosti konture S , tada važi formula

$$\oint_S f(z) dz = 2\pi i \sum_{v=1}^k \operatorname{Res}_{z=z_v} f(z).$$

Kompleksni potencijal ovog strujanja (vidi poglavlje 6.1.2.1.) je

$$W = \frac{e}{2\pi} (\ln(z-3a) + \ln(z-\frac{a}{3}) - \ln z) = \frac{e}{2\pi} \ln \frac{z^2 - \frac{10}{3}az + a^2}{z},$$

odakle je

$$\frac{dW}{dz} = \frac{e}{2\pi} \frac{z^2 - a^2}{z(z-3a)(z-\frac{a}{3})},$$

odnosno

$$\left(\frac{dW}{dz} \right)^2 = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{(z^2 - a^2)^2}{z^2 (z-3a)^2 (z-\frac{a}{3})^2}.$$

Iz Blazijusove teoreme sledi

$$Y+iX = -\frac{\rho}{2} \int \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{(z^2 - a^2)^2 dz}{z^2 (z-3a)^2 (z-\frac{a}{3})^2} = -\frac{\rho e^2}{8\pi^2} \int \frac{(z^2 - a^2)^2 dz}{z^2 (z-3a)^2 (z-\frac{a}{3})^2}.$$

Podintegralna funkcija $f(z)$ na konačnoj daljini ima tri pola drugog reda u tačkama $z=0, z=3a$ i $z=a/3$. Dva od ovih polova nalazi se u krugu S (unutar cilindra) dok je pol $z=3a$ izvan ovog kruga.

Prema prvoj teoremi rezidijumi imaju vrednosti:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{(z^2 - a^2)^2}{(z-3a)^2 (z-\frac{a}{3})^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{4z(z^2 - a^2)(z-3a)(z-\frac{a}{3}) + 2(z^2 - a^2)^2 (2z - \frac{10}{3}a)}{(z-3a)^3 (z-\frac{a}{3})^3} \\ &= \frac{20}{3a}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{Res}_{z=\frac{a}{3}} f(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{a}{3}} \frac{d}{dz} \frac{(z^2 - a^2)^2}{z^2 (z-3a)^2 (z-\frac{a}{3})^2}$$

$$= 4 \lim_{z \rightarrow \frac{a}{3}} \frac{(z^2 - a^2)(z - 3a) - 2(z^2 - a^2)^2(2z - 3a)}{z^3(z - 3a)^3} = -\frac{27}{4a}$$

Prema Košijevoj teoremi o reziduumima nalazi se

$$\int_S f(z) dz = 2\pi i (\text{Res } f(z) + \text{Res } f(z)) = 2\pi i \left(\frac{20}{3a} - \frac{27}{4a} \right) = -\frac{\pi i}{6a}$$

Sada je ukupna sila $\frac{20}{3a}$ kojom fluid deluje na nepokretan cilindar u ovom slučaju jednaka

$$Y + iX = -\frac{\rho c^2}{8\pi^2} \left(-\frac{\pi i}{6a} \right) = \frac{\rho c^2 i}{48\pi a}$$

odakle je

$$X = \frac{\rho c^2}{48\pi a}, \quad Y = 0,$$

što je i trebalo pokazati.

6.2. OSNOSIMETRIČNO STRUJANJE

Ako je strujanje istovetno u svim ravninama koje prolaze kroz neku osu, onda je takvo strujanje osnosimetrično. Za proučavanje ovakvih strujanja podesniji je cilindričan koordinatni sistem (r, θ, z) , pri čemu je z-osa osa simetrije. U opštem slučaju brzina fluida je

$$\vec{v} = v_r \vec{r}_0 + v_\theta \vec{\theta}_0 + v_z \vec{z}_0,$$

tj. može da se razloži na radijalnu v_r , kružnu v_θ i aksijalnu v_z komponentu.

Za osnosimetrično strujanje važi

$$v_\theta = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0$$

pa je brzina

$$\vec{v} = v_r \vec{r}_0 + v_z \vec{z}_0.$$

Prema tome, dovoljno je da se prouči strujanje u jednoj meridijanskoj ravni (npr. u ravni čiji je ugao $\theta = 0^\circ$) pošto se ono ne razlikuje ni u ostalim meridijanskim ravninama.

Strujnice se pružaju u meridijanskim ravninama, a odgovaraju im strujne površine koje se dobijaju obrtanjem strujnica oko ose simetrije. Na isti način nastaju i ekvipotencijalne površine; obrtanjem linija istog potencijala.

STRUJNA FUNKCIJA. Diferencijalna jednačina strujnica pri osnosimetričnom strujanju

$$v_r dz - v_z dr = 0$$

može da se integriše ako se leva strana dovede do totalnog diferencijala $d\psi$ neke funkcije ψ . Kako gornja jednačina nije egzaktna jer nije ispunjen uslov

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{\partial(-v_z)}{\partial z}, \quad \text{odnosno} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r},$$

koji se lako dokazuju primenom jednačine kontinuiteta

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

ako se napiše u obliku jednakosti

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = \frac{\partial(-rv_z)}{\partial z}.$$

Sada se lako zaključuje da je r integracioni množitelj diferencijalne jednačine strujnica, te iz

$$d\psi = rv_r dz - rv_z dr = 0$$

sledi

$$\psi(r, z) = C = \text{const.}$$

Za proizvoljne vrednosti konstante C dobija se sistem krivih u meridijanskoj ravni rOz , odnosno sistem obrtnih površina u prostoru. Funkcija $\psi(r, z)$ je strujna funkcija ili Stoksova funkcija.

Iz relacije

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = rv_r dz - rv_z dr$$

slede jednačine

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

koje omogućuju da se odredi brzina kada je poznata strujna funkcija, i obratno.

Protok fluida Q kroz ma koju obrtnu površinu može se izračunati primenom funkcije Ψ .

Neka, u opštem slučaju, površina nastaje obrtanjem meridijske krive AB oko z-ose. Ovde je vektor elementarne površine

$$d\vec{A} = [rd\theta \vec{e}_\theta, d\vec{k}] ,$$

a skalarni proizvod

$$\begin{aligned} (\vec{v}, d\vec{A}) &= (\vec{v} [rd\theta \vec{e}_\theta, d\vec{k}]) = rd\theta (\vec{v}, [\vec{e}_\theta, d\vec{k}]) = \\ &= d\theta \cdot r(v_r dz - v_z dr) = d\theta \cdot d\Psi . \end{aligned}$$

Sada je protok

$$Q = \int_A^B (\vec{v}, d\vec{A}) = \int_A^B d\theta d\Psi = \int_A^B d\theta \int_0^{2\pi} d\Psi = 2\pi (\Psi_B - \Psi_A) .$$

Prema tome, protok kroz obrtnu površinu u odnosu na z-osu iznosi koliko i 2π puta razlika vrednosti strujne funkcije Ψ u krajnjim tačkama meridijske krive.

Za osnosimetrično strujanje važe svi zaključci koji su izvedeni za ravansko strujanje, a odnose se na protok fluida kroz zatvorenu površinu i jednoznačne ili višeznačne strujne funkcije.

BRZINSKI POTENCIJAL. Iz

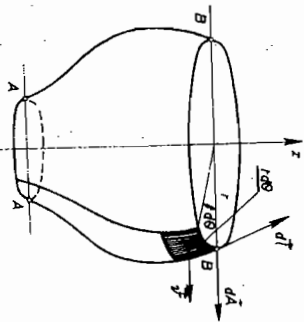
$$2\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} r\vec{e}_r & \vec{e}_\theta & z\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & 0 & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \vec{e}_\theta$$

sledi

$$\omega_r = \omega_z = 0 \quad \text{i} \quad \omega_\theta = \omega .$$

Ako je strujanje potencijalno, tj.

$$2\omega_\theta = 2\omega = \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0$$



onda postoji potencijal brzine $\phi(r, z)$ koji zadovoljava uslove

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} , \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

a koristeći strujnu funkciju $\Psi(r, z)$, datje je

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} , \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} .$$

Ove jednačine igraju važnu ulogu pri proučavanju osnosimetričnih strujanja, slično Koši-Rimanovim jednačinama kod ravanskih strujanja, ali za razliku od njih ove ne obezbeđuju sve potrebne uslove koji dozvoljavaju primenu funkcija kompleksne promenljive.

Gornje jednačine omogućavaju da se odredi funkcija $\Psi(r, z)$ kad je poznat potencijal brzine $\phi(r, z)$ i obratno.

Iz

$$\text{div } \vec{v} = \text{div grad } \phi = 0$$

sledi

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 ,$$

a iz $\text{rot } \vec{v} = 2\vec{\omega} = 0$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 .$$

Ove jednačine su linearne i zato dopuštaju da se slažu osnovna strujanja radi dobijanja složenijih.

Primeri.

1. Brzina prostornog osnosimetričnog strujanja nestišljivog fluida paralelna je z-osi i usmerena u pozitivnom smeru ove ose. Velicina brzine je v_0 . Odrediti, ako je moguće, potencijal brzine i strujnu funkciju ovog strujanja.

Rešenje.

Pošto je strujanje, dato komponentama brzina $v_r = 0$ i $v_z = v_0$, potencijalno jer je

$$\text{rot } \vec{v} = 2\vec{\omega} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \vec{e}_\theta = 0 ,$$

postoji potencijal brzine $\phi(r, z)$ koji sledi iz jednačina

$$v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = v_0 \quad \text{i} \quad v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 .$$

Prva jednačina daje

$$\phi(r, z) = v_0 z + f(r),$$

a druga

$$f(r) = C = \text{const.}$$

te je traženi potencijal

$$\phi(r, z) = v_0 z + C.$$

Istim postupkom iz jednačina

$$v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = v_0 \quad \text{i} \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

sledi tražena strujna funkcija u obliku

$$\psi(r, z) = -\frac{1}{2} v_0 r^2 + C_1.$$

2. Data je funkcija potencijala brzine osmosimetričnog prostornog strujanja nestišljivog fluida

$$\phi = \frac{A}{2} (r^2 - 2z^2).$$

a) Pokatati da je ova funkcija harmonijska.

b) Odrediti odgovarajuću strujnu funkciju ψ , ako je $\psi(0, 0) = 0$, skicirati strujnu sliku u ravni simetrije rOz (meridijanskoj ravni) i naznačiti smer strujanja.

c) Ako je $A = 1/2 \text{ s}^{-1}$, a r i z su zadani u metrima, odrediti strujnu površinu oko pozitivnog dela z -ose tako da između te površine i ravni $z=0$ protiče $Q = 50 \text{ m}^3/\text{s}$ fluida.

Rešenje.

a) Potencijal brzine ϕ je harmonijska funkcija jer zadovoljava Laplasovu jednačinu

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = A + \frac{1}{r} Ar - 2A = 0.$$

b) Iz jednačina

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad \text{i} \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

poznatim postupkom nalazi se strujna funkcija u obliku

$$\psi = Ar^2 z.$$

Za $\psi = 0$ sledi $r=0$ i $z=0$, odnosno nulte strujnice su koordinatne ose. Ostale strujnice $\psi = C$ date su jednačinom

$$z = \frac{C_1}{r^2}.$$

c) Kako je u ovom

slučaju strujna funkcija data izrazom

$$\psi = \frac{r^2 z}{2},$$

to je, po definiciji i prena uslovima zadatka, protok jednako

$$Q = 2\pi(\psi_E - \psi_D) = 2\pi\left(\frac{r^2 z}{2} - 0\right) = \pi r^2 z = 50$$

odakle sledi tražena jednačina strujne površine oko pozitivnog dela z -ose u obliku

$$z = \frac{50}{\pi r^2}.$$

3. Kombinacijom jednoličnog toka nestišljivog fluida brzine v_0 u smeru pozitivne z -ose, izvora izdašnosti $e_1 = 8\pi \text{ m}^3/\text{s}$ i ponora u koji utiče $e_2 = 4\pi \text{ m}^3/\text{s}$ i nalazi se 2 m nizvodno od izvora, dolazi do formiranja rotacionog polutela oko koga je strujanje osmosimetrično. Naći brzinu jednoličnog toka v_0 kao i maksimalni pritisak u sistemu, ako se zaustavna tačka nalazi 1 m uzvodno od izvora i ako je gustina fluida ρ . Smatrati da je pritisak u beskonačnosti nula, a uticaj gravitacije zanemariti. Koordinatni početak postaviti u izvor.

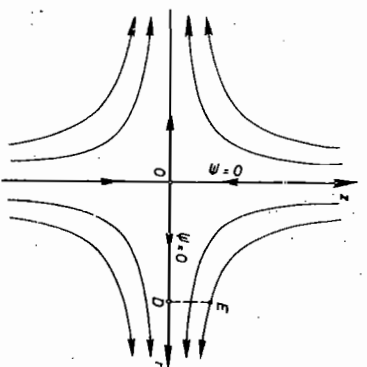
Rešenje.

Iz izraza za projekcije brzine

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

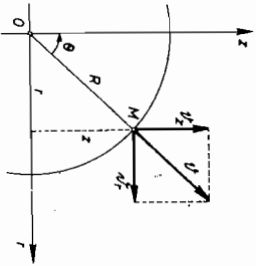
dobija se integraljenjem potencijal brzine za pojedina osnovna strujanja:

- za jednolično strujanje iz izraza za projekcije



$$v_r = 0, \quad v_z = v_0$$

sledi $\phi_1 = v_0 z$,



odakle sledi

$$\phi_2 = -\frac{v_0}{4\pi}(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

- Za strujanje u polju usamljenog ponora izdašnosti e koji se nalazi u tački $z_0=2$, istim postupkom kao i kod izvora, nalazi se

$$\phi_3 = \frac{e}{4\pi}(r^2+(z-z_0)^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Do potencijala brzine zbirnog strujanja dolazi se sabiranjem potencijala brzina osnovnih strujanja, tj.

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = v_0 z - \frac{v_0}{4\pi}(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{e}{4\pi}(r^2+(z-z_0)^2)^{-\frac{1}{2}}$$

a odavde je
$$v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = v_0 + \frac{e z}{4\pi(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}} - \frac{e(z-z_0)}{4\pi(r^2+(z-z_0)^2)^{-\frac{3}{2}}}$$

Za date podatke i iz uslova da se zaustavna tačka ($v_z=0$) nalazi u tački sa koordinatama $r=0$ i $z=-1$ nalazi se

$$v_0 = \frac{2}{z_0} - \frac{1}{(z_0-2)^2} = 1,9 \text{ m/s}$$

Kako je statički pritisak u beskonačnosti, gde je brzina fluida jednaka v_0 , jednak nuli i pošto se zanemaruje uticaj gravitacije, Bernulijeva jednačina napisana za tačku u beskonačnosti i zaustavnu tačku svodi se na

$$p_{max} = \frac{1}{2} \rho v_0^2 = 1,80$$

tj. maksimalni pritisak u ovako zadatom strujanju vlada u zaustavnoj tački i jednak je dinamičkom pritisku neuznemirene fluidne struje.

Zadaci.

1. Kontura aksijalnog (uzdužnog) polupreseka kružne odvodne cevi turbine (vidi sliku) projektovana je prema krivoj čiji je analitički izraz $r^2 z = 1$. Za potencijalno strujanje nestišljivog fluida unutar ovih kontura komponente brzina su date sa izrazima

$$v_r = \frac{1}{2} Br, \quad v_z = -Bz$$

a) Pokazati da je zadovoljena jednačina kontinuiteta.

b) Odrediti strujnu funkciju i funkciju potencijala brzine i skicirati mrežu strujnih linija.

c) Izračunati protok kroz proizvoljan horizontalan presek a-a na visini z i kroz proizvoljan cilindrični presek b-b na rastojanju r.

d) Odrediti brzinu u tački P ($r=z=2$ m) kada je $Q = 8\pi \text{ m}^3/\text{s}$.

Rešenje.

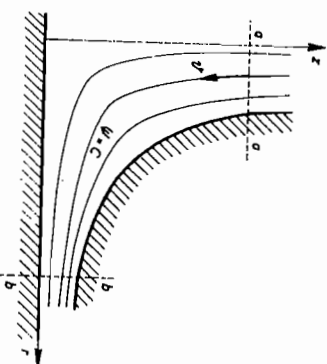
a) $\text{div } \vec{v} = 0$ b) $\psi = \frac{1}{2} Br^2 z$; $\phi = \frac{1}{2} B(\frac{r^2}{2} - z^2)$

c) $Q_{a-a} = Q_{b-b} = Br$ d) $v_P = 8\sqrt{5} \text{ m/s}$

2. Odrediti potencijal ϕ i strujnu funkciju ψ osnosimetričnog strujanja kada su poznate projekcije brzine fluida

$$v_r = 2ar^2 \quad \text{i} \quad v_z = ar^2 - 2az^2,$$

gde je a poznata konstanta.



Rešenje.

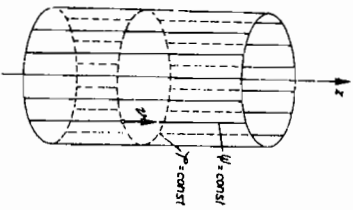
$$\phi = ar^2z - \frac{2}{3}az^3 + C_1 \quad ; \quad \psi = ar^2z^2 - \frac{1}{4}ar^4 + C_2$$

3. Ako je potencijal brzine osimosimetričnog strujanja savršene tečnosti $\phi = az + b$, sa $a > 0$ i $b > 0$, potrebno je:

- a) Proveriti da li je zadovoljena jednačina kontinuiteta,
- b) Odrediti brzinu u proizvoljnoj tački, i
- c) Naći strujnu funkciju i dati sliku strujanja.

Rešenje.

- a) $\text{div } \vec{v} = \Delta \phi = 0$
- b) $v^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 = a^2$
- c) $\psi = \frac{1}{2}ar^2 + C$



4. Za osimosimetrično strujanje savršenog nestišljivog fluida, određeno strujnom funkcijom

$$\psi = mr^4 - 2r^2z - r^2z^2 \quad ,$$

odrediti izraz za vektor vrtloga i konstantu m iz uslova da strujanje bude potencijalno. Za tu vrednost konstante m naći potencijal brzine.

Rešenje.

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \vec{e}_0 = r(4m-1) \vec{e}_0$$

$$\vec{\omega} = 0 \quad , \quad m = \frac{1}{4} \quad ; \quad \phi = \frac{2}{3}z^3 + z^2 - r^2(z+1) + C$$

5. Odrediti potencijal brzine ϕ i strujnu funkciju ψ za strujanje savršenog nestišljivog fluida u polju usamljenog izvora izdašnosti ϵ , smeštenog u koordinatni početak.

Rešenje.

$$\phi = -\frac{\epsilon}{4\pi} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad \psi = \frac{\epsilon}{4\pi} (z(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - 1)$$

6. Odrediti potencijal brzine ϕ i strujnu funkciju

ψ za strujanje u polju usamljenog izvora izdašnosti ϵ , smeštenog u koordinatni početak, združeno sa jednolikim strujanjem čije su projekcije brzine $v_r = 0$ i $v_z = v_0$.

Rešenje.

$$\phi = v_0 z - \frac{\epsilon}{4\pi} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad \psi = -\frac{1}{2}v_0 r^2 - \frac{\epsilon}{4\pi} (1 - z(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}})$$

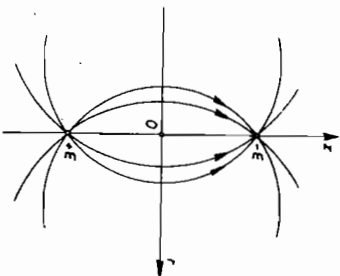
7. Odrediti potencijal brzine i strujnu funkciju osimosimetričnog strujanja savršenog nestišljivog fluida u polju izvora i ponora istih izdašnosti ϵ , smeštenih u tačkama $z_1 = -a$ i $z_2 = a$, i protok kroz konturnu $r^2 + z^2 = 2a^2$.

Rešenje.

$$\phi = -\frac{\epsilon}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-a)^2}} \right)$$

$$\psi = \frac{\epsilon}{4\pi} \left(\frac{z+a}{\sqrt{r^2 + (z+a)^2}} - \frac{z-a}{\sqrt{r^2 + (z-a)^2}} \right)$$

$$Q = 0$$



6.3. KONTROLNA PITANJA

1. Izabrati vrednost funkcije ϕ koje zadovoljavaju jednačinu kontinuiteta:

- a) x^2+y^2 b) $\sin x$ c) $\ln(x+y)$ d) $x+y$
 e) nijedan od odgovora.

2. U nevtložnoj struji idealnog fluida:

- a) postoji potencijal brzine,
 b) delioci moraju da se kreću pravolinijski,
 c) kretanje mora da bude jednoliko,
 d) strujanje je uvek stacionarno,
 e) brzine fluida na graničnim površinama moraju da budu jednake nuli.

3. Ako funkcija ϕ zadovoljava Laplasovu jednačinu:

- a) mora biti linearna po x i y ,
 b) mogućan je slučaj obrtne fluide struje,
 c) nije neophodno da zadovoljava i jednačinu kontinuiteta,
 d) mogućan je slučaj fluide struje,
 e) nijedan od odgovora.

4. Ako su funkcije ϕ_1 i ϕ_2 rešenja Laplasove jednačine, koja od sledećih su takodje rešenja iste jednačine:

- a) $\phi_1 - 2\phi_2$ b) $\phi_1 \phi_2$ c) ϕ_1 / ϕ_2 d) ϕ_1^2
 e) nijedan od odgovora.

5. Odabrati relacije koje važe za nevtložno strujanje:

- a) $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = 0$ b) $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$ c) $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = 0$
 d) $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$ e) nijedan od odgovora.

6. Koši-Lagranž jednačina za stacionarno strujanje

idealnog fluida tvrdi:

- a) da je brzina konstantna duž strujnice,
 b) da je energija konstantna duž strujnice ali može da se menja kroz strujnice,
 c) da se pritisak povećava kada se brzina povećava,

- d) da je energija konstantna kroz fluid,
 e) da je protok kroz bilo koju malu oblast jednak nuli.

7. Izabrati relaciju koja može da se održi u dvodimenzijskoj nevtložnoj struji:

- a) $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ b) $\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ c) $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ d) $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$
 e) nijedan od odgovora.

8. Dvodimenzijaska strujna funkcija:

- a) konstantna je na ekvipotencijalnim površinama,
 b) konstantna je duž strujnice,
 c) definisana je samo za nevtložnu struju,
 d) daje vezu između brzine i pritiska.

9. U dvodimenzijskoj struji je $\psi(0,2)=4 \text{ m}^2/\text{s}$ i $\psi(0,1)=2 \text{ m}^2/\text{s}$. Protok između te dve tačke je:

- a) beskonačan b) $4\pi \text{ m}^3/\text{s}$ c) $2 \text{ m}^3/\text{s}$ d) $1/\pi \text{ m}^3/\text{s}$
 e) nula.

10. Granični uslov za stacionarno strujanje idealnog fluida je:

- a) brzina na granici jednaka nuli,
 b) normalna komponenta brzine na granici jednaka nuli,
 c) tangencijalna komponenta brzine na granici jednaka nuli,
 d) granična površina mora biti nepokretna,
 e) mora biti zadovoljna jednačina kontinuiteta.

11. Ekvipotencijalne površine:

- a) nemaju tangencijalnu komponentu brzine,
 b) sastavljene su od strujnica,
 c) su površine strujanja,
 d) su površine s jednakim dinamičkim pritiskom,
 e) nijedan od odgovora.

12. Izvor u dvodimenzijskoj struji:

- a) je tačka iz koje se zamišlja da fluid ističe jednoliko u svim pravcima,

GLAVA 7

LAMINARNO STRUJANJE (VISKOZNOG FLUIDA)

- b) je linija iz koje se zamišlja da fluid ističe jednoliko u svim pravcima pod pravim uglom na nju,
- c) ima stujnice kao koncentrične krugove,
- d) ima potencijal brzine nezavisan od radijusa,
- e) ima jačinu (izdašnost) definisanu kao protok po jedinici dužine.

13. Dvodimenzijski vrtlog:

- a) ima jačinu datu cirkulacijom oko zatvorene konture gde je uključen i vrtlog,
- b) ima radijalne stujnice,
- c) ima nultu cirkulaciju oko njega,
- d) ima raspored brzine koji varira direktno sa radijalnim rastojanjem od vrtloga,
- e) stvara takav raspored brzine da postoji obrtanje fluida.

14. U ravanskom strujanju jednolika struja u pozitivnom smeru x-ose data je sa:

- a) $\phi = x$ b) $\phi = -y$ c) $\psi = y$ d) $\psi = x$ e) $\psi = -y$.

15. Otpor idealnog fluida oko kružnog cilindra sa cirkulacijom je:

- a) $\rho v_0 \Gamma$ b) $\rho v_0^2 \pi a^2 / 2$ c) $\rho v_0^2 \Gamma$ d) $\rho v_0 \Gamma^2$
e) nijedan od odgovora.

16. Uzgon idealnog fluida oko kružnog cilindra sa cirkulacijom je:

- a) $\rho v_0 \Gamma$ b) $\rho v_0^2 \pi a^2 / 2$ c) $\rho v_0^2 \Gamma$ d) $\rho v_0 \Gamma^2$
e) nijedan od odgovora.

Laminarno strujanje - slojevito kretanje fluida bez prelaska fluidnih delića iz sloja u sloj - predstavlja jednostavniji strujni režim od turbulentnog i potpuno je opisano Navije-Stoksovima jednačinama i jednačinom kontinuiteta. Prilikom proučavanja viskoznih uticaja na kretanje fluida, skoro uvek se zanemaruju kompresibilni efekti. Vektorski i skalarni oblik (Dekartov koordinatni sistem) Navije-Stoksovih diferencijalnih jednačina kretanja dat je sa

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \nu \text{grad} \text{div} \vec{v} \quad (1)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x} \text{div} \vec{v}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial y} \text{div} \vec{v}$$

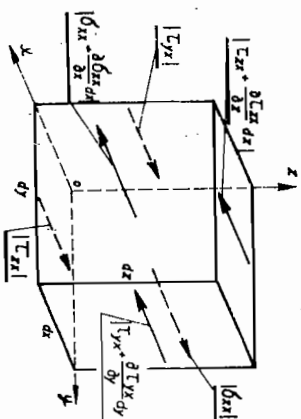
$$\frac{dv_z}{dt} = z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial z} \text{div} \vec{v} \quad (2)$$

Ove jednačine predstavljaju proširenje Ojlerovih jednačina kretanja za savršen fluid, gde je uticaj viskoznih sila (po jedinici fluidne mase) određjen sa poslednja dva člana na desnoj strani jednačina.

Viskozne sile odredjuju proizvod elementarnih

napona (tangencijalnih i normalnih) usled čiste viskoznosti (v. poglavlje 3.4.4.2.), sa površinama na koje oni dejstvuju. Mpr. viskozne sile u pravcu x-ose (v. sliku) su jednake zbiru

$$d\tau_{zx} dy dx + d\tau_{yx} dz dx + d\tau_{xx} dz dy$$



gde su: $dr_{zx} = \frac{\partial r_{zx}}{\partial z} dz$; $dt_{yx} = \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} dy$;

$d\sigma_{xx} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx$.

Kako su (v. poglavlje 3.4.4.3.)

$\tau_{zx} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$; $\tau_{yx} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$; $\sigma_{xx} = 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \eta \text{div } \vec{v}$;

projekcija viskoznihi sila u pravcu x-ose je

$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \eta \text{div } \vec{v} \right] \right\} dx dy dz$,

odnosno po jedinici mase ($\rho dx dy dz$)

$v \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right)$;

što dovodi do

$\nu \Delta v_x + \frac{1}{3} v \frac{\partial}{\partial x} \text{div } \vec{v}$.

Za laminarno stacionarno strujanje nestišljivog fluida važi

$\text{div } \vec{v} = 0$,

pa jednačine (1) i (2) prelaze u

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{v}$ (3)

$\frac{dv_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x$

$\frac{dv_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y$ (4)

$\frac{dv_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z$,

gde su na levoj strani jednačine inercijalne sile, a redom na desnoj strani: spoljašnje sile, sile pritiska i viskozne sile. Razvijen oblik jednačina (4) je

$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$
 $\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right)$

$\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$;

sa pratećom jednačinom kontinuiteta

$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$.

U cilindarskim koordinatama projekcije inercijske sile po jedinici mase fluida, tj. projekcije ubrzanja su date sa (v. poglavlje 3.2.2.2.)

$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} v_z - \frac{v_\theta^2}{r}$
 $\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} v_z + \frac{v_r v_\theta}{r}$
 $\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z$,

a projekcije viskoznihi sila tj. projekcije $\Delta \vec{v}$ (v. poglavlje 3.2.2.1.2.)

$\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}$
 $\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}$
 $\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$;

pa su skalarne jednačine za stacionarno laminarno strujanje nestišljivog fluida

$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} v_z - \frac{v_\theta^2}{r^2} =$

$= F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right)$

$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} v_z + \frac{v_r v_\theta}{r} =$

$= F_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right)$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right); \quad (4')$$

sa jednačinom kontinuiteta

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Pri laminarnom strujanju nestišljivog fluida Navije-Stoksova jednačina se razlikuje od Ojlerove za član Δv . Kako iz

$$\text{rot rot } v = \text{grad div } v - \Delta v,$$

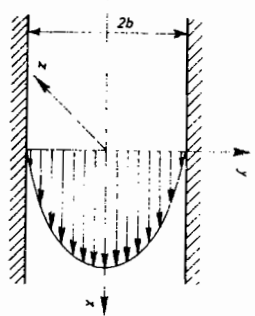
pri $\dot{v} = \text{grad } \phi + \text{rot } v = 0$ uz $\text{div } v = 0$, sledi da je $\Delta v = 0$,

tj. da velika grupa problema iz strujanja kako viskozno, tako i savršenog fluida ima zajedničko rešenje, jer se opisuje istim jednačinama. Međutim, zbog različitih grančnih uslova i rešenja su sasvim različita. Na primerima koji slede mogu se uočiti karakteristike grančnih uslova koji se najčešće javljaju.

Do izraza za raspored pritiska i brzine može se doći postavljanjem uslova hiramične ravnoteže za izdvojenju elementarnu fluidnu zapreminu. Ova analiza je zecno priena- niti kada se inercijske sile mogu zanemariti. Tangencijalni napon, koji određuje silu trenja, nalazi se posredstvom Njutnovog zakona (v. primer 1.)

Primeri.

1. Za ravansko stacionarno i nestišljivo, laminarno strujanje (viskozno) fluida između dve nepokretne paralelne ploče, potrebno je da se odredi raspored brzine i vrsta strujanja. Fluid se nalazi u polju zemljine teže.



Rešenje.

Karakteristike ovakvog strujanja su sledeće:
- strujanje je ravansko tj. $v_z = v_y = 0$ i $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$,
- postoji samo brzina u pravcu x-ose $v = v_x$,
- spoljašnje sile imaju svoj potencijal $\vec{f} = \text{grad } U$ gde je $U = -gy$.

Jednačina kontinuiteta

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

i Navije-Stoksove jednačine

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

se svode na

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

1

$$0 = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$0 = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$0 = Z$$

Jednačina kontinuiteta pokazuje da brzina v_x zavisi samo od promenljive y

$$v_x = f(y)$$

U ovom trenutku je pogodno uvesti generalisani pritisak

$$P = p - \rho U,$$

te na taj način objediniti spoljašnje sile i sile pritiska.

Tako je $\vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = -\frac{1}{\rho} \text{grad } P$

tj.

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g$$

Iz $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$

sledi da generalisani pritisak p nije zavisan od y. Kako ne zavisi ni od z ostaje $p = f(x)$.

Sa generalisanim pritiskom p jednačina

$$0 = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -k,$$

postaje

gde leva i desna strana zavise od različitih nezavisno promenljivih x i y te su obe strane jednake konstantnoj vrednosti (-k).

Integraleći prvo

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{k}{\eta} \quad \text{tj.} \quad \frac{d^2 v_x}{dy^2} = -\frac{k}{\eta};$$

$$\frac{dv_x}{dy} = -\frac{k}{\eta} y + C_1$$

$$v_x = -\frac{k}{2\eta} y^2 + C_1 y + C_2;$$

i ponovo

sa graničnim uslovima $v_x = 0$ za $y = \pm b$ koji određuju konstante integracije $C_1 = 0$; $C_2 = \frac{k}{2\eta} b^2$;

dobija se parabolični raspored brzine po preseku 2b

$$v_x = \frac{k}{2\eta} (b^2 - y^2).$$

Iz $\frac{\partial p}{\partial x} = -k$ tj. $\frac{dp}{dx} = -k$

sledi $P = -kx + C_3,$

a sa graničnim uslovom $P = P_0$ za $x = 0$

$$P = P_0 - kx,$$

što znači da generalisani pritisak opada linearno u pravcu strujanja.

Fizički smisao konstante k se vidi iz

$$k = - \frac{dp}{dx}$$

i predstavlja vrednost jediničnog pada pritiska p duž ose x jer važi,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx}.$$

Profil brzine se može predstaviti i sa

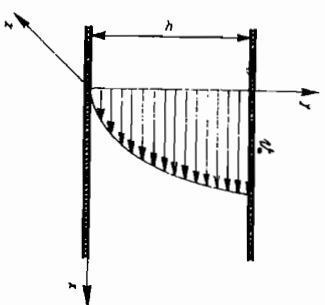
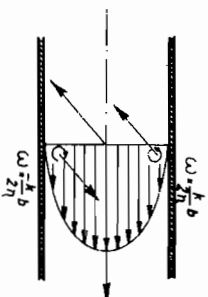
$$v_x = - \frac{dp}{dx} \frac{1}{2\eta} (b^2 - y^2).$$

Strujanje je vrtložno jer je

$$\text{rot } \vec{v} = 2\omega_x \vec{i} + 2\omega_y \vec{j} + 2\omega_z \vec{k} = \frac{k}{\eta} y \vec{k}$$

tj. $\omega_x = \omega_y = 0$; $\omega_z = \frac{k}{2\eta} y$.

Vrtlozi su elementarni - fluidni delići se obrću oko svoje ose i raspoređeni su u xy ravni. Pri ovakvom kretanju delići se međusobno ne mešaju tako da je karakter strujanja i pored postojanja ovih elementarnih vrtloza laminaran (slojevit). Najjači intenzitet vrtložnja je neposredno uz granične površine.



2. Posmatra se ravnansko, stacionarno, laminarno strujanje nestišljivog fluida između dve paralelne ploče, od kojih se gornja kreće konstantnom brzinom v_0 (Kue-tovo strujanje). U zavisnosti od rastojanja h između ploča, brzine v_0 i podužnog pada pritiska k, odrediti i klasifikovati raspored brzine u

funkciji od najpogodnijeg bezdimenzijskog parametra. Odredi-ti protok izmedju ploča.

Rešenje.

Raspored brzina je određen opštim oblikom izve-denim u prethodnom primeru

$$v_x = -\frac{k}{2\eta}y^2 + C_1y + C_2$$

Sa grančnim uslovima

$$v_x = 0 \text{ za } y=0$$

$$v_x = v_0 \text{ za } y=h$$

Koji određuju konstante integracija

$$C_1 = \frac{v_0 kh}{h + \frac{2\eta v_0}{k}} ; C_2 = 0$$

nalazi se raspored brzine u sledećem bezdimenzijskom obliku

($v = v_x$)

$$\frac{v}{v_0} = \frac{Y}{h} \left[1 + \frac{kh^2}{2\eta v_0} \left(1 - \frac{Y}{h} \right) \right]$$

Raspored brzine, dakle, zavisi od vrednosti bezdimenzijske veličine

$$\frac{kh^2}{2\eta v_0} = N$$

Pozitivna vrednost k odgovara padu pritiska duž x-ose pa:

$N > 0$ označava smanjenje pritiska pravcem strujanja;

$N = 0$ daje brzine $v > 0$ i njihov linearan raspored

$v = v_0 \frac{Y}{h}$, bez promene pritiska pravcem strujanja.

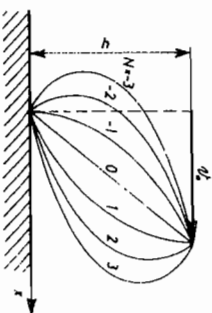
Ovakvo strujanje se naziva prostim Kuetovim i pos- ledica je samo viskoznih sila;

$N < 0$ znači da se mogu pojaviti negativne brzine tj.

struja se može okrenuti unazad zbog porasta pri- tiska pravcem x-ose.

Za različite vrednosti

gradijenta pritiska k tj. veliči- ne N dobijaju se profilji brzine koji su pokazani na slici. Za vred- nosti $N < -1$ u blizini nepokretne ploče, brzina je usmerena unazad zbog nepovoljnog gradijenta pri- tiska (porast pritiska pravcem x-ose)



koji je u toj oblasti jači od viskoznih sila.

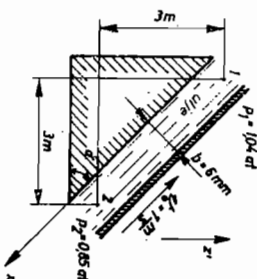
Protok izmedju ploča, koje su pravcem z-ose jedi- nične dužine, određen je sa

$$Q = \int_0^h v dy = \frac{h}{12\eta} (6\eta v_0 + kh^2) = \frac{h v_0}{6} (3 + N)$$

Za vrednost $N = -3 + Q = 0$.

3. Ravna ploča se kreće

jednolikom brzinom $v_0 = -1 \frac{m}{s}$ paralel- no stromoj ravni kao što je pokazano na slici. Odrediti raspored brzina, protok i tangentialni napon na gornjoj ploči, ako je pored podataka datih na slici $\rho = 875 \frac{kg}{m^3}$ i $\eta = 0,0802 \text{ Pas}$.



Rešenje.

Opšte rešenje rasporeda brzine

$$v_x = -\frac{k}{2\eta} y^2 + C_1 y + C_2$$

sa grančnim uslovima $v_x = 0$ za $y=0$ i $v_x = v_0$ za $y=b$, tj. inte- gracionim konstantama

$$C_1 = \frac{v_0 k}{b + \frac{2\eta}{k}} ; C_2 = 0$$

određuje raspored brzine

$$v_x = \frac{v_0 k}{b + \frac{2\eta}{k}} (by - y^2)$$

gde je

$$k = -\frac{dp}{dx}$$

Gradijent generalisanog pritiska $\frac{dp}{dx}$ predstavlja se sa

$$\frac{d}{dx}(p - \rho U) = (\rho_2 + \rho g z_2^2) - (\rho_1 + \rho g z_1^2)$$

Ede je osa z usmerena vertikalno naviše.

Tako je

$$\frac{dp}{dx} = \frac{[8500 - (10400 + 3 \cdot 875)] \cdot 9,81}{4,24} = -10469 \frac{\text{Pa}}{m}$$

a raspored brzine

$$v_x = -\frac{Y}{0,006} + 2 \cdot 0,0802(0,006y - y^2) = -\frac{Y}{0,006} + 65268(0,006y - y^2) \frac{m}{s}$$

gde je y [m].

Maksimalna brzina je na

mestu y gde je $\frac{dv_x}{dy} = 0$

tj.

$$-\frac{1}{0,006} + 392 - 131256y = 0 \quad y = 1,72 \text{ mm}$$

i iznosi

$$v_{\max} = 0,194 \frac{m}{s}$$

Profil brzine je prikazan na slici.

Protok je

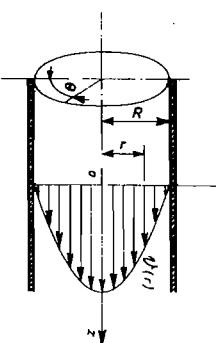
$$Q = \int_0^{0,006} \left[-\frac{Y}{0,006} + 65268(0,006y - y^2) \right] dy = -0,50 \frac{m^3}{s}$$

Tangencijalni napon na gornjoj ploči je određen sa

$$\tau = \eta \left(\frac{dv_x}{dy} \right)_{y=b} = 0,0802 \cdot \left(-\frac{1}{0,006} + 392 - 131256 \cdot 0,006 \right) = -45,1 \frac{N}{m^2}$$

4. Odrediti raspored

brzine, protok i vrstu strujanja za ustaljeno, nestišljivo, laminarno kretanje fluida kroz horizontalnu okruglu cev konstantnog preseka.



Rešenje.

Karakteristike ovog strujanja su sledeće:

- strujanje je osnosimetrično i sve veličine su nezavisne od ugla θ ; tj. $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$
- postoji samo aksijalne brzine $v_r = v_\theta = 0$; $v = v_z$
- spoljašnje sile imaju svoj potencijal $\vec{f} = \text{grad} \mu$.

