Ivan Slapničar i Marko Matić

MATEMATIKA 2

Radna verzija

`http://www.fesb.hr/mat2`

Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje
Split, 2003.

Ova skripta nastala su na osnovi suradnje Ministarstva znanosti i tehnologije Republike Hrvatske i Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu na I-projektu Ministarstva "Matematika 2 – digitalni udžbenik s interaktivnim animacijama i interaktivnom provjerom znanja" (`http://www.fesb.hr/mat2`).

Sadržaj

1 NEODREĐENI INTEGRAL **7**

1.1 Definicija i osnovna svojstva 8

1.1.1 Tablica osnovnih integrala 12

1.2 Metode supstitucije 13

1.3 Metoda parcijalne integracije 16

1.3.1 Rekurzivne formule 18

1.4 Integriranje racionalnih funkcija 19

1.4.1 Primjer 22

1.5 Racionalne funkcije trigonometrijskih funkcija 24

1.5.1 Hiperbolne funkcije 27

1.6 Integriranje nekih iracionalnih funkcija 29

1.6.1 Metoda neodređenih koeficijenata 30

1.6.2 Binomni integral 32

1.7 Integriranje reda funkcija 33

1.8 Slobodan pad uz otpor zraka 38

2 ODREĐENI INTEGRAL **41**

2.1 Definicija i osnovna svojstva 41

2.2 Newton-Leibnitzova formula 46

2.3 Supstitucija i parcijalna integracija 47

2.4 Teoremi o određenom integralu 48

2.5 Nepravi integral 51

2.5.1 Kriteriji konvergencije 54

2.6 Primjene određenog integrala 56

2.6.1 Površina ravninskog lika 56

2.6.2 Duljina luka ravninske krivulje 63

2.6.3 Volumen rotacionog tijela 67

2.6.4 Oplošje rotacionog tijela 69

2.7 Numeričko integriranje 71

2.7.1 Eliptički integrali 71

2.7.2 Trapezna formula 72

2.7.3 Simpsonova formula 74

2.7.4 Richardsonova ekstrapolacija 76
2.7.5 Programi 77

3 FUNKCIJE VIŠE VARIJABLI 79
3.1 Definicija 79
3.2 Limes 83
3.3 Neprekidnost 87
3.4 Plohe drugog reda 88
3.4.1 Eliptički paraboloid 90
3.4.2 Hiperbolički paraboloid 93
3.4.3 Hiperboloid 93
3.4.4 Stožac 95
3.4.5 Cilindri 96
3.4.6 Neke zanimljive plohe 96
3.4.7 Presjek ploha 99
3.5 Parcijalne derivacije 100
3.6 Totalni diferencijal 103
3.7 Tangencijalna ravnina 106
3.8 Parcijalne derivacije kompozicije funkcija 110
3.9 Totalni diferencijal višeg reda 111
3.9.1 Taylorova formula 112
3.10 Ekstremi funkcija više varijabla 114
3.11 Implicitno zadane funkcije 122
3.12 Problem vezanog ekstrema 133

4 VIŠESTRUKI INTEGRALI 141

5 VEKTORSKA ANALIZA 143

6 KRIVULJNI I PLOŠNI INTEGRALI 145

Indeks 145

Popis slika

1.1 Primitivna funkcija 10
1.2 Slobodan pad uz otpor zraka za $m = k$ 39

2.1 Gornja suma 43
2.2 Donja suma 44
2.3 Rastav integrala na djelove 44
2.4 Dovoljan uvjet integrabilnosti 45
2.5 Primjena Newton-Leibnitzove formule 47
2.6 Primitivna funkcija kao određeni integral 49
2.7 Teorem srednje vrijednosti 50
2.8 Nepravi integral 52
2.9 Konvergentna gornja suma nepravog integrala 53
2.10 Poredbeni kriterij za određeni integral 55
2.11 Apsolutna konvergencija nepravog integrala 56
2.12 Površina ravninskog lika i element površine 57
2.13 Površina ravninskog lika I 57
2.14 Površina ravninskog lika II 58
2.15 Površina elipse 59
2.16 Površina ispod jednog luka cikloide 60
2.17 Polarni koordinatni sustav 61
2.18 Element površine u polarnim koordinatama 62
2.19 Površina kruga u polarnim koordinatama 63
2.20 Arhimedova spirala $r = a\,\varphi$ 64
2.21 Duljina luka ravninske krivulje i element duljine 65
2.22 Volumen rotacionog tijela i element volumena 67
2.23 Oplošje rotacionog tijela i element oplošja 70
2.24 Trapezna formula 73
2.25 Simpsonova formula 75

3.1 80
3.2 81
3.3 82
3.4 83

3.5 84
3.6 85
3.7 86
3.8 87
3.9 88
3.10 89
3.11 Elipsoid $x^2/36 + y^2/16 + z^2/4 = 1$ 90
3.12 Paraboloid $z = x^2/4 + y^2$ 91
3.13 (A) Nivo plohe i (B) presjeci paralelni s yz-ravninom za paraboloid $z = x^2/4 + y^2$. 91
3.14 Pomaknuti paraboloid $z - 5 = (x - 3)^2 + 4(y + 2)^2$ 92
3.15 Polegnuti paraboloid $-x = y^2 + z^2$ 92
3.16 Hiperbolički paraboloid $z = x^2 - y^2$ 93
3.17 Nivo plohe za $z = x^2 - y^2$. 94
3.18 (A) Jednokrilni i (B) dvokrilni hiperboloid za $a = b = c = 1$. 94
3.19 Stožac $z^2 = x^2 + y^2$ 95
3.20 (A) $(x + 2)^2 + y^2/4 = 1$ i (B) $x^2 - y^2 = 1$. 96
3.21 Parabolički cilindar $z = y^2$ 97
3.22 $(x^2y)/(x^2 + y^2)$ 97
3.23 $(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ 98
3.24 $\sin x \sin y$ 98
3.25 $\exp(\sin(x/y))$ 99
3.26 Presjek ploha. 100
3.27 106
3.28 107
3.29 108
3.30 109
3.31 116
3.32 117
3.33 117
3.34 124
3.35 125
3.36 125
3.37 127
3.38 128
3.39 128
3.40 132
3.41 134
3.42 139
3.43 140

Popis tablica

1.

NEODREĐENI INTEGRAL

1.1 Definicija i osnovna svojstva **8**
1.1.1 Tablica osnovnih integrala 12
1.2 Metode supstitucije **13**
1.3 Metoda parcijalne integracije **16**
1.3.1 Rekurzivne formule 18
1.4 Integriranje racionalnih funkcija **19**
1.4.1 Primjer 22
1.5 Racionalne funkcije trigonometrijskih funkcija **24**
1.5.1 Hiperbolne funkcije 27
1.6 Integriranje nekih iracionalnih funkcija **29**
1.6.1 Metoda neodređenih koeficijenata 30
1.6.2 Binomni integral 32
1.7 Integriranje reda funkcija **33**
1.8 Slobodan pad uz otpor zraka **38**

Ovo poglavlje bavi se nalaženjem neodređenih integrala, odnosno anti-derivacija. Prije formalne definicije integrala, neformalno ćemo opisati osnovnu ideju. Anti-derivacija zadane funkcije je zapravo funkcija čije je derivacija jednaka zadanoj funkciji. Na primjer, kako je $(\sin x)' = \cos x$, to je anti-derivacija funkcije $\cos x$ jednaka $\sin x$. Međutim, kako je derivacija konstante jednaka nuli, to je i funkcija $\sin x + C$ također anti-derivacija funkcije $\cos x$ za svaku konstantu C. Integral zadane funkcije je skup svih njenih anti-derivacija, što zapisujemo kao