Jednačine kontinuiteta

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

i Navije-Stoksove jednačine

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} v_r + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z - \frac{v_\theta^2}{r} =$$

$$= F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} \right)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} v_r + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z + \frac{v_r v_\theta}{r} =$$

$$= F_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{2v_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} \right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} v_r + \frac{\partial v_z}{\partial \theta} v_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z =$$

$$= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right),$$

se svode na

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$0 = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$0 = F_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$0 = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right).$$

Brzina $v = v_z$ je zavisna samo od promerljive r $v = v_z = f(r)$.

Sa generalisanim pritiskom $P = p - \rho U$ spoljašnje sile i sile pritiska se predstavljaju jednim članom

Tako je

$$\vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p = -\frac{1}{\rho} \text{grad} P = -\frac{1}{\rho} \text{grad} (p - \rho U)$$

$$F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}$$

$$F_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - F_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right).$$

Poslednje jednačine određuju nezavisnost generisanog pritiska od koordinata r i θ jer je

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad \text{t.j.} \quad P = f(z)$$

i jednakost

$$\frac{dP}{dz} = \eta \left(\frac{d^2 v_z}{dz^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dz} \right) = -k$$

Jednačina

$$\frac{d^2 v_z}{dz^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dz} = -\frac{k}{\eta}$$

se lako svodi na

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dv_z}{dr} \right) = -\frac{k}{\eta}$$

Odatle je

$$\frac{dv_z}{dr} = -\frac{k}{2\eta} r + \frac{C_1}{r},$$

odnosno

$$v_z = -\frac{k r^2}{4\eta} + C_1 \ln r + C_2$$

Granični uslovi

$$v_z = 0 \quad \text{za} \quad r = R \quad \text{i} \quad v_z = \text{konstanta} \quad \text{za} \quad r = 0$$

određuju

$$C_1 = 0 \quad \text{i} \quad C_2 = \frac{k R^2}{4\eta},$$

t.j. parabolični raspored brzine po preseku okrugle cevi

$$v_z = \frac{k}{4\eta} (R^2 - r^2)$$

Protok je

$$Q = \int_0^R v_z 2\pi r dr = \frac{2\pi k}{4\eta} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi k R^4}{8\eta}$$

Kako je maksimalna brzina u preseku za r=0 $v_z = v_{max} = \frac{k R^2}{4\eta}$

i srednja brzina

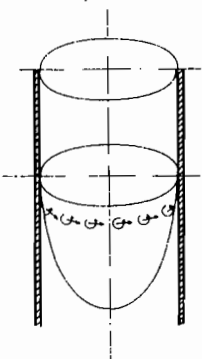
$$v_{sr} = \frac{4Q}{R^2 \pi} = \frac{k R^2}{8\eta}$$

sledi

$$v_{max} = 2 v_{sr}$$

Intenzitet i orijentacija vrtloga su određeni sa

$$\text{rot } \vec{v} = 2\omega_x \vec{r}_0 + 2\omega_y \vec{\theta}_0 + 2\omega_z \vec{z}_0 =$$



$$= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{r}_0 & r \vec{\theta}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & v_z \end{vmatrix}$$

odnosno

$$\omega_\theta = -\frac{r}{2} \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{k}{4\eta} r$$

Vrtlozi su elementarni, ne narušavaju laminaran karakter strujanja, sa smerom vrtloženje označenim na slici.

Konstanta k predstavlja jedinični pad pritiska,

te sledi

$$k = \frac{\Delta P}{\Delta l} = \rho \lambda \frac{v^2}{2},$$

a odatle koeficijent trenja laminarnog strujanja kroz cev kružnog preseka

$$\lambda = \frac{2DK}{\rho v^2} = \frac{R^2}{\rho v^2} = \frac{64}{\text{Re}} = \frac{64}{\frac{v D}{\nu}}$$

Dobijene zavisnosti važe za stabilno stanje laminarnog strujanja, koje se obrazuju u cevi tek na nekom udaljenju od ulaza. Rastojanje formiranog laminarnog tečenja u cevi zavisi od prečnika cevi i Re broja, a određuje se sa

$$\lambda_{poč} = 0,03 \text{ Re}^2$$

Radi približnog određivanja gubitka u ovoj početnoj cevnoj deonici može se usvojiti

$$\lambda = \frac{70}{\text{Re}}$$

5. Razmatra se stacionarno ravansko strujanje viskozno fluida između dve ravne, vrlo bliske, paralelne ploče. Rastojanje između njih je h i smatra se da su horizontalne i paralelne x,y ravni. Zanimaju se: komponenta brzine u pravcu z-ose v_z i sve sile, izuzev $Z=g$ - usled gravitacije.

Potrebno je odrediti raspored brzina v_x i v_y , kao i njihove srednje vrednosti.

Rešenje.

Navije-Stoksove jednačine u odnosu na postavljene uslove glase

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right)$$

$$0 = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

Integracija treće jednačine dovodi do uslova

$$p = \rho g z + f(x, y),$$

Koji pokazuje da su $\frac{\partial p}{\partial x}$ i $\frac{\partial p}{\partial y}$ nezavisni od z.

Zbog malog rastojanja između ploča postoje još gradijenti

$\frac{\partial v_x}{\partial z}$ i $\frac{\partial v_y}{\partial z}$, tako da se u odnosu na njih mogu zanemariti $\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}$ i $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, $\frac{\partial v_y}{\partial y}$. Sa ovakvim pretpostavkama prve dve jednačine postaju

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = \eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}$$

Koje se sada mogu integraliti pošto je $\frac{\partial p}{\partial x}$ i $\frac{\partial p}{\partial y}$ nezavisno od z. Tako je

$$v_x = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$$

$$v_y = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{z^2}{2} + C_1' z + C_2'$$

Sa grančnim uslovima (v.sliku) $v_x = v_y = 0$ za $z = \pm \frac{h}{2}$ sledi

$$C_1 = C_1' = 0 \quad ; \quad C_2 = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^2}{8} \quad ; \quad C_2' = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{h^2}{8}$$

Prema tome

$$v_x = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (z^2 - \frac{h^2}{4}) \quad ; \quad v_y = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial y} (z^2 - \frac{h^2}{4})$$

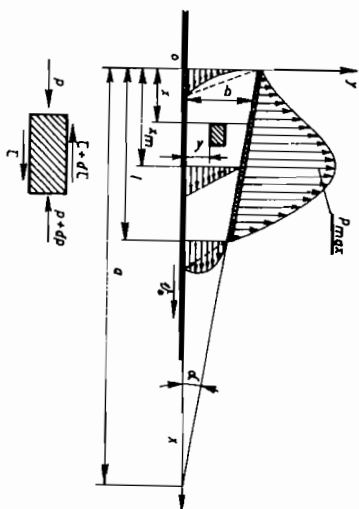
Srednje brzine u x i y pravcima određuju se integracijom po preseku i iznose

$$v_{xsr} = \frac{2}{h} \int_0^{h/2} v_x dz = -\frac{h^2}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$v_{ysr} = \frac{2}{h} \int_0^{h/2} v_y dz = \frac{h^2}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y}$$

6. Odredi-

ti protok kroz zazor kliznog ležišta i raspored pritiska duž klina tečnosti, ako je ugao klina α a donja površina se kreće udensno konstantnom brzinom v_0 . Pretpostavlja se da je strujanje navansko i da je $p = f(x)$.



Rešenje.

Za izdvojeni ni fluidni element, zanemarujući inercijske sile u odnosu na sile pritiska i trenja, jednačina ravnoteže sila glasi

$$-d\tau dx - dp dy = 0 \quad ;$$

ili $\frac{d\tau}{dy} = -\frac{dp}{dx}$.

Kako je $\tau = -\eta \frac{dv}{dy}$ (znak - je zbog toga što porastu τ odgovara smanjenje v), sledi

$$\eta \frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{dp}{dx}$$

Posle dva integraljenja dobija se

$$\eta v + C_1 y + C_2 = \frac{y^2}{2} \frac{dp}{dx}$$

Koristeći granične uslove

$$v = v_0 \quad \text{za} \quad y = 0 \quad \text{i} \quad v = 0 \quad \text{za} \quad y = b$$

gde je b promenljiva visina zazora, dobija se

$$v = v_0 \left(1 - \frac{y}{b} \right) - \frac{dp}{dx} \frac{by - y^2}{2\eta}$$

Protok tečnosti kroz zazor, po jedinici širine je

$$Q = \int_0^b v dy = \frac{v_0 b}{2} - \frac{dp}{dx} \frac{b^3}{12\eta}$$

Protok tečnosti kroz poprečni preseka klina je suma protoka usled trenja i postojanja gradijenta pritiska duž ose x.

Pri nekoj vrednosti $x = x_m$, $\frac{dP}{dx} = 0$. Za sve vrednosti $x < x_m$, $\frac{dP}{dx} > 0$ i ukupan protok je jednak različiti protoka usled trenja i protoka usled pritiska. Za sve vrednosti $x > x_m$, $\frac{dP}{dx} < 0$ i ukupan protok je jednak zbiru komponentnih protoka. Rasporedi brzina po poprečnom preseku klina prikazani su na slici.

Zamenjujući

$$b = (a-x) \operatorname{tg} \alpha = (a-x) \alpha,$$

dobija se sledeći zakon rasporeda pritiska po dužini (v. sliku)

$$p = \frac{6\eta v_0 x (l-x)}{(2a-l)(a-x)^2 \alpha^2}$$

Najveći pritisak je u tački

$$y_m = \frac{a}{2a-l} l^2$$

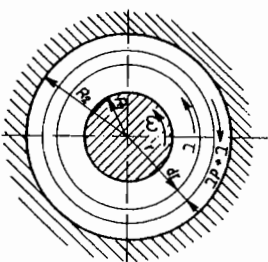
i jednak je

$$P_{\max} = \frac{3\eta v_0}{2\alpha^2} \frac{l^2}{(2a-l)(a-l)\alpha}$$

Raspored pritiska omogućava da se izračuna uzgonska sila i njena napadna tačka.

7. Odrediti raspored brzine i moment trenja za laminarnu stacionarnu struju koja se formira u prstenastom prostoru između vertikalno postavljenog, nepokretnog i obrtnog cilindra, kako je pokazano na slici. Poznati su: poluprečnici cilindara R_1 i R_2 , ugaona brzina ω i dinamička viskoznost fluida η .

Rešenje.



Jednčina momenta sila trenja, koje jedino određuju kretanje, oko ose obrtanja je

$$r^2 \pi r \rho (r+dr) 2\pi (r+dr) l (r+dr) = 0$$

Posle zanemarivanja malih članova višeg reda dobija se

$$d(r r^2) = 0$$

$$r r^2 = C$$

(1)

gde je C - konstanta ($M_{tr} = C$).

Njutnov zakon (veza tangencijalnog napona sa brzinom deformisanja), zbog krivolinijskog koordinatnog sistema nije jednostavna i određuje se posmatranjem promene elementarnog fluidnog de-lica ABCA₁ prikazanog na slici. Pomeranje spoljašnjeg u odnosu na unutrašnji sloj iznosi

$$CB_1 = BB_1 - BC = (v+dv)t - \frac{r+dr}{r} t,$$

a brzina ugaone deformacije

$$\frac{CB_1}{t} = dv - v \frac{dr}{r}$$

Tangencijalni napon je proporcijalan brzini ugaone deformacije

$$\tau = \eta \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \quad (2)$$

Dobijeni izraz predstavlja Njutnov zakon u polarnim koordinatama.

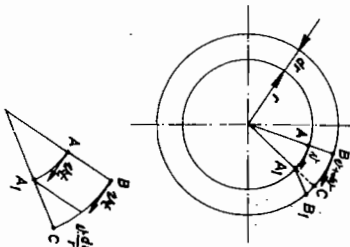
Zamenjujući r u jednačini (1) dobija se

$$\frac{dv}{dr} = \frac{v}{r} + \frac{C}{\eta r^2}$$

čiji je integral

$$v = \frac{C}{2\eta r} + C_1 r$$

Granični uslovi $v = v_0$ za $r = R_1$ i $v = 0$ za $r = R_2$, određuju raspored brzine



Tangencijalni napon na unutrašnjem cilindru je

$$v = \frac{R_1^2 R_2 - R_1 r^2}{(R_2^2 - R_1^2) r} \cdot v_0$$

$$\tau_{r=R_1} = \frac{2nR_2 v_0}{(R_2^2 - R_1^2) R_1} v_0$$

i moment trenja

$$M = 4\pi n l \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 R_1^2} \omega$$

Za pretpostavljeni linearan raspored brzine po zazoru

$$v = v_0 \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}$$

dobija se moment trenja

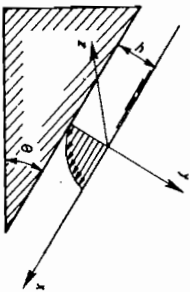
$$M' = 2\pi n l \frac{R_1^3}{R_2 - R_1} \omega$$

Odnos približnog i tačnog momenta trenja je

$$\frac{M'}{M} = \frac{1}{2} \left[\frac{R_1}{R_2} + \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right]$$

Zadaci.

1. a) Odrediti raspored brzine i protok za laminarno stacionarno strujanje konstantnom brzinom neke tečnosti niz strmu ravan pokazanu na slici.



b) Odrediti debljinu

filma vode koja struji niz vertikalnu ploču, kad je srednja brzina $0,15 \frac{m}{s}$ i $n=0,001$ Pas.

Napomena: Raspored brzine odgovara donjoj polovini rasporeda brzine za slučaj strujanja između dve paralelne nepokretne ploče.

Rešenje.

a) $v = \frac{1}{2n} k(h^2 - y^2)$; $Q = \frac{2}{3} n h^3 \sin \theta$

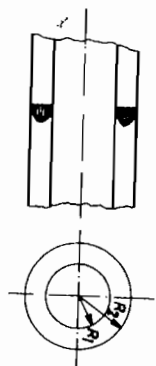
sa

$$k = - \frac{dp}{dx} = - \frac{d}{dx} (p - \rho g x \sin \theta) = \rho g \sin \theta$$

b)

$$h = 0,214 \text{ mm}$$

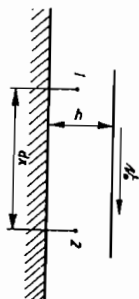
2. Naći izraz za raspored brzina laminarnog stacionarnog strujanja tečnosti između dve koncentrične cevi spoljnog poluprečnika R_2 i unutrašnjeg R_1 .



Rešenje.

$$v = \frac{1}{4n} \left[(r^2 - R_1^2) - \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{2n \frac{R_2}{R_1}} \right]$$

3. Koliki treba da je pad pritiska pri laminarnom stacionarnom strujanju tečnosti između dve paralelne ploče, od kojih se gornja kreće konstantnom brzinom v_0 , da bi protok između njih bio jednak nuli.



Rešenje.

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p_2 - p_1}{h} = \frac{6nv_0}{h^2}$$

što sledi iz

$$Q = \int_0^h v_0 \frac{y}{h} \left[1 + \frac{kh^2}{2nv_0} (1 - \frac{y}{h}) \right] dy = 0$$

4. Naći protok Q za strujanje između dve paralelne ploče, slično prethodnom zadatku, za uslov da je: a) tangencijalni napon na nepokretnoj ploči jednak nuli; b) tangencijalni napon na pokretnoj ploči jednak nuli.

Rešenje.

a) $\frac{dp}{dx} = \frac{2nv_0}{h^2}$; b) $\frac{dp}{dx} = - \frac{2nv_0}{h^2}$

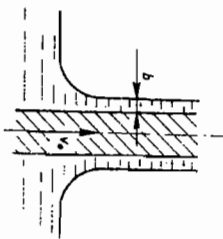
5. Za potrebe hlađenja dovodi se helijum između dve koncentrične cevi na $t=95^\circ C$ sa $n=1,80 \cdot 10^{-5}$ Pas. Prečni ci cevi su $D_2=100$ mm i $D_1=50$ mm. Helijum je približno na atmosferskom pritisku, a protok iznosi $Q=22 \frac{g}{s}$. Odrediti pad pritiska po jedinici dužine cevi.

Rešenje.

$$\frac{dp}{dx} = - 0,215 \frac{Pa}{m}$$

6. Ulje za podmazivanje ležišta dovodi se iz spremišta do taručnih površina pomoću beskrajnog kaiša pravougaonog poprečnog preseka.

Odradi debljinu sloja b i količinu ulja u jedinici vremena, ako je brzina kretanja kaiša $v_0 = 0,2 \frac{m}{s}$, a njegova širina $B = 0,02$ m. Karakteristika ulja: $\eta = 0,15$ Pas; $\rho = 900 \frac{kg}{m^3}$.



Napomena: Na spoljašnjoj granici sloja brzina ulja je jednaka nuli.

Rešenje.

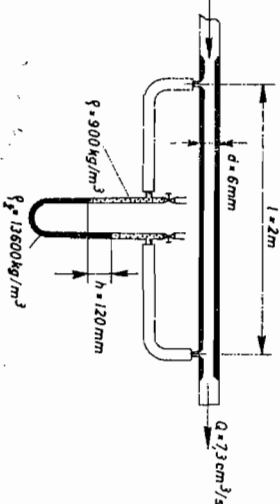
$$b = \sqrt{\frac{2\eta v_0}{\rho g}} = 2,6 \text{ mm} ; \quad Q = \frac{\rho g B d^3}{3\eta} = 6,9 \frac{cm^3}{s}$$

7. Da bi se

odredila viskoznost ulja, meri se pad pritiska pri njegovom proticanju u laminaran režim) kroz kalibrisanu cev (vidi sliku). Odradi koeficijent dinamičke viskoznosti.

Rešenje.

$$\eta = 0,0326 \text{ Pas}$$



7.1. KONTROLNA PITANJA

1. Tangencijalni napon u fluidu koji struji kroz okruglu cev je:

- nepromenljiv po celom preseku cevi,
- nula na zidovima i raste linearno do centra,
- menja se parabolino kroz presek,
- nula u osi cevi, a menja se linearno sa poluprečnikom,
- ni jedan od ovih odgovora.

2. Pri laminarnom strujanju kroz okruglu cev protok varira:

- linearno sa viskoznošću,
- sa kvadratom poluprečnika,
- inverzno sa padom pritiska,
- inverzno sa viskoznošću,
- sa kubom poluprečnika.

3. Kada je cev u nagnutom položaju, član $\frac{dp}{dz}$ se predstavlja kao:

- $-\frac{dz}{dx}$; b) $-\rho g \frac{dz}{dx}$; c) $-\frac{d(p+gz)}{dx}$;
- $-\frac{d(p+\rho z)}{dx}$; e) $-\frac{d(p+\rho gz)}{dx}$.

4. Tangencijalni napon u fluidu koji struji između dve paralelne ploče je:

- konstantan po poprečnom preseku,
- nula na pločama i raste linearno do sredine,
- menja se parabolino kroz presek,
- nula na sredini, a menja se linearno sa rastojanjem od sredine,
- ni jedan od ovih odgovora.

5. Raspored brzina za struju između dve paralelne nepokretne ploče je:

- nepromenljiv po preseku,
- nula na pločama i raste linearno do sredine,
- menja se parabolino po preseku,
- menja se zavismo od rastojanja na stepen tri-poline,
- ni jedan od ovih odgovora.

6. Protok između dve paralelne ploče, koje su na rastojanju h , kada se jedna kreće brzinom v_0 a tangencijalni napon je nula na nepokretnoj ploči, je:

- $\frac{v_0 h}{3}$; b) $\frac{v_0 h}{2}$; c) $\frac{2v_0 h}{3}$; d) $\frac{v_0 h}{4}$;
- ni jedan od odgovora.

7. Fluid se kreće laminarno između dve paralelne ploče od kojih se jedna kreće, a gradijent pritiska je

takav da je protok između njih jednak nuli. Najmanja brzina je u tački koja se nalazi na rastojanju od nepokretne ploče:

- a) $\frac{h}{6}$; b) $\frac{h}{3}$; c) $\frac{h}{2}$; d) $\frac{2h}{3}$;

e) nijedan od odgovora.

8. Vrednost minimalne brzine iz prethodnog zadat-

ka je:

- a) $-\frac{3v_0}{4}$; b) $-\frac{2v_0}{3}$; c) $-\frac{v_0}{2}$; d) $-\frac{v_0}{3}$;

e) $-\frac{v_0}{6}$; f) nijedan od ovih odgovora.

GLAVA 8 GRANIČNI SLOJ

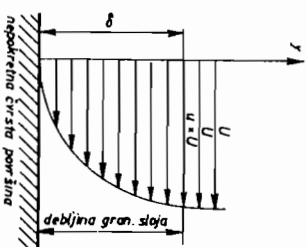
Granični sloj je deo fluida u blizini čvrste površine, u kome se brzina naglo menja do brzine s kojom se čvrsta površina kreće (ili miruje) kroz fluid.

Pod debljinom graničnog sloja δ podrazumeva se debljina fluida u blizini čvrste površine, na čijoj je granici brzina jednaka ili skoro jednaka brzini osnovne struje. (Dovoljeno odstupanje je 1%).

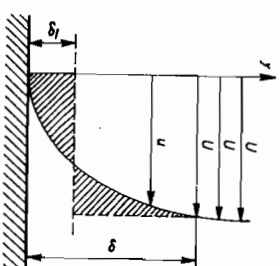
$$u=0,99U \quad ; \quad u=U$$

gde je označeno sa:

- u - promenljiva brzina kroz granični sloj,
- U - jednolika brzina van graničnog sloja;



kako je predstavljeno na slici. Uobičajene oznake za brzinu u graničnom sloju su \underline{u} i U . Za analizu graničnog sloja potrebno je poznavati još ove karakteristike: debljinu izgubljenog protoka δ_1 , debljinu izgubljene količine kretnja δ_2 i tangencijalni napon na graničnoj površini τ_0 . Debljine δ_1 , δ_2 ne treba mešati sa debljinom graničnog sloja δ .



Debljina izgubljenog protoka δ_1 je zamišljeno pomeranje nepokretne površine prema osnovnoj struji, pa da protok fluida kroz protočni presjek do pomerene površine, sa nepromenljivom brzinom U , bude jednak stvarnom protoku. Jednakost osečenih površina na slici ispunjava ovaj zahtev. Izraz za δ_1 dobija se iz

$$U\delta_1 = \int_0^{\delta} (U-u)dy ,$$

tj.

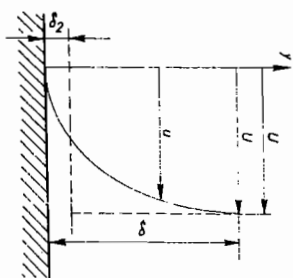
$$\delta_1 = \int_0^{\delta} (1 - \frac{u}{U}) dy$$

Debljina izgubljene količine kretanja δ_2 se dobija izjednačavanjem izgubljene količine kretanja kroz granični sloj, koja je posledica opadanja brzine $u < U$ (u odnosu na osnovnu struju), sa zamišljenom količinom kretanja u struji debljine δ_2 i nepromenljive brzine U . Izraz za δ_2 sledi iz

$$\rho \delta_2 U^2 = \rho \int_0^{\delta} (U-u) u dy,$$

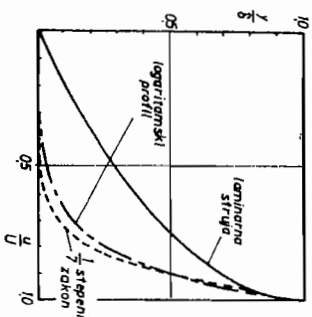
odnosno

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} (1 - \frac{u}{U}) dy$$



Lokalni tangencijalni napon je izazvan trenjem između granične površine i graničnog sloja. Izraz za njegovo određivanje zavisi od strujnog režima u graničnom sloju (laminaran ili turbulentan v. primere 2 i 3)

Raspored mogućnih



Dijagram 19.

brzina u graničnom sloju je dat na grafikonu (dijagram 19). Laminarno strujanje u graničnom sloju se povinuje parabolikom zakonu raspodele, dok raspored brzina u turbulentnom režimu je dobro opisan logaritamskom promenom ili stepenim zakonom sa izložiteljem $\frac{1}{7}$. Logaritamska promena je prikazana za vrednost relativne hrapavosti $\frac{\epsilon}{\delta} = 1026$. A takodje, treba primetiti da je gradijent brzine u blizini čvrste površine veći u turbulentnoj struji od onog u laminarnoj.

Poredjenje navedenih karakteristika graničnog sloja pri laminarnom i turbulentnom strujanju su data u tablici 19. Poredjenje je izvršeno pri istim debljinama graničnog

Tablica 19

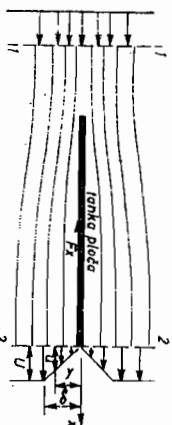
	laminaran granični sloj	turbulentan granični sloj			
		1 stepeni zakon	logaritamska promena		
δ_1/δ	0,33	0,13	$\frac{\delta}{\epsilon} = 10^2$	$\frac{\delta}{\epsilon} = 10^3$	$\frac{\delta}{\epsilon} = 10^4$
δ_2/δ	0,13	0,097	0,13	0,10	0,085
$T_{ot}/T_{o\delta}$	1,0	6,7	22	9,6	5,4

sloja i istim brzinama van graničnog sloja U . Visoke vrednosti $T_{ot}/T_{o\delta}$ u turbulentnom sloju pokazuju koliko se isplati održavanje laminarnog sloja, radi smanjenja otpornih sila. Male relativne hrapavosti se odnose na strujanje preko izrazito hrapavih površina što uzrokuje visoke napone.

Svi problemi graničnog sloja se rešavaju primenom jednačine o promeni količine kretanja uz korišćenje izraza za tangencijalni napon. Za laminaran granični sloj tangencijalni napon je određen poznatom Njutnovoju jednačinom, a za turbulentan eksperimentalno nadjeniim zavisnostima (v. primer 3).

Primeri.

1. Tanaka, ravna, kvadratna ploča ivice 1,8 m kreće se kroz vodu brzinom $U = 3 \frac{m}{s}$, kako je prikazano na slici. Na zadnjoj ivici ploče debljina graničnog sloja je δ cm a raspored brzine se može smatrati linearnim. Odrediti ukupan otpor R kojim voda deluje na ploču, kao i koeficijent otpora.



Rešenje.

Ovo je jednostavan problem primene jednačine o promeni količine kretanja u odsustvu sila pritiska. U graničnom sloju fluidna energija se menja, te je sila s kojom fluid deluje na ploču jednaka promeni momenta količine kretanja fluidne struje kroz kontrolnu zapreminu. Smatrajući da se fluid relativno kreće u odnosu na ploču sa prikazanim raspo-

redom brzina i pretpostavljenom silom reakcije, jednačina o promeni količine kretanja za kontrolnu zapremenu ograničenu beskonačnim preseccima 1 i 2, po jedinici širine ploče, glasi

$$-F_x = \rho Q V \left|_{-1}^{-2} - \rho Q V \right|_1$$

gde se protok kroz kontrolnu zapremenu (za preseke 1 i 2 za preseke 2) predstavlja sa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u dy$$

Sada je

$$-F_x = \rho \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy - \int_{-\infty}^{+\infty} u u dy \right],$$

tj.

$$F_x = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} u(U-u) dy$$

Kako je za $y > \delta$ $u=U$ i nema promene količine kretanja, a stranjanje je identično s obe strane ploče, važi

$$F_x = 2\rho \int_0^{\delta} u(U-u) dy,$$

gde je sa F_x označena ukupna sila otpora ploče po jedinici širine ploče. Raspored brzine je odredjen sa

$$\frac{u}{y} = \frac{U}{\delta} ; u = U \frac{y}{\delta}$$

a zamena u jednačini daje

$$F_x = 2\rho U^2 \int_0^{\delta} \left[\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right] dy,$$

ili, pošto se dy i gornja granica integracije zameni sa:

umesto $dy + \delta d\left(\frac{y}{\delta}\right)$; umesto \int_0^{δ} ; \int_0^1

dobija se

$$F_x = 2\rho U^2 \delta \left[\frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\rho U^2 \delta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right] \right]_0^1 = \frac{1}{3} \rho U^2 \delta$$

Ukupna sila otpora ploče je

$$F'_x = F_x \cdot b = \frac{1}{3} \cdot 1000 \cdot 3^2 \cdot 0,05 \cdot 1,8 = 270 \text{ N},$$

gde je b širina ploče

$$b = 1,8 \text{ m}.$$

Iz definicije sile otpora

$$F'_x = F_D = \frac{1}{2} \rho U^2 c_{D2A} \quad (\text{v. poglavlje 12.1})$$

gde je sa A označena površina ploče $B \cdot l = 1,8 \cdot 1,8 \text{ m}^2$, sledi koeficijent otpora

$$c_D = \frac{\frac{1}{3} \rho U^2 \delta \cdot b}{\frac{1}{2} \rho U^2 \delta \cdot b} = \frac{1}{3} \frac{\delta}{l} = \frac{1}{3} \frac{0,05}{1,8} = 0,00925.$$

2. Odrediti debljinu δ graničnog sloja na udaljenosti $l = 30 \text{ cm}$ od vodeće ivice tankog aeroprofila, koji se kreće kroz vazduh brzinom $U = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i nulnim napadnim uglom. Gustina i viskoznost vazduha su $\rho = 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\nu = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pas}$. Na kom udaljenju od aeroprofila se nalazi zamišljena ekvivalentna vazдушna struja istog protoka (δ_1). Pretpostaviti da je raspored brzine u graničnom sloju dat sa

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{2y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

Rešenje.

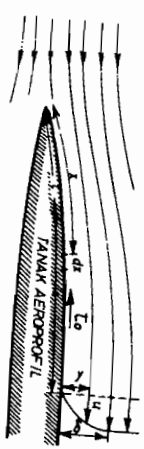
S obzirom na parabolični raspored brzine, formiran je laminaran granični sloj u kome, zbog oblika aeroprofila i nulnog napadnog ugla, nema promene pritiska duž površine. Strujanje je laminarno jer je Re na udaljenosti 30 cm od vodeće ivice

$$Re = \frac{U \cdot l}{\nu} = \frac{9 \cdot 0,3}{1,8 \cdot 10^{-5}} = 1,5 \cdot 10^5,$$

pošto se laminarno strujanje preko ravne ploče zadržava do vrednosti $Re_K = 3 \cdot 10^5$.

Ukupna sila trenja po gornjoj površini i jedinici širine aeroprofila iznosi

$$F = \int_0^l \tau_0 dx,$$



a poznata promena brzine u graničnom sloju omogućuje jed-
nakost

$$\int_0^{\delta} \tau_0 dx = \rho \int_0^{\delta} u(V-u) dy,$$

tj.
$$\int_0^{\delta} \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx = \rho U^2 \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{y}{\delta} \right) d \left(\frac{y}{\delta} \right).$$

Pošto je
$$\eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 2\eta \frac{U}{\delta},$$

sledi
$$2\eta \int_0^{\delta} dx = \rho U^2 \delta \left[\left(\frac{y}{\delta} \right)^2 - \frac{5}{3} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 + \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 - \frac{1}{5} \left(\frac{y}{\delta} \right)^5 \right]_0^{\delta} = \frac{2}{15} \rho U^2 \delta.$$

Do rešenja se dolazi diferenciranjem jednačine po x jer je $\delta = f(x)$, posle čega sledi

$$\frac{2\eta U}{\delta} = \frac{2}{15} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx},$$

ili
$$\frac{15\eta}{\rho U} = \delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta^2}{2} \right).$$

Integraleći sada,
$$\int_0^x \frac{15\eta}{\rho U} dx = \int_0^{\delta} d \left(\frac{\delta^2}{2} \right)$$

dobija se
$$\delta^2 = \frac{30\eta x}{\rho U}$$

ili
$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{30\eta}{\rho U x}} = \sqrt{\frac{30}{Re}}$$

Za $x = \delta = 30 \text{ cm}$ $Re = 1,95 \cdot 10^5$

te je
$$\delta = 0,3 \cdot \sqrt{\frac{30}{1,95 \cdot 10^5}} = 0,00372 \text{ m}$$

tj.
$$\delta = 3,72 \text{ mm}.$$

Tražena debljina izgubljenog protoka δ_1 iznosi
$$\delta_1 = \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{y}{\delta} \right) d \left(\frac{y}{\delta} \right) = 3,72 \left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{3} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right]_0^1 = 1,24 \text{ mm} = \frac{\delta}{3}.$$

3. Za granični sloj sa konstantnim pritiskom po-
kazati da je

$$\tau_0 = \rho U^2 \frac{d\delta_2}{dx}$$

gde je δ_2 - debljina izgubljene količine kretanja. Odrediti, također, debljinu graničnog sloja na ravnoj ploči na nastojanju δ od vodeće ivice za raspored brzine prikazan sa
$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{4}}$$

i lokalnim tangencijalnim naponom na zidu prikazanim sa

$$\tau_0 = 0,023 \rho U^2 \left(\frac{U}{U\delta} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Pretpostavlja se da je granični sloj potpuno turbulentan.

Rešenje.

Primena jednačine o promeni količine kretanja

$$\int_0^x \tau_0 dx = \rho U^2 \delta \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right) d \left(\frac{y}{\delta} \right)$$

gde je
$$\delta \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right) d \left(\frac{y}{\delta} \right) = \delta_2$$
 - debljina izgubljene koli-

čine kretanja, dovodi do
$$\int_0^x \tau_0 dx = \rho U^2 \delta_2;$$

odakle diferenciranjem po x sledi

$$\tau_0 = \rho U^2 \frac{d\delta_2}{dx}.$$

kada je
$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \int_0^1 \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{4}} \right] d \left(\frac{y}{\delta} \right) = \left(\frac{7}{8} - \frac{7}{9} \right) = \frac{7}{72}.$$

Tako je
$$\tau_0 = \rho U^2 \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx}.$$

Za poznatu, eksperimentima određenu zakonitost promene tan-

gencijalnog napona na zidu
$$\tau_0 = 0,023 \rho U^2 \left(\frac{U}{U\delta} \right)^{\frac{1}{4}},$$

dobija se $\rho U^2 \frac{7}{12} \frac{d\delta}{dx} = 0,023 \rho U^2 \left(\frac{U}{\nu}\right)^{-\frac{1}{4}}$,

ili $\delta^{\frac{1}{4}} \frac{d\delta}{dx} = 0,24 \left(\frac{\nu}{U}\right)^{\frac{1}{4}}$

Integraleći obe strane sledi

$\frac{5}{7} \delta^{\frac{5}{4}} = 0,24 \left(\frac{\nu}{U}\right)^{\frac{1}{4}} x = 0,24 \left(\frac{\nu}{U}\right)^{\frac{1}{4}} x^{\frac{5}{4}}$

ili $\frac{\delta}{x} = 0,38 \sqrt[5]{\frac{\nu}{Ux}} = \frac{0,38}{Re^{1/5}}$

Problemi turbulentnog graničnog sloja se ne mogu rešavati bez nekog eksperimentalnim putem određenog podatka, kao što je u ovom slučaju bilo sa T_0 .

4. Dugačka, ravna, hrpapava površina ($e=6$ mm) kreće se kroz miran vazduh brzinom $15 \frac{m}{s}$ mereno na udaljenju 25 mm od njene površine. Odrediti tangencijalni napon na površini i raspored brzine. Pretpostaviti gustinu vazduha $\rho=1,25 \frac{kg}{m^3}$.

Rešenje.

Prema Prantlovoj teoriji o putanji mešanja, raspored brzine u blizini hrpapave ravne površine, preko koje struji fluid je određen sa

$u = 5,75 \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \log \frac{y}{y_0}$,

gde je y_0 - hidraulična hrpavost koja može da se usvoji kao $\frac{e}{33}$ (e - apsolutna hrpavost ravne površine). Na rastojanju $y = 25$ mm, $u = 15 \frac{m}{s}$, te sledi

$15 = 5,75 \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \log \frac{25 \cdot 33}{6} = 5,75 \cdot 2,14 \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$

Odavde je $T_0 = \left(\frac{15}{5,75 \cdot 2,14}\right)^2 = 1,85$ Pa,

odnosno raspored brzine

$u = 5,75 \sqrt{\frac{1,85}{1,25}} \log 5,5y = 6,995 \log 5,5y \left[\frac{m}{s}\right]$

gde je y - udaljenje od ploče u milimetrima.

5. Voda sa preliva, kapaciteta $7,6 \frac{m^3}{s}$ po metru širine, pada niz kosu površinu pod uglom 45° . Na vrhu preliva

dubina struje je 1,5 m, a debljina graničnog sloja je 0,6 m. Raspored brzine nizstrujno od preliva je određen sa

$u = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}$

Odrediti: a) δ_1 - debljinu izgubljenog protoka i δ_2 - debljinu izgubljene količine kretanja.

b) U tački 2 m nizstrujno dubina vode je 1 m, a brzina izvan graničnog sloja je $7,8 \frac{m}{s}$. Odrediti debljinu graničnog sloja na ovom mestu i tangencijalni napon na površini.

Rešenje.

a) Debljine izgubljenog protoka i izgubljene količine kretanja se određuju iz odnosa

$\delta_1 = \int_0^1 \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right] d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \left[\frac{7}{8} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{8}{7}}\right]_0^1 = \frac{1}{8}$

i $\delta_2 = \int_0^1 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right] d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \left[\frac{7}{8} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{8}{7}} - \frac{7}{9} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{9}{7}}\right]_0^1 = \frac{7}{72}$

Tako je

$\delta_1 = \frac{1}{8} = 0,125$ m
 $\delta_2 = \frac{7}{72} = 0,097$ m

b) Ukupan protok je zbir

protoka u graničnom sloju i izvan njega

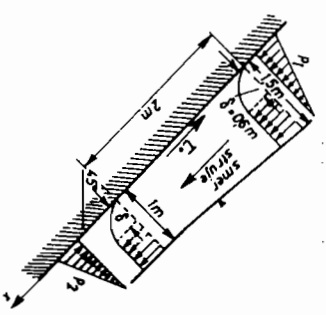
$Q = \int_0^{\delta} u dy + U(d - \delta)$,

gde je d - dubina struje vode. Dalje sledi

$Q = U\delta \int_0^1 \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) + U(d - U\delta) \left[1 - \int_0^1 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} d\left(\frac{y}{\delta}\right)\right]$

Kako je $\int_0^1 \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = 1$, može da se napiše

$Q = U\delta \left[\int_0^1 \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \right] = U\delta - U\delta^{\frac{8}{7}} = U(d - \delta^{\frac{8}{7}}) = U(1,5 - 0,075) = 1,425$ U



Tako je

$$U = \frac{7,6}{1,425} = 5,3 \frac{m}{s}$$

Slično je u nizstrujnoj tački. Zbog nepromenjenog rasporeda brzina sledi

$$7,6 = 7,8(1 - \delta_1) \quad \therefore \delta_1 = 1 - \frac{7,6}{7,8} = 0,026 \text{ m}$$

a odavde

$$\delta = 8\delta_1 \quad \text{i} \quad \delta_2 = \frac{7}{2}\delta ;$$

tj.

$$\delta = 0,2 \text{ m} \quad \text{i} \quad \delta_2 = 0,002 \text{ m}$$

Za određivanje tangencijalnog napona na površini potrebno je uspostaviti jednakost izmedju svih sila koje dejstvuju na fluidnu zapreminu dužine 2 m i promene količine kretanja kroz istu zapreminu. Tako je

$$P_1(\delta)_1 - P_2(\delta)_2 - r_0 \rho g + (mg) \sin 45^\circ = [\rho U^2(d - \delta) + \int_0^\delta \rho U^2 dy]_2 - [\rho U^2(d - \delta) + \int_0^\delta \rho U^2 dy]_1,$$

ili

$$\frac{1}{2} \rho g d^2 \cos 45^\circ - \frac{1}{2} \rho g d_2^2 \cos 45^\circ - r_0 \rho g + \frac{1}{2} (d_1 + d_2) \rho g \sin 45^\circ = \rho [U_2^2(d_2 - \delta_{1,2} - \delta_{2,2}) - U_1^2(d_1 - \delta_{1,1} - \delta_{2,1})];$$

što posle zamenjivanja vrednosti

$$\frac{1}{2} \rho g \cdot 81 \cdot 0,707 [(1,5^2 - 1^2) + (1,5 + 1)2] - \frac{2r_0}{1000} =$$

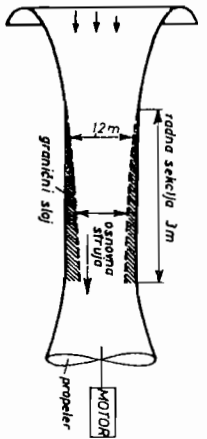
$$= 7,8^2(1 - 0,026 - 0,002) - 5,3^2(1,5 - 0,075 - 0,058)$$

dovodi do

$$r_0 = \frac{21,67 - 20,73}{2} = 1000 = 469 \text{ Pa}$$

6. Radna sekcija

vazdušnog tunela je kvadratnog preseka ivice 1,2 m i dužine 3 m. Pretpostavljajući da se granični sloj formira od njenog početka, odrediti pad pritiska uzduž



paralelnih zidova radne sekcije kada je brzina vazduha na njenom ulazu $15 \frac{m}{s}$. Kinematsku viskoznost i gustinu vazduha usvojiti $\nu = 1,4 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$, $\rho = 1,25 \frac{kg}{m^3}$.

Rešenje.

Polazna pretpostavka je da granični sloj raste slično onom na ravnoj ploči pri konstantnom pritisku. Ovo nije potpuno tačno s obzirom da se pritisak menja duž radne sekcije.

Reynoldsov broj na kraju radne sekcije je

$$Re = \frac{Ux}{\nu} = \frac{15 \cdot 3}{1,4 \cdot 10^{-5}} = 3,2 \cdot 10^6$$

Ova vrednost je mnogo veća od kritičnog $Re_x = 5 \cdot 10^5$ kada laminaran granični sloj prelazi u turbulentan, tako da je formirani granični sloj potpuno turbulentan. Na osnovu ovoga se može pretpostaviti da je deo sa laminarnim slojem zanemarljiv i da je raspored brzine na ukupnoj dužini radne sekcije dat sa

$$U = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/4}, \quad \text{gde je } \frac{\delta}{x} = \frac{0,38}{Re^{1/4}}, \quad (\text{v.primer 3}).$$

Za $x = 3 \text{ m}$ i $Re = 3,2 \cdot 10^6$, debljina graničnog sloja na kraju radne sekcije je

$$\delta = \frac{0,38 \cdot 3}{(3,2 \cdot 10^6)^{1/4}} = 0,057 \text{ m}$$

Za ovaj raspored brzine

$$\delta_1 = \frac{\delta}{2} = 0,00712 \text{ m} \quad (\text{v.primer 5}).$$

Efektivni protočni presek na kraju radne sekcije je smanjen usled graničnog sloja, tako da se brzina osnovne struje povećava (U')

$$U'(1,2 - 2\delta_1) = U \cdot 1,2^2$$

$$U' = \frac{1,2 \cdot 15}{1,2 - 2 \cdot 0,00712} = 15,18 \frac{m}{s}$$

Bernulijeva jednačina za centralnu strujnicu duž radne sekcije određuje pad pritiska

$$\Delta p = \rho \frac{U'^2 - U^2}{2} = 1,25 \frac{15,18^2 - 15^2}{2} = 2,72 \text{ Pa}$$

Napomena. Veliki Prantlov doprinos je podela struje u granični sloj (gde se osipa fluidna energija i dejstvu je tangencijalne sile) i osnovnu struju (gde Bernulijeva jednačina dobro opisuje stanje).

Smanjenje pritiska je malo u odnosu na dinamički pritisak, te početna pretpostavka o konstantnosti pritiska (i se ne razlikuje mnogo od stvarnosti. Gradijent pritiska (i ako mali) duž struje teži da stanji granični sloj. Vazdušni tuneli sa dugačkim radnim sekcijama često imaju malo divergentne poprečne preseke, kako bi se zbog povećavanja graničnog sloja zadržala konstantna brzina svugde van graničnog sloja.

7. U poprečnom preseku divergentne konične cevi prečnika 0,6 m brzina osnovne struje vode je $3 \frac{m}{s}$, a raspored brzine u graničnom sloju debljine 13 mm je

$$\frac{2u}{U} = (1 - \cos \frac{\pi y}{\delta})$$

a) Odrediti brzinu neviskozno fluida za isti protok i uporediti njegovu kinetičku energiju sa onom od date struje. b) Odrediti snagu koja je izgubljena usled viskoznosti uzvodno od ovog preseka. c) Razmotriti kretanje i koeficijent ekspanzije nizstrujno od ove sekcije.

Rešenje.

a) Pošto je

granični sloj tanak protok struje iznosi

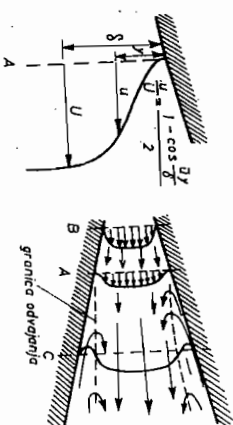
$$Q = U \pi r^2 (0,25 \delta^{-1})$$

gde je

$$\begin{aligned} \delta^{-1} &= \int_0^1 (1 - \frac{u}{U}) d(\frac{y}{\delta}) = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (1 + \cos \frac{\pi y}{\delta}) d(\frac{y}{\delta}) = \frac{1}{2} [\frac{y}{\delta} + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi y}{\delta}]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Tako je

$$Q = 3 \cdot 3,14 \cdot 0,6 (0,25 \cdot 0,6^{-1} \cdot 0,5 \cdot 0,013) = 0,81 \frac{m^3}{s}$$



Za bezviskoznu struju jednolika brzina u označenom preseku je

$$\bar{U} = \frac{4Q}{\pi r^2} = \frac{4 \cdot 0,81}{\pi \cdot 0,6^2} = 2,87 \frac{m}{s}$$

Kinetička energija neviskozne struje je

$$- \frac{1}{2} \rho Q \bar{U}^2 = \frac{1}{2} 1000 \frac{0,6^2 \pi}{4} 2,87^3 = 3340 \text{ W}$$

Za viskoznu struju kinetička energija se može podeliti u dva dela:

u struji van graničnog sloja

$$\frac{1}{2} \rho (d-\delta)^2 \pi U^3 = \frac{1}{2} 1000 \frac{(0,6-0,013)^2 \pi}{4} 3^3 = 3651 \text{ W}$$

i u graničnom sloju

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho \pi d \int_0^\delta u^3 dy &= \frac{1}{2} \rho \pi d \delta \int_0^1 (\frac{u}{U})^3 d(\frac{y}{\delta}) = \frac{1}{2} \rho \pi d \delta \int_0^1 \frac{1}{8} (1 - \cos \frac{\pi y}{\delta})^3 d(\frac{y}{\delta}) = \\ &= \frac{5}{2} \rho \pi d \delta U^3 \frac{1}{16} = \frac{5}{32} 1000 \cdot 0,6 \cdot 0,013 \cdot 3^3 = 103 \text{ W} \end{aligned}$$

Ukupna kinetička energija viskozne struje je 3754 W, dakle, veća od one za isti protok neviskozne struje. Ovo je usledilo zbog povećane brzine osnovne struje prema jednolikoj brzini neviskozne struje.

b) Pri istim protocima za kretanje viskozne struje potrebna je veća energija od one za neviskoznu struju. Snaga koja je izgubljena usled viskoznosti jednaka je toj povećanoj snazi i iznosi

$$3754 - 3340 = 414 \text{ W}$$

c) Raspored brzine u označenom preseku A pokazuje da je gradijent intenziteta brzine na zidu cevi nula tj.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 ;$$

što znači da je upravo to mesto na kome dolazi do odvajanja struje i formiranja slobodnog mlaza. Nizstrujno od preseka A je potpuno odvojena struja sa mnogo vrtloga i slabom tendencijom širenja prema zidovima difuzora, tj. sa niskim koeficijentom, kao što je pokazano na slici. Uzstrujno od preseka A

nema odlepljivanja, i širenje struje prati promenu preseka difuzora.

Napomena. Čak i tanak granični sloj može da izazove znatan gubitak strujne snage, ali je taj gubitak mali, kada se uporedi sa gubiticima koji nastaju zbog odvajanja struje od čvrstih graničnih površina.

Zadaci.

1. Smatrajući da je raspored brzine u graničnom sloju, koji se formira pri jednolikom strujanju preko ravne površine, određen paraboloim trećeg stepena i upotrebljavajući Karmanovu jednačinu; pokazati da je

$$\frac{\delta}{x} = 4,64 \operatorname{Re}^{-\frac{1}{2}}$$

Rešenje.

$$(u=ay+by^3) \quad \text{granični uslovi za } y=\delta \quad u=U \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0$$

2. Radna sekcija vazdušnog tunela je kvadratnog preseka ivice 0,6 m i dužine 3 m. Pretpostavljajući da se granični sloj formira od njenog početka, odrediti pad pritiska uzduž paralelnih zidova radne sekcije kada je brzina vazduha na njenom ulazu $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kinematska viskoznost i gustina vazduha su $\nu=1,4 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$, $\rho=1,25 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Rešenje.

$$\Delta p = 67,5 \text{ Pa}$$

3. Tanki pravougaoni ploča se kreće kroz vodu ($\nu=1,34 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$) brzinom $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Pretpostavljajući da je granični sloj na celoj dužini ploče turbulentan odrediti: a) kolika je debljina graničnog sloja na udaljenju 1 m od vodeće ivice, b) na delu ploče $x=1 \text{ m}$ odrediti brzinu u tački $y=\frac{\delta}{2}$.

Rešenje.

$$\text{a) } \delta = 0,028 \text{ m} \quad ; \quad \text{b) } u = 5,43 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

4. Odrediti brzinu graničnog sloja na $\frac{1}{3}$ glatke ploče dužine 2,7 m, kada je:

$$\text{a) } \frac{V_L}{\nu} = 100000 \quad ; \quad \text{b) } \frac{V_L}{\nu} = 1000000 \quad ; \quad \text{c) } \frac{V_L}{\nu} = 10000000$$

Pretpostaviti da je struja potpuno turbulentna.

Rešenje.

$$\text{a) } \delta = 0,0342 \text{ m} \quad ; \quad \text{b) } \delta = 0,0216 \text{ m} \quad ; \quad \text{c) } \delta = 0,0136 \text{ m}$$

8.1. KONTROLNA PITANJA

1. Debljina izgubljenog protoka u graničnom sloju je:

a) udaljenost od čvrste površine određena graničnim naponom,

b) polovina debljine stvarnog graničnog sloja,

c) rastojanje do tačke gde je $\frac{u}{U}=0,99$,

d) određeno protokom i jednolikom brzinom osnovne

struje,

e) nijedan od ovih odgovora.

2. Tangencijalni napon na površini ravne ploče je:

$$\text{a) } \frac{\partial p}{\partial x} \quad ; \quad \text{b) } \eta \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad ; \quad \text{c) } \rho \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad ;$$

$$\text{d) } \eta \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\delta} \quad ; \quad \text{e) } \text{ nijedan od odgovora.}$$

3. Sa kojim rasporedom brzina su zadovoljeni granični uslovi pri strujanju preko dugačke ravne ploče $u=\frac{U}{\delta}$:

$$\text{a) } e^u \quad ; \quad \text{b) } \frac{\cos \pi u}{2} \quad ; \quad \text{c) } u-u^2 \quad ; \quad \text{d) } 2u-u^2 \quad ;$$

e) nijedan od odgovora.

4. Debljina laminarnog graničnog sloja menja se

$$\text{a) } \frac{1}{x} \quad ; \quad \text{b) } x^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \text{c) } x^{\frac{1}{4}} \quad ; \quad \text{d) } \text{ nijedan od odgovora.}$$

5. Debljina turbulentnog graničnog sloja menja se

$$\text{a) } \frac{1}{x} \quad ; \quad \text{b) } x^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \text{c) } x^{\frac{1}{4}} \quad ; \quad \text{d) } \text{ nijedan od odgovora.}$$

kao:

GLAVA 9

STRUJANJE KOMPRESIBILNOG FLUIDA

9.1. JEDNAČINA KONTINUITETA, BRZINA SLABOG ELASTIČNOG POREMEĆAJA, MAHOV KONUS. OSNOVNI ZAKONI KOMPRESIBILNOG STRUJANJA. ZAUSTAVNI PRITISAK I ZAUSTAVNA TEMPERATURA

6. Odvajanje struje je prouzrokovano sa:
- opadanjem pritiska do vakuumskog pritiska,
 - opadanjem pritiska do nultog gradijenta,
 - nepovoljnim gradijentom pritiska,
 - opadanjem debljine graničnog sloja do nule,
 - ni jedan od ovih odgovora.

7. Odvajanje struje se dešava kada se:

- smanjuje poprečni preseka kanala,
- granični sloj ustali,
- postigne brzina zvuka,
- intenzitet pritiska smanji na minimum,
- ventil zatvori,
- ni jedan od odgovora.

8. U pravcu strujnog toka granični sloj trpi promene:

- laminaran granični sloj, prelazna zona, turbulentan granični sloj;
- prelazna zona, turbulentan granični sloj, laminaran granični sloj;
- turbulentan granični sloj, prelazna zona, laminaran granični sloj;
- ni jedan od odgovora.

9. Približan kritičan Re broj za koji laminaran

granični sloj prelazi u turbulentan je:

- 2000 ; b) 500000 ; c) 5000000 ; d) 50000 ; e) ni jedan od odgovora.

10. Raspored brzine u turbulentnom graničnom sloju

je:

- paraboličan ; b) linearan ; c) logaritamski ; d) funkcija od y^2 ; e) ni jedan od odgovora.

11. Izvesti Karmantovu jednačinu za granični sloj.

Kompresibilnost se javlja kao najvažniji strujni efekt, ako u fluidnom sistemu dolazi do značajne promene gustine ili zapremine. Ovo se dešava pri: naglim ubrzanjima, pojavljuje elastičnih talasa, brzinama koje dostižu i premašuju brzinu zvuka, strujanjima u razređenim sredinama (na velikim visinama).

U ovoj glavi se razmatraju reverzibilne promene kompresibilno strujanje bez gubitaka predstavljeno izentropskim zakonom.

Jednačina kontinuiteta za kompresibilan fluid je

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = \dot{m}$$

Gde se indeksi 1 i 2 odnose na gustinu, brzinu i površinu protočnog preseka normalnog na pravac brzine u preseku 1 i 2; ili

$$\dot{m} = d(\rho v A) = 0$$

Brzina slabog elastičnog poremećaja (talasa) jednaka je brzini zvuka i data je sa

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

gde su: $\frac{dp}{dx}$ i $\frac{d\rho}{dx}$ promene pritiska i gustine u pravcu kretanja talasa, a E moduli stišljivosti (v.poglavlje 1.6.).

Za izotermnu struju je

$$c = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = \sqrt{RT}$$

a za dijabatsku

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\kappa R T}$$

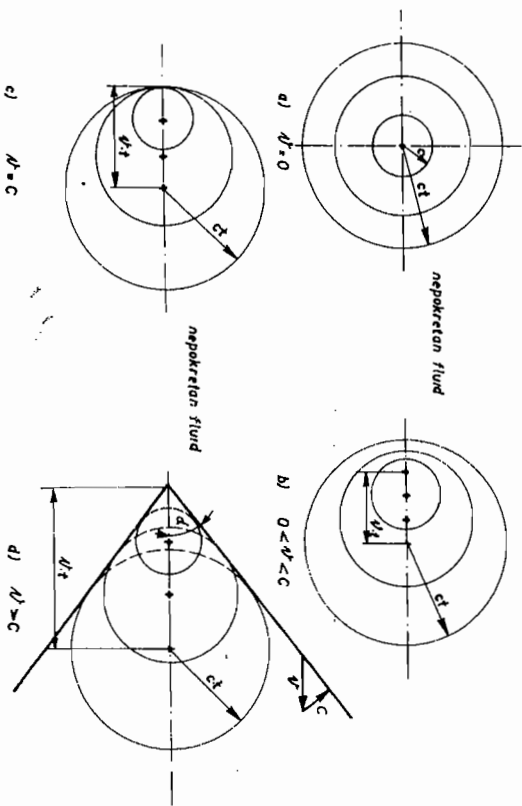
gde su: κ , R i T eksponent adijabate, gasna konstanta i apsolutna temperatura fluida.

Mahov broj je određen odnosom lokalne brzine i brzine zvuka u tački

$$Ma = \frac{v}{c}$$

Karakteristični odnosi između brzine poremećaja c (iz tačkastog izvora) i brzine kretanja izvora (u mirnom fluidu), koja je usmerena s leva na desno i raste od a) prema d) prikazani su na slici. Zbog porasta brzine kretanja izvora usporava se širenje poremećajnog talasa uzstrujno od izvora poremećaja, a ubrzava nizstrujno. Pri brzinama kretanja izvora $v > c$ talas poremećaja se prostire u vidu konusa (Mahov konus) čija je karakteristika ugao α ,

$$\sin \alpha = \frac{c}{v} = \frac{1}{Ma}$$



Slika formiranja Mahovog konusa je identična kada je izvor poremećaja nepokretan, a brzina fluida se povećava od nule do $v > c$.

Osnovni zakoni kompresibilnog fluida mogu se dobiti iz Bernulijeveg integrala Ojlerove jednačine pri zanemarenim spoljašnjim silama

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const.}$$

Za izotermno strujanje $p = \text{const.}$ sledi

$$\frac{v_1^2 - v_2^2}{2} = \frac{p_1}{\rho_1} \ln \frac{p_1}{p_2}$$

ili

$$\frac{v_1^2 - v_2^2}{2} = RT_1 \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

gde se indksi odnose na dve tačke iste strujnice.

Za adijabatsku struju $\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const.}$ integracijom jedinačine

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const.} \quad (1)$$

može se dobiti jedan od sledećih izraza:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_2}{\rho_2} \quad (2)$$

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{c_1^2}{\kappa-1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{c_2^2}{\kappa-1} \quad (3)$$

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} RT_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} RT_2 \quad (4)$$

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{v_1^2}{2} \frac{\kappa}{\kappa-1} = \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \quad (5)$$

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{v_1^2}{2} \frac{\kappa}{\kappa-1} = \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\kappa-1} \right] \quad (6)$$

Za slučaj da je tačka 2 zaustavna $v_2 = 0$ ($p_2 = p_t$) iz gornjih jednačina se dobijaju sledeće relacije:

$$\frac{P_t}{P_1} = \left[1 + \frac{k-1}{2} Ma_1^2 \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (7)$$

ili primenjujući binomni red
 $(1+x)^m = 1+mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots$

$$\frac{P_t}{P_1} = \frac{k Ma_1^2 + k(2-k) Ma_1^4 + \dots}{2} \quad (8)$$

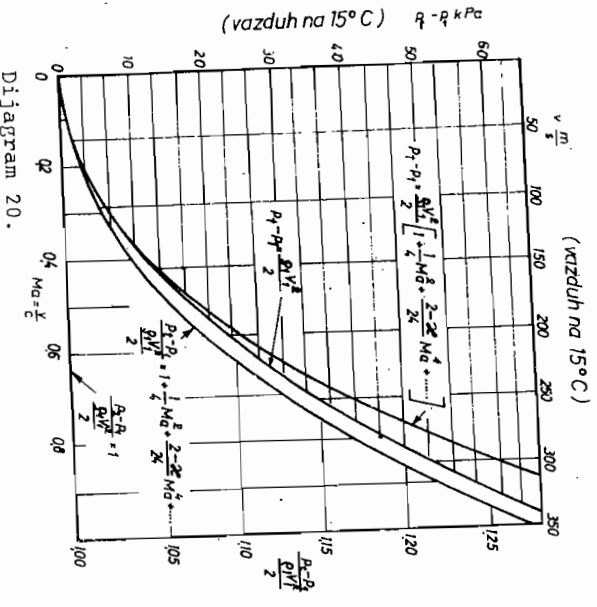
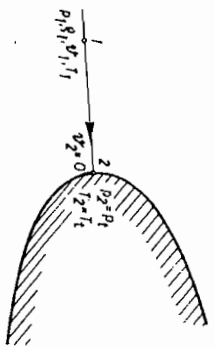
$$P_t = P_1 + \frac{1}{2} \rho v^2 \left[1 + \frac{1}{4} Ma_1^2 + \frac{2-k}{24} Ma_1^4 + \dots \right] \quad (9)$$

zatom

$$\frac{T_t}{T_1} = 1 + \frac{k-1}{2} Ma_1^2 \quad (10)$$

$$T_t = T_1 + \frac{k-1}{2} \frac{v^2}{\gamma} \quad (11)$$

Uticaj kompresibilnosti na zaustavni pritisak za vazduh dat je na dijagramu 20.



Vidi se da je zaustavni pritisak veći za kompresibilni fluid (adijabatska struja) upoređen sa nekompresibilnim. Za $Ma=0,5$, u vazduhu, zaustavni pritisak je 6% veći; a za $Ma=1,288$ veći.

Bernulijeva jednačina
 $\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const.}$

$$v^2 + \frac{k}{k-1} \frac{P}{\rho} = \text{const.},$$

može da se napiše kao
 $\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{k-1} = \text{const.},$

i pokazuje da je brzina struje manja u tačkama gde vlada veća brzina zvuka i obratno.

Maksimalna brzina zvuka c_{max} pripada tačkama $v=0$, tj. tačkama gde fluid miruje.

$$c_{\text{max}} = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}} = \sqrt{kRT_0}.$$

Za miran standardni vazduh na morskome nivou ($T_0=15^\circ\text{C}$)
 $c_{\text{max}} = 341 \text{ m/s}$.

U tačkama gde je $c=0$ postiže se najveća strujna brzina, jer je pritisak u tim tačkama jednak nuli. Iz

$$\frac{v^2}{2} = \frac{c_{\text{max}}^2}{k-1} \quad \text{sledi} \quad v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2}{k-1}} c_{\text{max}}.$$

Za vazduh pod gornjim uslovima

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2}{1,408-1}} \cdot 341 = 756 \text{ m/s}.$$

Značajne su još tačke gde se strujna brzina izjednačuje sa brzinom zvuka. To su kritične tačke, a odgovaraju im kritične brzine v_{kr} i c_{kr} .

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{k-1} = \frac{c_{\text{max}}^2}{k-1}$$

za $v=c=v_{kr}=c_{kr}$ dobija se

$$v_{kr} = c_{kr} = \sqrt{\frac{2}{k+1}} c_{\text{max}}.$$

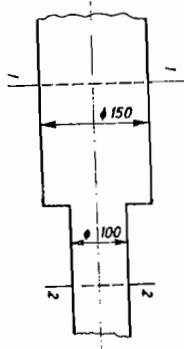
Za vazduh, pod istim uslovima kao i ranije, nalazi se

$$v_{Kr} = C_{Kr} = \sqrt{1,4 \cdot 108 + 1} \cdot 341 = 311 \frac{m}{s}$$

Primeri.

1. Odrediti gustinu, težinski i zapreminski protok vazduha u preseccima 1 i 2 cevo-

voda prikazanog na slici



- Podaci:
- $D_1 = 150 \text{ mm}$; $D_2 = 100 \text{ mm}$;
 - $t_1 = 32^\circ\text{C}$; $t_2 = 10^\circ\text{C}$;
 - $P_1 = 2,0 \text{ at}$; $P_2 = 1,5 \text{ at}$;
 - $v_1 = 50 \frac{m}{s}$;

Rešenje.

Potrebno je odrediti ρ_1, ρ_2, Q_1, Q_2 i \dot{m}_G

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{2,0 \cdot 9,81 \cdot 10^4}{287 \cdot 305,2} = 2,24 \frac{kg}{m^3} ; \rho_2 = \frac{P_2}{RT_2} = \frac{1,5 \cdot 981 \cdot 10^4}{287 \cdot 283} =$$

$$\dot{m}_G = \frac{D^2 \pi}{4} v_1 \rho_1 G = \frac{0,15^2 \cdot \pi}{4} \cdot 50 \cdot 2,24 \cdot 9,81 = 6,18 \frac{N}{s} = 1,81 \frac{kg}{s}$$

$$v = \frac{\dot{m}_G}{\rho G} = \frac{6,18}{\frac{0,1^2 \pi}{4} \cdot 1,81 \cdot 9,81} = 44,33 \frac{m}{s}$$

$$Q_1 = \frac{D_1^2 \pi}{4} v_1 = \frac{0,15^2 \pi \cdot 50}{4} = 0,883 \frac{m^3}{s} ; Q_2 = \frac{D_2^2 \pi v}{4} = \frac{0,1^2 \pi \cdot 44,33}{4} = 0,348 \frac{m^3}{s}$$

2. Merenje ugla udarnog talasa α predstavlja tačan metod određivanja brzine tela sa oštrim čelom, kakva su npr. projektili. Odrediti brzinu i Mahov broj za projektil koji se kreće kroz vazduh pritiska 0,92 at i temperature 5°C , ako je izmeren ugao udarnog talasa $\alpha = 42,5^\circ$, $\kappa = 1,4$.

Rešenje.

Prema slici razvitka udarnog talasa pri nadzvučnom

strujanju sledi

$$\sin \alpha = \frac{c}{v} = \frac{1}{Ma}$$

i pretpostavljajući izentropski proces (bez gubitaka)

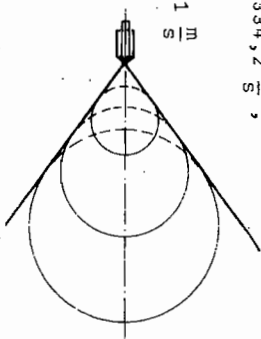
$$c = \sqrt{\kappa RT} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 278} = 334,2 \frac{m}{s}$$

te je

$$v = \frac{c}{\sin 42,5^\circ} = \frac{334,2}{0,675} = 495,11 \frac{m}{s}$$

i

$$Ma = \frac{v}{c} = \frac{495,11}{334,2} = 1,48$$



strujanje

$$v^2 + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const.}$$

izvesti jednačine (2), (3), (4), (5), (7), (8), (9) i (10).

Rešenje.

Osnovna jednačina za kompresibilno strujanje

$$v^2 + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const.}$$

može se predstaviti oblikom

$$\left(\frac{v^2}{2}\right) + \left(\int \frac{dp}{\rho}\right) = \left(\frac{v^2}{2}\right) + \left(\int \frac{dp}{\rho}\right)$$

Integral $\left(\int \frac{dp}{\rho}\right)_1$ se može rešiti korišćenjem adijabatske pro-

$$p \kappa = \frac{P_1}{\rho_1}$$

dok integral $\left(\int \frac{dp}{\rho}\right)_2$ korišćenjem

$$\frac{P_2}{\rho_2} = \frac{P_1}{\rho_1} \kappa$$

Tako je

$$\left(\int \frac{dp}{\rho}\right)_1 = \frac{P_1}{\rho_1} \int \frac{dp}{P} = \frac{P_1}{\rho_1} \int \frac{P^{\frac{1}{\kappa}}}{P^{\frac{1}{\kappa}}} \frac{dP}{P} = \frac{P_1}{\rho_1} \frac{\kappa-1}{\kappa} \left(P^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)_1 = \frac{P_1}{\rho_1} \frac{\kappa-1}{\kappa}$$

i slično

$$\left(\int \frac{dp}{\rho}\right)_2 = \frac{P_2}{\rho_2} \int \frac{dp}{P} = \frac{P_2}{\rho_2} \int \frac{P^{\frac{1}{\kappa}}}{P^{\frac{1}{\kappa}}} \frac{dP}{P} = \frac{P_2}{\rho_2} \frac{\kappa-1}{\kappa} \left(P^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)_2 = \frac{P_2}{\rho_2} \frac{\kappa-1}{\kappa}$$

te sledi

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2}$$

Koristeći se izrazima za predstavljanje brzine zvuka

$$c^2 = k \frac{p}{\rho} = kRT \quad ; \quad c_1^2 = k \frac{p_1}{\rho_1} = kRT_1 \quad ; \quad c_2^2 = k \frac{p_2}{\rho_2} = kRT_2 \quad ;$$

poslednja jednačina se transformiše u oblik

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{c_1^2}{k-1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{c_2^2}{k-1}$$

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} RT_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} RT_2$$

Ako se u polaznoj jednačini promenljiva gustina

izrazi sa parametrima u tački 1

$$\rho = \rho_1 \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}}$$

sledi

$$\frac{v_1^2}{2} + \left(\frac{dp}{\rho} \right)_1 = \frac{v_2^2}{2} + \left(\frac{dp}{\rho} \right)_2$$

tj.

$$\frac{v_1^2 - v_2^2}{2} = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{p_1}{\rho_1} \frac{dp}{p} = \frac{p_1}{\rho_1} \frac{k}{k-1} (p_1 - p_2)$$

ili

$$\frac{v_1^2 - v_2^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]$$

odnosno

$$\frac{v_1^2 - v_2^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]$$

Za $v_2 = 0$ (zaustavna tačka) $p_2 = p_t$, odnos zaustavnog pritiska p_t i pritiska u neuznemirenoj struji je

$$\frac{p_t}{p_1} = \left[1 + \frac{k-1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_1} v_1^2 \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{p_t}{p_1} = \left[1 + \frac{k-1}{2} Ma_1^2 \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

Koristeći se binomnim redom

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots$$

dobija se

$$\frac{p_t}{p_1} = 1 + \frac{k-1}{2} Ma_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{k-1}{k-1} \right) \left(\frac{k-1}{k-1} \right) Ma_1^4 + \dots$$

tj.

$$\frac{p_t}{p_1} = 1 + \frac{k}{2} Ma_1^2 + \frac{k}{8} Ma_1^4 + \dots$$

Množenjem sa p_1 i izvlačenjem zajedničkog člana $Ma_1^2 = \frac{v_1^2}{p_1}$ sledi

$$p_t = p_1 + \rho_1 \frac{v_1^2}{2} \left(1 + \frac{1}{4} Ma_1^2 + \dots \right)$$

Zaustavna temperatura se lako određuje iz jedna-

čine (4)

$$T_t = T_1 + \frac{k-1}{kR} \frac{v_1^2}{2}$$

odnosno

$$\frac{T_t}{T_1} = 1 + \frac{k-1}{2} Ma_1^2$$

4. Mlazni avion se kreće brzinom $v_1 = 1000 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ kroz vazduh atmosferskog pritiska $p_1 = 0,90 \text{ at}$. Temperatura je $t_1 = -20^\circ\text{C}$, a brzina vetra zanemarljiva. Izračunati intenzitet pritiska, temperaturu i gustinu vazduha u zaustavnoj tački na čelu aviona. Takođe, odrediti Ma broj. EkspONENT izentropne $k=1,4$.

Rešenje:

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{0,9 \cdot 9,81 \cdot 10^4}{287 \cdot 253} = 1,21 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$c = \sqrt{kRT} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 253} = 318,83 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Primenjujući binomni red na zakon raspodele pritiska u zaustavnoj tački (p_t) adijabatske struje, dobija se, kako je to prikazano u prethodnom primeru,

$$\frac{p_t}{p_1} = 1 + \frac{k}{2} \left(\frac{v_1}{c_1} \right)^2 + \frac{k}{8} \left(\frac{v_1}{c_1} \right)^4 + \frac{k(2-k)}{48} \left(\frac{v_1}{c_1} \right)^6 + \dots$$

$$\frac{P_t}{P_1} = 1 + \frac{1,4}{2} \left(\frac{277,78}{318,83} \right)^2 + \frac{1,4}{8} \left(\frac{277,78}{318,83} \right)^4 + \dots$$

$$P_t = P_1 (1 + 0,531 + 0,10) = 1,631 \cdot 0,90 = 1,468 \text{ at.}$$

Totalna temperatura se može odrediti iz

$$\frac{v_1^2}{2} = \frac{v_2^2}{2} - \frac{k}{k-1} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1}{k}} (R(T_1 - T_2))$$

Za $v_2 = 0$ je $P_2 = P_t$ i $T_2 = T_t$,

te je

$$T_t = T_1 + \frac{k-1}{kR} \frac{v_1^2}{2} = 253 + \frac{1,4 \cdot 0,4}{2 \cdot 287} \cdot \frac{277,78^2}{2} = 253 + 38,40 = 291,4 \text{ K;}$$

$$\rho_t = \frac{P_t}{RT_t} = \frac{1,468 \cdot 9,81 \cdot 10^4}{287 \cdot 291,4} = 1,72 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Mahov broj je

$$Ma = \frac{v}{c} = \frac{277,78}{318,83} = 0,87.$$

5. Dinamički pritisak izmeren Prantlovom cevi na avionu iznosi $P_d = 0,245$ at. Ako je statički pritisak $P_1 = 0,714$ at, temperatura $t_1 = -12^\circ\text{C}$ i $k = 1,4$; Odrediti Mahov broj i brzinu aviona.

Rešenje.

$$P_1 = \frac{P_d}{RT_1} = \frac{0,714 \cdot 9,81 \cdot 10^4}{287 \cdot 261} = 0,935 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Brzina vazduha je

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 261} = 324 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Iz

$$\frac{P_t - P_1}{\rho_1 \cdot v_1^2} = 1 + \frac{1}{4} Ma_1^2 + \frac{2-k}{4} Ma_1^4$$

sledi

$$\frac{(0,935 - 0,714) \cdot 9,81 \cdot 10^4}{0,935 \cdot v_1^2} = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{v_1}{324} \right)^2 + \frac{1}{40} \left(\frac{v_1}{324} \right)^4$$

$$v_1 = 226 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Kao prva aproksimacija se zanemaruje članovi sa v_1 na desnoj strani. Dobija se

Koristeći ovu vrednost na desnoj strani i rešavajući levu po v_1 , dobija se

$$v_1 = 213 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Nakon ponavljanja procedure dobija se tačna vrednost

$$v_1 = 214,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Tako je

$$Ma_1 = \frac{214,3}{324} = 0,661.$$

6. Avion se kreće jednolikom brzinom pri $Ma = 0,95$. Ako je temperatura vazduha -10°C , odrediti temperaturu u zaustavnim tačkama na vodećim ivicama krila i u tačkama izvan graničnog sloja gde je lokalni Mahov broj 1,25. Pretpostavlja se da je vazduh idealan gas bez oštrih udarnih talasa; tj. struja je izentropska $k = 1,4$.

Rešenje.

$$\text{Iz } \frac{v_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} RT_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} RT_2 \quad \text{za } T_2 = T_t$$

$$T_t = T_1 \left(1 + \frac{k-1}{2k} \frac{v_1^2}{RT_1} \right) = T_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma_1^2 \right) = 263 (1 + 0,2 \cdot 0,95^2) = 310,4 \text{ K,}$$

$$t_t = 37,4^\circ\text{C}.$$

Dalje od zaustavne tačke, gde je $Ma = 1,25$ temperatura T_2' je

$$T_2' = T_2 \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma_2'^2 \right); \quad T_2' = \frac{310,4}{1 + 0,2 \cdot 1,25^2} = 236,5 \text{ K}; \quad t_2' = -36,5^\circ\text{C}.$$

7. Gas struji kroz cev izotermiski. Zanemarujući veličinu kinetičke energije u odnosu na energiju potrebnu za savladjivanje trenja, pokazati da je izlazni pritisak dat sa

$$P_2 = P_1 \sqrt{1 - \frac{\lambda g^2 v_1^2}{DRT}}$$

gde su: P_1 - ulazni pritisak; λ - koeficijent trenja i T - apsolutna temperatura.

Za cev prečnika $D = 100$ mm i dužine $l = 1500$ m sa ulaznim protokom i pritiskom $Q_1 = 118 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ i $P_1 = 21$ at, odrediti izlaznu brzinu. Temperatura je konstantna $T = 15^\circ\text{C}$ i $\lambda = 0,016$.

Rešenje.

Elementarni pad pritiska kroz cev, zanemarujući kinetičku energiju, može da se predstavi sa

$$\frac{dp}{\rho} = -gdh_t$$

gde je gdh_t - gubitak usled trenja na elementarnoj dužini cevi dx .

$$\text{Sledi } \frac{dp}{\rho} = -\lambda \frac{dx}{D} \frac{v^2}{2},$$

gde je iz jednačine kontinuiteta i izotermске promene

$$\rho_1 \frac{P_1}{P_1} = \rho_2 \frac{P_2}{P_2}; \quad v = v_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} = v_1 \frac{P_2}{P_1}$$

te je

$$dp = -\rho_1 \frac{P_2}{P_1} \lambda \frac{dx}{D} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^2 \frac{v_1^2}{2}$$

$$\text{i } dp = -\frac{\lambda \rho_1 P_1 v_1^2}{2D} dx$$

Integracijom od $x=0$ i $p=P_1$ do $x=l$ i $p=P_2$, dobija se

$$P_2^2 - P_1^2 = -\frac{\lambda \rho_1 P_1 v_1^2}{D} l,$$

tj.

$$P_2^2 - P_1^2 = -\frac{\lambda \rho_1^2 v_1^2 l}{DRT};$$

ili

$$P_2 = P_1 \sqrt{1 - \frac{\lambda l v_1^2}{DRT}}$$

Zamenjujući poznate vrednosti, sledi

$$\frac{40}{v_1} = \frac{4 \cdot 0,118}{0,12 \cdot \pi} = 15,0 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$P_2 = 21 \sqrt{1 - \frac{0,016 \cdot 500 \cdot 15^2}{1,287 \cdot 288} \cdot 1 - 0,653} = 12,37 \text{ at},$$

$$v_2 = v_1 \frac{P_1}{P_2} = 15 \frac{21}{12,37} = 25,46 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Zadaci.

1. U jednoj tački strujnice vazdušnog mlaza, brzina, pritisak i temperatura su $v_1 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $P_1 = 3,5 \text{ at}$ i $t_1 = 150^\circ\text{C}$. U drugoj tački iste strujnice brzina je $v_2 = 150 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Odrediti pritisak i temperaturu u ovoj tački ($\kappa = 1,4$).

Rešenje.

$$t_2 = 139,2^\circ\text{C}; \quad P_2 = 3,19 \text{ at}$$

2. Kolika je brzina zvuka suvog vazduha na površini mora kada je $t = 20^\circ\text{C}$, i u stratosferi kada je $t = -55^\circ\text{C}$ i $\kappa = 1,4$?

Rešenje.

$$\text{Na morsknoj površini } c = 343 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \text{U stratosferi } c = 296 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3. Vazduh struji kroz cev pri $Ma = 0,85$ u delu gde je pritisak 35 at i temperatura 10°C . Za koliko će se pritisak i temperatura povećati na čeonom delu malog tela koje se nalazi u ovoj deonici?

Rešenje.

$$\Delta p = 21,13 \text{ at}; \quad \Delta t = 39,45^\circ\text{C}$$

4. Avion leti brzinom $v = 640 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ kroz miran vazduh pritiska $p = 0,915 \text{ at}$ i $t = -18^\circ\text{C}$ ($R = 287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$; $\kappa = 1,4$). Izračunati pritisak, temperaturu i gustinu vazduha u zaustavnim tačkama.

Rešenje.

$$P_t = 1,22 \text{ at}; \quad t_t = -2^\circ\text{C}; \quad \rho_t = 1,54 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

5. Kroz horizontalan cevovod 1500 m dugačak, prečnika $76,2 \text{ mm}$, struji komprimovan vazduh srednje temperature 18°C koja se može smatrati konstantnom na celoj dužini cevi. Ako su manometarski pritisci na ulazu i izlazu cevi $12,6 \text{ at}$ i $3,85 \text{ at}$, koeficijent trenja nepromenljiv i jednak $0,018$, odrediti težinski protok vazduha kroz cev. Formula koja se koristi mora biti dokazana.

Rešenje.

$$\dot{m} g = 9,65 \frac{\text{N}}{\text{s}}$$

6. Pretpostavlja se ustaljeno izotermско strujanje vazduha koji se smatra idealnim gasom ($R = 287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$). Polje brzina je

$$v = 3x i - 3y j + 20k.$$

Koliki je odnos pritiska između položaja u strujanju

$$r_1 = 101 + 37$$

$$r_2 = -5x$$

ako je temperatura vazduha $t = 38^\circ\text{C}$.

Rešenje.

$$\frac{P_2}{P_1} = 1,0063$$

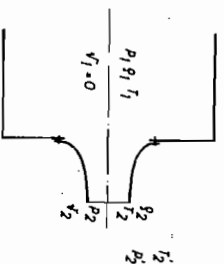
7. Izračunati brzinu i Mahov broj vazdušne struje u kojoj je statička temperatura 28°C a temperatura u završnoj tački 136°C . Ako se pretpostavi da je kompresija izentropska, ($\kappa=1,4$), odrediti procentualno povećanje pritiska u završnoj tački u odnosu na statički.