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C.$$

Zaključujemo da čitajući tablicu elementarnih derivacija [M1, §5.1.5] zdesna na lijevo, dobijemo integrale nekih funkcija. Tako je, na primjer,

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C.$$

Međutim, integriranje je složeniji postupak od deriviranja. Također, integral elementarne funkcije nije uvijek elementarna funkcija. Naime, dok je svaku elementarnu funkciju lako derivirati jednostavnom primjenom pravila deriviranja, pri čemu je derivacija opet elementarna funkcija, kod integriranja to nije slučaj. Tako je, na primjer, $\int e^x\,dx = e^x + C$, dok recimo $\int e^{x^2}\,dx$ nije elementarna funkcija, odnosno ne može se prikazati kao pomoću konačne primjene zbrajanja, razlike, množenja, dijeljenja i komponiranja osnovnih elementarnih funkcija [M1, §4.6.7]. Integral ove funkcije može se prikazati pomoću reda funkcija (poglavlje 1.7).

U ovom poglavlju dat ćemo definiciju i osnovna svojstva integrala, opisati osnovne metode integriranja, te postupke integriranja za nekoliko tipova funkcija (racionalne funkcije, racionalne funkcije trigonometrijskih funkcija i neke iracionalne funkcije). Opisat ćemo i postupak integriranja reda funkcija.

1.1 Definicija i osnovna svojstva

Neka je zadana funkcija $f : D \to \mathbb{R}$. Želimo naći funkciju F koja derivirana daje f, odnosno želimo riješiti jednadžbu

$$F'(x) = f(x), \qquad F : X \to \mathbb{R}, \quad D \subseteq X.$$

Za slijedeću definiciju potrebno je ponoviti definiciju intervala. Neka je $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Interval* I je svaki od skupova

$$\begin{aligned}&[a,b], \quad (a,b), \quad (a,b], \quad [a,b), \quad [a,+\infty),\\ &(a,+\infty), \quad (-\infty,b), \quad (-\infty,b], \quad (-\infty,+\infty) \equiv \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Definicija 1.1 Neka je zadana funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, neka je $I \subseteq D$ interval i neka je $A \subseteq I$ prebrojiv podskup. *Primitivna funkcija* funkcije f na intervalu I je svaka neprekidna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ takva da je $F'(x) = f(x)$ za $\forall x \in I \setminus A$.

Ova definicija i činjenica da je derivacija konstantne funkcije jednaka nuli povlače slijedeći teorem.

Teorem 1.1 *Ako je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$, tada je i $F(x) + C$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ za svaku konstantu $C \in \mathbb{R}$.*

Primjer 1.1 a) Zadana je funkcija $f(x) = 2x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Funkcije

$$\begin{aligned}&F_1(x) = x^2, \qquad F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^0_+ \quad i\\ &F_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \qquad F_2(x) : \mathbb{R} \to [-\frac{1}{3}, +\infty)\end{aligned}$$

su primitivne funkcije od f na $\mathbb{R}$ (Slika 1.1 a)).

b) Prema Definiciji 1.1, F_1 i F_2 su i primitivne funkcije od

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{za } x \neq 1, \\ 0, & \text{za } x = 1, \end{cases}$$

jer možemo uzeti $I = \mathbb{R}$ i $A = \{-1\}$, a skup A je prebrojiv (u ovom slučaju konačan, vidi Sliku 1.1 b)).

c) F_1 i F_2 su također primitivne funkcije funkcije

$$h(x) = \begin{cases} 2x, & \text{za } x \notin \mathbb{N}, \\ 0, & \text{za } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

jer možemo uzeti $I = \mathbb{R}$ i $A = \mathbb{N}$, pri čemu je skup A prebrojiv.

d) Neka je

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{za } -2 < x < 2, \\ x, & \text{za } 2 \leq x. \end{cases}$$

Primitivna funkcija funkcije f je

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{za } -2 < x < 2, \\ \frac{x^2}{2}, & \text{za } 2 \leq x. \end{cases}$$

Konstantu -2 smo izabrali tako da se ispuni uvjet neprekidnosti funkcije F na intervalu $I = (-2, +\infty)$ prema Definiciji 1.1. Naravno, i funkcija $F(x) + C$ je primitivna funkcija funkcije f za svaku konstantu C. Nacrtajte funkcije f i F.

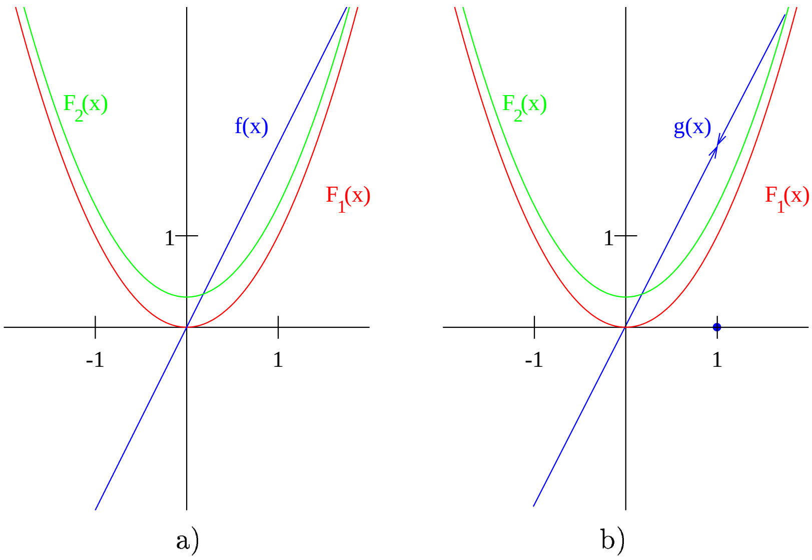
Nakon što smo usvojili pojam primitivne funkcije možemo definirati neodređeni integral.

Definicija 1.2 *Neodređeni integral* funkcije f na intervalu I je skup svih primitivnih funkcija funkcije f na intervalu I. Koristimo oznaku

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

pri čemu je F neka primitivna funkcija funkcije f na intervalu I, x je *varijabla integracije*, a f je *podintegralna funkcija* ili *integrand*, a C je *konstanta integracije*.

Napomenimo da gornju jednakost interpretiramo kao jednakost među funkcijama, odnosno $F(x)$ označava funkciju F, a ne njezinu vrijednost u točki x.



Slika 1.1: Primitivna funkcija

Primjer 1.2 Vrijedi

$$\begin{aligned} \int dx &= x + C, \\ \int x^4\, dx &= \frac{x^5}{5} + C, \\ \int e^x\, dx &= e^x + C. \end{aligned}$$

Napomena 1.1 Dva uvjeta iz Definicije 1.1 zaslužuju dodatno objašnjenje. Uvjet da formula $F'(x) = f(x)$ vrijedi na skupu $I \setminus A$, a ne na čitavom skupu I, što je slabiji uvjet od onoga što bismo očekivali, proizlazi iz geometrijskog značenja određenog integrala (poglavlje 2). Naime, određeni integral u principu daje površinu između podintegralne funkcije i x-osi, a kako površina ne ovisi o vrijednosti funkcije u prebrojivo točaka, to se i u definiciji neodređenog integrala uzima slabiji uvjet. Drugi uvjet je da se traži neprekidnost funkcije F na čitavom intervalu I i onda kada funkcija f taj uvjet ne ispunjava. Ovaj uvjet proističe iz fizikalne interpretacije integrala. Naime, brzina je derivacija puta po vremenu [M1,§5.1], pa je stoga put integral brzine. No, dok funkcija kojom je zadana brzina može (u idealnim uvjetima) imati prekide, prijeđeni put je uvijek neprekidan. Stoga je i uvjet neprekidnosti primitivne funkcije prirodan.