Rešenje.

$$v = 466 \frac{\text{m}}{\text{s}} ; \text{Ma} = 1,34 ; \frac{P_t - P}{P} = 1,93 \quad \text{ili} \quad 193\%$$

9.2. ISTICANJE KROZ KONVERGENTAN MLAZNIK

Uobičajeno je da se razmatra adijabatska ekspanzija (isticanje) iz velikog rezervoara u kome se brzina fluida može zanemariti $v_1 = 0$. Karakterističan slučaj je kada na izlasku iz mlaznika maksimalna brzina strujanja dostiže brzinu zvuka. Za ovu brzinu potreban odnos pritiska u rezervoaru i na izlaznom preseku mlaznika se određuje iz



$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho_2} ; \quad v_2^2 = c^2 = \kappa \frac{P_2}{\rho_2}$$

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{v_2^2}{2} \right) = \frac{\kappa}{\kappa-1} \left[\frac{\kappa+1}{2} \frac{P_2}{\rho_2} \right] ;$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2}{\kappa+1} \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad \text{gde je} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

tj.

odnosno

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (1)$$

Ovaj odnos pritiska se naziva kritičnim i za vazduh ($\kappa=1,4$) on iznosi

$$\left(\frac{P_2}{P_1} \right)_{\text{kr}} = \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 0,528$$

Ukoliko je pritisak u izlaznom preseku mlaznika, tj. okolni pritisak $P_2 = P_2' >$ veći od kritičnog

$$P_2' > P_{2\text{kr}} ;$$

brzina u izlaznom preseku je manja od maksimalne brzine zvuka i određuje se prema

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] ;$$

odakle je za $v_1 = 0$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\kappa-1} c^2 \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} \quad (2)$$

Za slučaj da je okolni pritisak manji od kritičnog

$$P_2' < P_{2\text{kr}} ;$$

u izlaznom preseku se zadržava maksimalna brzina $v_2 = c_2$, pritisak $P_{2\text{kr}}$ koji je određen jednakošću

$$P_{2\text{kr}} = P_1 \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

i temperatura $T_{2\text{kr}}$ određene sa

$$T_{2\text{kr}} = T_1 \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)$$

U ovom slučaju postoji skok pritiska i temperatura na izlaznom preseku mlaznika sa $P_{2\text{kr}}$ na P_2' , $T_{2\text{kr}}$ na T_2' .

Težinski protok se određuje prema

$$\dot{m} = \rho_2 g v_2 A_2$$

gde je za slučaj

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right) < \left(\frac{P_2}{P_1}\right)_{kr} \quad \text{kada je} \quad v_2 = c_2 = v_{max}$$

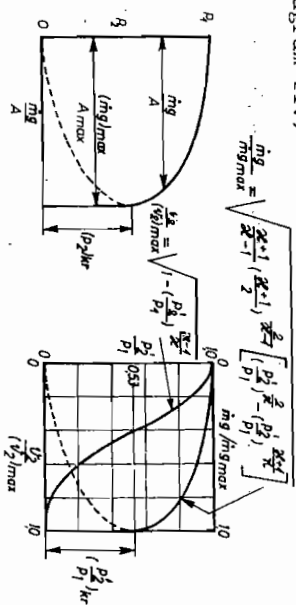
$$(\dot{m}_g)_{max} = \rho_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{k+1}} \frac{1}{g} \sqrt{kRT_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k+1}}} A_2 = g \sqrt{\frac{k \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k+1}}}{R(k+1)}} \frac{A_2 P_1}{\sqrt{T_1}} \quad (3)$$

Ukoliko je $\left(\frac{P_2}{P_1}\right) > \left(\frac{P_2}{P_1}\right)_{kr}$ tj. $v_2 < c_2$

traženi protok je određen sa

$$\dot{m}_g = \rho_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{2}{k-1} c_1^2 \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] g A_2} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} P_1 \rho_1 \left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k}{k+1}} - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k}{k-1}}\right] g A_2} \quad (4)$$

Na slici su prikazane bezdimenzijske promene brzine i težinskog protoka u zavisnosti od spoljašnjeg (okolnog) pritiska $\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$ (diјаgram 21.)



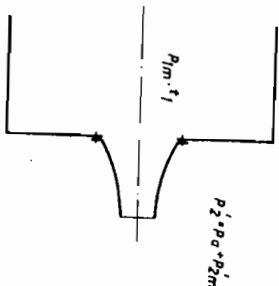
Primeri.

1. Vazduh ističe iz velikog rezervoara u kome su nadpritisak $P_{1m} = 7$ at i temperatura $t_1 = 50^\circ C$, kroz konvergentan mlaznik prečnika $d = 25$ mm. Odrediti protok kada je okolni nadpritisak a) $P_{2m} = 2,1$ at i b) $P_{2m} = 5,6$ at pri barometarskom pritisku $P_a = 101400$ Pa. Izračunati, takođe, pritisak, temperaturu, brzinu i brzinu zvuka na izlazu iz mlaznika za tražene protoke ($k=1,4$)

Rešenje.

Gustina vazduha u rezervoaru i kritični odnos pritiska koji je osigurava maksimalnu brzinu isticanja jednaku brzini zvuka su:

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{(7 \cdot 9,81 + 10,14) 10^4}{287 \cdot 323} = 8,50 \frac{kg}{m^3}$$



$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right)_{kr} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k}{k+1}} = 0,528$$

a) Kako je

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(2,1 \cdot 9,81 + 10,14) 10^4}{(7 \cdot 9,81 + 10,14) 10^4} = 0,39 < 0,528,$$

to je pritisak u izlaznom preseku mlaznika

$$P_2 = 0,528 \cdot P_1 = 416117 \text{ Pa};$$

odnosno

$$P_{2m} = 3,21 \text{ at}$$

i temperatura

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 323 \cdot 0,528^{\frac{0,4}{1,4}} = 269 \text{ K},$$

tj.

$$t_2 = -4^\circ C.$$

Težinski protok je određen sa jednačinom (3)

$$\dot{m}_g = g \sqrt{\frac{k \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k+1}}}{R(k+1)}} \frac{A_2 P_1}{\sqrt{T_1}} = 9,81 \sqrt{\frac{1,4}{287} (0,528)^{\frac{0,4}{1,4}}} \frac{0,0025^2 \pi (7 \cdot 9,81 + 10,14) 10^4}{\sqrt{323}} = 8,68 \frac{N}{s}$$

$$v_2 = c_2 = \sqrt{kRT_2} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 323} = 360,2 \frac{m}{s}$$

b) Zbog

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(5,6 \cdot 9,81 + 10,14) 10^4}{(7 \cdot 9,81 + 10,14) 10^4} = 0,826$$

pritisak je u izlaznom preseku mlaznika jednak okolnom

$$p_2 = p_2^* = 650760 \text{ Pa.}$$

Brzina u izlaznom preseku mlaznika ($v < c_2$) je određena sa jednačinom (2) tj.

$$v_2 = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} = 185,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Temperatura se određuje iz

$$T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1} = 323 - \frac{0,4}{2,8 \cdot 287} \cdot 185^2 = 306 \quad ; \quad t_2 = 33^\circ\text{C}.$$

Težinski protok prema jednačini (4) je

$$\dot{m}g = \sqrt{\frac{2k}{k-1} p_1 \rho_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} g A_2 = 6,63 \frac{\text{N}}{\text{s}}.$$

2. Dokazati da je pri izentropskom isticanju gasa iz rezervoara kroz blendu, pri uslovima koji obezbedjuju maksimalan protok, brzina isticanja je data izrazom

$$v = \sqrt{\frac{2}{k} \frac{p}{\rho}}$$

gde su p i ρ pritisak i gustina neposredno iza blende. Za date podatke izračunati odgovarajući prečnik blende. $Q = 0,20 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$; $t = 23^\circ\text{C}$; $k = 1,4$; $R = 518,67 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$ (metan). Koefficient protoka kroz blendu $\mu = 0,96$.

Rešenje.

Iz

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \frac{k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) = \frac{v_2^2}{2}$$

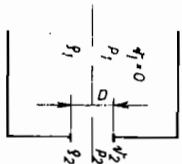
sledi

$$v_2 = \sqrt{2 \left(\frac{k}{k-1} \right) \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]},$$

a težinski protok

$$\dot{m}g = \frac{4D^2 \pi g}{4} \sqrt{\frac{2k}{k-1} p_1 \rho_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}.$$

Maksimalan protok se dobija za



$$\frac{d(\frac{p_2}{p_1})}{d(\frac{p_2}{p_1})} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right] = 0 \quad ; \quad \frac{2}{k} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}-1} - \frac{k+1}{k} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}-1} = 0$$

tj.

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{2}{k+1}.$$

Uvedeći ovaj odnos pritiska u jednačinu za brzinu, dobija se

$$v_{2 \max} = \sqrt{2 \left(\frac{k}{k-1} \right) \frac{p_1}{\rho_1} \left(1 - \frac{2}{k+1} \right)} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \frac{p_1}{\rho_1}}.$$

Zamenjujući

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_2} \frac{k+1}{2}$$

dobija se

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{p_2}{k \rho_2}} = \sqrt{k R T_2}.$$

Kao što je poznato $\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{2}{k+1}$ predstavlja kritičan odnos pritiska koji obezbedjuje maksimalnu strujnu brzinu jednaku brzini zvuka u izlaznom preseku konvergentnog mlaznika, što je potvrđeno i za izentropsko isticanje kroz bilo kakav otvor ili naglavak (sem konvergentno-divergentnog).

Za

$$T_2 = T_1 \frac{2}{1+k} = 296 \frac{2}{2,4} = 246,6 \text{ K}$$

sledi

$$v_{2 \max} = \sqrt{1,4 \cdot 518,67 \cdot 246,6} = 423,16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

i prečnik blende

$$D = \sqrt{\frac{4Q}{\mu v}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,2}{0,96 \cdot \pi}} = 0,494 \text{ m} \approx 500 \text{ mm}.$$

Zadaci.

1. Izračunati temperaturu, pritisak, brzinu i težinski protok mlaza azota (izlazni presek) koji ističe kroz konvergentan mlaznik, prečnika 20 mm, u standardnu atmosferu. Temperatura i pritisak u velikom rezervoaru, odakle azot ističe, su $t_1 = 5^\circ\text{C}$ i $p_1 = 3,5$ at. Gasna konstanta za azot je

$$R = 296,75 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$$

Rešenje.

$$T_2 = 231,66 \text{ K} ; P_2 = 1,85 \text{ at} ; v_2 = 310,23 \frac{\text{m}}{\text{s}} ; \dot{m}_g = 2,52 \frac{\text{N}}{\text{s}}$$

2. Dokazati da maksimalan kontinualan protok vazduha kroz konvergentan mlaznik na boku velikog rezervoara je određen pritiskom na izlaznom preseku 0,528 pritiska u rezervoaru. Odrediti prečnik mlaznika pogodnog za merenje protoka vazdušnog kompresora kapaciteta $0,12 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ na atmosferskom pritisku od 101400 Pa i 15°C. Kompresor puni rezervoar u kome je vazduh na pritisku od 2,3 at i temperaturi 27°C. Pretpostaviti da je koeficijent protoka konvergentnog mlaznika 0,99, $R = 287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$ i $\kappa = 1,4$.

Rešenje.

$$D = 19 \text{ mm}$$

3. Konvergentan mlaznik je konstruisan za isticanje 0,75 $\frac{\text{N}}{\text{s}}$ pri $P_1 = 7 \text{ at}$ i $P_2 = 2,1 \text{ at}$. Pretpostavlja se da je početna temperatura 65°C, a v_1 zanemarljiva. Odrediti temperaturu, brzinu i površinu poprečnog preseka mlaznika za intervale pada pritiska. ($\kappa = 1,41$; $R = 287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$)

Rešenje.

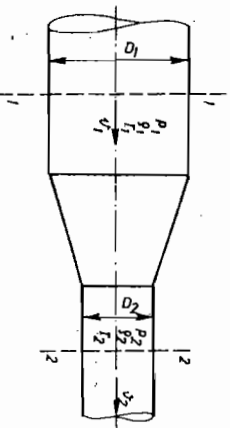
$$T = 338 \left(\frac{P_1 + \Delta P}{P_1} \right)^{0,29} \text{ [K]} ; v = 816 \sqrt{1 - \left(\frac{P_1 + \Delta P}{P_1} \right)^{0,29}} \text{ [m/s]}$$

$$A = \frac{72754}{(P_1 + \Delta P)v} \text{ [m}^2\text{]}$$

9.3. STRUJANJE KROZ SUZENI PRESEK

Ako kompresibilni

fluid struji kroz cevovod promenljivog preseka, kada se ne može zanemariti kvadrat brzine u preseku 1 (v. sliku); protok se može odrediti rešavajući simultano



jednačine

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{P_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \right]$$

$$\dot{m}_g = A_1 \rho_1 v_1 = A_2 \rho_2 v_2$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\kappa$$

Ovo dovodi do

$$\dot{m}_g = \frac{A_2 \rho_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^\kappa}} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} P_1 \rho_1 \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^\kappa - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\kappa + 1}{\kappa}} \right]} \quad (1)$$

Zbog nepogodnog oblika gornja jednačina se uz pomoć eksperimentalnog faktora Y piše analogno protoku za nekomprimidibilan fluid

$$Q = \frac{A_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2}} \sqrt{2 \frac{P_1 - P_2}{\rho}} ,$$

kao

$$\dot{m}_g = \frac{Y A_2 \rho_1 \rho_1 \rho_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2}} \sqrt{2 \frac{P_1 - P_2}{\rho_1}} \quad (2)$$

Izraz za Y se određuje rešavanjem jednačina (1) i (2); zavisi od tri promenljive

$$\left(\frac{P_2}{P_1} ; \frac{A_2}{A_1} ; \kappa \right)$$

i izračunat je za sve potrebne odnose $\frac{A_2}{A_1}$. Vrednosti Y su date u tablici 20.

Primer.

Vazduh iz cevi $d_1 = 37 \text{ mm}$ struji kroz suženje $d_2 = 25 \text{ mm}$. U cevi su pritisak i temperatura $P_1 = 7 \text{ at}$ i $t_1 = 38^\circ\text{C}$. Izračunati protok ako je pritisak u suženju $P_2 = 5,6 \text{ at}$. Barometarski pritisak je 101400 Pa; $\kappa = 1,41$; $R = 287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$.

Rešenje.

$$\frac{P_2}{P_1} = 0,8 ; \rho_1 = \frac{P_1}{R t_1} = 1,136 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ; \frac{A_2}{A_1} = 0,456$$

za ove vrednosti ekspanzioni faktor Y je 0,856, a zatim te-
zinski protok

$$\dot{m}_g = \frac{Y A_2 \rho_1 g}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \sqrt{\frac{P_1 - P_2}{\rho_1}} = \frac{0,856 \cdot 0,025^2 \pi \cdot 1,136 \cdot 9,81}{\sqrt{1 - (0,456)^2}} \cdot \sqrt{2 \left(\frac{7-5,6}{1,136}\right) 9,81 \cdot 10^4} = 2,58 \frac{N}{s}$$

Ekspanzioni faktor Y

Tablica 20

$\frac{A_2}{A_1}$	κ	$\frac{P_2}{P_1}$	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75
0	1,40	0,973	0,945	0,916	0,886	0,856	0,826
	1,30	0,971	0,941	0,910	0,878	0,846	0,814
	1,20	0,968	0,936	0,903	0,869	0,834	0,800
0,2	1,40	0,971	0,942	0,912	0,881	0,850	0,819
	1,30	0,969	0,938	0,906	0,873	0,839	0,805
	1,20	0,967	0,933	0,899	0,863	0,827	0,791
0,3	1,40	0,969	0,938	0,907	0,875	0,842	0,810
	1,30	0,967	0,934	0,900	0,866	0,831	0,796
	1,20	0,965	0,929	0,862	0,856	0,819	0,783
0,4	1,40	0,966	0,932	0,899	0,864	0,830	0,795
	1,30	0,964	0,928	0,891	0,855	0,818	0,782
	1,20	0,961	0,922	0,886	0,844	0,805	0,766
0,5	1,40	0,962	0,923	0,886	0,848	0,811	0,774
	1,30	0,959	0,918	0,878	0,839	0,799	0,761
	1,20	0,955	0,912	0,869	0,827	0,786	0,745
0,6	1,40	0,954	0,910	0,867	0,825	0,785	0,744
	1,30	0,951	0,904	0,858	0,814	0,772	0,731
	1,20	0,947	0,896	0,848	0,801	0,757	0,715

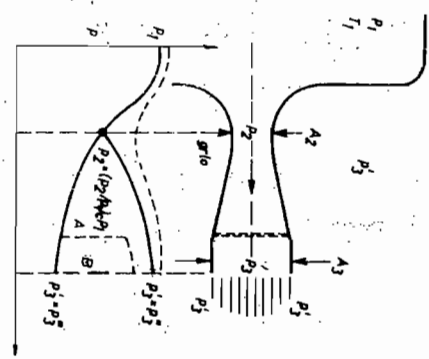
$$Y = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^\kappa}} \cdot \frac{1 - \frac{P_2}{P_1}}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^\kappa}$$

9.4. STRUJANJE KROZ KONVERGENTNO DIVERGENTAN MLAZNIK

Kompresibilno strujanje kroz konvergentno-divergentni mlaznik, prikazano na slici, odlikuje se sledećim karakteristikama.

Razmatra se isticanje iz velikog rezervoara sa pritiskom P_1 i temperaturom T_1 . Ako je u grlu mlaznika postignuta brzina zvuka, težinski protok se određuje iz jednačine (3) poglavlje 9.2. tj.

$$\dot{m}_g = g \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa} \frac{A_2 P_1}{R \kappa T_1}}$$



sa poznatom površinom poprečnog preseka grla A_2 . Pretpostavljajući pritisak P_3 u mlazu naizlazu mlaznika, moguće je izračunati prečnik mlaznika A_3 , koristeći se jednačinom (4) poglavlje 9.2. ; stavljajući A_3 umesto A_2 i P_3 umesto P_2 tj.

$$\dot{m}_g = g A_3 \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} P_1 \rho_1 \left[\left(\frac{P_3}{P_1}\right)^\frac{2}{\kappa} - \left(\frac{P_3}{P_1}\right)^\frac{\kappa + 1}{\kappa} \right]}$$

Medjutim, primećeno je da dva vrlo različita spoljna pritiska P_1 dovode do iste površine A_3 i protoka \dot{m}_g . Viši od ovin pritiska (P_3) uzrokuje podzvučnu brzinu u divergentnom delu mlaznika, a niži (P_3) omogućuje razvijanje nadzvučne brzine u njemu. Promena pritiska u mlazniku za ova dva uslova prikazana je punim linijama. Povećanje pritiska (P_3) izaziva smanjenje težinskog protoka (crkana linija) i u grlu mlaznika je dozvučna brzina. Spoljni pritisak $P_3 < P_2 < P_1$ ne utiče na protok i ne menja performanse grla mlaznika, ali u divergentnom delu uslovljava pojavu normalnih udarnih talasa (crtkane linije A i B), koji se u zavisnosti od njihove veličine javljaju: u mlazniku, na njegovom izlazu ili

nizstrujno od izlaza. Promene sa normalnim talasnim udarom ne zadovoljavaju izentropski zakon (prati ih znatno unutrašnje trenje i porast entropije).

Kada je strujanje bez pojave udara brzina struje na izlazu iz mlaznika je takodje određena zakonom izentropske promene sa

$$\frac{v_3^2 - v_1^2}{2} = \frac{K}{k-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{P_3}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \quad \text{ili} \quad \frac{v_3^2 - v_1^2}{2} = \frac{K}{k-1} R (T_1 - T_3),$$

odnosno

$$\frac{v_3^2 - v_1^2}{2} = \frac{K}{k-1} \frac{P_2}{\rho_2} \left[1 - \left(\frac{P_3}{P_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \quad \text{t.j.} \quad \frac{v_3^2 - v_1^2}{2} = \frac{K}{k-1} R (T_2 - T_3);$$

što znači da prolazak brzine strujanja kroz zvučnu barijeru - bez udara - ne menja karakter promene strujanja (izentropska).

Primeri.

1. Za stacionarno strujanje kompresibilnog fluida odrediti zakone promene brzine zaviso od (promenljive) površine protočnog preseka.

Rešenje.

Iz jednačine kontinuiteta za stacionarno strujanje nekompresibilnog fluida

$$Av = \text{const.},$$

logaritmovanjem i diferenciranjem se uspostavlja zavisnost

$$\log A + \log v = \log C$$

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dv}{v}, \quad (1)$$

dok za kompresibilno strujanje iste operacije dovode do

$$\rho Av = \text{const.}$$

$$\log \rho + \log A + \log v = \log C$$

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dv}{v} - \frac{dp}{\rho} \quad (2)$$

Koristeći se jednim od osnovnih, već izvedenim, oblikom Bernulijeve ili energijske jednačine

$$v^2 + \frac{K}{k-1} \frac{P}{\rho} = \text{const.} \quad (3)$$

diferenciranjem se uspostavlja zavisnost

$$vdv + \frac{K}{k-1} \left(\frac{dp}{\rho} - \frac{p dp}{\rho^2} \right) = 0,$$

koja u kombinaciji sa

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{K P}{\rho},$$

što važi za adijabatsku strujanj, dovodi do

$$\frac{dv}{v} + \frac{1}{k-1} \frac{c^2}{v^2} \left(\frac{dp}{\rho} - \frac{p dp}{\rho} \right) = 0. \quad (4)$$

Iz jednačine adijabatske promene

$$\frac{P}{\rho} = \text{const.}$$

logaritmovanjem i diferenciranjem sledi

$$\frac{dP}{P} = k \frac{d\rho}{\rho},$$

što jednačinu (4) svodi na

$$\frac{d\rho}{\rho} = -Ma^2 \frac{dv}{v} \quad (5)$$

gde je $Ma = \frac{v}{c}$ (Mahov broj).

Zamena jednačine (5) u jednačinu (2) dovodi do

$$\frac{dA}{A} = -[1 - Ma^2] \frac{dv}{v} \quad (6)$$

Poredjenje jednačine (6) (kompresibilno strujanje) sa jednačinom (1) (nekompresibilno strujanje) ukazuje da se znatne promene protočnog preseka kompresibilnog strujanja, u odnosu na nekompresibilno, javljaju sa porastom Mahova broja.

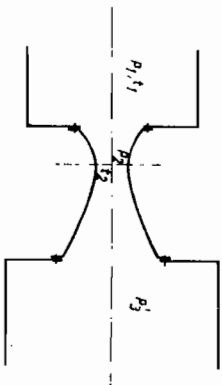
2. Kroz konvergentno-divergentan mlaznik vazduh ($k=1,4$; $R=287 \frac{J}{N \cdot K \cdot g}$) pretiče iz jednog u drugi rezervoar sa protokom $\dot{m}g=13 \frac{g}{s}$. Ako su pritisak i temperatura u tanku iz koga

vazduh ističe $p_1=3,5$ at i $t_1=115^\circ\text{C}$, a u drugom tanku $p_2'=0,7$ at odrediti: a) pritisak, temperaturu i Ma broj u najužem i izlaznom preseku; b) potreban prečnik grla mlaznika i c) izlazni prečnik mlaznika koji osigurava potpunu ekspanziju.

Rešenje.

a) Pretpostavljajući da je $v_2=c_2$ pritisak u grlu mlaznika je

$$p_2 = p_1 \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = 3,5 \cdot 0,528 = 1,85 \text{ at.}$$



Za punu ekspanziju pritisak p_3' u rezervoaru jednak je pritisku na izlazu mlaznika p_3 , dakle

$$p_3 = p_3'$$

dok je brzina u divergentnom delu mlaznika nadzvučna. Sledi

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2}{k+1} \quad ; \quad T_2 = 388 \cdot 0,833 = 323 \text{ K}$$

$$\frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}} \quad ; \quad T_3 = 323 \cdot \left(\frac{0,7}{1,85}\right)^{0,286} = 244 \text{ K.}$$

Iz

$$\frac{v_3^2 - v_2^2}{2} = \frac{k}{k-1} R(T_2 - T_3),$$

odnosno

$$\frac{v_3^2 - v_2^2}{2} = RT_2 \left(\frac{k}{k-1}\right) \left[1 - \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right];$$

sledi

$$v_3 = \sqrt{kRT_2 \left[1 + \frac{2}{k-1} \left(1 - \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)\right]} =$$

$$= \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 323 \left[1 + 5 \left(1 - \left(0,378\right)^{0,286}\right)\right]} = 536 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Kako je

$$c_3 = \sqrt{kRT_3} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 244} = 313 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Mahov broj u izlaznom preseku mlaznika iznosi

$$Ma_3 = \frac{v_3}{c_3} = \frac{536}{313} = 1,71$$

b) Potreban prečnik grla mlaznika se određuje iz zadatog protoka

$$\dot{m}G = \rho_2 G A_2 v_2 = 13 \frac{\text{N}}{\text{s}}$$

$$A_2 = \frac{\dot{m}G}{\rho_2 v_2} = \frac{\dot{m}G \sqrt{RT_2}}{\rho_2 \sqrt{k} RT_2} = \frac{13 \sqrt{287 \cdot 323}}{9,81 \sqrt{1,4} \cdot 1,85 \cdot 9,81 \cdot 10^4} = 0,00188 \text{ m}^2 ;$$

odakle je

$$D_2 = \sqrt{\frac{4A_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,00188}{3,14}} = 0,049 \text{ m.}$$

c) Izlazni prečnik mlaznika d_3 se određuje slično,

$$A_3 = \frac{\dot{m}G}{\rho_3 v_3} = \frac{\dot{m}G \sqrt{RT_3}}{\rho_3 \sqrt{k} RT_3} = \frac{13 \cdot 287 \cdot 244}{9,81 \cdot 0,7 \cdot 9,81 \cdot 10^4 \cdot 526} = 0,00252 \text{ m}^2$$

tj.

$$d_3 = \sqrt{\frac{4A_3}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,0025}{3,14}} = 0,057 \text{ m.}$$

3. Vazduh ističe kroz konvergentno-divergentan mlaznik $d_2=25$ mm u atmosferu. Pritisak i temperatura u rezervoaru su $p_1=7$ at i $t_1=38^\circ\text{C}$, a barometarski pritisak $p_a=101400$ Pa. Izračunati izlazni prečnik mlaznika ako je $p_3'=p_3=p_a$. Odrediti brzinu strujanja, brzinu zvuka i Mahov broj na izlaznom preseku mlaznika. Odrediti pritisak p_2' koji dovodi do istog protoka (v -sliku u uvodnom delu ovog poglavlja). $k=1,4$; $R=287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$.

Rešenje.

Razlika pritiska p_1 i p_3 omogućuje da se u grlu mlaznika postigne brzina zvuka a u divergentnom delu nadzvučna brzina. Težinski protok je određen strujnim parametrima u grlu mlaznika i iznosi

$$\dot{m}G = \rho_2 G v_2 A_2 = \frac{p_2}{RT_2} G c_2 A_2 = \frac{\sqrt{k} G p_2}{\sqrt{RT_2}} \cdot \frac{d_2^2 \pi}{4}$$

gde su:

$$p_2 = 0,528 p_1 = 0,528 \cdot 7 = 3,7 \text{ at} ;$$

$$T_2 = 0,834 \cdot T_1 = 0,834 \cdot 311 = 259 \text{ K} ;$$

te je

$$\dot{m}g = \frac{\sqrt{1,4 \cdot 9,81 \cdot 3,7 \cdot 9,81 \cdot 10^4 \cdot 0,025^2 \pi}}{\sqrt{287 \cdot 259}} = 7,58 \frac{N}{s}$$

Brzina u izlaznom preseku mlaznika je

$$v_3^2 = \frac{k}{k-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{P_3}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] = 3,5 \cdot 287 \cdot 311 \left[1 - (0,148)^{0,286} \right] = 131631$$

$$\therefore v_3 = 513 \frac{m}{s};$$

a temperatura

$$\frac{v_3^2}{2} = \frac{k}{k-1} R (T_1 - T_3) \quad ; \quad T_3 = T_1 - \frac{k-1}{2kR} v_3^2 = 180 \text{ K}$$

Sledi

$$c_3 = \sqrt{kRT_3} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 180} = 269 \frac{m}{s};$$

$$A_3 = \frac{\dot{m}g}{\rho_3 v_3} = \frac{\dot{m}g RT_3}{P_3 v_3} = \frac{7,58 \cdot 287 \cdot 180}{101400 \cdot 9,81 \cdot 513} = 0,00077 \text{ m}^2$$

$$d_3 = \sqrt{\frac{4A_3}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,00077}{3,14}} = 31,3 \text{ mm}$$

Pritisak p_3'' koji dovodi do istog protoka bez dostizanja zvučne brzine u grlu mlaznika se određuje iz

$$\dot{m}g = gA_3 \sqrt{\frac{2k}{k-1} P_1 \rho_1 \left[\left(\frac{P_3''}{P_1} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{P_3''}{P_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}$$

Odattle je

$$\left(\frac{P_3''}{P_1} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{P_3''}{P_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} = \frac{2k-1}{2k} \frac{(\dot{m}g)^2}{A_3^2} \frac{RT_1}{P_1^2 \cdot g^2} =$$

$$= \frac{0,143(7,58)^2}{5,93 \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{287 \cdot 311}{4,71 \cdot 10^{11} \cdot 9,81^2} = 0,0272$$

što zadovoljava odnos

$$\frac{P_3''}{P_1} = 0,89,$$

odnosno

$$p_3'' = 0,89 \cdot p_1 = 6,23 \text{ at};$$

tj. isti protok kroz konvergentno-divergentni mlaznik se ostvaruje sa dozvučnim strujanjem u svakoj sekciji mlaznika.

4. Mlaznik prikazan na slici služi za stvaranje

fluidnog mlaza koji struji pri $Ma_3 = 8$. Komora sadrži vazduh na pritisku $P_1 = 70$

at i temperaturi

$T_1 = 700 \text{ K}$. Mlaz is-

tiče u oblast gde

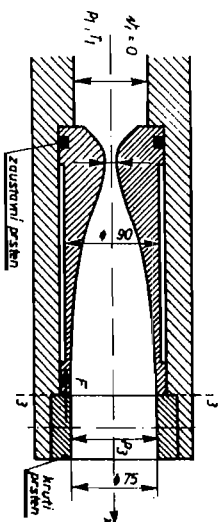
je pritisak $P_3'' =$

$= 0,007 \text{ at}$. Brzina

vazduha u komori

je zanemarljiva.

($k=1,4$; $R=287 \frac{J}{kgK}$).



Određiti aksijalnu silu s kojom mlaznik deluje na kruti izlazni preten.

Rešenje.

Jednačina o promeni količine kretanja u pravcu x-ose za presek 1 i 3 daje silu s kojom se mlaznik protivi isticanju;

$$P_1 A - P_3 A - F = \rho_3 v_3^2 A_3 - \rho_1 v_1^2 A_1,$$

$$F = (P_1 - P_3) A - \rho_3 v_3^2 A_3.$$

Sila s kojom fluidna struja deluje na mlaznik, odnosno izlazni kruti preten, je istog intenziteta suprotnog smeru +. Razlika pritiska $P_1 - P_3$ deluje na istu površinu A, jer se dejstvo pritiska prenosi s leve i desne strane sve do zap-ativnog pretena.

Prema jednačini za izentropsku ekspanziju određuje se pritisak P_3 u izlaznom preseku mlaznika kako sledi.

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{v_3^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{P_3}{\rho_3} \quad ; \quad \frac{v_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{v_3^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{P_3}{\rho_3}$$

je

$$\frac{P_1}{P_3} = \left[1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_3^2 \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = [1+0,2 \cdot 8^2]^{3,5} = 9763 \quad ; \quad P_3 = 0,0072 \text{ at.}$$

Veličina $\rho_3 v_3^2$ određena je lokalnom brzinom zvuka u izlaznom preseku 3 tj.

$$\rho_3 v_3^2 = \rho_3 Ma_3^2 c_3^2 = \rho_3 Ma_3^2 \kappa \frac{P_3}{\rho_3} = \kappa Ma_3^2 P_3 = 1,4 \cdot 8^2 \cdot 0,0072 \cdot 9,81 \cdot 10000 = 63286 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}.$$

Zanemarujući član A_3 , zbog malog intenziteta pritiska p_3 u odnosu na P_1 dobija se sila dejstva vazdušne struje na kruti prsten.

$$F = A P_1 - \rho_3 v_3^2 A_3 = \frac{0,09^2 \pi}{4} \cdot 0,9, 81 \cdot 10000 - 63286 \cdot \frac{0,2075^2 \pi}{4} = 43664 - 279 = 43384 \text{ N.}$$

Čak i u slučajevima isticanja sa vrlo visokim Ma brojevima sila usled statičkog pritiska je jača od dinamičke.

Zadaci.

1. Kroz venturi-metar vazduh ističe adijabatski. Ulaz je $\phi 75 \text{ mm}$ a pritisak i temperatura su $P_1 = 1,4$ at i 15°C . Odrediti prečnik grla mlaznika ako pritisak ne opada ispod $1,3$ at a protok je $1 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$. Pretpostaviti $\kappa = 1,4$; $R = 287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$; koeficijent protoka $\mu = 1$.

Rešenje.

$$D_2 = 24 \text{ mm}$$

2. Konvergentno-divergentan mlaznik se nalazi na bočno rezervoara sa vazduhom konstantnog pritiska P_1 i gustine ρ_1 . Površina grla mlaznika je A_2 . Pretpostavljajući da je vazdušna struja kroz mlaznik adijabatska i bez trenja, odrediti izraz za težinski protok u zavisnosti od P_1, ρ_1, A_2, κ i P_2 - pritiska u grlu mlaznika.

Diferenciranjem izraza za protok po karakteristici

$$\frac{P_2}{P_1} \text{ odrediti vrednosti } \frac{P_2}{P_1} \text{ i } \frac{T_2}{T_1}$$

koje obezbeduju maksimalan protok kroz mlaznik.

Rešenje.

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad ; \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{2}{\kappa+1}$$

3. Ulazni prečnik venturi-metra, koji se koristi za merenje protoka vazduha u cevi, je 75 mm a grla 25 mm . Pokazivanje U manometara sa živom priklijučenim na ulaz i grlo mlaznika je 250 mmHg i 150 mmHg . Odrediti zapreminski protok vazduha kroz cev. Pretpostaviti adijabatsku promenu ($\kappa = 1,4$). Gustina vazduha na ulazu je $1,59 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Barometarski pritisak 760 mmHg .

Rešenje.

$$Q = 0,0645 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

9.5. KONTROLNA PITANJA

1. Izdvojiti izraz koji ne određuje brzinu zvuka

a) $\sqrt{\kappa RT}$; b) $\sqrt{\frac{D}{\rho}}$; c) $\sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$; d) $\sqrt{\frac{\kappa P}{\rho}}$; e) $\sqrt{\frac{R}{\rho}}$

2. Brzina zvuka u vodi u $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ pri standardnim uslovima je:

a) 460 ; b) 1100 ; c) 4600 ; d) 11000 ;

e) nijedan od odgovora

3. Brzina zvuka u gasu menja se direktno sa:

a) gustinom,

b) apsolutnim pritiskom,

c) apsolutnom temperaturom,

d) modulom elastičnosti,

e) nijedan od odgovora.

4. Diferencijalna jednačina za energiju izentropske

struje može se izraziti u obliku:

a) $dp + d(\rho v^2) = 0$,

b) $\frac{dv}{v} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} = 0$,

- c) $2v dv + \frac{dp}{\rho} = 0$,
d) $v dv + \frac{dp}{\rho} = 0$,
e) nijedan od odgovora.

5. Izentropska struja se može definisati kao:

- a) reverzibilna izotermna struja,
b) adijabatska struja bez trenja,
c) reverzibilna struja bez trenja,
d) konvergentno-divergentna struja,
e) nijedan od odgovora.

6. Izdvojiti korektne stavove u odnosu na struju

kroz konvergentno-divergentan mlaznik:

- a) kada je Ma na izlazu veći od jedan, ne formira se udarni talas u mlazniku,
b) kada se dostigne kritični odnos pritiska Ma je u grlu mlaznika veći od jedan,
c) za dostignutu brzinu zvuka u grlu, samo jedan pritisak ili brzina će postojati u nizstrujnoj sekciji,
d) Mahov broj u grlu mlaznika je uvek jedan,
e) Gustina se povećava u nizstrujnom pravcu kroz konvergentni deo mlaznika.

7. Da li će avion, koji leti u standardnoj atmosferi, pre ili kasnije dostići zvučnu brzinu od onog koji je bliži zemlji?

8. Kada je brzina zvuka veća; kada se gas kreće ili miruje? Napisati izraz koji omogućuje ovakvu analizu.

9. Pri kom uslovu se brzina zvuka izjednačuje sa brzinom strujanja? Kolika je ova kritična brzina za vazduh pri normalnim atmosferskim uslovima.

10. Brzina zvuka u metanu pri 7°C u $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ je:
a) 335 ; b) 411 ; c) 438 ; d) 451 ;
e) nijedan od ovih odgovora

11. Za brzinu od $780 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ u azotu pri 5°C Mahov broj je jednak

- a) 0,42 ; b) 0,65 ; c) 1,54 ; d) 2,3 ;
e) nijedan od ovih odgovora.

12. Vazduh u rezervoaru pri 20°C struji kroz konvergentno-divergentan mlaznik. Vrednost brzine zvuka u grlu mlaznika u $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ je:

- a) 305 ; b) 320 ; c) 343 ; d) ne može da se odredi ; e) nijedan od ovih odgovora.

13. Odrediti brzinu zvuka u sledećim slučajevima:

- a) vazduh na 0°C ,
b) vodonik na 21°C ,
c) voda,
d) etil alkohol $\rho = 779 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

14. Vazduh, koji struji kroz cev prečnika 100 mm, ima brzinu $106 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a pritisak 6,3 at i temperaturu 15°C , u jednom preseku. Koliki su Ma i Re broj za ovu cevnu deonicu?

15. Ugljendioksid utiče iz cevi prečnika 50 mm u veliki rezervoar pri $Ma=0,75$. Temperatura u cevi je 4°C i pritisak 1,4 at. Koliki je težinski protok?

Uključivanjem termodinamičkih promena u energijske promene određene Bernulijevom jednačinom dobija se opšta energijska jednačina, koja se izražava sa prvim zakonom termodinamike. Prvi zakon termodinamike je postulat o očuvanju energije. Klasifikaciju energije je pogodno izvršiti u dve glavne kategorije: energija u prelazu i energija koja se zadržava u kontrolnom sistemu. Sistem je proizvoljna zapremina preko čijih graničnih površina nema izmene mase; on kao čvrsto telo, međutim, preživljava promenu količine kretanja i energije. Može da bude pokretan i nepokretan. Razlika između kontrolnog sistema i kontrolne zapremine je što se kroz granice kontrolne zapremine vrši prelaz energije, količine kretanja ali i mase.

mu su :

- a) Kinetička energija E_K - čiji je uzrok kretanja masa sistema,
- b) Potencijalna energija E_p - određena je položajem masa u odnosu na spoljnu (okolnu) masu,
- c) Unutrašnja energija u - ukupna (molekularna i atomska) energija.

Dve vrste energije u prelazu su:

- a) Toplota - energija koja prelazi sa jedne mase na drugu; kao rezultat razlike u temperaturi,
- b) Rad - energija koja prelazi sa sistema ili na sistem; kao rezultat dejstva spoljašnjih sila.

Diferencijalna forma bilansa energije je

$$\delta q - \delta W = du + d\left(\frac{P}{\rho}\right) + d\left(\frac{1}{2}v^2\right) + g dz \quad \frac{J}{Kg}$$

Ede su:

$dE_p = d\left(\frac{P}{\rho}\right) + g dz$ - elementarna potencijalna energija je zbir elementarne energije polja pritiska i polja zemljine teže,

δq - elementarna količina toplote po jedinici mase koju razmenjuje kontrolni sistem sa okolinom. Funkcija je tipa procesa i nije potpuni diferencijal,

δW - razmenjeni rad sa okolinom, takodje je funkcija tipa procesa i nije potpuni diferencijal,

$dE_K = d\left(\frac{1}{2}v^2\right)$ - elementarna kinetička energija.

po definiciji, suma unutrašnje i energije pritiska naziva se entalpija $i = u + \frac{P}{\rho}$.

Ako se leva strana jednačine može integraliti, što zavisi od poznavanja vrste procesa promene stanja, biće

$$q_{1,2} = W_{1,2} + i_2 - i_1 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \quad \frac{J}{Kg}$$

gde se indeksi 1 i 2 odnose na dva različita vremenska trenutka.

Zbog kretanja fluida umesto bilansa energije pogodnije je posmatrati bilans snage koji se dobija množenjem poslednje jednačine sa protočnom fluidnom masom.

$$\text{Zbir} \quad i + \frac{v^2}{2} = i_t$$

naziva se totalnom entalpijom.