Slijedeća dva teorema daju nam osnovna svojstva integrala. Prisjetimo se definicije diferencijala funkcije f [M1, §5.2],

$$df(x) = f'(x)\, dx.$$

Prvi teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 1.2 *Neka je* $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, *odnosno* $F'(x) = f(x)$ *za svaki* $x \in I \setminus A$ *i funkcija* F *je neprekidna na intervalu* I. *Tada za svaki* $x \in I \setminus A$ *vrijedi:*

(i) $(\int f(x)\,dx)' = f(x)$, *odnosno derivacija integrala jednaka je podintegralnoj funkciji. Ovu jednakost također interpretiramo kao jednakost među funkcijama koja vrijedi na skupu* $I \setminus A$.

(ii) $d\,(\int f(x)\,dx) = f(x)\,dx$, *odnosno diferenciranje poništava integriranje.*

(iii) $\int dF(x) = F(x) + C$, *odnosno integriranje poništava diferenciranje do na konstantu.*

Teorem 1.3 *Neodređeni integral je* linearan, *odnosno*

$$\int (\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x))\,dx = \alpha_1 \int f_1(x)\,dx + \cdots + \alpha_n \int f_n(x)\,dx + C.$$

Dokaz. Neka je $F_i : I \to \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije f_i za $i = 1, \ldots, n$. To znači da je $(F_i(x))' = f_i(x)$ za svaki $x \in I \setminus A_i$, pri čemu je A_i prebrojiv podskup od I, odnosno $\int f_i(x)\,dx = F_i(x) + C_i$. Dakle, jednakost

$$\alpha_1 F_1(x) + \cdots + \alpha_n F_n(x))' = \alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x)$$

vrijedi za svaki $x \in I \setminus \bigcup_{i=i}^n A_i$. Kako je skup $\bigcup_{i=i}^n A_i$ također prebrojiv, zaključujemo da je funkcija $\alpha_1 F_1(x) + \cdots + \alpha_n F_n(x)$ jedna primitivna funkcija funkcije $\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x)$. Stoga vrijedi

$$\begin{aligned}
\int (\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x))\,dx &= \alpha_1 F_1(x) + \cdots + \alpha_n F_n(x) + K \\
&= \alpha_1 (\int f_1(x)\,dx - C_1) + \cdots \\
&\quad + \alpha_n (\int f_n(x)\,dx - C_n) + K \\
&= \alpha_1 \int f_1(x)\,dx + \cdots + \alpha_n \int f_n(x)\,dx + C,
\end{aligned}$$

gdje je $C = K - C_1 - \cdots - C_n$. ■

1.1.1 Tablica osnovnih integrala

Kao što smo već kazali, tablicu osnovnih integrala dobijemo čitajući tablicu osnovnih derivacija [M1, §5.1.5] zdesna na lijevo, uz odgovarajuće manje prilagodbe. Za konstantnu funkciju i potencije vrijedi:

$$\begin{aligned} \int 0 \cdot dx &= C, \\ \int dx &= \int 1 \cdot dx = x + C, \\ \int x^r\, dx &= \frac{x^{r+1}}{r+1}, \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad x \neq 0 \text{ za } r < -1, \\ \int x^{-1}\, dx &= \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C, \qquad x \neq 0. \end{aligned}$$

Dokažimo zadnju formulu: za $x > 0$ vrijedi $\ln|x| = \ln x$ pa je $(\ln|x|)' = (\ln x)' = 1/x$, dok za $x < 0$ vrijedi $\ln|x| = \ln(-x)$ pa je

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Za eksponencijalne funkcije imamo

$$\begin{aligned} \int e^x\, dx &= e^x + C, \\ \int a^x\, dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad a \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Formule za derivacije trigonometrijskih funkcija povlače

$$\begin{aligned} \int \sin x\, dx &= -\cos x + C, \\ \int \cos x\, dx &= \sin x + C, \\ \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx &= \operatorname{tg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx &= -\operatorname{ctg} x + C, \end{aligned}$$

a formule za derivacije arkus funkcija povlače

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+x^2}\, dx &= \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx &= \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Primijetimo da integrali funkcija $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ ne spadaju u tablične integrale.

Konačno, formule za derivacije hiperbolnih funkcija povlače

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sh} x\,dx &= \operatorname{ch} x + C,\\
\int \operatorname{ch} x\,dx &= \operatorname{sh} x + C,\\
\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx &= \operatorname{th} x + C,\\
\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx &= -\operatorname{cth} x + C,
\end{aligned}$$

dok formule za derivacije area funkcija povlače

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \left\{ \begin{array}{rl} \operatorname{arth} x + C, & \text{za } |x|<1 \\ -\operatorname{arcth} x + C, & \text{za } |x|>1 \end{array} \right\}\\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C, \quad x \neq 1,\\
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \operatorname{arsh} x + C = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C, \quad x \in \mathbb{R},\\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \left\{ \begin{array}{rl} \operatorname{arch} x + C, & \text{za } x>1 \\ -\operatorname{arch}(-x) + C, & \text{za } x<-1 \end{array} \right\}\\
&= \ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C, \quad x \in \mathbb{R}\setminus[-1,1].
\end{aligned}$$

Primjer 1.3 *Neposredno integriranje* je najjednostavnija tehnika integriranja. Ono se sastoji u primjeni Teorema 1.3 i tablice osnovnih integrala. Na primjer,

$$\begin{aligned}
\int \left(4\cos x + \frac{1}{2}x^3 - 3\right)dx &= 4\int \cos x\,dx + \frac{1}{2}\int x^3\,dx - 3\int dx\\
&= 4\sin x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4} - 3x + C.
\end{aligned}$$

Slijedeći integral rješavamo primjenom osnovnog trigonometrijskog identiteta:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx\\
&= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.
\end{aligned}$$

1.2 Metode supstitucije

Za rješavanje složenijih integrala često koristimo dvije metode supstitucije. One se sastoje u tome da se zadani integral

1) dopustivom zamjenom varijable integracije nekom funkcijom (bijekcijom) ili

2) dopustivom zamjenom nakog analitičkog izraza novom varijablom integracije svede na tablični integral. Prvi teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 1.4 *Neka je F primitivna funkcija funkcije f na intervalu I. Neka je funkcija $\varphi : I_1 \to I$ bijekcija definirana na intervalu I_1. Neka je $\psi : I_1 \to \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije $(f \circ \varphi)\varphi'$ definirana na intervalu I_1, odnosno*

$$\int (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\,dt = \psi(t) + C, \qquad t \in I_1.$$

Tada je

$$\int f(x)\,dx = \psi(\varphi^{-1}(x)) + C, \qquad x \in I.$$

Drugim riječima, $\int f(x)\,dx$ možemo rješavati pomoću supstitucije $x = \varphi(t)$, pri čemu je φ bijekcija:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \left\{ \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{array} \right\} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \\ &= \psi(t) + C = \left\{ t = \varphi^{-1}(x) \right\} = \psi(\varphi^{-1}(x)) + C.\end{aligned}$$

Vidimo da je bijektivnost funkcije φ nužna za vraćanje supstitucije natrag.

Primjer 1.4 Vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx &= \left\{ \begin{array}{c} x = t^6 \\ dx = 6t^5\,dt \end{array} \right\} = \int \frac{1+t^2}{t^3} 6t^5\,dt = 6\int (t^2+t^4)\,dt \\ &= 6\frac{t^3}{3} + 6\frac{t^5}{5} = \left\{ t = \sqrt[6]{x} \right\} = 2x^{\frac{3}{6}} + \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + C \\ &= 2\sqrt{x} + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + C.\end{aligned}$$

Primijetimo da funkcija $\varphi(t) = t^6$ nije bijekcija za $t \in \mathbb{R}$. Međutim, kako je zadani integral definiran samo za $x > 0$, možemo uzeti da $t > 0$, pa ja za takve t funkcija t^6 bijekcija.

Teorem 1.5 *Neka je*

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx, x \in I,$$

gdje je $\varphi : I \to I_1$ derivabilna funkcija, a I i I_1 su intervali. Neka je $F : I_1 \to \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije $f : I_1 \to \mathbb{R}$ na intervalu I_1, odnosno

$$F'(t) = f(t), \qquad t \in I_1 \setminus A_1.$$

Ovdje je $A_1 = \varphi(A)$, pri čemu je $A \subset I$ prebrojiv, pa je i A_1 prebrojiv. Tada je $F \circ \varphi$ primitivna funkcija funkcije $(f \circ \varphi)\varphi'$ na intervalu I, odnosno

$$(F \circ \varphi)'(x) = (f \circ \varphi)\varphi', \qquad x \in I \setminus A.$$

Dokaz. Imamo

$$
\begin{aligned}
(F\circ\varphi)'(x) &= [F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = \left\{ \begin{array}{r} F'(t) = f(t) \\ t \in I_1 \setminus A_1 \end{array} \right\} \\
&= f(\varphi(x))\varphi'(x), \qquad x \in I \setminus A.
\end{aligned}
$$

■

Jednostavnije rečeno, ukoliko podintegralna funkcija ima pogodan oblik, tada vrijedi

$$
\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{c} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)\,dx \end{array} \right\} = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C.
$$

Primjer 1.5 a) Vrijedi

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{2x+3}\,dx &= \left\{ \begin{array}{r} 2x+3 = t \\ 2\,dx = \,dt \end{array} \right\} = \int \sqrt{t}\,\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{t^3} + C \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3} + C.
\end{aligned}
$$

b) Vrijedi

$$
\int \cos 5x\,dx = \left\{ \begin{array}{r} 5x = t \\ 5\,dx = \,dt \end{array} \right\} = \int \cos t\,\frac{1}{5}\,dt = \frac{1}{5}\sin t + C = \frac{1}{5}\sin 5x + C.
$$

c) Vrijedi

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2+2x+2} &= \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \left\{ \begin{array}{r} x+1 = t \\ dx = \,dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C \\
&= \operatorname{arctg}(x+1) + C.
\end{aligned}
$$

d) Vrijedi

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^r} &= \left\{ \begin{array}{r} 1+x^2 = t \\ 2x\,dx = \,dt \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{1}{2}\,dt}{t^r} = \frac{1}{2}\int t^{-r}\,dt \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln|t| + C_1, & \text{za } r = 1 \\ \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t^{-r+1}}{-r+1} + C_2, & \text{za } r \neq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1, & \text{za } r = 1 \\ \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(1+x^2)^{-r+1}}{-r+1} + C_2, & \text{za } r \neq 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Integrale u Primjeru 1.5 b) i c) smo formalno mogli rješiti i koristeći Teorem 1.4, odnosno pomoću supstitucija $x = \varphi(t) = \frac{1}{5}t$ i $x = \varphi(t) = t - 1$, redom, koje su obje bijekcije na skupu $\mathbb{R}$.

Napomena 1.2 Postupak rješavanja integrala u Primjeru 1.5 c) i d) se koristi u rješavanju integrala racionalnih funkcija u poglavlju 1.4.

1.3 Metoda parcijalne integracije

Ova metoda se sastoji od povoljnog rastava zadanog integrala u obliku

$$\int f(x)\,dx = \int u(x)v'(x)\,dx = \int u(x)\,d(v(x)),$$

i primjene slijedećeg teorema.

Teorem 1.6 *Ako su funkcije $u, v : I \to \mathbb{R}$ neprekidno derivabilne na intervalu I, tada vrijedi* formula parcijalne integracije

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du.$$

Dokaz. Ako zadani integral $\int u\,dv$ postoji, tada postoji i integral $\int v\,du$ (dokaz ove tvrdnje izostavljamo). Primjenjujući redom svojstvo linearnosti neodređenog integrala (Teorem 1.3), pravilo o računanju diferencijala produkta [M1, §5.2], i Teorem 1.2 (iii), imamo

$$\int u\,dv + \int v\,du = \int (u\,dv + v\,du) = \int d(u\,v) = u\,v,$$

i teorem je dokazan. ■

Izbor funkcija u i v je stvar iskustva.

Primjer 1.6 a) Vrijedi

$$\int xe^x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ dv = e^x\,dx, & v = \int dv = \int e^x\,dx = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x\,dx$$
$$= xe^x - e^x + C.$$

Prilikom rješavanja pomoćnog integrala $\int dv$ nije potrebno pisati konstantu integracije, jer je dovoljna jedna konstanta integracije C na kraju zadatka.

b) Za funkciju u možemo uzeti i čitavu podintegralnu funkciju ukoliko se ona deriviranjem pojednostavni:

$$\int \ln x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \dfrac{1}{x}\,dx, \\ dv = dx, & v = x \end{array} \right\} = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C.$$

c) Formulu parcijalne integracije možemo primijeniti više puta uzastopce:

$$\begin{aligned} \int (x^2+2x)\cos x\,dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2+2x, & du = (2x+2)\,dx, \\ dv = \cos x\,dx, & v = \displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x \end{array} \right\} \\ &= (x^2+2x)\sin x - \int \sin x(2x+2)\,dx \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} u = 2x+2, & du = 2\,dx, \\ dv = \sin x\,dx, & v = \displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x \end{array} \right\} \\ &= (x^2+2x)\sin x - \left[(2x+2)(-\cos x) - \int (-\cos x)2\,dx\right] \\ &= (x^2+2x)\sin x + (2x+2)\cos x - 2\sin x + C. \end{aligned}$$

Općenito, zaključujemo da integrale oblika

$$\int p_n(x)e^x\,dx, \quad \int p_n(x)\sin x\,dx, \quad \int p_n(x)\cos x\,dx,$$

gdje je p_n polinom n-tog stupnja, možemo riješiti primjenom parcijalne integracije n puta za redom.

d) Integrale slijedećeg tipa rješavamo tako da nakon dvostruke parcijalne integracije dobijemo izraz koji opet sadrži polazni integral:

$$\begin{aligned} \int e^x\sin x\,dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u = e^x, & du = e^x\,dx, \\ dv = \sin x\,dx, & v = -\cos x \end{array} \right\} \\ &= e^x(-\cos x) - \int (-\cos x)e^x\,dx \\ &= -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} u = e^x, & du = e^x\,dx, \\ dv = \cos x\,dx, & v = \sin x \end{array} \right\} \\ &= -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx. \end{aligned}$$

Izjednačavanje lijeve i desne strane daje

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

Primijetimo da smo zbog svojevrsne simetrije zadatak mogli riješiti i pomoću rastava $u = \sin x$ i $dv = e^x\, dx$.