Za adijabatsku promenu (povratnu ili nepovratnu), kada nema odavanja rada i kada nema razlike u visini, energijska jednačina po jedinici protoka mase glasi

$$i_2 - i_1 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = 0 ;$$

$$c_p (T_2 - T_1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = 0 ;$$

$$\frac{kR}{k-1} (T_2 - T_1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = 0$$

ili u diferencijalnom obliku

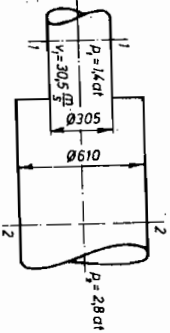
$$\frac{K}{K-1} dT + \frac{v dV}{g} = 0$$

Ova jednačina je osnovna za sva izvodjenja kod adijabatskog (izentropskog) strujanja i razmatrana je u glavi 9.

Primeri.

1. Vazduh struji ustaljeno

no kroz cev Ø305 mm, koja se naglo proširuje na Ø610 mm. Temperatura je konstantna 20°C. Za podatke date na slici izračunati količinu toplote koja se dovede ili odvede gasu.



Rešenje.

1. Kontrolni sistem je ograničen zidovima cevi i preseca 1 i 2.

Brzina u preseku 2 je određena

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

$$v_2 = v_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 = 30,5 \frac{1,225}{0,93} \left(\frac{1}{2} \right)^2 = 3,81 \frac{m}{s}$$

Iz energijske jednačine sledi

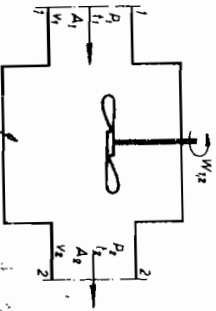
$$q_{1,2} = W_{1,2} + i_2 - i_1 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

$$q_{1,2} = \frac{3,218^2 - 30,5^2}{2} = -457,86 \frac{J}{kg}$$

tj. iz sistema prikazanog na slici svakog trenutka se odvodi izračunata količina toplote.

2. Vazduh ulazi u jedan

aparatus sa pritiskom 1,033 at i t-emperturam 15°C. Ulazna površina jednaka je izlaznoj površini $A_1 = A_2 = 0,093 \text{ m}^2$. U izlaznom preseku je pritisak 1,02 at, a temperatura 93°C. Ulazna brzina vazduha je



9 $\frac{m}{s}$. Ovaj aparat oada je 5 KS nekoj drugoj mašini. $z_1 = z_2$; $c_p = 1005,33 \frac{J}{kgK}$. Odrediti toplotu koja se do vodi aparatu.

Rešenje.

Za kontrolni sistem, čije su granice označene na slici, energijska jednačina je

$$q_{1,2} = W_{1,2} + i_2 - i_1 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

gde su:

$$i_2 - i_1 = c_p (T_2 - T_1) = 1005,33(366 - 288) = 78416 \frac{J}{kg}$$

$$v_2 = \frac{p_1}{p_2} \frac{T_2}{T_1} v_1 = \frac{1,033}{1,02} \cdot \frac{366}{288} \cdot 11,58 \frac{m}{s}$$

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = 107,55 \frac{J}{kg}$$

$$W_{1,2} = \frac{P}{\rho Q} = \frac{P}{\rho_1 v_1 A_1} = \frac{5 \cdot 75 \cdot 9,81}{1,225 \cdot 0,093} = 3588 \frac{J}{kg}$$

Tako je

$$q_{1,2} = 78416 + 3588 + 107,55 = 82110 \frac{J}{kg}$$

ili toplotna snaga koja se do vodi aparatu iznosi

$$\dot{q}_{1,2} = q_{1,2} \rho Q = 82110 \cdot 1,225 \cdot 9 \cdot 0,093 = 84,19 \text{ kW}$$

3. Atmosferski vazduh apsolutnog pritiska $p_0 = 1,033$ at i $t = 15^\circ\text{C}$ ulazi u stacionarnu gasnu turbinu sa brzinom $v = 107 \frac{m}{s}$, kroz ulazni površinski presek $A_1 = 0,093 \text{ m}^2$. Vazduh prolazi kroz kompresor, toplotni razmenjivač i kroz turbinu. Vazduh napušta postrojenje sa pritiskom $p_m = 0,7$ at i $t = 160^\circ\text{C}$. Izlazni presek je jednak ulaznom $A_2 = A_1$, a postrojenje oada je 410 KS na obrtnoj osovinu. Izlaz je na istoj visini kao i ulaz. Koja količina toplote se prenosi na vazduh koji prolazi kroz postrojenje?

Rešenje.

Protok mase fluida iznosi

$$\rho v A_1 = 1,225 \cdot 107 \cdot 0,093 = 12,093 \frac{kg}{s}$$

tako da je odvedeni rad

$$W_{1,2} = \frac{P}{\rho Q} = \frac{410 \cdot 75 \cdot 9,81}{12,719} = 24746 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Brzina vazduha u izlaznom preseku je određena jednačinom kontinuiteta

$$v_2 = v_1 \frac{P}{P_2} = 107 \cdot \frac{1,033}{1,033+0,7} \cdot \frac{433}{788} = 95,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Razlika entalpija u izlaznom i ulaznom preseku je

$$i_2 - i_1 = c_p (T_2 - T_1) = 1005,33(160 - 15) = 145773 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

gde je

$$c_p = 0,24 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}} = 0,24 \cdot 427,9,81 = 1005,33 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$$

Energijska jednačina određuje količinu toplote koja se dovodi vazduhu koji prolazi kroz postrojenje

$$q_{1,2} = W_{1,2} + i_2 - i_1 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = 24746 + 145773 + \frac{95,9^2 - 107^2}{2} = 169,4 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Zadaci.

1. Jedna parna turbina troši $\dot{m} = 4500 \frac{\text{kg}}{\text{h}}$ pare odajući na osovini $P = 1000 \text{ KS}$. Ulazna i izlazna brzina pare je $v_1 = 60 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i $v_2 = 274 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Merenjima je utvrđeno da je vrednost ulazne i izlazne entalpije pare $i_1 = 600 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$ i $i_2 = 500 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$. Potrebno je izračunati kolika se količina toplote dovodi sistemu?

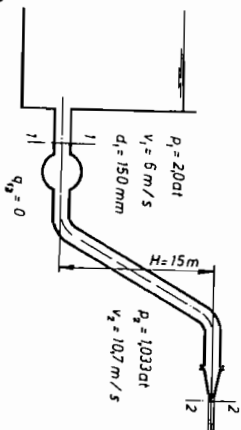
Rešenje. $\dot{q}_{1,2} = 4,7 \frac{\text{kJ}}{\text{h}}$

2. Na slici je

pokazana cev kroz koju se pumpa voda na jedan viši nivo. Kolika je snaga pumpe potrebna za ovo strujanje?

Rešenje.

$$P = 1,36 \text{ kW}$$



GLAVA 11

TEORIJA SLIČNOSTI I DIMENZIJSKA ANALIZA

11.1 TEORIJA SLIČNOSTI

Zakoni mehanike fluida su izvedeni uz pomoć analitičkih metoda pa tačnost rezultata dobijenih prilikom njihove primene na praktične probleme u mnogome zavise od eksperimentalnih podataka. Eksperimenti se često ne izvode na samom objektu nego na njegovom modelu (obavezno kada su u pitanju veliki objekti, brod, avion, kanal, brana, luka itd.) Ovakva, prethodna ispitivanja omogućuju praviljenje prototipa koji ima najbolje karakteristike.

Model je umanjena, ali verna kopija objekta (prototipa). Model je definisan kao "sistem čijim operacijama se mogu predvideti karakteristike drugog sličnog sistema". Prednost ispitivanja na modelu je jeftinija, brža i jednostavnija izrada, lakše i potpunije izvođenje eksperimenata i mogućnost brzih i ekonomičnih promena na modelu za određivanje najpogodnijih karakteristika. Najvažniji nedostatak je činjenica da je nekad vrlo teško, ili čak i nemoguće, ostvariti potpunu sličnost između strujanja na modelu i na prototipu.

Rezultati dobijeni ispitivanjima na modelu mogu da se koriste za određivanje karakteristika prototipa samo ako je ostvarena neophodna sličnost između strujanja na modelu i na prototipu.

U problemima koji su vezani za mehaniku fluida javljaju se sledeći oblici sličnosti:

Geometrijska sličnost zahteva sličnost oblika. Model je geometrijski sličan prototipu ako je stalan odnos svih odgovarajućih dužina na modelu i na prototipu.

Kinematička sličnost zahteva sličnost kretanja.

Kinematička sličnost između modela i prototipa je postignuta ako su strujnice, koje sačinjavaju fluidni delići u kretanju, geometrijski slične i ako je stalan odnos brzina i ubrzanja odgovarajućih delića na modelu i na prototipu.

Dinamička sličnost zahteva sličnost sila. Model je dinamički sličan prototipu ako mu je kinematički sličan i ako je stalan odnos odgovarajućih fluidnih masa koje se kreću i odgovarajućih sila koje utiču na kretanje (ako se oba kretanja opisuju istom Navije - Stoksovom jednačinom).
Potpuna sličnost u mehanici fluida se postiže zadovoljavanjem dinamičke sličnosti koja u sebi sadrži i ostala dva oblika sličnosti.

U skladu sa D'alambertovim principom Navije - Stoksova jednačina može da se napiše (za model i za prototip) u sledećem obliku

$$I_m + G_m + P_m + T_m = 0$$

$$I_p + G_p + P_p + T_p = 0$$

gde su: I - inercijalne sile, G - spoljašnje sile, P - sile pritiska i T - viskozne sile.

Potreban i dovoljan uslov da ove dve jednačine budu iste (linearno zavisne) je

$$\frac{I_m}{I_p} = \frac{G_m}{G_p} = \frac{P_m}{P_p} = \frac{T_m}{T_p} = \text{const.}$$

Razne kombinacije ovih jednačina daju razne kriterijume sličnosti. Najvažniji kriterijumi se dobijaju formiranjem, iz gornjih jednačina, odnosa inercijalne i jedne - druge sile. Ovo proizilazi iz činjenice da je ponašanje fluidnog delića, koji se kreće, određeno inercijalnom silom koja teži da delić održi u stanju jednolikog pravolinijskog kretanja i dejstvom otporne sile. U zavisnosti od otporne sile koja preovladava pri strujanju, mogu da se dobiju sledeći odnosi:

Odnos inercijalnih i viskoznih sila se dobija iz

$$\frac{I_m}{T_m} = \frac{I_p}{T_p} = \frac{ma}{\eta \frac{dv}{dy}} = \frac{\rho \ell^2 v^2}{\eta \ell^2 \frac{v \cdot \ell}{v}} = \text{Re}$$

gde su: inercijalne sile ma predstavljene sa

$$\rho \ell^3 \frac{dv}{dt} = \rho \ell^3 \frac{v}{\ell} \cdot \frac{\ell}{T} = \rho \ell^2 v^2$$

$$\frac{dv}{dy} = \eta v \ell$$

a sa Re Reynoldsov (Reynolds) broj - bezdimenzijski kriterijum sličnosti.

U slučajevima gde je viskozna sila dominantna, uslov dinamičke sličnosti je jednakost Re za model i za prototip.

Odnos inercijalnih i gravitacionih (spoljašnjih) sila se dobija iz

$$\frac{I_m}{G_m} = \frac{I_p}{G_p} = \frac{ma}{\rho \ell^3 g} = \frac{v^2}{g \ell} = \text{Fr}^2$$

gde je sa Fr označen Frudov (Froude) broj ($\text{Fr} = \frac{v^2}{g \ell}$ ili $\text{Fr} = \frac{v}{\sqrt{g \ell}}$)
Kod pojava gde je gravitacijska sila najznačajnija otporna sila, uslov dinamičke sličnosti je jednak Fr za model i za prototip.

Uspostavljanjem odnosa između inercijalnih sila i sila pritiska definišu se sledeći bezdimenzijski kriterijumi:

Ako se razmatra strujanje stišljivog fluida sile pritiska su identične elastičnim silama pa je

$$\frac{I_m}{P_m} = \frac{I_p}{P_p} = \frac{ma}{\epsilon A} = \frac{\rho \ell^2 v^2}{\epsilon \ell^2} = \frac{\rho v^2}{\epsilon} = \frac{v^2}{c^2} = \text{Ma}^2$$

gde su: ϵ modul stišljivosti ($\epsilon = \rho$ za $T = \text{const}$ i $\epsilon = \kappa p$ za $s = \text{const}$),

c brzina zvuka,
Ma Mahov (Mach) broj ($\text{Ma} = \frac{v}{c} = \frac{v}{\sqrt{\frac{\epsilon}{\rho}}}$).

Kod pojava gde elastična sila predstavlja najznačajniju otpornu silu uslov dinamičke sličnosti je jednakost Ma za model i za prototip.

U slučaju kada se sile pritiska mogu zamenuti silama površinskog napona, odnos inercijalnih sila i sila po-

vršinskog napona definiše Veberv (Weber) broj (We).

$$\frac{I_m}{I_p} = \frac{I}{I_p} = \frac{\rho l^2 v^2}{\gamma l} = We$$

Ovde je sa γ označen koeficijent površinskog napona. Jednakost We za model i prototip obezbeđuje dinamičku sličnost u slučaju da od otpornih sila prevladava sila površinskog napona.

Pri kretanju nestišljivog fluida odnos inercijalnih sila i sila pritiska određuje bezdimenzijsku karakteristiku Eu - Ojlerov (Euler) broj

$$\frac{I_m}{I_p} = \frac{I}{I_p} = \frac{\rho l^2 v^2}{\rho l^2} = Eu$$

Kada su sile pritiska najznačajnije otporne sile, dinamička sličnost se obezbeđuje jednakošću Eu za model i za prototip.

Navedeni kriterijumi su najvažiji kada su u pitanju problemi iz oblasti mehanike fluida. Iz samog načina dobijanja ovih kriterijuma jasno je da postoje i drugi brojevi koji mogu da budu uslovi sličnosti u pojedinim slučajevima. Pored ovoga česta je pojava, kada više različitih sila imaju isti uticaj na strujanje, da se sličnost kretanja odredi jednakošću više kriterijuma ili pak jednakošću njihovih zbirova.

Za probleme iz drugih oblasti nauke (termodinamika, hemija, itd.) sličnost pojava će biti ostvarena zadovoljavanjem jednakosti kriterijuma definisanih u odgovarajućoj oblasti.

Primeri.

1. Pokazati da je strogo ispunjavanje sličnosti između kretanja broda i njevogovog modela u jednoj istoj tečnosti nemoguće.

Rešenje.

Strogasličnost između kretanja broda i modela se ostvaruje jednakošću Re i Fr brojeva za brod i model.

Tablica 21 Karakteristike bezdimenzijske karakteristike upotrebljavanje

Označka	Izraz	naziv	primedba	upotreba
Re	$\frac{v l}{\nu}$	Reynoldsov broj (Reynolds)	predstavlja odnos inercijskih i viskoznih sila	kriterijum sličnosti pri strujanju realnog (viskoznog) fluida
Fr	$\frac{v}{\sqrt{g l}}$	Froudov broj (Froud)	predstavlja odnos inercijskih i gravitacijskih (spolnih, zaprem.) sila	kriterijum sličnosti pri kretanju fluida pod dejstvom gravitacijskih sila
Ma	$\frac{v}{c}$	Mahov broj (Mach)	predstavlja odnos inercijskih i elastičnih sila	kriterijum sličnosti pri strujanju stišljivog fluida
We	$\frac{\rho v^2 l}{\gamma}$	Veberv broj (Weber)	predstavlja odnos inercijskih sila i sila površinskog napona	kriterijum sličnosti kada na kretanje fluida utiču površinski naponi
Eu	$\frac{\rho v^2}{p}$	Ojlerov broj (Euler)	predstavlja odnos inercijskih sila i sila pritiska	kriterijum sličnosti pri kretanju tečnih fluida pod uticajem sila pritiska
Gr	$\frac{g l^3 \rho - \rho_0}{\nu^2 \rho_0}$	Grashofov broj (Grashoff)	predstavlja odnos sila potiska i otpornih (viskoznih) sila	kriterijum sličnosti pri kretanju pod uticajem sila potiska
Pe	$\frac{v l}{a}$	Fekleov broj (Peclet)		kriterijum sličnosti za promenljiva strujanja
Pr	$\frac{v}{a}$	Prantlov broj (Prandtl)	predstavlja odnos $\frac{Re}{Pe}$	
Sh	$\frac{v}{n l}$	Struhalov broj (Strouhal)		kriterijum sličnosti za periodične promene u fluidu
Fo	$\frac{a t}{l^2}$	Furijev broj (Fourier)		kriterijum sličnosti pri poredjenju temperaturnskih polja
Mu	$\frac{a l}{\lambda}$	Museltov broj (Muselt)		kriterijum sličnosti za granične uslove prelaza toplote
Nu	$\frac{D}{\rho v Z}$	Njutnov broj (Newton)	$Nu = \frac{1}{Fr}$	
Ca	$\frac{v l}{\sigma}$	Košijev broj (Cauchy)	odgovara Ma broju u aerodinamici	kriterijum kod proučavanja elastičnosti. npr. pri ispitivanju udara u cevnm vodovima

Ovo dovodi do

$$Re_m = Re$$

$$\frac{v_m \cdot l_m}{\nu} = \frac{v \cdot l}{\nu}$$

$$\frac{v_m}{v} = \frac{l}{l_m}$$

$$\left(\frac{l}{l_m}\right)^2 = \frac{l}{l_m}$$

$$Fr_m = Fr$$

$$\frac{v_m^2}{g l_m} = \frac{v^2}{g l}$$

$$\left(\frac{v_m}{v}\right)^2 = \frac{l}{l_m}$$

$$\left(\frac{l}{l_m}\right)^3 = 1$$

tj. $l = l_m$, da su model i brod istih dimenzija.

2. Pumpa treba da crpi $Q_p = 180 \frac{l}{s}$ nafte gustine $\rho_p = 800 \frac{kg}{m^3}$ i dinamičke viskoznosti $\eta_p = 0,06$ Pas kroz cev prečnika $D_p = 200$ mm.

Modelska ispitivanja se izvode na geometrijski sličnom modelu pumpe čije su karakteristične linearne dimenzije četiri puta manje od odgovarajućih dimenzija prototipa. Smatrajući da na uslove strujanja bitno utiču svojstva inercije, viskoznosti i težine tečnosti treba odrediti:

a) Kolika je minimalna dozvoljena visina zaronjene cevi usisnog dela cevovoda pumpe $S_{min p}$, ako je odgovarajuća veličina na modelu $S_{min m} = 70$ mm?

b) Kolika mora biti kinematska viskoznost ν_m tečnosti koja se koristi za modelsko ispitivanje?

c) Koliki treba da bude protok Q_m kroz model pumpe?

Rešenje.

a) Za sve dužine važi ista srazmera te je i

$$\frac{S_{min m}}{S_{min p}} = \frac{1}{4} ; \quad S_{min p} = 4 \cdot 70 = 280 \text{ mm.}$$

b) Slično strujanje se postiže jednakošću Re i Fr

brojeva:

$$Fr_m = Fr_p$$

$$\frac{v_m^2}{g l_m} = \frac{v^2}{g l}$$

$$v_m = \frac{4 Q_p}{D_p^2 \pi} \sqrt{\frac{l}{l_m}}$$

$$v_m = 5,73 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = 2,87 \frac{m}{s}$$

$$Re_m = Re_p$$

$$\frac{v_m D_m}{\nu_m} = \frac{v D}{\nu}$$

$$\frac{v_m}{\nu_m} = \frac{v}{\nu} \frac{D}{D_m}$$

$$\frac{v_m}{\nu_m} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\nu_m = \frac{1}{8} \cdot \frac{\eta_p}{\rho_p} = \frac{1}{8} \cdot \frac{0,06}{800} = 9,37 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

$$= 9,37 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

c) Protok kroz model je određen sa:

$$Q_m = \frac{d_m^2 \cdot v_m}{Q_p d^2 \cdot v} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

$$Q_m = \frac{180}{32} = 5,62 \frac{l}{s}$$

3. Model broda dužine $l_m = 1,5$ m ispitivan je u rezervoaru napunjenom fluidom gustine $\rho_m = 900 \frac{kg}{m^3}$ i dinamičke viskoznosti $\eta_m = 2 \cdot 10^{-6}$ Pas. Kinematička viskoznost vode je $\nu_p = 1,31 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ a njena gustina $\rho_p = 1000 \frac{kg}{m^3}$. Dužina prototipa broda je 54 m. Odrediti:

a) Potrebnu brzinu modela v_m da bi se dobio isti oblik talasa kao na prototipu, ako je brod predviđen za brzinu od $v_p = 10 \frac{m}{s}$.

b) Koliki je odnos $\frac{Re_m}{Re_p}$ za ove brzine?

c) Kolika bi trebala da bude dinamička viskoznost fluida pri modelskom ispitivanju da bi odnos $\frac{Re_m}{Re_p}$ imao vrednost 1?

Rešenje.

a) Za isti oblik talasa važna je jednakost Fr

brojeva:

$$Fr_m = Fr_p$$

$$\frac{v_m}{\sqrt{g \lambda}} = \frac{v_p}{\sqrt{g \lambda}}$$

$$v_m = v_p \sqrt{\frac{\lambda_p}{\lambda_m}} = 10 \sqrt{\frac{1,5}{54}} = 1,67 \frac{m}{s}$$

b) Količnik Re brojeva za određene brzine je

$$\frac{Re_p}{Re_m} = \frac{\frac{\rho_p v_p d}{\eta_p}}{\frac{\rho_m v_m d}{\eta_m}} = \frac{1,31 \cdot 10^{-6}}{1,5 \cdot 1,67 \cdot 900} = 36,6$$

c) Iz jednakosti $Re_m = Re_p$ sledi

$$\frac{\rho_m v_m d}{\eta_m} = \frac{\rho_p v_p d}{\eta_p}$$

$$\eta_m = \frac{\rho_m v_p d}{\rho_p v_m} = \frac{900 \cdot 1,31 \cdot 10^{-6} \cdot 1,5 \cdot 1,67}{54 \cdot 10} = 5,47 \cdot 10^{-6} \text{ Pas.}$$

4. Dve tečnosti različite gustine i viskoznosti struje kroz istu cev pri istom Reynoldsovom broju.

a) Potrebno je odrediti odnos brzine, izgubljene visine i izgubljenu snagu kao funkciju odnosa viskoznosti.

b) Ako je jedna od tečnosti mineralno ulje gustine $\rho = 894 \frac{kg}{m^3}$ i dinamičke viskoznosti $\eta = 13 \cdot 10^{-2}$ Pas; a struji kroz cev prečnika $d = 16$ mm uz protok $Q = 1,84 \frac{m^3}{s}$, naći izgubljenu visinu na dužini $l = 30$ m.

c) Kolika bi bila izgubljena visina za vodu na $15^\circ C$ ($\nu = 0,131 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$), ako je strujanje pri istom Re broju.

Rešenje.

a) $Re_1 = Re_2$; $\frac{v_1 d_1}{\nu_1} = \frac{v_2 d_2}{\nu_2}$; $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}$

$h_1 = k \frac{v_1^2}{2}$; $h_2 = k \frac{v_2^2}{2}$; $\frac{h_1}{h_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2$

$$P_1 = \rho_1 Q_1 h_1$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho_1 Q_1 h_1}{\rho_2 Q_2 h_2} = \frac{\rho_1 v_1 h_1}{\rho_2 v_2 h_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{v_1}{v_2} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^3$$

b) Reynoldsov broj za date podatke iznosi

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{4Q}{\pi d \nu} = \frac{4 \cdot 0,00184}{\pi \cdot 0,016 \cdot 0,13} = 1007$$

te je strujanje kroz cev laminarno. Za laminarno strujanje važi

$$gh = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2} = \frac{64}{Re} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{64}{1007} \cdot \frac{30}{0,016} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{4 \cdot 0,00184}{\pi \cdot 0,016 \cdot 0,13}\right)^2 = 4993 \frac{J}{kg}$$

c) Brzina i izgubljena visina za vodu pri $Re = 1007$

iznose

$$1007 = \frac{v \cdot d}{\nu} ; v = \frac{1007 \cdot 1,31 \cdot 10^{-6}}{0,016} = 0,0824 \frac{m}{s}$$

$$gh_v = \frac{64}{1007} \cdot \frac{30}{0,016} \cdot \frac{0,0824^2}{2} = 0,4 \frac{J}{kg}$$

5. Otpor tela F koje se kreće kroz kompresibilan fluid gustine ρ , dinamičke viskoznosti η i modela stišljivosti e je dat sa

$$F = \rho v^2 l^2 f(Re, Ma)$$

gde je v brzina a l karakteristična dužina tela. Za uslove prikazane gornjim izrazom, ukazati na teškoće koje se javljaju pri ispitivanju modela aviona u okolo-zvučnom vazdušnom tunelu, ako je odnos karakterističnih dužina prototipa i modela 10. Na koji način teškoće mogu da se izbegnu?

Rešenje.

Za dinamičku sličnost mora da se obezbedi jednakost Re i Ma za model i prototip. Iz

$$Re_m = Re_p$$

sledi

$$\frac{\rho_m \lambda V_m}{\eta_m} = \frac{\rho_p \lambda V_p}{\eta_p}$$

Kako je $\rho_m = \rho_p$ i $\eta_m = \eta_p$ pošto se u oba slučaja koristi isti fluid, onda je

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{\lambda_p}{\lambda_m} ; \quad v_m = v_p \cdot \frac{\lambda_p}{\lambda_m} = 10 v_p$$

Iz $Ma_m = Ma_p$,

$$\frac{V_m}{c_p} = \frac{V_p}{c_p} \quad \text{i} \quad \frac{V_m}{\sqrt{\frac{\epsilon_m}{\rho_m}}} = \frac{V_p}{\sqrt{\frac{\epsilon_p}{\rho_p}}}$$

Pošto je za isti fluid i $\epsilon_m = \epsilon_p$ sledi

$$V_m = V_p$$

što pokazuje da istovremeno pod navedenim uslovima ne mogu biti zadovoljena oba uslova $Re_m = Re_p$ i $Ma_m = Ma_p$.

Ova teškoća može da se prevaziđe ako se u tunelu koristi sabijen vazduh tako da je odnos pritiska

$$\frac{P_m}{P_p} = \frac{\lambda_m}{\lambda_p} ;$$

tj. $P_m = 10 \text{ at}$.

Tada je i $\rho_m = 10 \rho_p$,

pa je jednakost Re brojeva daje

$$v_m = v_p \cdot \frac{\rho_p \lambda_p}{\rho_m \lambda_m} = v_p$$

Pošto je $\epsilon = k p$, a p se menja srazmerno sa P , vrednost c se ne menja te i jednakost Ma brojeva daje

$$v_m = v_p$$

te rad sa nadpritiskom u nadzvučnom tunelu omogućuje modelska ispitivanja. Smanjivanjem temperature postiže se isti efekat ($\eta = \text{const.}$).

6. Ako se u kanalima koji se vide na planeti Mars nalazi voda, potrebno je saznati kakav bi bio otpor jedne barke koja bi plovila po njima. Ispitivanja bi se izvršila na Zemlji sa modelom $\frac{1}{10}$ veličine prototipa. Kolika treba da je brzina modela na Zemlji za sličnost kretanja ako bi brzina prototipa bila $3 \frac{m}{s}$ na planeti Mars? Pretpostaviti da je masa Marsa $\frac{1}{10}$ mase Zemlje, a prečnik Marsa $\frac{1}{2}$ prečnika Zemlje. Koliki je otpor broda na Marsu u odnosu na otpor modela na Zemlji?

Rešenje.

Za sličnost kretanja je u ovom slučaju dovoljna jednakost Fr brojeva

$$\frac{v_z^2}{\lambda_z g_z} = \frac{v_m^2}{\lambda_m g_m}$$

odakle je

$$\frac{v_z}{v_m} = \frac{\lambda_z g_z}{\lambda_m g_m}$$

Sa indeksom z je označen model broda na Zemlji, a indeksom m u prototipa na Marsu. Odnos $\frac{g_z}{g_m}$ se određuje iz Keplerovog zakona koji glasi

$$F = f \frac{m_1 m_2}{R^2}$$

gde su: F - privlačna sila između dva tela,

m_1, m_2 - mase jednog i drugog tela,

R - rastojanje težišta tela

f - univerzalna gravitaciona konstanta koja ima istu vrednost u sunčevom sistemu.

Za zamišljeno telo (brod mase m) na Zemlji i na Marsu važi:

$$\begin{array}{l} \text{na Zemlji} \\ m g_z = f \frac{m_z m}{R_z^2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{na Marsu} \\ m g_m = f \frac{m_m m}{R_m^2} \end{array}$$

odakle sledi

$$\frac{g_z}{g_m} = \frac{m_z}{m_m} \left(\frac{R_z}{R_m} \right)^2 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{10}{4} ;$$

te je $v_z = v_m \sqrt{\frac{\lambda_z g_z}{\lambda_m g_m}} = 3 \sqrt{\frac{1}{10} \cdot \frac{10}{4}} = 1,5 \frac{m}{s}$.

Sila otpora je određena sa (v. glavu 12)

$$F_D = c_D A \frac{1}{2} \rho v^2$$

te važi

$$\frac{F_{Dm}}{F_{Dz}} = \frac{\rho_m^2 \rho_m \cdot v_m^2}{\rho_z^2 \rho_z v_z^2} \quad \text{sa} \quad \rho_m = \rho_z,$$

tako da je

$$\frac{F_{Dm}}{F_{Dz}} = \frac{\rho_m^2 v_m^2}{\rho_z^2 v_z^2} = \left(\frac{10}{1}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 400.$$

Otpor broda na Marsu bio bi 400 puta veći od otpora modela na Zemlji. Odnos otpora broda na Zemlji i na Marsu daje sledeće

$$\frac{F_{Dpm}}{F_{Dpz}} = \left(\frac{\rho_p}{\rho_z}\right)^2 \cdot \left(\frac{v_{pm}}{v_{pz}}\right)^2 = \left(\frac{v_{pm}}{v_{pz}}\right)^2;$$

gde se brzina broda na Zemlji određuje iz jednakosti F_R brojeva (npr. za brod na Zemlji i Marsu)

$$\frac{v_{Dz}^2}{g_z \rho_p} = \frac{v_{Dm}^2}{g_m \rho_p} \quad ; \quad v_{pz} = v_{pm} \sqrt{\frac{g_z}{g_m}} = 3 \sqrt{\frac{10}{4}} = 4,74 \frac{m}{s}.$$

Sada je

$$\frac{F_{Dpm}}{F_{Dpz}} = \frac{4}{10} = 0,4 \quad ; \quad F_{Dpm} = 0,4 F_{Dpz}.$$

Otpor broda na Marsu je jednak 40% otpora istog broda na Zemlji.

7. Avion leti brzinom $600 \frac{km}{h}$ na morskoj površini ($15^\circ C$), a njegov model, smanjen za 20 puta, se ispituje u vazdušnom tunelu. Koliki treba da je red veličine brzina vazduha u tunelu za određivanje otpora prototipa? Ako se vazduh u tunelu nalazi pod pritiskom 10 at, a temperatura održava konstantnom, kolika je onda brzina vazduha? Da li ispitivanja u vodenom tunelu mogu omogućiti potrebnu sličnost?

Rešenje.

Kompresibilni efekti nisu dominantni za prototip,

pošto je

$$Ma = \frac{v}{c} = \frac{166,67}{340} = 0,49,$$

gde je

$$c = \sqrt{\kappa RT} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 288} = 340 \frac{m}{s};$$

tako da je Re glavni kriterijum sličnosti, te je

$$\frac{v \cdot \rho}{\nu} = \frac{v_m \cdot \rho_m}{\nu_m} \quad ; \quad \frac{v}{\nu} = \frac{\rho_m \cdot v}{\rho \cdot \nu_m} = \frac{1}{20} \cdot \frac{v}{\nu_m}.$$

U vazdušnom tunelu sa atmosferskim pritiskom je $\frac{v}{\nu_m} = 1$, te je

$$v_m = 20v = 3333,3 \frac{m}{s}.$$

Ovo je hipersonična brzina i kompresibilni efekti su najuticajniji, te ne postoji sličnost između modela i prototipa.

U tunelu sa pritiskom od 10 at dinamička viskoznost vazduha se ne menja, ali je gustina 10 puta veća od one na atmosferskom pritisku, te je

$$\frac{\nu_m}{\nu} = \frac{\eta_m \cdot \rho}{\eta \cdot \rho_m} = \frac{1}{10};$$

i za iste Rejnoldsove brojeve sledi

$$\frac{v}{\nu} = \frac{1}{20} \cdot 10 = \frac{1}{2}, \quad \text{tj.} \quad v_m = 2v = 333,32 \frac{m}{s}.$$

Ova brzina je takodje supersonična. Ni na ovaj način se ne postiže dinamička sličnost. Za ostvarenje potpune dinamičke sličnosti potreban je pritisak od 20 at da bi se osigurala jednakost $v = v_m$; pri kojoj brzini kompresibilni efekti još nisu izraženi. Ovaj pritisak zahteva vrlo čvrstu nepropusnu prostoriju u kojoj je smešten tunel.

U vodenom tunelu kinematska viskoznost je $\frac{1}{13}$ viskoznosti vazduha na atmosferskom pritisku.

Za jednakost Rejnoldsovih brojeva je:

$$\frac{v}{\nu_m} = \frac{1}{20} \cdot 13,$$

odakle potrebna brzina u vodenom tunelu iznosi

$$v_m = \frac{20}{13} \cdot 166,67 = 256,4 \frac{m}{s}$$

Kako je brzina zvuka u vodi $1370 \frac{m}{s}$, Mahov broj je manji u vodenom tunelu nego pri kretanju prototipa u vazduhu, pa su kompresibilni uticaji zanemarljivi. Ispitivanja u vodenom tunelu omogućuju potpunu sličnost te je odnos sile

$$\frac{F}{F_m} = \frac{v^2 \rho^2_0}{v^2_{m^2} \rho^2_m} = \left(\frac{166,67}{256,4} \right)^2 \cdot 20^2 \cdot \frac{1,23}{1000} = 0,208$$

Tako je sila na modelu 4,8 puta veća od sile na prototipu. Za merenje tolike sile na modelu je potreban izuzetno jak uređaj.

Potrebna snaga za tunnelska ispitivanja zavisi od protočnog preseka. Prototip raspona krila 20 m zahteva model čiji je raspon krila 1 m, a presek tunela ne može biti manji od 3 m, poprečnog preseka $7 m^2$. Protok vode kroz tunnel (brzinom $256,4 \frac{m}{s}$ u radnoj sekciji) iznosi

$$Q = 256,4 \cdot 7 = 1795 \frac{m^3}{s}$$

a potreban napor, računajući samo dinamičku energiju u radnoj sekciji

$$\frac{v_m^2}{2} = 32870 \frac{J}{kg}$$

Za dobro konstruisan tunnel potrebna snaga je $\frac{1}{3}$ od one u radnoj sekciji, pa je

$$P = \frac{1}{3} \rho \frac{v_m^2}{2} Q = \frac{1}{3} \cdot 1000 \cdot 32870 \cdot 1795 = 1,97 \cdot 10^7 \text{ kW}$$

Postizanje potpune dinamičke sličnosti u vodenom tunelu je, dakle, neizvodljivo usled ogromne snage koja je potrebna za rad tunnelskog postrojenja.

8. Objasniti zašto prilikom pravljenja modela reke ili otvorenog kanala nekad treba deformisati model primenom različitih dužinskih skala u vertikalnom i u horizontalnom pravcu i pokazati kako se utvrđuju skale za druge veličine.

Model rečnog ušća u vreme plime ima horizontalnu

razmeru k_x i vertikalnu razmeru k_z . Izvesti izraz koji daje odnos između: a) vremena trajanja plime i b) brzine taloženja mulja, za model i prirodno ušće.

Rešenje.

Rečna struja je obično turbulentna, ali kod znatnih smanjenja modela vrednost Re na modelu može da bude suviše mala da bi se osigurao turbulentan tok, ili visinska razlika može da bude nedovoljna za rad na modelu. Ovo se može izbeći deformisanjem modela: 1) naginjanjem celog modela ako je kanal skoro ravan; 2) primenom različitih vertikalnih i horizontalnih razmera radi povećanja visinske razlike nivoa i 3) primenom modela koji nisu geometrijski slični, ali su hidraulički analogni.

Ako su izabrane horizontalna razmera k_x i vertikalna razmera k_z razmere drugih veličina su tačno određene. Razmera brzine se dobija iz

$$v = \sqrt{2gh}$$

gde je h visinska razlika (čija je razmera k_z), a g ubrzanje zemljine teže nepromenljivo za oba sistema, kao

$$k_v = \sqrt{k_z}$$

Razmera za protok je određena iz

$$Q = A \cdot v \quad (A - \text{protočna površina})$$

gde je razmera površine $k_x k_z$, te je

$$k_q = k_x k_z k_v = k_x k_z^{\frac{3}{2}}$$

Razmera za vreme je ($t = \frac{x}{v}$)

$$k_t = \frac{k_x}{k_v} = k_x k_z^{-\frac{1}{2}}$$

Isti proces se koristi za druge veličine.

a) Vremenska razmera određuje trajanje perioda plime na modelu

$$\frac{t}{t_m} = \frac{X}{X_m} = \frac{X}{X_m} \cdot \frac{V_m}{V} = k_x \cdot k_z^{-1/2}$$

b) Brzina taloženja mulja mora biti takva da vreme taloženja na modelu odgovara u smislu vremenske razmere vremenu taloženja u rečnom ušću. Tako nadjena brzina taloženja na modelu, zahteva mulj određenog prečnika čestica.

$$\frac{v}{v_m} = \frac{z}{z_m} = \frac{z}{z_m} \cdot \frac{t}{t_m} = k_z \cdot k_x^{-1} = k_z \cdot k_x^{-1/2}$$

Ako se modelska ispitivanja izvode sa istim, stvarnim materijalom, brzine taloženja moraju biti iste, te sledi i zavisnost

$$k_x = k_z$$

9. Model "Bocono" brane u Venecueli je praviljen u razmeri 1:49. Za protok kroz prepust brane od 10000 $\frac{m^3}{s}$, koliki je protok na modelu? Koje vreme na modelu predstavlja jedan dan na brani?

Rešenje.

Uslov za potpunu sličnost je jednakost Frudovih brojeva, pa sledi:

$$Fr_m = Fr \quad \frac{Q_m \cdot A_m \cdot V_m}{Q \cdot A \cdot V} = \left(\frac{l_m}{l}\right)^2 \cdot \frac{V_m}{V} = \left(\frac{l_m}{l}\right)^{5/2}$$

$$\frac{v_m}{\sqrt{g l_m}} = \frac{v}{\sqrt{g l}} \quad \frac{Q_m}{Q} = \frac{1}{16807}$$

$$\frac{v_m}{v} = \sqrt{\frac{l_m}{l}} \quad Q_m = \frac{10000}{16807} = 0,595 \frac{m^3}{s}$$

Vremenska razmera modela i brane se određuje iz osnovnog uslova sličnosti - jednakosti Fr brojeva

$$\frac{v_m^2}{g l_m} = \frac{v^2}{g l}$$

$$\left(\frac{l_m}{l}\right)^2 \cdot \left(\frac{v_m}{v}\right)^2 = \frac{l_m}{l}$$

$$\frac{v_m}{v} = \sqrt{\frac{l_m}{l}} = \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7}$$

Jedan dan na brani predstavljen je sa 3h i 26' rada modela na brani.

10. Bojevi atmosferski projektil se ispituje ispucavanjem njegovog modela u rezervoaru sa ugljen-dioksidom. Za date podatke odrediti pritisak u rezervoaru i brzinu ispucavanja.

Podaci: razmera modela i prototipa 1:10; dinamička viskoznost vazduha (visina 4000 m) $\eta = 1,67 \cdot 10^{-5}$ Pas; dinamička viskoznost ugljen-dioksida (20°C) $\eta_m = 1,48 \cdot 10^{-5}$ Pas; temperatura vazduha $T = 262$ K; visinska razlika od 4000 m ne utiče na promenu g te je gasna konstanta za vazduh $R = 287 \frac{J}{kgK}$; gasna konstanta za ugljen-dioksid $R_m = 189 \frac{J}{kgK}$; pritisak vazduha na visini 4000 m $p = 51590$ Pa; brzina projektila $v = 900 \frac{m}{s}$; eksponent adijabate ugljen-dioksida (troatomi i višeatomi gasovi) $\kappa_m = 1,29$.

Rešenje.