Zadatak 1.1 a) Izračunajte integral $\int x^3 \sin x\, dx$.

b) Izračunajte integral $\int xe^x \sin x\, dx$. Da li je moguće riješiti integral oblika $\int p_n(x) e^x \sin x\, dx$, gdje je p_n polinom n-tog stupnja?

c) Provjerite rješenja zadatka i Primjera 1.6 deriviranjem.

1.3.1 Rekurzivne formule

Naziv *rekurzivna formula* općenito znači da se izraz ovisan o parametru n može izraziti pomoću izraza istog oblika ovisnog o istoj ili nekoj drugoj vrijednosti parametra. Jedan primjer rekurzivne formule smo već imali u Primjeru 1.6 d).

Primjenu rekurzivnih formula za nalaženje integrala ilustrirat ćemo na slijedećem važnom primjeru koji je sastavni dio integriranja racionalnih funkcija u poglavlju 1.4. Nađimo

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Za $n = 1$ vrijedi

$$I_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

Za $n \geq 2$ vrijedi

$$I_n = \int \frac{1 + x^2 - x^2}{(1+x^2)^n}\, dx = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\, dx. \tag{1.1}$$

Sada imamo

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}\, dx, & v = \displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^n}\, dx \end{array} \right\} = \ldots$$

Riješimo pomoćni integral postupkom kao u Primjeru 1.2 d):

$$\begin{aligned} v &= \int \frac{x}{(1+x^2)^n}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} 1 + x^2 = t \\ 2x\, dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{1}{2}\, dt}{t^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-n+1}}{-n+1} \\ &= \frac{1}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Dakle, parcijalna integracija daje

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx &= \frac{x}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{dx}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}}\\ &= \frac{x}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1}.\end{aligned}$$

Uvrštavanje u formulu (1.1) konačno daje rekurzivnu formulu

$$\begin{aligned}I_n &= I_{n-1} - \frac{x}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1}\\ &= \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}.\end{aligned}$$

Uzastopnom primjenom ove formule lako nađemo integral I_n za bilo koji n. Na primjer, za $n=3$ imamo

$$\begin{aligned}I_3 &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4} I_2 = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} I_1\right)\\ &= \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + C.\end{aligned}$$

Provjerite ovo rješenje deriviranjem.

Zadatak 1.2 Nađite rekurzivne formule za integrale:

a) $\int \cos^n x\,dx$,

b) $\int \operatorname{ch}^n x\,dx$,

c) $\int \frac{1}{\sin^n x}\,dx$.

1.4 Integriranje racionalnih funkcija

Racionalnu funkciju je uvjek moguće integrirati, odnosno integral takve funkcije je uvijek elementarna funkcija. Postupak integriranja je složen i sastoji se od četiri koraka: eliminacija zajedničkih nul-točaka brojnika i nazivnika, svođenje na pravu racionalnu funkciju, rastav na parcijalne razlomke i integriranje dobivenih izraza pomoću neposrednog integriranja, metode supstitucije ili metode parcijalne integracije. Integriranje racionalnih funkcija je važno jer se i integrali racionalnih funkcija trigonometrijskih funkcija (poglavlje 1.5) kao i integrali nekih iracionalnih funkcija (poglavlje 1.5) odgovarajućim transformacijama svode na integrale racionalnih funkcija.

Neka je zadana racionalna funkcija

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

gdje su p i q polinomi s realnim koeficijentima.

Eliminacija zajedničkih nul-točaka

Ako p i q imaju zajedničku nul-točku x_0, odnosno ako je

$$p(x) = (x - x_0)p_1(x), \qquad q(x) = (x - x_0)q_1(x),$$

tada je

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \frac{(x - x_0)p_1(x)}{(x - x_0)q_1(x)}\,dx = \int \frac{p_1(x)}{q_1(x)}\,dx.$$

Zadnja jednakost vrijedi jer se prema Definiciji 1.1 integral ne mijenja ako se podintegralna funcija promijeni u prebrojivo mnogo točaka.

Postupak možemo nastaviti sve dok ne dobijemo racionalnu funkciju u kojoj brojnik i nazivnik nemaju zajedničkih nul-točaka. U nastavku izlaganja stoga pretpostavljamo da p i q nemaju zajedničkih nul-točaka.

Svođenje na pravu racionalnu funkciju

Racionalna funkcija je *prava racionalna funkcija* ako je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika. Ukoliko je stupnaj brojnika veći ili jednak od stupnja nazivnika, možemo podijeliti polinome, pa imamo

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \frac{s(x)}{q(x)},$$

pri čemu su r i s polinomi. Polinom s je *ostatak kod dijeljenja*, a stupanj od s je manji od stupnja od q. Naravno, $\int r(x)\,dx$ se rješava neposrednim integriranjem, pa možemo zaključiti slijedeće:

> Integriranje racionalnih funkcija se svodi na integriranje pravih racionalnih funkcija oblika
>
> $$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$
>
> pri čemu p i q nemaju zajedničkih nul-točaka i stupanj od p je manji od stupnja od q.

Primjer 1.7 Dijeljenje polinoma daje

$$\frac{x^3 + x}{x^2 - 1} = x + \frac{2x}{x^2 - 1},$$

pa je

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3 + x}{x^2 - 1}\,dx &= \int \left(x + \frac{2x}{x^2 - 1} \right) dx = \int x\,dx + \int \frac{2x}{x^2 - 1}\,dx \\
&= \left\{ \begin{aligned} x^2 - 1 &= t, \\ 2x\,dx &= dt \end{aligned} \right\} = \frac{x^2}{2} + \int \frac{dt}{t} = \frac{x^2}{2} + \ln|t| + C \\
&= \frac{x^2}{2} + \ln|x^2 - 1| + C.
\end{aligned}$$

Rastav na parcijalne razlomke

Nakon što smo integral zadane racionalne funkcije sveli na integral prave racionalne funkcije, tu funkciju treba rastaviti na parcijalne razlomke. Kao posljedica osnovnog teorema algebra [M1, \$ 4.6.8], polinom q stupnja n možemo rastaviti na faktore u obliku

$$q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots q_n x^n = q_n (x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Ovdje su $x_1, \ldots, x_n$ realne ili kompleksne nul-točke, kompleksne nul-točke se uvijek javljaju u kompleksno-konjugiranim parovima, a nul-točke mogu biti i višestruke. Stoga možemo pisati

$$q(x) = q_n (x - x_1)^{r_1} \cdots (x - x_k)^{r_k} (x^2 + a_1 x + b_1)^{s_1} \cdots (x^2 + a_l x + b_l)^{s_l},$$

pri čemu su x_i međusobno različite realne nul-točke, kvadratni polinomi nemaju realnih nul-točaka, a nul-točke su im međusobno različite, $r_i, s_i \in \mathbb{N}$ i vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} r_i + 2 \sum_{i=1}^{l} s_i = n.$$