Potpuna sličnost se ostvaruje jednakošću Re i Ma brojeva. Pošto je

$$Re = \frac{v l}{\nu} = \frac{v l \rho}{\eta} = \frac{v l P}{R T}$$

jednakošću Re brojeva se izražava kao

$$\frac{v_m l_m}{\eta_m} = \frac{v l}{\eta} = \frac{v l P}{R T}$$

odakle sledi

$$v_m = v \frac{\rho_m}{\rho} \frac{R_m}{R} \frac{T_m}{T} \frac{P}{P_m}$$

$$v_m = 900 \cdot 10^{-1} \cdot \frac{1,48}{1,67} \cdot \frac{189}{287} \cdot \frac{293}{262} \cdot \frac{P}{P_m} = 587,4 \frac{P}{P_m}$$

tj.

Iz jednakosti Mahovih brojeva, pošto je

$$Ma^2 = \frac{v^2}{c^2} = \frac{v^2}{\frac{\gamma P}{\rho}} = \frac{\gamma v^2}{\rho P}$$

$$\left(\frac{v_m}{v}\right)^2 = \frac{\gamma_m R_m T_m}{\gamma R T} = \frac{1,29 \cdot 189 \cdot 293}{1,4 \cdot 287 \cdot 262} = 0,678$$

sledi

$$v_m = \sqrt{0,678} \cdot 900 = 741 \frac{m}{s}$$

Potreban pritisak u rezervoaru sa ugljen-dioksidom iznosi

$$P_m = \frac{587,4}{v} \cdot p = \frac{587,4}{741} \cdot 61590 = 487975 \text{ Pa}$$

ili

$$P_m = 4,97 \text{ at.}$$

Zadaci.

1. Struja vode kroz cev prečnika 19 mm postaje turbulentna pri brzini od 0,116 $\frac{m}{s}$. Kolika je maksimalna brzina vazduha u cevi prečnika 38 mm, a da se ne naruši laminarni strujni režim, za sličnu konstrukciju cevi? Kinematska viskoznost vode je 1,31 $\cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$, a vazduha 1,35 $\cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$.

Rešenje.

$$v = 0,598 \frac{m}{s}$$

2. Glavni otpor hidroaviona je prouzrokovan formiranjem talasa. Odrediti otpor prototipa aviona ako je modelskim ispitivanjem razmere 1:25, pri brzini kretanja modela od 6 $\frac{m}{s}$, dobijena sila otpora od 1,8 N.

Rešenje.

$$F = 28,125 \text{ kN}$$

3. Kada fluid struji kroz geometrijski slične cevi, formula za određivanje pada pritiska je

$$\Delta p = \rho \frac{L}{D} v^2 \phi \left(\rho \frac{vD}{\mu}\right)$$

Izmereni pad pritiska u cevi prečnika 50 mm kroz koju struji voda brzinom 0,6 $\frac{m}{s}$ je 800 mm H_2O na 100 m dužine cevi. Izračunati pad pritiska u mm H_2O za cev dugačku 400 m i prečnika 200 mm, kada kroz nju struji vazduh "odgovarajućom brzinom". Pretpostaviti da cevi imaju geometrijski slične hrapavosti i usvojiti gustine vode i vazduha 1000 $\frac{kg}{m^3}$ i 1,23 $\frac{kg}{m^3}$, a dinamičke viskoznosti za vodu i vazduh 1,31 $\cdot 10^{-3}$ Pas i 1,65 $\cdot 10^{-5}$ Pas.

Rešenje.

$$\Delta p = 6,45 \text{ mm } H_2O$$

4. Koefficient sile otpora broda je funkcija Re i Fr brojeva. Kojom brzinom bi trebalo da se kreće model preokookeanskog broda da bi uslovi dinamičke sličnosti bili zadovoljeni? Zbog čega se to praktično ne može očekivati.

Rešenje.

$$K_F = \frac{F}{\rho L^2 v^2} = f(Re, Fr); \quad v_m = \sqrt{\frac{\rho_m}{\rho} \frac{L}{L_m}}$$

Praktično ne postoje dve tehnosti (neophodna je tečnost zbog formiranja gravitacijskih talasa) koje imaju dovoljno različite viskoznosti da zadovolje uslove jednakosti Re i Fr brojeva.

5. Ako se voda u kapilarnoj cevi prečnika 0,2 mm penje brzinom 0,5 $\frac{m}{s}$, kojom brzinom će se voda penjati na odgovarajućem mestu u cevi prečnika 2 mm.

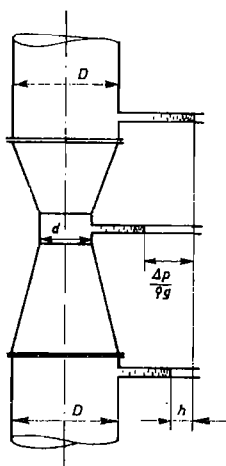
Rešenje.

$$(We_1 = We_2) \quad v = 0,158 \frac{m}{s}$$

6. Venturi metar prečnika $D=350$ mm i $d=150$ mm služi za merenje protoka nafte ($\rho=820 \frac{kg}{m^3}$, $\nu=0,045 \frac{cm^2}{s}$, $t=10^\circ C$). Nominalni protok je $Q=100 \frac{L}{s}$. Ovaj instrument se

bazdari na modelu sma-
njenom tri puta, pri ra-
du sa vodom ($t_m = 20^\circ\text{C}$,
 $\nu = 0,01 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$, $\rho_m = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$).

Određiti gu-



bitak energije gh i raz-
liku pritiska Δp na ve-
nturi metru, ako je na
modelu gubitak energije $gh_m = 1,962 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$ i $\Delta p_m = 0,981 \text{ Pa}$.
Koliki je protok Q_m kroz model?

Rešenje.

$$Q_m = 7,41 \frac{\text{L}}{\text{s}} ; \Delta p_m = 1,31 \text{ Pa} ; gh = 4,41 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

7. Avion je gradjen za let na velikim visinama gde
su gustina i viskoznoost vazduha 0,2 i 0,8 od onih odgovara-
jućih na morskome nivou.

Pre izrade prototipa ispitivanja su vršena na mo-
delu 1:50 u vazdušnom tunelu sa komprimovanim vazduhom pri-
tiska 20 at. Odrediti potrebnu brzinu vazduha u tunelu za
dinamičku sličnost između modela ispitivanog u tunelu sa
komprimovanim vazduhom na morskome nivou i odgovarajućeg a-
viona pri letu brzinom $660 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ na velikoj visini? Pretposta-
viti da viskoznoost ne zavisi od pritiska.

Rešenje.

$$(Re = Re_m) , \quad v = 114,58 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

11.2. DIMENZIJSKA ANALIZA

Dimenzijska analiza se bazira na "principu dimen-
zijske homogenosti" (Fourier 1822.), koji kaže da jednačina
koja izražava fizičku vezu između nekih veličina mora da bu-
de dimenzijski homogena, tj. da dimenzije dveju veličina ko-
je se sabiraju ili izjednačuju moraju biti iste. Pri tome,

treba sve izvedene jedinice, koje izražavaju fizičke veliči-
ne u jednačini, prikazati kao proizvod ili količnik osnov-
nih jedinica.

U zavisnosti od oblasti nauke javljaju se razli-
čite osnovne i izvedene jedinice. Tako su npr. u:

Geometriji	osnovna jedinica	izvedene jedinice
	dužina [L]	površina [L ²] zapremina [L ³]
Kinematici	osnovne jedinice	izvedene jedinice
	dužina [L] vreme [T]	brzina [LT ⁻¹] ugaona brzina [LT ⁻¹] ubrzanje [LT ⁻²] kin. viskoznoost [L ² T ⁻¹]
Dinamici	osnovne jedinice	izvedene jedinice
(fluida)	dužina [L] vreme [T] masa [M] temperatura [θ]	gustina [ML ⁻³] sila [MLT ⁻²] pritisak [ML ⁻¹ T ⁻²] snaga [ML ² T ⁻³] din. viskoznoost [ML ⁻¹ T ⁻¹]

Koristeći princip dimenzijske homogenosti može se
npr. pokazati da jednačina

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = C$$

predstavlja mogućnu vezu između pritiska p , brzine v i vi-
sine iznad neke referentne ravni z za strujanje delića ide-
alnog fluida gustine ρ duž strujnice, i može da se odredi
dimenzija konstante C .

Prvi član

$$p = \frac{\text{sila}}{\text{površina}} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

Drugi član

$$\frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{\text{masa}}{\text{zapremina}} \frac{(\text{dužina})^2}{\text{vreme}} = \frac{M}{L^3} \frac{L^2}{T^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

Treći član

$$\rho g z = \frac{\text{masa}}{\text{zapremina}} \cdot \frac{\text{dužina}}{\text{dužina}^2} = \frac{M}{L^3} \cdot \frac{L}{L^2} = M L^{-1} T^{-2}$$

Svi članovi jednačine imaju istu dimenziju pa i konstanta C mora da ima dimenziju $M L^{-1} T^{-2}$.

Osnovu dimenzijske analize pored principa dimenzijske homogenosti čini i π teorema (Vaschy - Buckingham 1915.)

Neka se fizička pojava izražava pomoću n veličina (x_1, x_2, \dots, x_n) . Zavisno od oblasti fizike gde se ta pojava javlja postojaće p veličina koje se izražavaju preko osnovnih jedinica (npr. u dinamici $p=3$), dok će se preostalih $m=n-p$ veličina izražavati pomoću izvedenih jedinica.

π teorema glasi:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

može da se izrazi preko jednačine

$$F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m) = 0$$

gde su $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ bezdimenzijski monomi koji su funkcije x_1, x_2, \dots, x_n .

π teorema ima svrhu

- a) da se združivanjem veličina sa dimenzijom dobiju bezdimenzijski izrazi čija brojna vrednost ne zavisi od izabranog sistema jedinica;
- b) da se smanji broj promenljivih za broj osnovnih jedinica;
- c) da se olakša teorijsko i eksperimentalno rešavanje postavljenih problema.

Primeri.

1. Pokazati da gubitak pritiska po jedinici dužine cevi, pri proticanju fluida kroz cevi kružnog preseka može da se izrazi jednačinom

$$\frac{\Delta P}{l} = \frac{\rho \cdot v^2}{k} \phi \left(\frac{v \cdot d}{\nu}, \frac{e}{d} \right)$$

gde su d prečnik cevi, l dužina cevi, e apsolutna hrapavost cevi, ν kinematska viskoznost fluida i v srednja brzina fluida.

Rešenje.

Pad pritiska po jedinici dužine cevi može da se izrazi jednačinom

$$\frac{\Delta P}{l} = B \rho^a \mu^b \nu^c e^d v^e g^f$$

Dimenzije pojedinih veličina su

$$\Delta P = M L^{-1} T^{-2}, \quad \rho = M L^{-3}, \quad \mu = L T^{-1}, \quad d = L, \quad e = L, \quad v = L^2 T^{-1}$$

Dimenzijska jednačina glasi

$$\frac{M L^{-1} T^{-2}}{L} = (M L^{-3})^a (L T^{-1})^b (L^2 T^{-1})^c L^d L^e L^f g^f$$

ili

$$M L^{-2} T^{-2} = M^a L^{-3a} L^b L^c T^{-c} L^d L^e L^f g^f$$

Izjednačavanjem stepena uz osnove M, L i T dobijaju se jednačine

$$\begin{aligned} M: & 1 = a \\ L: & -2 = -3a + b + c + f + 2g \\ T: & -2 = -c - g \end{aligned}$$

Dolazi se do tri jednačine sa pet nepoznatih veličina (strogo posmatrano - dve jednačine sa četiri nepoznate). Pored veličine a koja je jednoznačno određena treba odabrati još dve veličine koje će se izraziti preko preostalih dveju. Prilikom ovog izbora treba se rukovoditi iskustvom ili unapred zamišljenim oblikom krajnjeg izraza. U ovom slučaju zbog eksplicitno izraženih veličina ρ, ν i d treba eksponente uz te veličine, dakle, a, b i c izraziti preko preostalih eksponentata (f i g). Sledi:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ c &= 2 - g \\ b &= -2 + 3a - c - f - 2g \\ b &= -2 + 3 - 2 + g - f - 2g \\ b &= -1 - f - g \end{aligned}$$

Vraćanjem ovih vrednosti u početni izraz gde se B_1 može zamisliti jednom konstantom B dobija se

$$\Delta P = B \cdot \rho^{1-f} d^{-1-f} g v^2 - g e f v g.$$

Grupisanjem članova sa istim eksponentom g i f dobija se

$$\Delta P = B \cdot \rho \frac{v^2}{d} \left(\frac{v \cdot d}{\nu} \right)^f.$$

Eksponenti f i g su nepoznati tako da se član koji od njih zavisi i konstanta B mogu izraziti kao neka nepoznata funkcija ϕ .

$$B \left(\frac{v \cdot d}{\nu} \right)^f \left(\frac{v \cdot d}{\nu} \right)^{-g} = \phi \left(\frac{v \cdot d}{\nu}; \delta \right).$$

Tako se dobija konačni oblik

$$\Delta P = \frac{\rho v^2}{d} \phi \left(\frac{v \cdot d}{\nu}; \delta \right)$$

ili

$$\Delta P = \frac{\rho v^2}{d} \phi(Re; \delta); \quad (Re = \frac{v \cdot d}{\nu}; \delta = \frac{e}{d}),$$

gde je sa δ označena relativna hrpavost.

Napomena. Uvodjenjem oznake $\lambda = 2\phi(Re; \delta)$ gornja jednačina može da se napiše u obliku

$$\Delta P = \lambda \frac{\rho}{d} \frac{L}{Z} \frac{v^2}{Z},$$

tj. dobija se poznata jednačina za gubitak energije usled trenja, uz jasnu zavisnost koeficijenta trenja λ od Re i δ (Moody-ev dijagram).

2. Odrediti izraz za vučnu silu propelera ako se pretpostavi da zavisi samo od prečnika propelera d, broja obrtaja n (u sekundi), brzine kretanja propelera kroz vodu v, gustine fluida ρ , dinamičke viskoznosti fluida η i brzine prostiranja zvuka c kroz fluid.

Rešenje.

Smatrajući da se sila može napisati kao polinom čiji su svi članovi istih dimenzija sledi jednačina

$$F = B_1 \rho^m d^n v^p n^q s^r c^t,$$

gde su dimenzije promerljivih veličina:

$$F = MLT^{-2}; \quad d = L; \quad \rho = ML^{-3}; \quad n = T^{-1}; \quad v = LT^{-1}; \quad \eta = ML^{-1}T^{-1}; \quad c = LT^{-1}.$$

Dimenzijska jednačina glasi:

$$MLT^{-2} = (ML^{-3})^m (L)^n (T^{-1})^p (ML^{-1}T^{-1})^q (LT^{-1})^r (LT^{-1})^s (LT^{-1})^t.$$

Izjednačavanjem izložioca istih osnova dobija se:

$$\begin{aligned} \text{izložioc i uz M: } & 1 = m + s \\ \text{izložioc i uz L: } & 1 = -3m + n + p + r - s + t \\ \text{izložioc i uz T: } & -2 = -q - r - s - t. \end{aligned}$$

Ovaj sistem od tri jednačine sa šest nepoznatih dozvoljava određivanje tri nepoznate u funkciji preostale tri. Ovde će se odrediti m, p i q u zavisnosti od r, s i t.

Iz prve jednačine sledi: $m = 1 - s$

Iz druge jednačine sledi: $p = 1 + 3m - r + s - t = 1 + 3 - 3s - r + s - t = 4 - 2s - r - t$

Iz treće jednačine sledi: $q = 2 - r - s - t$.

Uvrštavanjem vrednosti za m, p i q u prvobitni izraz, dobija se

$$F = B_1 \rho^{1-s} d^{4-2s-r-t} \eta^{2-r-s-t} v^{4-2s-r-t} n^q s^r c^t$$

ili, grupisanjem veličina pod isti izložilac

$$F = B_1 \rho d^4 n^2 \left(\frac{v}{nd} \right)^r \left(\frac{\eta}{nd} \right)^s \left(\frac{c}{nd} \right)^t$$

i konačno

$$F = d^4 n^2 \rho f \left(\frac{v}{nd}; \frac{\eta}{d^2 n \rho}; \frac{c}{nd} \right).$$

Ova fizička pojava se izražava pomoću sedam fizičkih veličina F, ρ , d, n, v, η i c. Osnovnih jedinica u dimenziji fluida ima tri. U skladu sa π teoremom ova fizička pojava može da se izrazi kao veza između četiri bezdimenzijska koeficijenta (ovde je broj veličina n=7, broj osnovnih jedinica p=3; te je broj bezdimenzijskih koeficijenata m=n-p=7-3=4).

Matematički izraz za fizički zakon glasi:

$$F = d^4 n^2 \rho f \left(\frac{V}{nd}; \frac{\eta}{nd}; \frac{C}{nd} \right)$$

$$\text{III} \quad \frac{F}{d^4 n^2 \rho} = f \left(\frac{V}{dn}; \frac{\eta}{d^2 n \rho}; \frac{C}{dn} \right)$$

$$\text{III} \quad \phi \left(\frac{F}{d^4 n^2 \rho}; \frac{V}{dn}; \frac{\eta}{d^2 n \rho}; \frac{C}{dn} \right) = 0,$$

što predstavlja vezu između četiri bezdimenzijska izraza.

Ovde su:

- Koefficient vučne sile

$$\pi_1 = \frac{F}{d^4 n^2 \rho}$$

- značica elise

$$\pi_2 = \frac{V}{nd}$$

$$\pi_3 = \frac{\eta}{d^2 n \rho} \left(\frac{V}{nd} \right) = Re^{-1}$$

$$\pi_4 = \frac{C}{nd} = Ma^{-1}$$

Funkcija ϕ , odnosno veza između π_1, π_2, π_3 i π_4 , može da se odredi eksperimentalno i da se prikaže grafički.

3. Za geometrijski slična tela koja se kreću konstantnom brzinom v kroz viskozni i kompresibilan fluid gustine ρ i dinamičke viskoznosti η , dimenzijskom analizom naći formulu za određivanje otpora tela.

Rešenje.

Otpor je usled trenja površine, otpora talasa i kompresibilnih efekata; a zavisi od veličine tela predstavljenih karakterističnom dužinom l , brzine v , gustine ρ , dinamičke viskoznosti η , koeficijenta stišljivosti fluida e i ubrzanja zemljine teže g (za otpor talasa). Tako je ukupna sila otpora F funkcija od l, v, ρ, η, e i g . Oblik ove funkcije može da se sastoji do zбира proizvoda promenljivih, pri čemu svaki sabirak izražava uticaj jednog od nabrojanih faktora.

$$F = B l^x v^y \rho^z \eta^p e^q \rho^r + B_1 l^{x_1} v^{y_1} \rho^{z_1} \eta^{p_1} e^{q_1} g^{r_1} + \dots$$

gde su B, B_1, \dots brojne konstante, $x, x_1, \dots, y, y_1, \dots$ itd. nepoznati eksponenti.

Tako je

$$\frac{F}{B l^x v^y \rho^z \eta^p e^q g^r} = 1 + \frac{B_1}{B} l^{x_1} v^{y_1} \rho^{z_1} \eta^{p_1} e^{q_1} g^{r_1} \dots$$

S obzirom da je prvi član na desnoj strani čist broj, gornja jednačina je korektna samo u slučaju da je dimenzijski sila otpora F

$$F = B l^x v^y \rho^z \eta^p e^q g^r$$

Dimenzije pojedinih veličina su:

$$F = MLT^{-2}; \quad l = L; \quad v = LT^{-1}; \quad \rho = ML^{-3}; \quad \eta = ML^{-1}T^{-1}; \quad e = ML^{-1}T^{-2}; \quad g = LT^{-2}.$$

Zamenjujući u prvu jednačinu dobija se

$$MLT^{-2} = L^x L^y T^{-y} M^z L^{-3z} M^p L^{-p} M^{-q} L^{-2q} L^r T^{-2r}$$

Izjednačavanje stepena uz iste osnove daje

$$\begin{aligned} 1 &= z + p + q \\ 1 &= x + y - 3z - p - q + r \\ -2 &= -y - p - 2q - 2r \end{aligned}$$

Najpodesniji rezultat se dobija izražavanjem eksponentata x, y i z ostalim:

$$\begin{aligned} z &= 1 - p - q \\ y &= 2 - p - 2q - 2r \\ x &= 2 - p + r \end{aligned}$$

Svi članovi na desnoj strani prve jednačine su slični prvom, tako da sličan postupak dovodi do:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - p_1 + r_1 \\ y_1 &= 2 - p_1 - 2q_1 - 2r_1 \\ z_1 &= 1 - p_1 - q_1 \quad \dots \text{itd.} \end{aligned}$$

Zamenjujući u prvu jednačinu dobija se

$$F = \rho v^2 l^2 \left[B \left(\frac{v l}{\eta} \right)^{-p} \left(\frac{v}{g} \right)^{-2q} \rho^r + B_1 \left(\frac{v l}{\eta} \right)^{-p_1} \left(\frac{v}{g} \right)^{-2q_1} \rho^{r_1} \dots \right]$$

Serijski članovi u zagradama su nepoznate funkcije od $\frac{\rho v \ell}{\eta}$, $\frac{v}{\sqrt{g}}$ i $\frac{v}{\sqrt{\rho g}}$ te mogu da se napišu jedinstvenim izrazom

$$F = \rho v^2 \ell^2 \phi \left[\frac{\rho v \ell}{\eta}, \frac{v}{\sqrt{g}}, \frac{v}{\sqrt{\rho g}} \right]$$

gde su:

$$\frac{\rho v \ell}{\eta} \quad - \text{Rejnoldsov broj}$$

$$\frac{v}{\sqrt{g}} \quad - \text{Mahov broj}$$

$$\frac{v}{\sqrt{\rho g}} \quad - \text{Frudov broj.}$$

Gornja jednačina, takodje, može da se napiše kao

$$\frac{F}{\rho v^2 \ell^2} = \phi \left[\frac{\rho \ell}{\eta}, \frac{v}{\sqrt{g}}, \frac{v}{\sqrt{\rho g}} \right],$$

u kom slučaju je i količnik

$$\frac{F}{\rho v^2 \ell^2}$$

bez dimenzije.

4. Pri turbulentnom strujanju kroz glatku cev izgubljena energija po jedinici dužine $\frac{\Delta h}{\ell}$ zavisi od brzine v , prečnika D , ubrzanja zemljine teže g , dinamičke viskozno-
sti η i gustine ρ . Primenom dimenzijske analize i π teoreme odrediti opšti oblik jednačine

$$f\left(\frac{\Delta h}{\ell}, v, D, \rho, \eta, g\right) = 0.$$

Rešenje.

Velicina $\frac{\Delta h}{\ell}$ predstavlja π parametar. Ako su v, D i ρ promenljive koje se ponavljaju, mogu se preostala dva π parametra izraziti kao:

$$\pi_1 = v^x D^y \rho^z \eta = (L T^{-1})^x (M L^{-1})^y (M L^{-1} T^{-1})^z$$

sa

$$x_1 + y_1 - 3z_1 - 1 = 0$$

$$-x_1 - 1 = 0$$

$$z_1 + 1 = 0$$

tj.

$$x_1 = -1 ; y_1 = -1 ; z_1 = -1.$$

$$\pi_2 = v^x D^y \rho^z g = (L T^{-1})^x L^y (M L^{-1})^z L T^{-2}$$

sa

$$x_2 + y_2 - 3z_2 + 1 = 0$$

$$-x_2 - 2 = 0$$

$$z_2 = 0$$

tj.

$$x_2 = -2 ; y_2 = 1 ; z_2 = 0.$$

Tako su tri π parametra

$$\pi_1 = \frac{\eta}{v D \rho} ; \pi_2 = \frac{g D}{v^2} ; \pi_3 = \frac{\Delta h}{\ell} ;$$

ili

$$f\left(\frac{v D \rho}{\eta} ; \frac{v^2}{g D} ; \frac{\Delta h}{\ell}\right) = 0.$$

Rešenje po $\frac{\Delta h}{\ell}$ je

$$\frac{\Delta h}{\ell} = f_1\left(\text{Re} ; \frac{v^2}{g D}\right).$$

Obično se koristi formula

$$\frac{\Delta h}{\ell} = \frac{1}{D} \frac{v^2}{2g} f(\text{Re}).$$

5. Primenom π teoreme odrediti najpogodnije veličine za proučavanje potisne sile propelera potopljenog u fluidu.

Rešenje.

Realno je pretpostaviti da su sledeće promenljive od uticaja na silu potiska propelera:

Promenljiva	simbol	dimenzija promenljive
potisna sila	F	MLT ⁻²
prečnik propelera	D	L
brzina kretanja	v	LT ⁻¹
broj obrtaja	n	T ⁻¹
ubrzanje zemljine teže	g	LT ⁻²
gustina fluida	ρ	ML ⁻³
kinematička viskoznost	ν	L ² T ⁻¹

Pošto je ovde sedam promenljivih, a tri osnovne jedinice, pojavile se četiri bezdimenzijske grupe. Ove grupe se mogu formirati kombinujući D, v i ρ sa svakom od preostalih promenljivih na sledeći način.

$$\begin{aligned} \pi_1 &= D^{X_1} v^{Y_1} \rho^{Z_1} F, \\ \pi_2 &= D^{X_2} v^{Y_2} \rho^{Z_2} n, \\ \pi_3 &= D^{X_3} v^{Y_3} \rho^{Z_3} g, \\ \pi_4 &= D^{X_4} v^{Y_4} \rho^{Z_4} \nu. \end{aligned}$$

Dvanaest eksponenata x, y i z se određuju tako da je svaka π funkcija bez dimenzije, što dovodi do rezultata

$$\pi_1 = \frac{F}{D^2 v^2 \rho} ; \pi_2 = \frac{Dn}{v} ; \pi_3 = \frac{Dg}{v^2} ; \pi_4 = \frac{\nu}{D \cdot v}.$$

Ova dimenzijska analiza daje jedno rešenje problema. Postoje i drugi; kada se u bezdimenzijske grupe uključe druge promenljive. To ukazuje da oblik fizičke zakonitosti sačinjavaju četiri veličine π₁, π₂, π₃ i π₄. Tada se jedna bezdimenzijska grupa može izraziti u funkciji od ostalih, kao npr.

$$\pi_1 = \phi(\pi_2 ; \pi_3 ; \pi_4),$$

ili

$$\frac{F}{D^2 v^2 \rho} = \phi\left(\frac{Dn}{v}, \frac{Dg}{v^2}, \frac{\nu}{Dv}\right).$$

6. Za određivanje jedne vrste strujanja fluida treba razmotriti uticaje sledećih veličina: brzine v, gustine ρ, tri linearne veličine ℓ₁, ℓ₂, ℓ₃, pada pritiska Δp, gravitacije g, dinamičke viskoznosti η, površinskog napona γ i modula stišljivosti ε. Primenjujući dimenzijsku analizu - na nabrojane promenljive - odrediti grupu π parametara

Rešenje.

$$f(v, \rho, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \Delta p, g, \eta, \gamma, \epsilon) = 0.$$

Pošto su u opštoj jednačini uključene tri dimenzije, mogu se odabrati tri promenljive, koje će se ponavljati u svim π parametrima. Za ovakve kompleksne situacije v, ρ i ℓ su najpogodnije za ovaj izbor. Postoji sedam π parametara:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= v^{X_1} \rho^{Y_1} \ell_1^{Z_1} \Delta p, \quad \pi_2 = v^{X_2} \rho^{Y_2} \ell_2^{Z_2} g, \quad \pi_3 = v^{X_3} \rho^{Y_3} \ell_3^{Z_3} \eta, \\ \pi_4 &= v^{X_4} \rho^{Y_4} \ell_4^{Z_4} \gamma, \quad \pi_5 = v^{X_5} \rho^{Y_5} \ell_5^{Z_5} \epsilon, \quad \pi_6 = \frac{\ell_1}{\ell_2}, \quad \pi_7 = \frac{\ell_3}{\ell_2}. \end{aligned}$$

Razvijajući π parametre u dimenzijskom obliku sledi:

$$\begin{aligned} \text{sa} \quad \pi_1 &= (LT^{-1})^{X_1} (ML^{-3})^{Y_1} L^{Z_1} ML^{-1} T^{-2} \\ &X_1 - 3Y_1 + Z_1 - 1 = 0, \\ &-X_1 - 2 = 0, \\ &Y_1 + 1 = 0, \\ \text{tj.} \quad X_1 &= -2 ; Y_1 = -1 ; Z_1 = 0 ; \end{aligned}$$

$$\text{sa} \quad \pi_2 = (LT^{-1})^{X_2} (ML^{-3})^{Y_2} L^{Z_2} LT^{-2}$$

$$\begin{aligned} &X_2 - 3Y_2 + Z_2 + 1 = 0, \\ &-X_2 - 2 = 0, \\ &Y_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\text{tj.} \quad X_2 = -2 ; Y_2 = 0 ; Z_2 = 1 ;$$

$$\pi_3 = (LT^{-1})^{X_3} (ML^{-3})^{Y_3} L^{Z_3} ML^{-1} T^{-1}$$

$$\text{sa} \quad X_3 - 3Y_3 + Z_3 - 1 = 0,$$

$$\begin{aligned} -x_3 - 1 &= 0, \\ y_3 + 1 &= 0, \end{aligned}$$

tj.

$$x_3 = -1; y_3 = -1; z_3 = -1;$$

$$\pi_4 = (LT^{-1})x_4 (ML^{-3})y_4 L^2 M^{-2} MT^{-2}$$

sa

$$\begin{aligned} x_4 - 3y_4 + z_4 &= 0, \\ -x_4 - 2 &= 0, \\ y_4 + 1 &= 0, \end{aligned}$$

tj.

$$x_4 = -2; y_4 = -1; z_4 = -1;$$

$$\pi_5 = (LT^{-1})x_5 (ML^{-3})y_5 L^2 M^{-2} MT^{-2}$$

sa

$$\begin{aligned} x_5 - 3y_5 + z_5 - 1 &= 0, \\ -x_5 - 2 &= 0, \\ y_5 + 1 &= 0, \end{aligned}$$

tj.

$$x_5 = -2; y_5 = -1; z_5 = 0.$$

Tako su

$$\pi_1 = \frac{\Delta P}{\rho v^2}; \pi_2 = \frac{g l}{v^2}; \pi_3 = \frac{\eta}{v l \rho}; \pi_4 = \frac{\gamma}{v^2 \rho l};$$

$$\pi_5 = \frac{\epsilon}{\rho v^2}; \pi_6 = \frac{l}{R_1}; \pi_7 = \frac{l}{R_2};$$

i

$$f_1 \left(\frac{\Delta P}{\rho v^2}; \frac{g l}{v^2}; \frac{\eta}{v l \rho}; \frac{\gamma}{v^2 \rho l}; \frac{l}{R_1}; \frac{l}{R_2} \right) = 0.$$

Pogodno je neke od veličina u gornjem izrazu zameniti njihovim recipročnim vrednostima, a umesto π_5 uzeti $\sqrt{\pi_5}$ te je

$$f_2 \left(\frac{D}{\rho v^2}; \frac{v^2}{g l}; \frac{v l \rho}{\eta}; \frac{v^2 l \rho}{\gamma}; \frac{v}{R_1}; \frac{l}{R_2} \right) = 0.$$

Zamenjujući bezdimenzijske karakteristike njihovim slovnim oznakama dobija se

$$f_2 \left(\frac{\Delta P}{\rho v^2}; Fr; Re; We; Ma; \frac{l}{R_1}; \frac{l}{R_2} \right) = 0,$$

a izraz za određivanje pada pritiska je oblika

$$\Delta p = \rho v^2 f_2 \left(Fr, Re, We, Ma, \frac{l}{R_1}, \frac{l}{R_2} \right).$$

Funkcija f_2 se mora odrediti analizom ili eksperimentom.

Zadaci.

1. Odrediti Re ako se zna da je funkcija gustine ρ , dinamičke viskoznosti η , brzine fluida v i karakteristične dužine l .

Rešenje.

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu}$$

2. Naći bezdimenzijski broj koji sadrži dužinu l , ubrzanje a , gustinu ρ i dinamičku viskoznost η .

Rešenje.

$$K = \frac{\eta}{\sqrt{l^3 a} \rho}$$

3. Naći bezdimenzijski broj koji sadrži ubrzanje a , površinski napon γ , viskoznost η i gustinu ρ .

Rešenje.

$$K = \frac{\gamma^3 \rho}{a \eta^4}$$

4. Odrediti brzinu isticanja tečnosti kroz otvor na sudu ako ona zavisi od visine nivoa tečnosti iznad ose otvora H , gustine tečnosti ρ i ubrzanja zemljine teže g .

Rešenje.

$$v = \sqrt{2gH}, \text{ eksperimentalno je određeno } B = \sqrt{2}$$

5. Odrediti snagu koju daje pumpa ako se zna da ona zavisi od gustine fluida ρ , protoka fluida kroz pumpu Q i napora pumpe gH .

Rešenje.

$$P = \rho Q g H$$

6. Naci izraz za brzinu vodenog talasa ako ona zavisi od talasne duzine λ i ubrzanja zemljine teze g .

Rešenje.

$$v = B \sqrt{g\lambda}$$

7. Naci izraz za brzinu malih talasa na površini tečnosti ako ona zavisi od talasne duzine λ , gustine ρ i površinskog napona tečnosti γ .

Rešenje.

$$v = B \sqrt{\frac{\lambda^3 \gamma}{\rho}}$$

8. Odrediti izraz za brzinu prenošenja pritiska kroz tečnost ako se pretpostavi da zavisi od modula stišljivosti ϵ i gustine fluida ρ .

Rešenje.

$$v = B \sqrt{\frac{\epsilon}{\rho}}$$

9. Odrediti otporni moment usled trenja za kružnu ploču prečnika d koja se okreće ugaonom brzinom ω u fluidu dinamičke viskoznosti η i gustine ρ .

Rešenje.

$$M = d^5 \omega^2 \rho \cdot f(Re)$$

10. Odrediti izraz za vučnu silu broda ako se pretpostavi da zavisi od dinamičke viskoznosti η , gustine ρ , brzine fluida v , duzine broda l i travitacije σ .

Rešenje.

$$F = \rho v^2 l^2 \cdot f(Re, Fr)$$

11. Odrediti izraz za snagu hidraulične mašine ako se pretpostavi da zavisi samo od ugaone brzine obrtnog elementa ω , veličine mašine (karakteristične duzine) l , protoka Q , gustine ρ i dinamičke viskoznosti fluida η .

Rešenje.

$$P = \omega^3 \rho l^5 \cdot f\left(\frac{\rho}{\omega l^2}, \frac{\eta}{\omega l^2 \rho}\right)$$

Napomena.

$$\omega l = v; \quad \frac{\eta}{\omega l^2 \rho} = Re^{-1}$$

12. Izmedju dva koaksijalna cilindra, od kojih je spoljni nepokretan a unutrašnji pokretan, nalazi se viskoz-an, nestišljiv fluid. Treba odrediti izraz za moment koji je potreban da održi konstantnu ugaonu brzinu unutrašnjeg cilindra ako zavisi samo od prečnika d_1 , d_2 , duzina cilindra l_1 , l_2 , gustine ρ , dinamičke viskoznosti fluida η i ugaone brzine unutrašnjeg cilindra ω .

Rešenje.

$$M = \rho \omega^2 l_1^5 \cdot f\left(\frac{l_2}{l_1}, \frac{d_2}{d_1}, Re\right)$$

13. Odrediti izraz za vučnu silu koja dejstvuje na glatko telo koje se kreće kroz stišljiv fluid, ako ona zavisi samo od brzine v , veličine tela l , dinamičke viskoznosti η , gustine ρ i modula stišljivosti fluida ϵ .

Rešenje.

$$F = \rho v^2 l^2 \cdot f(Re, Ma)$$

14. Potrebno je izvesti izraz za krajnju brzinu glatke lopte koja pada kroz nestišljiv fluid, ako ona zavisi od veličine l , gustine lopte ρ_s , ubrzanja zemljine teže g , gustine fluida ρ i dinamičke viskoznosti fluida η .

Rešenje.

$$v = \frac{\eta}{\rho} f\left(\frac{\rho_s}{\rho}, \frac{l^3 g \rho^2}{\eta^2}\right)$$

Napomena.

$$\frac{l^3 g \rho^2}{\eta^2} = Gr$$

15. Izvesti izraz za brzinu mlaza viskozne tečnosti koja ističe iz kružnog otvora, ako ona zavisi od statičkog pritiska p ispred otvora, prečnika otvora d, gravitacijskog ubrzanja g, dinamičke viskoznosti η i gustine fluida ρ .

Rešenje.

$$v = \frac{\eta}{\rho} f(\text{Re}, \text{Eu}, \text{Gr})$$

Napomena.

$$\frac{d^2 \rho D}{\eta^2} = \frac{\text{Re}^2}{\text{Eu}} ; \quad \frac{d^3 g \rho^2}{\eta^2} \approx \text{Gr}$$

16. Kada jak eksploziv eksplozira ispod vode pretvara se skoro trenutno u gas. Početni pritisak gasa zavisi od prirode eksploziva (za TNT $P_0 \approx 1,4 \cdot 10^6 \text{ at}$).

Eksplozija prouzrokuje sferni udarni talas koji se prenosi u obliku talasa pritiska intenziteta p. Pritisak p zavisi u svakom trenutku od prečnika R udarnog talasa, početnog pritiska P_0 , težine eksploziva m_g , gustine vode ρ i njegovog modula stižljivosti ϵ . Odrediti izraz za odnos $\frac{P}{P_0}$ pomoću dimenzijske analize.

Rešenje.

$$\frac{P}{P_0} = f\left(\frac{R^3 \rho g}{m_g}, \frac{R^2 \epsilon}{m_g}\right)$$

11.3. KONTROLNA PITANJA

parametre:

- Rasporediti sledeće grupe u bezdimenzijske parametre:
 - $\Delta p, v, \rho, g, \mu$; b) g, ρ, Q, F ; c) $n, a, \Delta p, t$.
- Koje od sledećih veličina imaju oblik Re broja?
 - $\frac{v \cdot \mu}{\rho}$; b) $\frac{v \cdot \mu}{\rho}$; c) $\frac{v \cdot \mu}{\rho}$; d) $\frac{v}{g \cdot d}$; e) $\frac{\Delta p}{\rho v^2}$.
- Koeficijent pritiska ima jedan od sledećih oblika:
 - $\frac{\Delta p}{\rho g h}$; b) $\frac{\Delta p}{\rho v^2}$; c) $\frac{\Delta p}{\rho v^2}$; d) $\frac{\Delta p}{\rho v^2}$.

4. Koliko π parametara je potrebno da se izrazi funkcija $f(a, v, t, v, \lambda) = 0$?

- 5; b) 4; c) 3; d) 2; e) 1.

5. Koji od sledećih, može da predstavlja π parametar funkcije $f(Q, H, G, v_0, \phi) = 0$, kada su Q i g promenljive koje se ponavljaju?

- $\frac{Q^2}{gH}$; b) $\frac{v_0^2}{g^2 Q}$; c) $\frac{Q}{g \phi^2}$; d) $\frac{Q}{gH}$;

e) nijedan od odgovora.

6. Izabрати situaciju u kojoj inercijalne sile nisu važne:

- strujanje preko preliva,
- proticanje kroz otvoren kanal,
- udar talasa od zid,
- strujanje kroz dugačku kapilarnu cev,
- proticanje kroz polutvoreni ventil.

7. Koje dve sile su najpotrebnije u laminarnoj struji između dve bliske paralelne ploče?

- inercijalne, viskozne; b) pritiska, inercijalne; c) gravitacijske, pritiska; d) viskozne, pritiska; e) nijedan od odgovora.

8. Bezdimenzijska kombinacija od $\Delta p, \rho, \mu, Q$ je:

- $\frac{\Delta p}{\rho} \frac{Q}{\mu}$; b) $\frac{\rho Q}{\Delta p \mu}$; c) $\frac{\rho \mu}{\Delta p Q}$; d) $\frac{\Delta p Q}{\rho}$;
- $\frac{\rho}{\Delta p} \frac{Q}{\mu}$; f) nijedan od odgovora.

9. Model broda 1:100 ima otpor talasa 11 N pri protokovanoj brzini. Koliki je odgovarajući otpor prototipa?

- 11000 N; b) 110000 N; c) 1100000 N; d) 11000000 N; e) nijedan od odgovora.

10. Model projektila ima koeficijent otpora 3,5 pri $Ma = 2$. Koliko puta će biti veći otpor prototipa ako je ispaljen u vazduhu iste temperature i polovine gustine, a

pri istom Ma broju?