Nakon rastava nazivnika q na faktore, slijedi rastav na parcijalne razlomke. Taj rastav glasi

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} = {} & \frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_{r_1}}{(x - x_1)^{r_1}} + \cdots + \frac{B_1}{x - x_k} + \cdots + \frac{B_{r_k}}{(x - x_k)^{r_k}} + \\ & + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + a_1 x + b_1} + \cdots + \frac{C_{s_1} x + D_{s_1}}{(x^2 + a_1 x + b_1)^{s_1}} + \cdots \\ & + \frac{E_1 x + F_1}{x^2 + a_l x + b_l} + \cdots + \frac{E_{s_l} x + D_{s_l}}{(x^2 + a_l x + b_l)^{s_l}}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Koeficijente $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i$ odredimo tako sa jednakost pomnožimo s $q(x)$, izjednačimo koeficijente uz iste potencije, a zatim riješimo dobiveni sustav linearnih jednadžbi [M1, §2.4]. Može se pokazati da dobiveni sustav uvijek ima jedinstveno rješenje i to upravo zbog svojstava funkcije $f = p/q$.

Integriranje rastava na parcijalne razlomke

Iz općeg oblika rastava na parcijalne razlomke, vidimo da se postupak integriranja racionalne funkcije svodi na rješavanje slijedećih tipova integrala:

1) Integral oblika

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \left\{ \begin{aligned} x - a &= t, \\ dx &= dt \end{aligned} \right\} = \int \frac{dt}{t^n} = \cdots$$

svodi se na tablični integral.

2) Integral oblika

$$\int \frac{x}{(x^2+ax+b)^n}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+a-a}{(x^2+ax+b)^n}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2+ax+b=t, \\ (2x+a)\,dx = dt \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^n} - \frac{a}{2}\int \frac{dx}{(x^2+ax+b)^n} = \cdots$$

svodi se na jedan tablični integral i na integral koji se dalje rješava postupkom opisanim u točki 3).

3) Slijedeći tip integrala prvo svedemo na puni kvadrat, zatim primijenimo odgovarajuću supstituciju, te dobiveni integral riješimo pomoću rekurzivne formule iz poglavlja 1.3.1:

$$\int \frac{dx}{(x^2+ax+b)^n} = \int \frac{dx}{\left((x+\frac{a}{2})^2 + b - \frac{a^2}{4}\right)^n} = \frac{1}{(b-\frac{a^2}{4})^n}\int \frac{dx}{\left(\frac{(x+\frac{a}{2})^2}{b-\frac{a^2}{4}}+1\right)^n}$$

$$= \left\{ \frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}} = t, \quad \frac{dx}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}} = dt \right\}$$

$$= \frac{1}{(b-\frac{a^2}{4})^{n-\frac{1}{2}}}\int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \cdots$$

Važno je uočiti da je izraz $\sqrt{b-a^2/4}$ dobro definiran. Naime, polinom $x^2 + ax + b$ nema realnih nul-točaka, pa vrijedi $a^2 - 4b < 0$, odnosno izraz pod korijenom je veći od nule.

1.4.1 Primjer

Kao ilustraciju postupka integriranja racionalnih funkcija riješit ćemo jedan složeniji zadatak. Neka je

$$I = \int \frac{x^3+2x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+2x+3)^2}\,dx.$$

Prvo provjerimo da li brojnik i nazivnik imaju zajedničkih nul-točaka. Nul-točke nazivnika su

$$x_1 = -1, \qquad x_{2,3} = \frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2}.$$

Broj $x_4 = 1$ je očito jedna nul-točka brojnika. Iz

$$(x^3+2x^2+3x-6):(x-1) = x^2+3x+6$$

slijedi da su preostale dvije nul-točke brojnika jednake $x_{5,6} = (-3\pm\sqrt{-15})/2$. Dakle, brojnik i nazivnik nemaju zajedničkih nul-točaka. Nadalje, kako je stupanj brojnika jednak 3, a stupanj nazivnika jednak 5, radi se pravoj racionalnoj funkciji. Stoga možemo pristupiti traženju rastava na parcijalne razlomke.

Po formuli (1.2), rastav na parcijalne razlomke glasi

$$\frac{x^3+2x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+2x+3)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+3}+\frac{Dx+E}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Množenje ove jednakost s nazivnikom daje

$$\begin{aligned}x^3+2x^2+3x-6 &= A(x^2+2x+3)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2+2x+3)\\ &\quad +(Dx+E)(x+1).\end{aligned}$$

Sređivanje desne strane po potencijama od x daje

$$\begin{aligned}x^3+2x^2+3x-6 &= x^4(A+B)+x^3(4A+3B+C)+x^2(10A+5B+3C+D)\\ &\quad +x(12A+3B+5+D+E)+9A+3C+E.\end{aligned}$$

Izjednačavanje koeficijenata uz potencije od x na lijevoj i desnoj strani daje nam sustav linearnih jednadžbi petog reda:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} A & + & B & & & & & & & = & 0\\ 4A & + & 3B & + & C & & & & & = & 1\\ 10A & + & 5B & + & 3C & + & D & & & = & 2\\ 12A & + & 3B & + & 5C & + & D & + & E & = & 3\\ 9A & & & + & 3C & & & + & E & = & -6 \end{array}$$

Proširena matrica sustava glasi

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 10 & 5 & 3 & 1 & 0 & 2\\ 12 & 3 & 5 & 1 & 1 & 3\\ 9 & 0 & 3 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

Nakon Gaussove eliminacije [M1, §2.4] dobijemo rješenje sustava koje glasi

$$A=-2,\quad B=2,\quad C=3,\quad D=3,\quad E=3.$$

Napomenimo da je u ovom slučaju Gaussovu eliminaciju najbolje započeti odozdo poništavajući redom elemente iznad dijagonale.

Dakle, zadani integral jednak je

$$\begin{aligned}I &= -2\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{2x+3}{x^2+2x+3}\,dx+3\int\frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx\\ &= -2I_1+I_2+3I_3. \qquad (1.3)\end{aligned}$$

Dalje imamo

$$I_1 = \int \frac{dx}{x+1} = \left\{ \begin{array}{c} x+1=t \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_1 = \ln|x+1| + C_1.$$

Zatim,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{2x+3}{x^2+2x+3}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} x^2+2x+3=t \\ (2x+2)\,dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dx}{(x+1)^2+2} \\ &= \ln|t| + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\frac{(x+1)^2}{2}+1} = \left\{ \begin{array}{c} (x+1)/\sqrt{2} = s \\ dx/\sqrt{2} = ds \end{array} \right\} = \ln|t| + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{ds}{s^2+1} \\ &= \ln|x^2+2x+3| + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C_2. \end{aligned}$$

Uočimo da je $x^2+2x+3>0$ za svaki x, pa ne moramo pisati apsolutnu vrijednost.

Slično,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} x^2+2x+3=t \\ (2x+2)\,dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2t} + C_3 \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+3} + C_3. \end{aligned}$$

Konačno, uvrštavanje integrala I_1, I_2 i I_3 u formulu (1.3) daje rješenje

$$I = -2\ln|x+1| + \ln(x^2+2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+3} + C.$$

Zadatak 1.3 a) Provjerite prethodno rješenje deriviranjem.

b) Provjerite prethodno rješenje pomoću programa *The Integrator* koji se nalazi na adresi `http://www.integrals.com`.

c) Zadajte sami nekoliko integrala racionalnih funkcija, riješite ih, te rezultat provjerite deriviranjem i pomoću programa *The Integrator*.

1.5 Racionalne funkcije trigonometrijskih funkcija

Integrali ove klase funkcija su također uvijek elementarne funkcije. Ukratko, integral racionalne funkcije trigonometrijskih funkcija se odgovarajućom supstitucijom svede na integral racionalne funkcije koji se onda riješi postupkom opisanim u poglavlju 1.4.

Definicija 1.3 Neka su $f_1,\ldots,f_n$ elementarne funkcije. *Racionalna funkcija od funkcija* $f_1,\ldots,f_n$ je svaka funkcija f koju dobijemo konačnim brojem zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja funkcija $f_1,\ldots,f_n$. Za funkciju f koristimo oznake

$$f = \mathcal{R}(f_1,\ldots,f_n) \quad \text{ili} \quad f(x) = \mathcal{R}(f_1(x),\ldots,f_n(x)).$$

Integral oblika

$$\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x)\, dx$$

svodi se supstitucijom na integral racionalne funkcije. Primijetimo da u prethodnom izrazu nema potrebe navoditi funkcije $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ jer su one već racionalne funkcije funkcija $\sin x$ i $\cos x$. Za svođenje na integral racionalne funkcije koristimo *univerzalnu trigonometrijsku supstituciju*, a u nekim posebnim slučajevima možemo koristiti i neke jednostavnije supstitucije.

Univerzalna trigonometrijska supstitucija

Ova supstitucija glasi

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \tag{1.4}$$

Uz pretpostavku da je $x/2 \in (-\pi/2, \pi/2)$ vrijedi

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

Adicioni teorem [M1, §4.6.5] daje

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cos^2 \frac{x}{2} = 2t \cos^2 \frac{x}{2},$$

a osnovni trigonometrijski identitet daje

$$\cos^2 \frac{x}{2} \left(1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \right) = 1,$$

osnosno

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Kombinirajući ove jednakosti imamo

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

U formuli za $\cos x$ smo dodatno pretpostavili da je $\cos x \geq 0$ jer smo uzeli pozitivni drugi korijen. To znači da supstitucija koju smo opisali vrijedi za $x \in [\pi/2, \pi/2]$. Za ostala područja potrebno je izvršiti odgovarajuće prilagodbe formula. Potreba za takvim modifikacijama se često javlja kod određenog integrala, u kojem granice integracije određuju područje ma kojem supstitucija mora vrijediti. Slična napomena vrijedi i za ostale trigonometrijske supstitucije.

Primjer 1.8 Vrijedi

$$I=\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=\{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2t}{1+t^2}}$$
$$=\int\frac{1+t^2}{(3+t^2)t}\,dt$$

Brojnik i nazivnik nemaju zajedničkih nul-točaka, a stupanj brojnika je manji od stupnja nazivnika. Rastav na parcijalne razlomke glasi

$$\frac{1+t^2}{(3+t^2)t}=\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{3+t^2}.$$

Množenje ove jednakosti s nazivnikom, izjednačavanje koeficijenata uz potencije od t i rješavanje tako dobivenog sustava linearnih jednadžbi daje

$$A=\frac{1}{3},\quad B=\frac{2}{3},\quad C=0.$$

Dakle,

$$I=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}+\frac{2}{3}\int\frac{t\,dt}{3+t^2}=\left\{\begin{array}{c}3+t^2=u\\ 2t\,dt=\,du\end{array}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\ln|t|+\frac{1}{3}\ln|u|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{3}\ln\left(3+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)+C.$$

Jednostavnije supstitucije

U nekim slučajevima integral racionalne funkcije trigonometrijskih funkcija može se računati pomoću jednostavnijih supstitucije koje vode na integral racionalne funkcije nižeg reda ili pak na jednostavniji integral.

Integral oblika

$$\int\mathcal{R}(\sin^2 x,\cos^2 x,\sin x\cos x,\operatorname{tg}x,\operatorname{ctg}x)\,dx$$

rješavamo pomoću supstitucije

$$t=\operatorname{tg}x.$$

Za $x\in(-\pi/2,\pi/2)$ vrijedi

$$\begin{aligned} x&=\operatorname{arctg}t & dx&=\frac{1}{1+t^2}\,dt,\\ \sin^2 x&=\frac{t^2}{1+t^2}, & \cos^2 x&=\frac{1}{1+t^2},\\ \sin x\cos x&=\frac{t}{1+t^2}, & \operatorname{ctg}x&=\frac{1}{t}. \end{aligned}\tag{1.5}$$

Također možemo koristiti i supstitucije

$$\int \mathcal{R}(\sin x) \cos x\, dx = \left\{ \begin{aligned} \sin x &= t \\ \cos x\, dx &= dt \end{aligned} \right\} = \int \mathcal{R}(t)\, dt,$$

$$\int \mathcal{R}(\cos x) \sin x\, dx = \left\{ \begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x\, dx &= dt \end{aligned} \right\} = -\int \mathcal{R}(t)\, dt.$$

Primjer 1.9 Riješimo integral iz Primjera 1.8 na drugi način. Vrijedi

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} = \int \frac{\sin x}{(2+\cos x)\sin^2 x}\, dx \\ &= \int \frac{\sin x}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}\, dx = \left\{ \begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x\, dx &= dt \end{aligned} \right\} \\ &= -\int \frac{dt}{(2+t)(1-t^2)} = -\int \frac{dt}{(2+t)(1-t)(1+t)}. \end{aligned}$$

Rastav na parcijalne razlomke daje

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{2+t} - \frac{1}{6}\int \frac{dt}{1-t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} \\ &= \frac{1}{3}\ln(2+\cos x) + \frac{1}{6}\ln|1-\cos x| - \frac{1}{2}\ln|1+\cos x| + C. \end{aligned}$$

Napomena 1.3 Korištenjem različitih supstitucija kao u Primjerima 1.8 i 1.9 možemo dobiti naizgled potpuno različita rješenja. Međutim, Teorem 1.1 nam kaže da se ova rješenja razlikuju samo za konstantu.

Zadatak 1.4 a) Dokažite formule (1.5).

b) Dokažite da se rješenja integrala u Primjerima 1.8 i 1.9 razlikuju za konstantu. (*Uputa:* koristeći svojstva logaritama (L3), (L4) i (L5) [M1, §4.6.4] svedite izraze na jedan logaritam, a onda primijenite odgovarajuće veze između trigonometrijskih funkcija.)

c) Izračunajte integral iz Primjera 1.8 i 1.9 pomoću programa *The Integrator.*

d) Nacrtajte sva tri rješenja pomoću programa NetPlot.