- a) 3,12 ; b) 12,5 ; c) 25 ; d) 100 ;
e) nijedan od odgovora.

11. Ako visina na koju se podiže tečnost u kapilarnoj cevi h , prečnika d , zavisi od površinskog napona γ , gustine tečnosti ρ i ubrzanja zemljine teže g , formula za visinu dizanja je oblika:

- a) $h = \frac{\gamma}{\rho g} f\left(\frac{\gamma}{\rho g d^2}\right)$; b) $h = k\left(\frac{\gamma}{\rho g d^2}\right)^n$;
c) $h = kd\left(\frac{\gamma}{\rho g}\right)^n$; d) $h = \frac{\rho g d^2}{\gamma} f\left(\frac{\rho g d^2}{\gamma}\right)$;
e) nijedan od odgovora.

GLAVA 12 OTPORI KOJIM FLUID DEJSTVUJE NA TELO

Kretanje tela kroz realan (viskozni) fluid prate otpori kojim se fluidan sredina protivl kretanju tela. Opšta formula kojom se određuje sila otpora može da se izrazi u obliku

$$F_D = f(\lambda, \phi, e, v, \rho, \eta, \dots)$$

- gde su: F_D - ukupna sila otpora,
 λ i ϕ - geometrijske karakteristike tela; dužina (λ) i faktor oblika (ϕ),
 e - apsolutna hrapavost površine tela,
 v - brzina kojom se telo kreće u odnosu na fluid,
 ρ i η ... - fizička svojstva fluida (gustina, viskoznost, ...).

Opšti izraz sile otpora se može, kako je pokazano u glavi 11, izraziti sa

$$F_D = \rho v^2 c_D A \quad (Re, Ma, \lambda, \phi, \dots),$$

gde se funkcija f_1 može zameniti koeficijentom otpora c_D različitim za svaku vrstu opstrujavanja tela i zavisnim od mnogobrojnih uticaja. Uvođenjem dinamičkog pritiska $\frac{1}{2}\rho v^2$ umesto ρv^2 i zamena λ^2 sa karakterističnom površinom tela A dobija se formula po kojoj se najčešće određuje sila otpora

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 c_D A.$$

Otpor na telo uronjeno u struju fluida sastoji se od otpora trenja i otpora oblika. Gornja formula, dobijena kombinovanom primenom dimenzijske analize i eksperimentima izmerenih podataka, važi za obe vrste; s tim što je potrebno voditi računa o definiciji karakteristične površine.

12.1. OTPOR TRENJA

Svojstva otpora trenja će se razmatrati za ravnu, tanku, glatku ili hrapavu ploču u struji fluida. Ovakav otpor zavisi od formiranog graničnog sloja, kako je već raspravljano u glavi 8. Koefficient otpora trenja je definisan za karakterističnu površinu $A = l \cdot b$.

Dužina ploče l je u pravcu kretanja ploče (ili struje fluida, ako je ploča nepokretna) a Re broj, od koga zavisi vrsta graničnog sloja, je $\frac{v \cdot l}{\nu}$.

Za laminaran granični sloj sa rasporedom brzine i debljinom

$$\frac{v}{\bar{v}} = 2\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 ; \quad \delta = \sqrt{\frac{30}{Re}} ; \quad (v. \text{ glava 8. primer 2.}),$$

Koefficient otpora je prema Blazijusovom rešenju

$$C_D = \frac{1,33}{\sqrt{Re}} \quad \text{za} \quad 10^4 < Re < 6 \cdot 10^5 .$$

Za vrednosti $Re < 10^3$ gornja formula ne daje zadovoljavajuće vrednosti. Treba je zameniti sa

$$C_D = \frac{1,33}{\sqrt{Re}} + \frac{4,12}{Re} \quad \text{za} \quad Re < 6 \cdot 10^5 .$$

Za turbulentan granični sloj preko glatke površine sa rasporedom brzine i debljinom

$$\frac{v}{\bar{v}} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} ; \quad \delta = \frac{0,38}{Re^{1/4}} ,$$

Koefficient otpora je određen sa

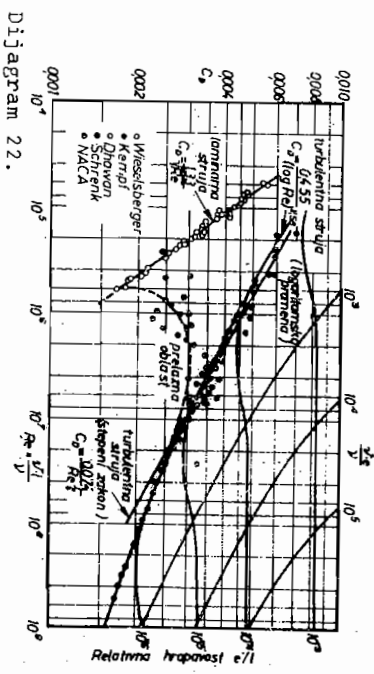
$$C_D = \frac{0,074}{Re^{1/2}} \quad \text{za} \quad 10^5 < Re < 2 \cdot 10^7 .$$

Za turbulentan granični sloj preko glatke površine, sa logaritamskom raspodelom brzine, koefficient otpora je određen sa

$$C_D = \frac{0,455}{(\log Re)^{2,58}} \quad \text{za} \quad 10^6 < Re < 10^9 .$$

Za turbulentan granični sloj uzduž hrapave površine koefficient otpora zavisi samo od relativne hrapavosti $\frac{e}{l}$ (ne zavisi od Re).

Na dijagramu 22. su prikazane navedene promene koefficienta otpora trenja u zavisnosti od Re broja.



Dijagram 22.

Za nadzvučnu struju uzduž glatke površine koefficient otpora se smanjuje sa povećanjem Ma broja kako je pokazano na slici. Za laminarnu struju je smanjenje oko 15% pri $Ma=4$.

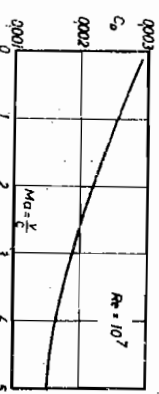
Za turbulentnu struju ($Re=10^4$) smanjenje koefficienta otpora je oko 50% pri $Ma=4$ (dijagram 23.).

Sila otpora (otpor

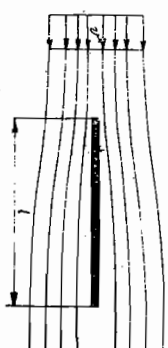
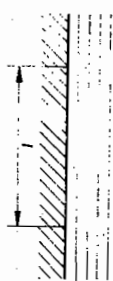
trenja) za ploču koja je sa jedne strane u dodiru sa strujom fluida je

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 C_D b l$$

gde su b i l širina i dužina ploče. Ukoliko se određuje sila trenja za ploču (disk) čije su obe površine izložene dejstvu fluida otpor je



Dijagram 23.



$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 c_D 2bl$$

Primeri.

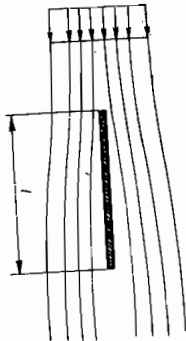
1. Tanka, glatka, pravougaona ploča dimenzije $b \cdot l = 1,5 \cdot 1 \text{ m}^2$ kreće se kroz vodu ($\nu = 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) konstantnom brzinom $v = 0,3 \text{ m/s}$, kako je pokazano na slici. Odrediti koeficijent trenja.

Rešenje.

Reynoldsov broj

$$Re = \frac{v \cdot l}{\nu} = \frac{0,3 \cdot 1,5}{1,8 \cdot 10^{-6}} = 250000,$$

pokazuje da je realno pretpostaviti zadržavanje laminarnog strujnog režima na ukupnoj površini ploče. Tako se može smatrati da je raspored brzine u graničnom sloju



Tangencijalni napon na ploči je određen sa Njutnovom jedinačinom

$$\tau_0 = \eta \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} = \frac{2\eta v}{\delta},$$

gde je debljina graničnog sloja određena sa

$$\delta = x \sqrt{\frac{30}{Re}} = \sqrt{\frac{30\nu}{v}} \sqrt{x}.$$

Ukupna sila trenja na obe strane površine ploče, izražena preko tangencijalnog napona je

$$F = 2b \int_0^l \tau_0 dx = 4\eta v b \int_0^l \frac{dx}{\delta} = \frac{4\eta v b}{\sqrt{30\nu}} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{8\eta v b}{\sqrt{30}} \sqrt{\frac{l}{\nu}},$$

ili izražena preko opšte jednačine za otpor

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 c_D 2A = \frac{1}{2} \rho v^2 c_D 2bl.$$

Izjednačavanjem poslednja dva izraza se dolazi do

$$c_D = \frac{8}{\sqrt{30}} \frac{1}{\sqrt{\frac{l}{\nu}}} = \frac{1,46}{\sqrt{\frac{l}{\nu}}}.$$

Koristeći se tačnijim Blazijusovim izrazom za tangencijalni napon na ploči pri laminarnom graničnom spoju

$$\tau_0 = 0,33 \sqrt{\frac{\rho \eta v^3}{x}},$$

dobija se vrednost koeficijenta otpora koja bolje odgovara kretanju tanke ploče u laminarnim uslovima

$$c_D = \frac{1,33}{\sqrt{Re}}.$$

Zamena vrednosti daje

$$c_D = \frac{1,33}{\sqrt{0,3 \cdot 1,5}} = 0,00266.$$

2. Tanka pravougaona ploča $0,6 \text{ m}$ široka i 6 m dugačka, nepokretna je u struji vode koja se kreće konstantnom brzinom 6 m/s u pravcu uzdužne ose ploče. Za poznatu viskozno-st vode $\nu = 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ odrediti: a) silu otpora na ploču, b) debljinu graničnog sloja na kraju ploče.

Rešenje.

a) Za Reynoldsov broj

$$Re = \frac{v \cdot l}{\nu} = \frac{6 \cdot 6}{1,8 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^7,$$

iz dijagrama se nalazi $c_D = 0,0025$, te je ukupan otpor na obe strane ploče

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 c_D 2A = \frac{1}{2} 1000 \cdot 6^2 \cdot 0,0025 \cdot 2 \cdot 0,6 \cdot 6 = 342 \text{ N}.$$

b) Debljina graničnog sloja na kraju ploče je određena sa

$$\frac{\delta}{l} = \frac{0,38}{Re^{0,2}} = \frac{0,38}{(2 \cdot 10^7)^{0,2}} = 0,013,$$

tj.

$$\delta = 0,013 \cdot 6 = 0,079 \text{ m}.$$

Zadaci.

1. Pravougaona ploča $2,5 \cdot 0,6 \text{ m}^2$ se nalazi u jednolikoj struji vazduha kinematske viskoznosti vazduha $\nu = 1,35 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ pri normalnom atmosferskom pritisku i tempe-

raturi 15°C . Ako je vazdušna struja paralelna uzdužnoj osi ploče, brzina vazduha $150 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i relativna hrapavost površine ploče $\frac{e}{\lambda} = 10^{-4}$; odrediti silu otpora na obe strane ploče.

Rešenje.

$$F_D = 198,8 \text{ N}$$

2. Glatka pravougaona ploča 1 m široka i $4,5 \text{ m}$ dugačka nalazi se nepokretna u struji vode koja se kreće jednolikom brzinom $7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ u pravcu uzdužne ose ploče. Za poznatu kinematsku viskoznost vode $\nu = 1,4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ odrediti: a) silu otpora sa obe strane ploče, b) debljinu graničnog sloja na kraju ploče.

Rešenje.

$$\text{a) } F_D = 632 \text{ N} \quad ; \quad \text{b) } \delta = 0,057 \text{ m} .$$

3. Pretpostaviti, kao prvu aproksimaciju, linearan raspored brzine kroz granični sloj. a) Odrediti izraz za koeficijente otpora ravne ploče koja se nalazi u paralelnoj fluidnoj struji. b) Odrediti izraz za debljinu graničnog sloja formiranog na ploči. (Karakteristična površine $A = b\lambda$)

Rešenje.

$$\text{a) } c_D = \sqrt{\frac{4}{3Re}} \quad ; \quad \text{b) } \frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{12}{Re}}$$

12.2. OTPOR OBLIKA, UKUPAN OTPOR

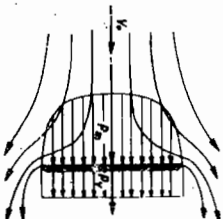
Otpor oblika je određen rasporedom pritiska oko tela potopljenog u fluidnoj struji. Ukupna sila otpora je jednaka zbiru otpora oblika i otpora trenja. Udeo otpora trenja i otpora oblika u ukupnom otporu zavise od tela i strujnog režima. Čest slučaj je da pri manjim brzinama je veći udeo otpora trenja, a pri većim otpor oblika. Dva ekstremna slučaja: a) kada je ukupan otpor jednak otporu trenja i b) kada je ukupan otpor jednak otporu oblika; se javljaju pri opstrujavanju ravne ploče, gde je njena površina orijentisana u pravcu struje i normalno na struju, kako je prikazano

na slici

a)



b)



Ukupna sila kojom fluid deluje na telo se može razložiti u dve komponente. Komponenta u pravcu strujanja se naziva otpor, a komponenta normalna na pravac struje uzgon. Formule za njihovo određivanje su

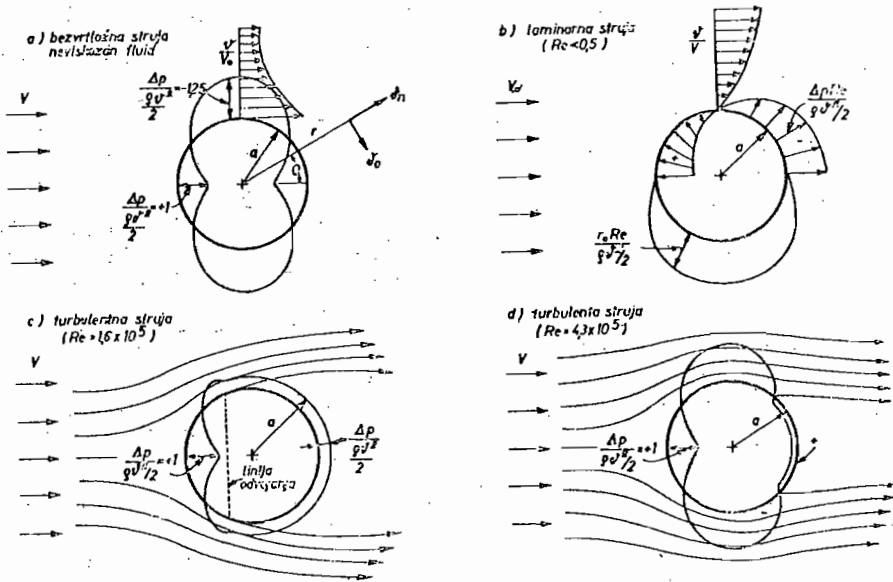
$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 c_D A ;$$

$$F_L = \frac{1}{2} \rho v^2 c_L A ,$$

gde su:

- c_D - koeficijent otpora,
- c_L - koeficijent uzgona,
- A - karakteristična površina, najveće površine najvećeg poprečnog preseka normalnog na pravac fluidne struje.

Simetrično telo, sa osama simetrije u pravcu strujanja i normalno na pravac struje (v. sliku), potopljeno u struji idealnog fluida bez cirkulacije; ima u odnosu na te ose i simetrične rasporede pritiska tako da na njega ne deluje ni sila otpora niti sila uzgona (Dalahberov paradoks) (a). Isto telo u struji viskoznog fluida bez cirkulacije ima simetričan raspored pritiska samo u odnosu na osu simetrije duž strujanja, tako da otporna sila postoji, a sila uzgona nije izražena (b). Nesimetričan raspored pritiska u odnosu na osu simetrije u pravcu strujanja obezbeđuje silu uzgona.



Raspored pritiska i brzine za strujanja oko lopte

12.2.1. OTPORI PRI MALIM I UMERENIM REYNOLDSOVIM BROJEVIMA

Otpor pri malim Reynoldsovima brojevima kada su Reynoldsovi brojevi vrlo mali $Re < 0,5$ opstrujavanje tela je laminarno i oblik tela je drugorazrednog značaja u odnosu na dimenzije tela, viskoznost fluida i brzinu struje.

Stoks je matematički rešio čisto laminarno strujanje oko lopte gde se inercijalni uticaji potpuno zanemaruju. Sila otpora za loptu je

$$F_D = 3\pi\mu v$$

a koeficijent otpora lopte

$$C_D = \frac{24}{Re}, \quad (Re = \frac{vD}{\nu}) \text{ za } Re < 0,5,$$

gde je d prečnik lopte.

Za disk normalan na laminarnu struju koeficijent

$$C_D = \frac{20,4}{Re}, \quad (Re = \frac{vD}{\nu}) \text{ za } Re < 0,5,$$

a za disk paralelan struji je

$$C_D = \frac{13,6}{\sqrt{Re}}, \quad (Re = \frac{vD}{\nu}) \text{ za } Re < 0,1,$$

a sila otpora se određuje prema obe površine diska tj.

$$F_D = \frac{1}{2}\rho v^2 C_D 2\frac{d^2}{4}.$$

Koeficijent otpora za dvodimenzijnsko laminarno strujanje oko kružnog cilindra je

$$C_D = \frac{8\pi}{Re(2,0 - kRe)}, \quad (Re = \frac{vD}{\nu}) \text{ za } Re < 0,1,$$

a za ravnu ploču normalnu na struju je

$$C_D = \frac{8\pi}{Re(2,7 - kRe)}, \quad (Re = \frac{vD}{\nu}) \text{ za } Re < 0,1,$$

gde je b manja dimenzija ploče.

Za dvodimenzijnsku laminarnu struju preko ravne ploče koja je paralelna struji, za vrlo male Re brojeve koeficijent otpora je određen sa

$$C_D = \frac{4,12}{Re}, \quad (Re = \frac{vL}{\nu}) \text{ za } Re < 0,01,$$

a sila otpora za obe površine ploče je određena sa

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 c_D 2bL$$

Kada su Reynoldsovi brojevi mali nema inercijskih efekata pa se poremećaji usled opticanja tela prenose daleko od graničnih površina tela. Tako npr. pri opstrujavanju lopte sa $Re < 0,5$, tek na udaljenju četiri prečnika od lopte (vertikalna osa), brzina je 92% od brzine neuznemirene struje.

Otpor pri umerenim Reynoldsovim brojevima. U dijagramima i tablici koji slede prikazane su promene koeficijenta otpora sa Re brojem do $Re=10^6$, kada za većinu tela dolazi do odvajanja fluidne struje od graničnih površina; te otporna sila postaje funkcija i drugih uticaja (nestacionarnosti, Ma).

Na dijagramima se za vrednost $Re=2 \cdot 10^5$ uočava nagli pad koeficijentata otpora za zaobljena tela, što je posledica promene laminarnog graničnog sloja u turbulentan, pri čemu se tačka odvajanja struje pomera.

U dijagramu koeficijentata otpora za loptu i druga obrtna tela unesena je skala bezdimenzijske karakteristike $\frac{F_D}{\rho v^2}$ pomoću koje se može direktnim putem odrediti brzina slobodnog pada u ovih tela kroz fluid u polju zemljine težje. Skala je uspostavljena na sledeći način.

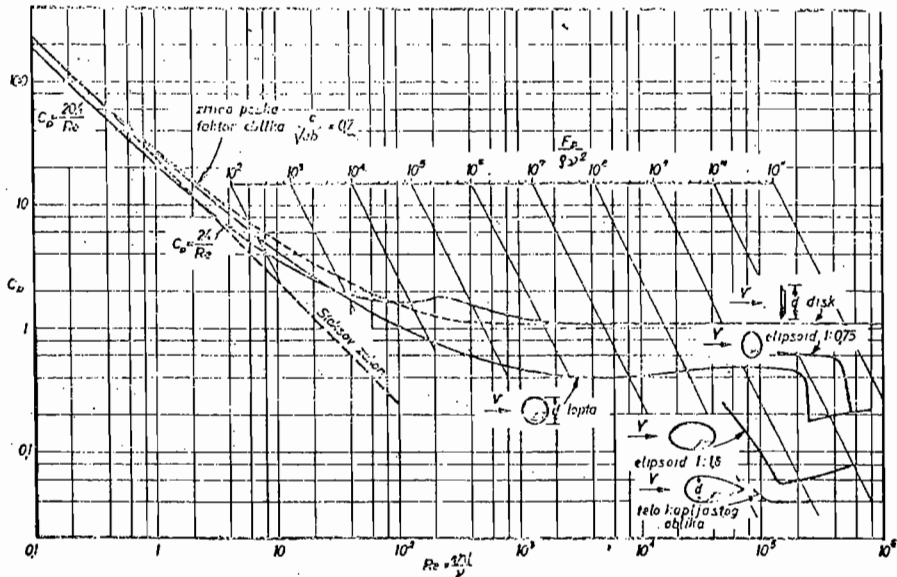
Formiranjem proizvoda

$$c_D (Re)^2 = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho v^2 A} \quad \left(\frac{vD}{\nu} \right)^2 \sim \frac{F_D}{\rho v^2}$$

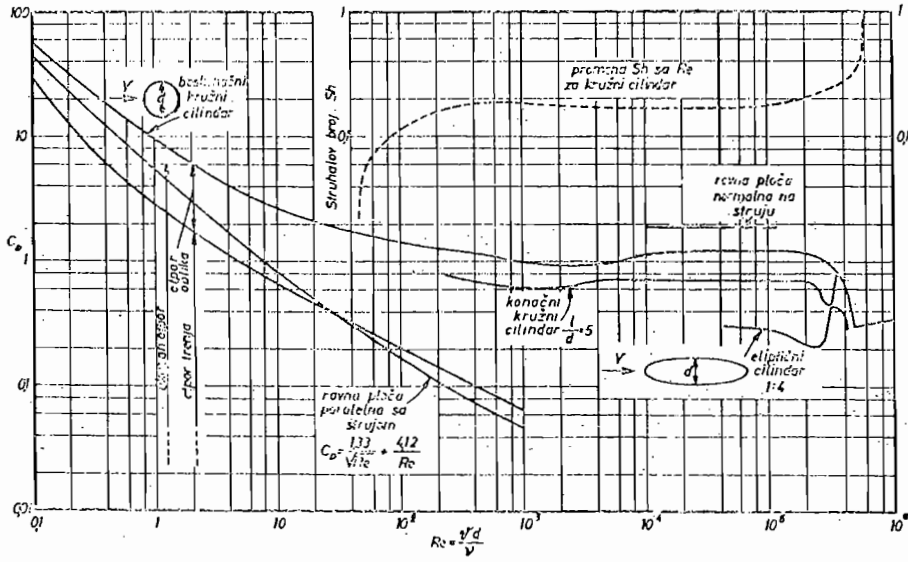
gde znak \sim zamenjuje jednakost sa brojnim konstantom ($\frac{8}{\pi}$) pridodatom desnoj strani, koja se ne menja bez obzira na oblo telo. Ova konstanta je obračunata nagibom paralelnih pravih, koje za neku vrednost $\frac{F_D}{\rho v^2}$ određuju c_D i Re ; tj. v iz jednakosti

$$v \sim \left(\frac{2F_D}{c_D \rho A} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Brzina slobodnog pada v je konstanta vertikalna brzina tela koja sledi iz ravnoteže sile otpora, potiska i težine tela.



Dijagram 24. Koeficijenti otpora za lopte i druga obrtna tela



Dijagram 25. Koeficijenti otpora za cilindre i ravne ploče

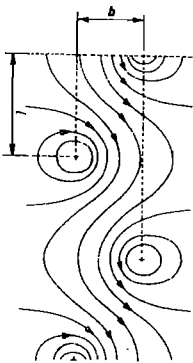
Tablica 22.

Telo	struja s leva na desno	λ/d	$Re = \frac{v \cdot d}{\nu}$	C_D
1. Kružni cilindar osa normalna na struju	1	1	10^5	0,63
	5	20		0,74
	∞	∞		0,90
2. Kružni cilindar osa paralelna struji	0	5	$> 5 \cdot 10^5$	1,20
	1	∞		0,35
	2	∞		0,33
3. Eliptični cilindar (4:1) (8:1)	0	$4 \cdot 10^4$	$> 10^3$	1,12
	1	10^5		0,91
	2	$2,5 \cdot 10^4$ do 10^5		0,85
	7	$2,5 \cdot 10^4$ $2 \cdot 10^5$		0,87 0,99
4. Aeroprofil (1:3)	∞	$> 4 \cdot 10^4$		0,07
5. Pravougaona ploča normalna na struju gde je $\lambda =$ dužina $d =$ širina	1	$3,5 \cdot 10^4$	$> 10^3$	1,16
	5	10^4 do 10^5		1,20
	20			1,50
	∞			1,90
6. Kvadratna prizma	1	$3,5 \cdot 10^4$		2,0
	2	10^4 do 10^5		1,6
7. Trostrana prizma 120° 60° 30°	1	$> 10^4$		2,0
	2			1,72
	3			2,20
	4			1,39
8. Poluloptasta ljska	1	$> 10^3$		1,80
	2	10^3 do 10^5		1,0
9. Disk normalan u struji	1	$> 10^3$		1,33
	2			0,4
10. Paralelni diskovi na rastojanju λ , normalni na struju	0	$> 10^3$		1,12
	1			1,12
	2			0,93
	3			1,04 1,54

Koeficijenti otpora za cilindre, prizme, ravne ploče i ljske

Karmanov vrtložni trag, koji se pojavljuje nizstrujno od cilindra, je rezultat naizmjeničnog formiranja vrtloga i njihovog odvajanja od cilindra, zbog čega i naizmjenično djeluju sile na cilindar. Odnos uzdužnog i poprečnog rastojanja za kružni cilindar iznosi $\frac{L}{b} \approx 3,55$ a za ravnu ploču $\frac{L}{b} \approx 3,3$. Frekvencija odvajanja vrtloga može se odrediti sa brzinom kojom se vrtlozi udaljuju od tela v_v i rastojanjem vrtloga u tragu λ , tj.

$$f = \frac{v_v}{\lambda} \cdot$$



Uopšte frekvencija je funkcija viskoznosti fluida v , brzine fluidne struje v i prečnika cilindra d , što se može kombinovati u sledeću zavisnost dva bezdimenzijska parametra Struhalovog i Reynoldsovog broja

$$Sh = \frac{f \cdot d}{v} = \phi(Re) \cdot$$

Ova zavisnost je prikazana na dijagramu 25. za određivanje koeficijenta otpora cilindra.

Primeri.

1. Odrediti ukupnu silu otpora, otpor trenja i otpor oblika koji se javljaju pri kretanju beskonačno dugačkog cilindra prečnika $d=30$ mm na dužini cilindra $0,6$ m. Cilindar se kreće kroz vazduh kinematske viskoznosti $\nu=1,42 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$, gustine $\rho=1,23 \frac{kg}{m^3}$; brzinom $v=60 \frac{mm}{s}$.

Rešenje.

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{0,06 \cdot 0,03}{1,42 \cdot 10^{-5}} = 126,7$$

Iz dijagrama 25. koeficijent ukupnog otpora (gornja kriva) je $c_{D_t}=1,4$, a koeficijent trenja (donja kriva) je $c_{D_r}=0,185$. Ukupna sila otpora je

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 c_{D_t} A = 0,5 \cdot 1,23 \cdot 0,06^2 \cdot 1,4 \cdot 0,03 \cdot 0,6 = 5,58 \cdot 10^{-5} \text{ N}.$$

Otpor trenja je

$F_{D_t} = \frac{1}{2} \rho v^2 c_{D_t} A = 0,5 \cdot 1,23 \cdot 0,06^2 \cdot 0,185 \cdot 0,03 \cdot 0,6 = 7,37 \cdot 10^{-5} \text{ N}$.
Otpor oblika je

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 c_{D_t} A = 0,5 \cdot 1,23 \cdot 0,06^2 (1,4 - 0,185) 0,03 \cdot 0,6 = 4,84 \cdot 10^{-5} \text{ N}.$$

2. Ekran letnjeg bioskopa dugačak je 12 m i visok 6 m. Odrediti moment kojim vetar jačine $30 \frac{m}{s}$, normalan na ekran, djeluje na njegovu osnovu ($\nu=1,46 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$; $\rho=1,225 \frac{kg}{m^3}$).

Rešenje.

Pretpostavljajući da je visina ekrana karakteristična dimenzija

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{30 \cdot 6}{1,46 \cdot 10^{-5}} = 1,23 \cdot 10^7 \cdot$$

Iz tablice 22. sledi $c_{D_t}=1,17$, te je

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 c_{D_t} A = 0,5 \cdot 1,225 \cdot 30^2 \cdot 1,17 \cdot 12 \cdot 6 = 46437 \text{ N} \cdot$$

Moment kojim vetar djeluje na bazu ekrana je

$$M = F_D \cdot \frac{d}{2} = 46437 \frac{m}{2} = 139311 \text{ Nm} \cdot$$

3. Odrediti brzinu slobodnog pada sferične kapljice vode u mirnom vazduhu na normalnom atmosferskom pritisku i temperaturi $t=15^\circ\text{C}$ ($\nu=1,46 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$), kao i brzinu kojom se vazdušni mehur diže u vodi. Pretpostaviti da je prečnik vodene kapi i vazdušnog mehura $d=3$ mm i kinetička viskoznost vode $\nu=1,18 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$.

Rešenje.

Sila otpora i težina vodene kapljice su iste (zanimljivo je da hidrostatička sila potiska s kojom vazduh djeluje na kapljicu) te je

$$F_D = \rho \cdot g \cdot \frac{1}{6} \pi d^3 = 1000 \cdot 9,81 \frac{1}{6} \pi \cdot 0,003^3 = 0,000139 \text{ N} \cdot$$

Za kapljicu u vazduhu

$$\frac{F_D}{\rho v^2} = \frac{0,000139 \cdot 10^{10}}{1,225 \cdot 1,46^2} = 5,28 \cdot 10^5 \cdot$$

pošto je

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{101325}{287 \cdot 288} = 1,225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Iz dijagrama 24., za ovu vrednost $\frac{F_D}{\rho v^2}$, se nalazi

$$C_D = 0,42,$$

a odatle

$$v = \sqrt{\frac{2F_D}{\rho C_D A}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 0,000139}{1,225 \cdot 0,42 \cdot 0,0032\pi}} = 8,74 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Za vazdušni mehur u vodi je

$$\frac{F_D}{\rho v^2} = \frac{0,000139 \cdot 10^{-12}}{1000 \cdot 1,18^2} = 9,98 \cdot 10^{-4}$$

a iz dijagrama 24.

$$C_D = 0,55;$$

odakle se određuje

$$v = \sqrt{\frac{2F_D}{\rho C_D A}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 0,000139}{1000 \cdot 0,55 \cdot 0,0032\pi}} = 0,27 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ naviše.}$$

Velika razlika u brzinama je najvećim delom zbog razlike u viskoznim silama.

4. Periskop podmornice prečnika 100 mm kreće se kroz vodu brzinom $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kolika je frekvencija formiranja (otkidanja) vrtloga? Pretpostaviti $\rho = 1020 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $v = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Kolika je sila otpora po jedinici dužine periskopa?

Rešenje.

Za Reynoldsov broj

$$Re = \frac{v d}{\nu} = \frac{6 \cdot 0,1}{1,2 \cdot 10^{-6}} = 5 \cdot 10^5$$

iz dijagrama 25. se nalazi Struhalov broj $Sh = 0,35$, a odatle

$$Sh = \frac{f \cdot d}{v} = 0,35; \quad f = \frac{0,35 \cdot 6}{0,1} = 21 \text{ s}^{-1}$$

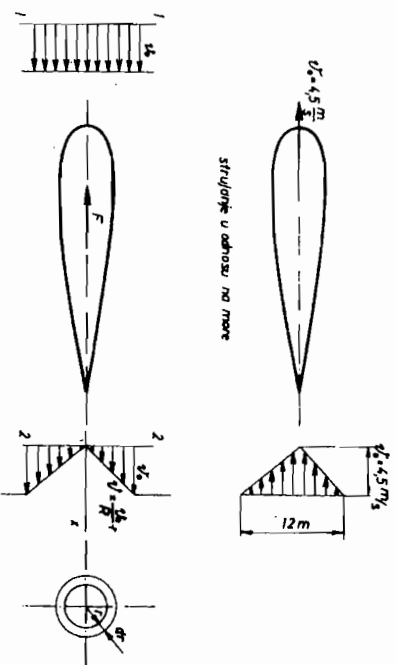
Koeficijent otpora je iz istog dijagrama $C_D = 0,3$, te je sila otpora po jedinici dužine periskopa

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 C_D A = \frac{1}{2} \cdot 1020 \cdot 6^2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 \cdot 1 = 550 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

5. Iza podmornice u vožnji ostaje trag u obliku cilindričnog talasa u kome brzina raste linearno od nule na poluprečniku od 6 m, do brzine podmornice $v_0 = 4,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ u osi. Kolika je efektivna snaga propelerâ? Gustina vode je $\rho = 1025 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Rešenje.

Razmatraće se relativno strujanje u odnosu na (zamišljeno nepokretnu) podmornicu. Otpor podmornice je ekvivalentan promeni količine kretanja fluida u odnosu na podmornicu.



Jednaciina o promeni količine kretanja za cilindrične površine beskonačnog prečnika ograničene preseccima 1 i 2 prikazanim na slici je

$$\Delta X = [\rho Q v]_2 - [\rho Q v]_1,$$

odnosno

$$F = 2\pi\rho \int_0^R v r (4,5 - v) dr = \frac{2v_0 \pi \rho}{R} \int_0^R r^2 (4,5 - \frac{v_0}{R} r) dr,$$

gde je elementarni protok označen sa

$$dQ = v \cdot 2\pi r dr = \frac{2v_0 \pi}{R} r^2 dr.$$

Tako je

$$F = \frac{2v_0 \pi \rho}{R} \int_0^R r^2 (4, 5 - \frac{v_0}{R} r) dr = \frac{10^4 \pi}{6} \int_0^6 r^2 (4, 5 - \frac{5}{6} r) dr =$$

$$= \frac{10^4 \pi}{6} (4, 5 \cdot \frac{6^3}{3} - \frac{5}{6} \cdot \frac{6^4}{4}) = 282,6 \text{ kN}$$

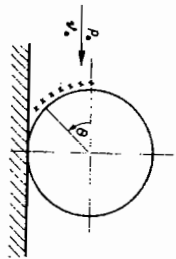
Efektivna snaga propelerera je

$$P = F \cdot v = 282,6 \cdot 4, 5 = 1271,7 \text{ kW}$$

6. Po dnu, preko duboke reke postavljen je cilindričan cevovod prečnika 150 mm. Brzina reke je 1,5 m/s. Da bi se odredile dinamičke sile koje deluju na cevovod, postavljen je na pod vazdušnog tunela cilindar prečnika 75 mm i meren je pritisak oko njega prema prikazanoj slici.

θ°	0°	45°	60°	90°	120°	150°	180°
p [Pa]	588	588	588	260	260	260	253
θ°	200°	220°	240°	260°	280°	320°	340°
p [Pa]	232	298	164	109	41	232	486

Svi pritisci su izmereni u odnosu na referentni pritisak. Pritisak neuzetne mirne struje $p_0 = 383 \text{ Pa}$. Koliki će biti ukupan otpor na cevovod preko reke?



Ako se ovi rezultati koriste za određivanje dinamičkih sila na podvodni betonski tunel prečnika 9 m u reki, sa brzinom vode $v = 3 \text{ m/s}$, koje se greške javljaju? Kinematske viskoznosti vazduha i vode su $1,33 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ i $1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Gustinu vazduha usvojiti $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$.

Rešenje.

Elementarna sila pritiska s kojom fluid deluje na cilindar je radijalno usmerena ka cilindru i iznosi

$$dF = (p - p_0) r d\theta$$

Sila otpora (horizontalna sila) je

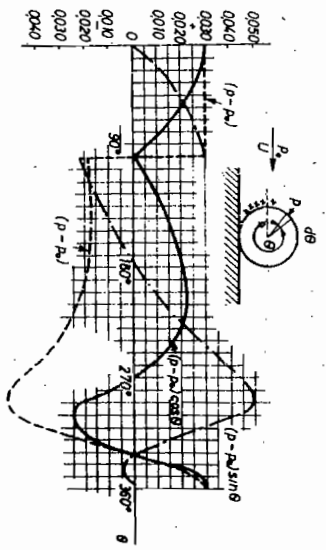
$$F_x = \int_0^{360} (p - p_0) r \cos \theta d\theta$$

Sila uzgona (vertikalna sila) je

$$F_y = \int_0^{360} (p - p_0) r \sin \theta d\theta$$

Vrednosti elementarnih sila su prikazane tabelarno i dijagramski

θ	0°	45°	90°	120°	150°	180°	200°
$p - p_0$	205	205	205	-357	-357	-357	-151
$(p - p_0) \cos \theta$	205	145	0	178	309	130	142
$(p - p_0) \sin \theta$	0	145	205	-309	-178	0	52
θ	220°	240°	260°	280°	300°	320°	340°
$p - p_0$	-185	-219	-274	-342	-335	-151	103
$(p - p_0) \cos \theta$	142	1095	-47	-59	167	116	96,7
$(p - p_0) \sin \theta$	119	190	270	337	290	97	-35



Primerbe: - Na nižoj prednjoj strani cilindra, zbog zaustavne zone, zadržava se konstantan pozitivan pritisak $(p - p_0)$ na celoj četvrtini cilindra.

- Diskontinuitet na grafikonu za $\theta = 90^\circ$ je posledica prekida fluidne struje ispod cilindra.

- Pošto ugao θ raste suprotno od smera ka-
zaljke na satu pozitivna vrednost $(p-p_0)\sin\theta$ daje vertikal-
no naviše usmerenu silu.

Iz grafikona je:

Površina ispod $(p-p_0)\cos\theta$ krive je 72 kvadrata
Površina ispod $(p-p_0)\sin\theta$ krive je 90 kvadrata
1 kvadrat je jednak $10^0 \cdot 34,2 \text{ Pa} = \frac{\pi}{18} 34,2 = 5,966 \text{ Pa}$.

Tako je

$$F_x = 77,5, 966 \cdot 0,075 = 34,4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$F_y = 90 \cdot 5,966 \cdot 0,075 = 40,23 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

i

Radi odredjivanja vrednosti F_x i F_y u vodenoj stru-
juji treba imati na umu da je dinamička sila po jedinici du-
zine dugačkog tela uvek proporcionalna $\rho v^2 R$ - suprotno sa
trodimenzijalnim telom gde je sila srazmerna sa $\rho v^2 R^2$.

U vazdušnom tunelu je

$$\rho v^2 R = 2 \rho d \cdot R = 2 \cdot 205 \cdot 0,0325 = 15,37 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\rho v^2 R = 1000 \cdot 1,5^2 \cdot 0,075 = 168,75 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

a u vodenoj struji

Tako sile otpora i uzgona F_x i F_y u struji vode su:

$$F_x = \frac{168,75}{15,37} \cdot 34,4 = 377,7 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$F_y = \frac{168,75}{15,37} \cdot 40,2 = 441,4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Prelaz sa vazdušnog tunela na vode-

nu struju predpostavlja da se raspored pritiska (takođe i ko-
eficijent otpora) ne menja. Ovo važi samo ako su Reynold-
sovi brojevi isti u oba slučaja. Za vazdušni tunel Reynold-
sov broj se nalazi iz dinamičkog pritiska

$$\frac{1}{2} \rho v^2 = 205 \quad ; \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot 205}{1,225}} = 18,29 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{18,29 \cdot 0,075}{1,33 \cdot 10^{-6}} = 1,03 \cdot 10^5$$

Za vodu struju Reynoldsov broj je

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{1,5 \cdot 0,15}{1,0 \cdot 10^{-6}} = 2,25 \cdot 10^5$$

Može se smatrati da su ove dve vrednosti približne te i ot-
pori u vodenoj struji realni; međutim, za betonski podvod-
ni tunel Reynoldsov broj je znatno veći

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{3 \cdot 9}{1,0 \cdot 10^{-6}} = 2,7 \cdot 10^7$$

Ova se vrednost od modela toliko razlikuje da je ekstrapola-
cija na veliki podvodni tunel vrlo neizvesna.

Za beskonačan cilindar u beskonačnoj struji, za
vrednost $Re = 3 \cdot 10^5$ dolazi do promene u rasporedu pritiska.

Cev u vodenoj struji i model u vazdušnom tunelu su ispod o-
ve kritične vrednosti Re broja, dok je Re za podvodni tunel
znatno iznad nje.

Zadaci.

1. Odrediti najveću težinu koju može da podnese
padobran prečnika 10 m, ako je maksimalna dozvoljena brzina
padanja $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kinematska viskoznost i gustina vazduha su:
 $\nu = 1,46 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$; $\rho = 1,22 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Rešenje.

$$G = 2,3 \text{ kN}$$

2. Koliki je udeo otpora trenja u ukupnom otporu
beskonačnog kružnog cilindra normalno postavljenog u fluidnu
struju za: a) $Re = 10^3$, b) $Re = 10$, c) $Re = 0,1$.

Rešenje.

$$\text{a) } 6,5\% \quad \text{b) } 26\% \quad \text{c) } 50\%$$

3. Kolika je snaga potrebna za kretanje jednog au-
tomobila površine poprečnog preseka 3 m^2 brzinom $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, ako
je koeficijent otpora 0,3. Automobil se kreće kroz miran vaz-
duh gustine $1,23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Rešenje.

$$P = 11,86 \text{ kW}$$

4. Automobilska antena predstavlja vertikalni kruž-
ni cilindar prečnika 9 mm i visine 970 mm. Kolika je potrebna

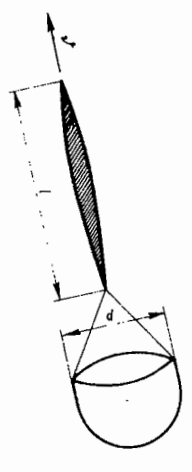
snaga da se antena kreće brzinom $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ kroz standardan vazduh kinematske viskoznosti $1,46 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

Rešenje.

$P = 109 \text{ W}$

5. Tanko, glatko avionsko krilo ($\lambda=3 \text{ m}$, $b=15 \text{ m}$) spušta se u mirnom vazduhu: ($v=1,46 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$) brzinom $190 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Radi ostvarenja dodatne sile otpora aktivira se padobran za kočenje. Odrediti prečnik padobrana da bi dodatna otporna sila bila jednaka otpornoj sili avionskog krila.

Koeficijent otpora za padobran je $C_D=1,33$.



Rešenje.
 $d=0,482 \text{ m}$

6. Odrediti frekvenciju naizmeničnih otkidanja vrtloga iza električnog kabla prečnika $12,7 \text{ mm}$ koji se nalazi u normalnoj vazdušnoj struji brzine $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. ($v=1,6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$).

Rešenje.

$f = 383 \text{ s}$

7. Odrediti brzinu sloboodnog pada kvarcne loptice ($\rho_r=2,65$) prečnika $25,4 \text{ mm}$ kroz ulje SAE 30 ($v=5,38 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$, $\rho=930 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$).

Rešenje.

$v = 1,91 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

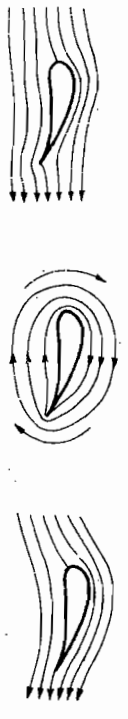
12.2.2. SILA UZGONA

Na kružni cilindar dužine l koji se okreće, horizontalna fluidna struja deluje vertikalnom silom -uzgonom-koja se određuje sa

$F_L = \rho \cdot v \cdot \Gamma$

gde je cirkulacije $\Gamma = \oint v_{\theta} dl$,

oko kružnog cilindra kao što je prikazano u poglavlju 6.

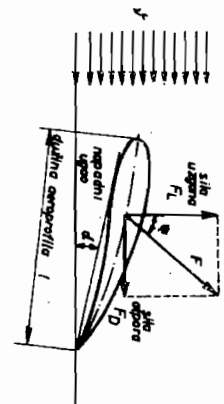


Aeroprofil. Mada se obrtni cilindar danas ne koristi za stvaranje uzgonske sile njegov analiza nam pomaže u shvatanju osnovnog principa pojave uzgonske sile kod aeroprofila. Uzgonska sila se obezbedjuje slaganjem cirkulacije sa jednolikom strujom, a oblik strujnica pri ovakvom opstrujavanju je prikazan na slici.

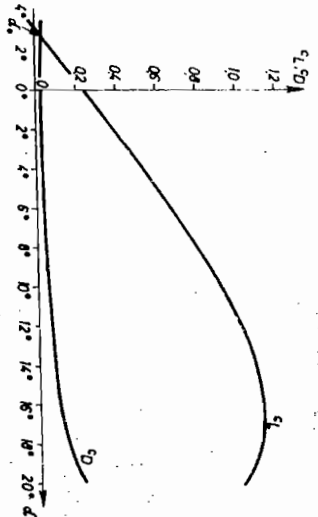
Prema definiciji B.S.I, aeroprofil je tako oblikovano telo da izazove aerodinamičku silu normalnu na njivo kretanje kroz fluid bez znatnog otpora. Ova sila se naziva uzgonskom F_L i zajedno sa otporom F_D određuju ukupnu rezultujuću silu \vec{F} s kojom fluid deluje na aeroprofil. Karakteristična dužina aeroprofila je označena sa l , njegov raspon sa b a noseća površina profila - karakteristična površina - sa $A=b \cdot l$.

Sile uzgona i otpora su određene sa

$F_L = \frac{1}{2} \rho v^2 C_L A$
 $F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 C_D A$

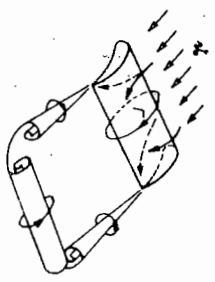


gde su C_L i C_D koeficijenti uzgona i otpora i isti su za sve slične modele aeroprofila pri istim napadnim uglovima. Na slici su prikazane karakteristične krive promene koeficijenta otpora



i uzgona sa napadnim uglom.

Indukovani otpor. Dok ne postoji strujanje oko aeroprofila cirkulacija se ne javlja. Kada kretanje počinje strujna slika je kao ona kada se profil nalazi u jednolikoj struji. Medjutim, pošto brzina fluida napušta donju stranu

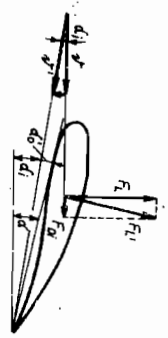


iza krajnje ivice većom brzinom od one sa gornje strane, javlja se diskontinuitet sa deformacijama koje se stabilizuju nistrujno od profila u vidu vrtloga pokazanih na slici. Početni vrtlog koji je nastao upočetku ovakvog opstrujavanja je suprotno orijentisan od cirkulacije oko aeroprofila tako da je ukupna cirkulacija nula. Prema Prantlu ovo je način za pojavu cirkulacije u realnom fluidu.

Opstrujavanje profila konačnog raspona izaziva indukovanu struju sa gornje i donje površine tj. formiranje krajnjih vrtloga. Pri stvarnom letu ovi vrtlozi izazivaju takvo smanjenje pritiska (i temperature) da se vrlo često može videti kondenzacioni ili parni trag i nekoliko kilometara posle prolaska aviona.

Zbog pada pritiska uzduž raspona do nule na krajevima, uzgon se smanjuje, što izaziva pojavu indukovano otpora koji povećava ukupni otpor krila. Raspored sile uzgona uzduž raspona ima oblik polovine elipse. Maksimalna sila uzgona na sredini raspona je veća od teorijske sile za beskonačan profil, pa se sila uzgona ne smanjuje u onoliko meri kako se to čini upočetku. Indukovani otpor F_{Di} se može opisati pojavom vertikalne komponente brzine koja efektivnu brzinu usmeruje naniže, tj, smanjuje se prividno napadni ugao kao što je prikazano na slici.

Iz ove analize sledi



$$F_D = F_{Do} + F_{Di}$$

gde su F_{Do} - sila otpora na beskonačnom profilu usled v

F_{Di} - indukovani otpor.

Takodje je

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_0'$$

$$C_D = C_{Do} + C_{Di}$$

Pošto je obično ugao α_1 , izazvan indukovanom silom, mali sledi

$$F_{L'} = F_L, \quad v' = v \quad i \quad F_{Di} = F_L \alpha_1 ;$$

i na osnovu eliptičkog rasporeda sile uzgona može se naći

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi b}$$

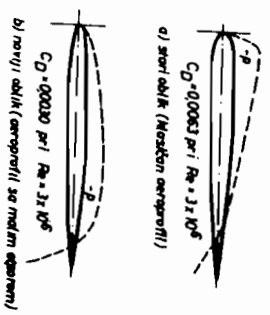
$$\alpha = \frac{C_L}{\pi b}$$

Gornja jednačina pokazuje da ukoliko je raspon krila veći i karakteristična dužina krila manja koeficijent indukovano otpora se smanjuje.

Potrebne promenljive C_{Di} , C_D , C_L u zavisnosti od napadnog ugla α obično se daju u dijagramu zvanom polara (v. dijagram 26).

Zatupljeni oblik aero-profila osigurava veliki uzgon pri malim brzinama i relativno malu otpornu silu. Medjutim, pri velikim brzinama otpor znatno raste, te je u današnje vreme izražena težnja ka smanjenju koeficijenta otpora, makar to za sobom povlačilo i smanjenje koeficijenta uzgona.

Kako je već bilo pokazano ranije, gradient brzine u blizini čvrste površine je mnogo manji u laminarnoj nego u



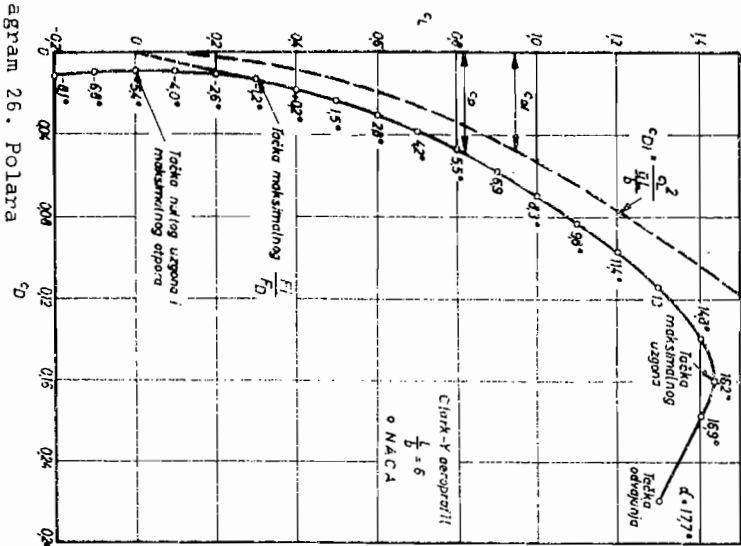


Diagram 26. Polara

turbulentnoj struji. laminarni granični sloj obezbeđuje manji otpor trenja a uslovljen je postepenom promenom pritiska duž površine. Na slici, na prethodnoj strani, prikazani su stariji i noviji tip aeroprofila; gde je uočljivo da se promena iz laminarnog u turbulentan granični sloj za stariji profil dešava na prednjem delu profila, a za noviji tip na zadnjem delu profila.

Primeri.

1. Pravougaoni profil dužine $k=0,3$ m i raspona $b=1,5$ m ispitivan je u vazdušnoj struji brzine $36 \frac{m}{s}$. Rezultujuća sila intenziteta 310 N dejstvuje pod uglom 40° prema vertikali tj. pravcu uzgona. Odrediti koeficijente uzgona i otpora za gustinu vazduha $\rho=1,23 \frac{kg}{m^3}$.

Rešenje.

Sile uzgona i otpora su

$$F_L = F \cos \beta = 310 \cdot \cos 40^\circ = 309,2 \text{ N}$$

$$F_D = F \sin \beta = 310 \cdot \sin 40^\circ = 21,6 \text{ N}$$

Koeficijenti c_L i c_D iznose

$$c_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho v^2 A} = \frac{309,2}{\frac{1}{2} \cdot 1,23 \cdot 36^2 \cdot 0,3 \cdot 1,5} = 0,862$$

$$c_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho v^2 A} = \frac{21,6}{\frac{1}{2} \cdot 1,23 \cdot 36^2 \cdot 0,3 \cdot 1,5} = 0,060$$

2. Koeficijent ukupnog otpora aviona težine mg i noseće površine krila A je dat sa

$$F_D = a + b c_L^2$$

gde su a i b konstante. Potrebno je odrediti formule za:

- a) najmanji otpor F_D pri horizontalnom letu, b) brzinu v_i pri kojoj je otpor najmanji i c) snagu P_i potrebnu za savlađivanje najmanjeg otpora i brzine v_i .

Rešenje.

a) Koeficijenti uzgona i otpora se mogu izraziti

$$c_L = \frac{mg}{\frac{1}{2} \rho v^2 A} = \frac{mg}{\rho v^2 A}$$

$$c_D = a + b \left(\frac{mg}{\rho v^2 A} \right)^2$$

Sila otpora je

$$F_D = \rho A a + b \frac{(mg)^2}{\rho A} = F_D + F_{Di}$$

gde su: F_D - sila otpora na beskonačnom profilu,

F_{Di} - indukovani otpor.

Tako je

$$\frac{dF_D}{dP_D} = a + \frac{b(mg)^2}{\rho v^2 A}$$

$$\frac{d^2 F_D}{dP_D^2} = \frac{2b(mg)^2}{\rho v^2 A}$$

Poslednja jednakost je pozitivna za sve vrednosti P_D ; tako

se minimalni otpor javlja za

$$\frac{dF_D}{dP_d} = 0 ; \text{ tj. kada je}$$

$$P_d^2 = \frac{b}{a} \left(\frac{mg}{A} \right)^2 = p^2 d_1,$$

i

$$F_{D_1} = aA \frac{mg}{A} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{A} \frac{A}{mg} \sqrt{\frac{a}{b}} = mg \sqrt{ab} + mg \sqrt{ab} = 2mg \sqrt{ab}$$

Ovo pokazuje da se za minimalni otpor izjednačuju sila otpora za beskonačni profil sa indukovanim otporom.

b) Brzina za minimalni otpor se određuje iz dinamičkog pritiska

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_{d_1} = \frac{mg}{A} \sqrt{\frac{b}{a}},$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A} \sqrt{\frac{b}{a}}}$$

tj.

Kada je otpor minimalan odnos $\frac{mg}{F_{D_1}}$ je maksimalan tj. pri konstantnoj težini mg ostvaruje se maksimalan odnos $\frac{F_L}{F_D}$ pri brzini za minimalni otpor v_1 .

c) Potrebna snaga za savladjivanje otpora pri brzini v_1 je

$$P_1 = F_{D_1} \cdot v_1 = 2mg \sqrt{ab} \sqrt{\frac{2mg}{\rho A} \sqrt{\frac{b}{a}}} = \sqrt{(2mg)^3 \frac{ab^3}{\rho A}}$$

3. Avion mase 10 t ima noseću površinu od 150 m² i koeficijent otpora (računat prema nosećoj površini)

$$C_D = 0,0293 + 0,0398 C_L^2$$

Smatrajući da je gustina vazduha $\rho = 1,23 \frac{kg}{m^3}$ i pretpostavljajući horizontalan let izračunati: a) minimalni otpor, odgovarajuću brzinu leta i potrebnu snagu, b) ukupni otpor pri 320 $\frac{km}{h}$ i potrebnu snagu i c) brzinu, otpor i snagu pri minimalnoj snazi

Rešenje.

a) Prema prethodnom primeru minimalni otpor je

$$F_{D_1} = 2mg \sqrt{ab} = 2 \cdot 10000 \cdot 9,81 \sqrt{0,0293 \cdot 0,0398} = 6700 \text{ N}$$

Za minimalni otpor je

tj.

$$v_1 = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A} \sqrt{\frac{b}{a}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10000 \cdot 9,81 \sqrt{0,0398}}{1,23 \cdot 150}} = \sqrt{\frac{0,0398}{0,0293}} = 1,26,7 \frac{km}{h}$$

Potrebna snaga za savladjivanje minimalnog otpora je

$$P_1 = F_{D_1} \cdot v_1 = 6700 \frac{126,7}{3,6} = 235,8 \text{ kW}$$

b) Otpor pri bilo kojoj brzini v je

$$F_D = a \rho P_d + \frac{b(mg)^2}{A} \frac{1}{P_d} = \left(\frac{F_{D_{01}}}{P_d} \right) P_d + (F_{D_{11}} P_{d_1}) \frac{1}{P_d} = F_{D_{01}} \left(\frac{v}{v_1} \right)^2 + F_{D_{11}} \left(\frac{v_1}{v} \right)^2$$

gde su sa $F_{D_{01}}$ i $F_{D_{11}}$ označeni minimalni otpor na beskonačnom profilu i minimalni indukovani otpor.

Ali kako je

$$F_{D_{01}} = F_{D_{11}} = \frac{F_{D_1}}{2} = mg \sqrt{ab}$$

otpor pri brzini leta $v = 320 \frac{km}{h}$ iznosi

$$F_D = \frac{F_{D_1}}{2} \left[\left(\frac{v}{v_1} \right)^2 + \left(\frac{v_1}{v} \right)^2 \right] = \frac{6700}{2} \left[\left(\frac{320}{126,7} \right)^2 + \left(\frac{126,7}{320} \right)^2 \right] = 21894 \text{ N}$$

a snaga potrebna za let pri brzini 320 $\frac{km}{h}$ je

$$P = F_D \cdot v = 21894 \frac{320}{3,6} = 1946 \text{ kW}$$

c) Minimalna snaga se određuje iz

$$P = F_D \cdot v = \frac{F_{D_1}}{2} \left[\frac{v^3}{v_1^2} + \frac{v_1^2}{v} \right]$$

$$\frac{dP}{dv} = \frac{F_{D_1}}{2} \left[\frac{3v^2}{v_1^2} - \frac{v_1^2}{v^2} \right] = 0,$$

$$3v^3 = v_1^3$$

odakle je

Snaga je minimalna kada je

$$v = \frac{v_1}{\sqrt[3]{3}} = 0,76 v_1 = 0,76 \cdot 126,7 = 96,3 \frac{km}{h}$$

Otpor, kada je snaga minimalna, je

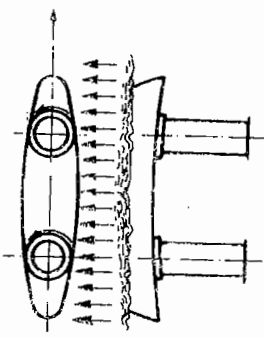
$$F_D = \frac{\rho D^3}{2} \left[\left(\frac{V_1}{V} \right)^2 + \left(\frac{V_2}{V} \right)^2 \right] = \frac{6700}{2} \left[\left(\frac{96,3}{126,7} \right)^2 + \left(\frac{126,7}{96,3} \right)^2 \right] = 7734 \text{ N}$$

Minimalna snaga je

$$P_{\min} = F_D \cdot v = 7734 \frac{96,3}{3,6} = 206,9 \text{ kW}$$

Zadaci.

1. Odrediti ukupnu uzgonsku silu koja se ostvaruje obrtanjem dva Fletnerova rotora ugaonom brzinom $\omega = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ i dejstvom bočnog vetra jačine $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Prečnik rotora je 5 m, a dužina 15 m. Račun izvesti za normalne atmosfereke uslove.



Rešenje.

$$F_L = 57,7 \text{ kN}$$

2. Odrediti snagu motora potrebnu za horizontalan let aviona brzinom $500 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, ako je ukupna noseća površina krila 60 m^2 , a težina aviona po jedinici površine krila je $2000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Koefficient korisnog dejstva propelera je $\eta = 0,75$, a odnos sile uzgona i sile otpora je

$$\frac{F_L}{F_D} = 10$$

Rešenje.

$$P = 2222 \text{ kW}$$

3. Mlazni avion težak 27000 N i sa nosećom površinom krila $18,5 \text{ m}^2$, leti brzinom $965 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ pri snazi motora od 10000 KS. Pretpostavljajući $p_a = 73000 \text{ Pa}$, $t = -20^\circ\text{C}$ i da se 65% snage motora iskoristi za savladjivanje otpora, odrediti koefficient uzgona c_L i koefficient otpora c_D ($R = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$).

Rešenje.

$$c_L = 0,0433 ; c_D = 0,0286$$

4. Za aeroprofil Clark-Y odnosa $\frac{b}{x} = 6$ (v. prethodni dijagram), odrediti maksimalnu uzgonsku silu kada se kreće kroz miran vazduh na morskoj površini brzinom $320 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ($t = 15^\circ\text{C}$). Kolika je snaga potrebna za savladjivanje otpora pri navedenim uslovima? Karakteristična dužina profila $l = 0,3 \text{ m}$.

Rešenje.

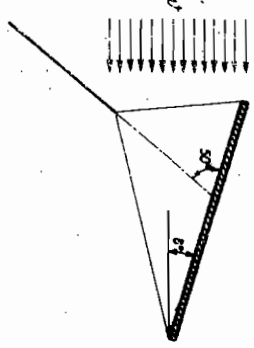
$$P = 37,2 \text{ kW}$$

5. Za prethodni problem odrediti uzgon i otpor kada je odnos $\frac{F_L}{F_D}$ maksimalan. Pri kolikom napadnom uglu se to dešava?

Rešenje.

$$F_L = 836,3 \text{ N} ; F_D = 33,97 \text{ N} ; \alpha = -1^\circ$$

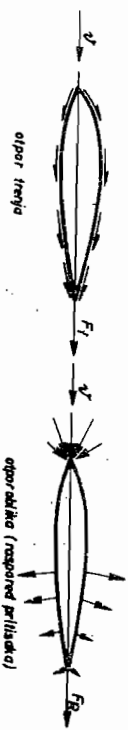
6. Zmaj težine 12 N i noseće površine $0,7 \text{ m}^2$ lebdi u horizontalnoj struji vazduha brzine $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ pri uglu od 8° u odnosu na horizont. Koliki je koefficient uzgona i otpora ako je održava u vazduhu 30 N , kada je kanap pod uglom 50° u odnosu na površinu zmaja. Vazдушna struja je temperature 15°C i statičkog pritiska 760 mmHg.



Rešenje.

$$c_D = 0,130 ; c_L = 0,187$$

12.2.3. OTPOR BRODA



Fruđ je omogućio proračun ukupnog otpora broda (teškoća je zbog toga što se istovremeno ne mogu ostvariti

jednakosti Re i Fr brojeva) deobom na tri dela između kojih je, po njegovom tvrdjenju, mala zavisnost

$$F_D = F_t + F_f + F_k$$

gde su: F_f - otpor trenja,
 F_t - otpor talasa,
 F_k - otpor vrtloga na krajevima broda.

Poslednja dva dela zavise od rasporeda pritiska oko tela i kao u aerodinamici, mogu se objediniti u otpor oblika F_R . Dovoljan kriterijum sličnosti otpora oblika je jednakost Fr brojeva. Tako je ukupan otpor

$$F_D = F_t + F_R$$

Ispitivanje otpora trenja modela i brodova su pokazala da otpor trenja prati zakon

$$F_t = \lambda A v^{1,825}, \quad [N]$$

gde su: A [m²] ukupna ovlažena površina, a v [m/s] brzina broda, a koeficijent trenja λ je dat tablicom 23.

λ	15	30	90	150	210	275
λ	1,528	1,465	1,353	1,396	1,382	1,369

Tablica 23.

Otpor trenja je moguće odrediti i na način prikazan u drugom primeru.

Primeri.

1. Otpor medela broda dužine 4,6 m i 2,0 m² okvažene površine je 42 N pri brzini od 2,75 m/s u morskoj vodi. Odrediti snagu potiska sličnog prekookeanskog broda dužine 165,6 m. Koeficijenti trenja za model i brod se mogu usvojiti 1,51 i 1,37.

Rešenje.

Otpor oblika modela je

$$F_{Rm} = F_{Dm} - \lambda_m A_m v_m^{1,825} = 42 - 1,51 \cdot 2,2 \cdot 2,75^{1,825} = 22,87 \text{ N.}$$

Za iste Fr je

$$\frac{v_m^2}{g \lambda_m} = \frac{v^2}{g \lambda},$$

odakle sledi

$$v = v_m \sqrt{\frac{\lambda_m}{\lambda}} = 2,75 \sqrt{\frac{165,6}{4,6}} = 16,5 \frac{m}{s}.$$

Količnik otpora oblika je

$$\frac{F_R}{F_{Rm}} = \frac{\rho v^2 A}{\rho v_m^2 A_m} = \left(\frac{v}{v_m}\right)^3 = 36^3,$$

te je

$$F_R = 36^3 \cdot 22,87 = 1,067 \cdot 10^6 \text{ N.}$$

Otpor trenja broda je

$$F_t = \lambda A v^{1,825} = 1,37 \cdot 36^2 \cdot 16,5^{1,825} = 2,96 \cdot 10^5 \text{ N.}$$

Ukupan otpor broda je

$$F_D = F_t + F_R = 1,067 \cdot 10^6 + 2,96 \cdot 10^5 = 1,363 \cdot 10^6 \text{ N.}$$

Potrebna snaga potiska je

$$P = F \cdot v = 1,363 \cdot 10^6 \cdot 16,5 = 2,25 \cdot 10^7 \text{ J} = 30560 \text{ KS.}$$

2. Brodski model dug $\lambda_m = 1,5$ m sa dubinom gaženja $t_m = 15$ cm vuče se kroz bazen sa vodom ($v = 1,3 \cdot 10^{-6} \frac{m}{s}$) brzinom $v_m = 0,3 \frac{m}{s}$. Pretpostavljajući okvaženu površinu modela kao dve ravne ploče dimenzija (1,5 · 0,15 m²) proceniti otpor usled trenja i debljinu laminarnog sloja na zadnjem delu modela ako je granični sloj maniraran i ako je granični sloj turbulentan. Za izmereni ukupni otpor modela $F_{Dm} = 0,177$ N proceniti ukupan otpor prototipa ako je razmera sličnosti 1:64.

Rešenje.

Reynoldsov broj za model određuje koeficijente trenja glatke ravne ploče za laminarni i turbulentan granični sloj (v. dijagram 22.).

$$Re_m = \frac{v_m^0 m}{\nu} = \frac{0,3 \cdot 1,5}{1,3 \cdot 10^{-6}} = 3,46 \cdot 10^5$$

$c_{fm} = 0,0023$ za laminaran granični sloj,

$c_{fm} = 0,0053$ za turbulentan granični sloj.

Sila trenja modela za laminaran granični sloj je

$$F_{fm} = \frac{1}{2} \rho v_m^2 c_{fm} 2(\ell \cdot t) = 500 \cdot 0,3^2 \cdot 0,0023 \cdot 2(1,5 \cdot 0,15) = 0,0465 \text{ N};$$

a za turbulentan

$$F_{fm} = 500 \cdot 0,3^2 \cdot 0,0053 \cdot 2(1,5 \cdot 0,15) = 0,1073 \text{ N}.$$

Debljina graničnog sloja na kraju modela za laminaran sloj iznosi

$$\delta_m = \ell_m \frac{5,2}{\sqrt{Re_m}} = 1,5 \frac{5,2}{\sqrt{3,46 \cdot 10^5}} = 0,0133 \text{ m};$$

a za turbulentan granični sloj je

$$\delta_m = \ell_m \frac{0,38}{Re_m^{0,42}} = 1,5 \frac{0,38}{(3,46 \cdot 10^5)^{0,42}} = 0,0445 \text{ m}.$$

Pod pretpostavkom da se na modelu formira turbulentan granični sloj otpor oblika modela je

$$F_{Rm} = 0,177 - 0,1073 = 0,0697 \text{ N}.$$

Jednakost Fr brojeva je uslov za sličnost otpora oblika modela i prototipa, pa je brzina kojom se kreće prototip

$$\frac{v_m^2}{g \ell_m} = \frac{v^2}{g \ell} \quad ; \quad v = v_m \sqrt{\frac{\ell}{\ell_m}} = 0,3 \cdot 8 = 2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad ;$$

odnosno otpor oblika broda

$$F_R = \frac{1}{2} \rho v^2 c_{RA} A_R,$$

(A_R karakteristična površina - poprečni presek - broda)

gde se koeficijent otpora oblika određuje iz

$$c_R = \frac{F_{Rm}}{\frac{1}{2} \rho v_m^2 \cdot A_R} = \frac{F_{Rm} \cdot 64^2}{\frac{1}{2} \rho v^2 \cdot A_R}$$

te je

$$F_R = \left(\frac{v}{v_m}\right)^2 64^2 \cdot F_{Rm} = 64^2 \cdot 0,0697 = 18271 \text{ N}.$$

Otpor trenja za brod je određen Re brojem

$$Re = \frac{v \cdot \ell}{\nu} = \frac{2,4 \cdot 1,5 \cdot 64}{1,3 \cdot 10^{-6}} = 1,77 \cdot 10^8$$

što iz dijagrama za glatku ravnu ploču daje

$$c_f = 0,0017 \quad ;$$

odnosno

$$F_f = \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot c_f \cdot 2 \cdot (\ell \cdot t) = 500 \cdot 2,4^2 \cdot 0,0017 \cdot 2 \cdot (1,5 \cdot 0,15) 64^2 = 9024 \text{ N}.$$

Ukupan otpor broda je

$$F_D = F_f + F_R = 9024 + 18271 = 27295 \text{ N}$$

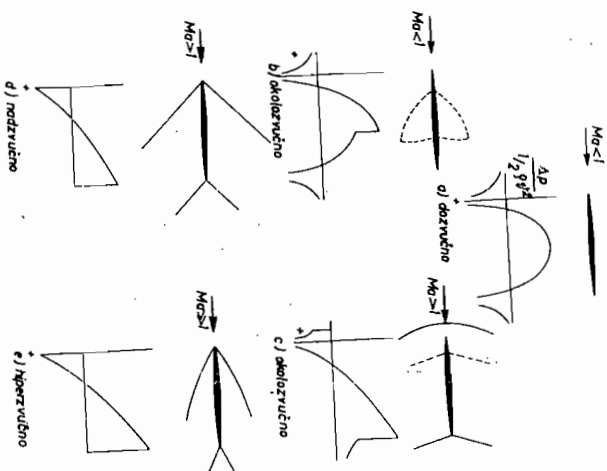
12.2.4. OTPOR U KOMPRESIBILNOJ STRUJUI

Kompresibilni efekti su značajni kod sledećih vrsta strujanja: a) dozvučno, b) okoizozvučno, c) nadzvučno i d) hiperzvučno.

Karakteristični rasporedi pritiska i udarni talasi pri opstrujavanju kompresibilnog fluida oko tela su prikazani na dijagramu 27.

Koeficijenti otpora c_D u funkciji Ma broja, za neke karakteristične objekte (projektille), su prikazani na dijagramu 28. Pri malim vrednostima Ma c_D se smanjuje, pošto je Re u porastu. Sa prelaskom u okoizozvučnu oblast c_D raste ubrzano usred kombinovanih efekata povećanih udarnih talasa i širenja zone odvajanja. Za zadržana tela c_D konstantno raste sa porastom Ma , dok za tela sa zaobljenim prednjim krajem c_D dostiže maksimum, smanjuje se, a zatim zadržava konstantnu vrednost sa daljim povećanjem Ma . Ovo se dešava usled promene oblika udarnih talasa, ustaljenosti zone odvajanja i graničnog minimalnog pritiska (apsolutni

vakuum) na nizstrujnoj strani tela.



Diјаgram 27.

Zadatak.

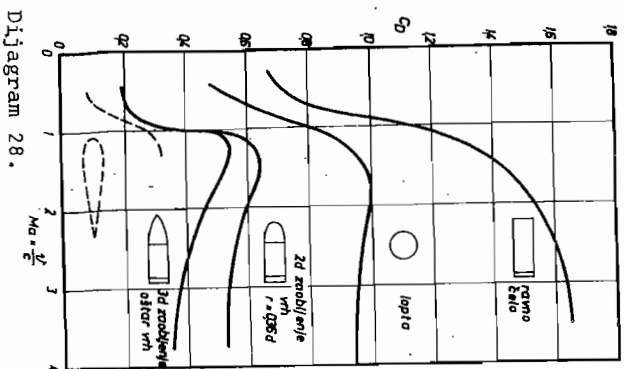
Sva tela prikazana na diјаgramu 28. (promena koeficijenta otpora sa Ma brojem) kreću se kroz miran vazduh temperature 27°C i pritiska 101325 Pa . Ako je prečnik svakog od njih 150 mm , a kreću se brzinom $1450 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, odrediti silu otpora.

Rešenje.

($Ma=1,16$), 2107 N ;

1449 N ; 1062 N ;

944 N ; 522 N



Diјаgram 28.

12.3. KONTROLNA PITANJA

- Opšta jednačina za koeficijent otpora je
 a) $C_D = \frac{F_D}{A}$; b) $C_D = \frac{A \rho v^2}{2 F_D}$; c) $C_D = \frac{F_D}{\rho v^2 A}$;
 d) $C_D = \frac{\rho v^2}{2A}$; e) $C_D = \frac{F_D}{\rho v^2 A}$
- Šta je karakteristična površina pri određivanju otpora trenja?
- Ima li razlike u definicijama karakterističnih površina prilikom određivanja otpora oblika i otpora trenja?
- Da li koeficijent otpora trenja zavisi od relativne hrapavosti ravne ploče?
- Sila uzgona na telo potopljeno u fluidnoj struji je:
 a) izazvana potisnom silom,
 b) uvek suprotno orijentisana od smera zemljine teže,
 c) jednaka rezultujućoj sili na telo,
 d) komponenta dinamičke fluidne sile u pravcu normale dolazeće brzine,
 e) komponenta dinamičke sile koja deluje na telo paralelno brzini neuznemirene fluidne struje.
- Koeficijent otpora za ravnu ploču, paralelno postavljeno u fluidnoj struji je:
 a) $\frac{2F_D}{\rho v^2 l b}$; b) $\frac{\rho v^2 l}{F_D}$; c) $\frac{\rho v^2 l}{2F_D}$; d) $\frac{F_D}{\rho v^2 l b}$
- Talasi:
 a) se javljaju u oblastima visokih pritisaka,
 b) su izazvani usled trenja fluida o površinu,
 c) se uvek javljaju kada su izraženi deformativski otpori,
 d) javljaju se uvek posle tačke odvajanja,
 e) nijedan od ovih odgovora.

8. Otpor oblika je rezultat:

- a) trenja,
- b) deformacijskih promena u struji,
- c) prekida potencijalne struje ispred zaustavne tačke,

- d) pojave talasa,
- e) nijedan od ovih odgovora.

9. Tela sa zaobljenim vrhom i dugačkim uzanim nastavkom su najpogodnija za:

- a) laminarnu struju,
- b) turbulentnu dozvučnu struju,
- c) nadzvučnu struju,
- d) struju pri brzini zvuka,
- e) nijedan od ovih odgovora.

10. Iznenađna promena mesta tačke odvajanja pri strujanju oko lopte se dešava na približnoj vrednosti Re broja:

- a) 1 ; b) 300 ; c) 30000 ; d) 3000000 ;
- e) nijedan od ovih odgovora.

11. Uticaj kompresibilnosti na silu otpora:

- a) je u naglom porastu kada se brzina strujanja približuje brzini zvuka,
- b) je smanjen u blizini zvučne brzine,
- c) izaziva asimptotsko približavanje otpora konstantnoj vrednosti za velike Mahove brojeve,
- d) izaziva povećanje sile otpora brže od kvadrata brzine pri velikim Mahovim brojevima,
- e) smanjuje se kroz ceo raspon strujne brzine.

12. Brzina slobodnog pada male loptice u viskoznom fluidu se menja sa:

- a) prvim stepenom prečnika,
- b) inverzno sa viškoznošću fluida,
- c) inverzno sa prečnikom,
- d) inverzno sa kvadratom prečnika,
- e) kvadratom razlike gustina čvrstog tela i fluida,
- f) nijedan od ovih odgovora.

13. Struhalov broj (Sn) je kriterijum sličnosti za:

- a) kompresibilan fluid u polju zemljine teže,
- b) stacionarno kretanje viskoznog fluida u polju zemljine teže,
- c) periodične promene u fluidnoj struji,
- d) poredjenje temperaturnskih polja.

14. Sila uzgona se pri opstrujavanju cilindra javlja ako:

- a) postoji početni vrtlog,
- b) postoji cirkulacija oko cilindra,
- c) je brzina iz beskonačnosti jednolika i normalna na cilindar,
- e) nijedan od ovih odgovora.

LITERATURA

1. N. Obradović, K. Voronjec: Mehanika fluida, "Gradjevinska knjiga" Beograd 1960.
2. Zbirka zadatka iz mehanike fluida, "Naučna knjiga, Beograd 1965.
3. V. Saljnikov: Dinamika viskoznoeg nestišljivog fluida, Beograd 1965.
4. K. Voronjec: Dinamika gasova, Beograd 1969.
5. J. K. Venard: Elementary Fluid Mechanics, 4th edition, John Wiley 1961.
6. Irving H. Shames: Mechanics of Fluids, Mc Graw-Hill Company 1962.
7. Norris L. Albertson, James R. Barton, Daril B. Simons: Fluid Mechanics for Engineers, Prentice-Hall 1960.
8. Ranaid V. Giles: Theory and Problems of Hydraulics and Fluid Mechanics, Shaun Publishing Co New York
9. W. F. Hughes, J. A. Brighton: Theory and Problems of Fluid Dynamics, Shaun Publishing Co New York
10. Spornik zadać po mašinstroitelnoj gidravlike, pod redakcijej J. J. Kukuljevskogo i L. G. Podvidza "Vaš, Moskva, 1972.
11. I. L. Povh: Tehničkaskaja gidromehanika, "Mašinstroenije" Moskva 1954.
12. V. I. Dmitrovskij: Gidromehanika, "Morskoj transport" Moskva 1962.
13. V. S. Jablonskij, I. A. Isaev: Spornik zadać i upražnenij po tehničkaskoj gidromehanike, F. M. Moskva 1963.
14. Zadaćnik po gidravlike, G. E. I. Moskva 1956.
15. J. R. D. Francis, D. Minton: Problems in Hydraulics and Fluid Mechanics, E. A. London 1964.
16. J. Douglas: Solution of problems in Fluid Mechanics, Part I, II; Pitman London
17. H. W. King, C. O. Wisler, J. G. Woodburn: Hydraulics, J. Wiley 1948.
18. A. C. Walslaw, D. A. Jonson: Mechanics of Fluids, Lomans London 1962.
19. L. Prandtl: The essentials of Fluid Dynamics, Blackie London 1962.
20. R. Binder: Fluid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood cliffs 1962.
21. N. F. Koćin, I. A. Kibelj, N. V. Roze: Teoretičkaskaja gidromehanika, F. M. Moskva 1963.
22. P. G. Kiselev: Gidravlika, GEI Moskva 1963.
23. V. A. Bazakua: Meždunarodnaja sistema edinic, Har'kov 1966.
24. V. B. Bajdakov, L. N. Ivanov: Aeromehanika letatel'njih apparatov, "Mašinstroenije" Moskva 1965.
25. Nenad Radošević: Prirućnik za hemičare i tehnologe, "Tehnička knjiga" Beograd 1962.
26. E. Neunab: Praktische Strömungslehre, VEB Berlin 1967.
27. B. Eck: Technische Strömungslehre, Fünfte Auflage, Springer verlag Berlin
28. D. Rašković: Kinematika, "Naučna knjiga" Beograd.
29. Meščerski: Zbirka rešenih zadatka iz mehanike.
30. S. W. Yuan: Foundation of Fluid Mechanics, Prentice Hall London 1970.
31. W. J. Duncan: Mechanics of Fluids, Arnold LTD London 1970.
32. A. D. Altul: Gidravličeskie soprotivlenija "Nedra" Moskva, 1970.
33. P. S. Barna: Fluid Mechanics for Engineers, Butterworths, London, 1971.
34. Blaum /v. Marnitz: Die Schwimmbagger, Zweiter Band, Springer - Verlag, Berlin, 1969.
35. K. J. Brantckart: Introduction into the Fundamentals of Fluid Mechanics, Wiley and Sons, New York, 1961.
36. P. N. Kamenov: Otoplenie i ventilacija, Čast II Ventilacija, Moskva, 1966.
37. B. Nekrasov: Hydraulics, Mir Publishers, Moscow, 1969.
38. V. L. Streeter: Fluid Mechanics, McGraw - Hill Book Company, Inc. New York, 1958.
39. L. M. Miln-Tomson: Teoretičkaskaja gidrodinamika, Izdatelstvo "Mir", Moskva, 1964.
40. F. Chorlton: Textbook of fluid dynamics, London, 1967.
41. D. Mitrinović: Kompleksna analiza "Gradjevinska knjiga" Beograd, 1967.