1.5.1 Hiperbolne funkcije

Integral racionalne funkcije hiperbolnih funkcija oblika

$$\int \mathcal{R}(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\, dx$$

rješavamo koristeći *univerzalnu hiperbolnu supstituciju*,

$$t = \operatorname{th} \frac{x}{2}. \tag{1.6}$$

Vrijedi

$$x = 2 \operatorname{arth} t, \qquad dx = \frac{2}{1-t^2}\, dt, \qquad t \in (-1,1).$$

Osnovne veze između hiperbolnih funkcija [M1, §4.6.9] daju

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= 2 \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2} = 2 \frac{\operatorname{sh} \frac{x}{2}}{\operatorname{ch} \frac{x}{2}} \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} = 2t \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}, \\ 1 &= \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} \left(1 - \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} \right) = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} \cdot (1-t^2). \end{aligned}$$

Kombinirajući ove jednakosti imamo

$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ch} x = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x} = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Kao i kod trigonometrijskih funkcija, i ovdje su u nekim slučajevima moguće jednostavnije supstitucije. Integral oblika

$$\int \mathcal{R}(\operatorname{sh}^2 x, \operatorname{ch}^2 x, \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \operatorname{th} x, \operatorname{cth} x)\, dx$$

rješavamo pomoću supstitucije

$$t = \operatorname{th} x,$$

pri čemu vrijedi

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{arth} t & dx &= \frac{1}{1-t^2}\, dt, \quad t \in (-1,1) \\ \operatorname{sh}^2 x &= \frac{t^2}{1-t^2}, & \operatorname{ch}^2 x &= \frac{1}{1-t^2}, \\ \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x &= \frac{t}{1-t^2}, & \operatorname{ctg} x &= \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Također možemo koristiti i supstitucije

$$\begin{aligned} \int \mathcal{R}(\operatorname{sh} x) \operatorname{ch} x\, dx &= \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{sh} x = t \\ \operatorname{ch} x\, dx = dt \end{array} \right\} = \int \mathcal{R}(t)\, dt, \\ \int \mathcal{R}(\operatorname{ch} x) \operatorname{sh} x\, dx &= \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{ch} x = t \\ \operatorname{sh} x\, dx = dt \end{array} \right\} = \int \mathcal{R}(t)\, dt. \end{aligned}$$

Zadatak 1.5 Izračunajte integrale

$$\int \frac{1+\operatorname{sh} x}{(2+\operatorname{ch} x)(3+\operatorname{sh} x)}\, dx, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x + 2\operatorname{ch}^2 x + 3 \operatorname{th} x}.$$

1.6 Integriranje nekih iracionalnih funkcija

Integral iracionalne funkcije općenito ne mora biti elementarna funkcija, odnosno kažemo da iracionalna funkcija općenito *nije elementarno integrabilna.* U nekim posebnim slučajevima integral iracionalne funkcije je moguće svesti na integral racionalne funkcije, te ga na taj način riješiti.

Integral oblika

$$\int \mathcal{R}\Big(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\Big), \quad m_i, n_i \in \mathbb{N},\ i = 1, \ldots, k,$$

rješavamo supstitucijom

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n,$$

gdje je n najmanji zajednički višekratnik od $n_1, \ldots, n_k$.

Primjer 1.10 Riješimo integral

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{8 - \sqrt{\dfrac{64-1}{x}}}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{64-1}{x}\right)^2}}\, dx \\
&= \left\{ \frac{64-1}{x} = t^6 \Rightarrow 64x - 1 = xt^6 \Rightarrow x = \frac{1}{64-t^6} \Rightarrow dx = \frac{6t^5}{(64-t^6)^2}\, dt \right\} \\
&= \int \frac{8-t^3}{t^4} \cdot \frac{6t^5}{(64-t^6)^2}\, dt = 6 \int \frac{t}{(8-t^3)^2}\, dt.
\end{aligned}$$

Zadani integral smo sveli na integral racionalne funkcije pa ga možemo riješiti prema pravilima iz poglavlja 1.4.

Integral oblika

$$\int \mathcal{R}(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$$

se pomoću supstitucije

$$\frac{2ax+b}{\sqrt{|4ac-b^2|}}$$

svodi na jedan od tri jednostavnija integrala. Za rješavanje tih integrala koristimo ili *trigonometrijske* ili *Euleorove* supstitucije:

$$\begin{aligned}
&\int \mathcal{R}(t, \sqrt{1-t^2})\, dt = \{t = \sin z\} \quad \text{ili} \quad \{\sqrt{1-t^2} = z(1-t)\}, \\
&\int \mathcal{R}(t, \sqrt{t^2-1})\, dt = \{t = \frac{1}{\sin z}\} \quad \text{ili} \quad \{\sqrt{t^2-1} = t+z\}, \\
&\int \mathcal{R}(t, \sqrt{1+t^2})\, dt = \{t = \operatorname{tg} z\} \quad \text{ili} \quad \{\sqrt{1+t^2} = t+z\}.
\end{aligned}$$

Primjer 1.11 Riješimo integral

$$I=\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+6x+10}}=\int \frac{dx}{x+\sqrt{(x+3)^2+1}}=\left\{\begin{aligned} x+3&=t\\ dx&=dt\end{aligned}\right\}$$
$$=\int \frac{dt}{t-3+\sqrt{1+t^2}}.$$

Eulerova supstitucija daje

$$I=\left\{\sqrt{1+t^2}=t+z \Rightarrow 1+t^2=t^2+2tz+z^2 \Rightarrow t=\frac{1-z^2}{2z} \Rightarrow dt=-\frac{1+z^2}{2z^2}\,dz\right\}$$
$$=\int \frac{-\frac{1+z^2}{2z^2}\,dz}{\frac{1-z^2}{2z}-3+\frac{1-z^2}{2z}+z}=\int \frac{1}{2}\cdot\frac{1+z^2}{z\,(3z-1)}\,dz.$$

Dobiveni integral racionalne funkcije se sada riješi prema pravilima iz poglavlja 1.4.

Trigonometrijska supstitucija daje

$$I=\left\{t=\operatorname{tg} z \Rightarrow dt=\frac{1}{\cos^z}\,dz \Rightarrow \sqrt{t^2+1}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 z}}=\frac{1}{\cos z} \quad \text{za } \cos x>0\right\}$$
$$=\int \frac{\frac{1}{\cos^z}\,dz}{\frac{\sin z}{\cos z}-3+\frac{1}{\cos z}}=\int \frac{dz}{\cos z\,(\sin z-3\cos z+1)}.$$

Ovaj integral se dalje pomoću univerzalne trigonometrijske supstitucije (1.4) svede na integral racionalne funkcije koji se riješi prema pravilima iz poglavlja 1.4.

Zadatak 1.6 Dovršite računanje integrala iz Primjera 1.10 i 1.11. Rezultate provjerite pomoću programa *The Integrator*.

1.6.1 Metoda neodređenih koeficijenata

Vrijedi formula

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=q_{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{1.7}$$

gdje su p_n i q_{n-1} polinomi stupnja n i $n-1$, redom, a α je realna konstanta. Koeficijente polinoma q_{n-1} i konstantu α odredimo na slijedeći način:

(i) deriviramo obje strane jednakosti (1.7),

(ii) pomnožimo dobivenu jednakost s $\sqrt{ax^2+bx+c}$ (na taj način više nema izraza pod korijenom),

(iii) izjednačimo koeficijente uz potencije od x i riješimo dobiveni sustav linearnih jednadžbi.

Nakon ovog postupka preostaje izračunati integral na desnoj strani formule (1.7). Taj integral se svođenjem na puni kvadrat i odgovarajućom supstitucijom svodi na tablični integral.

Integrali ovog tipa se također mogu rješavati trigonometrijskim i Eulerovim supstitucijama. Međutim, ako je red polinoma p_n velik, tada trigonometrijske i Eulerove supstitucije vode na složeni integral racionalne funkcije, pa je metoda neodređenih koeficijenata jednostavnija.

Primjer 1.12 Slijedeći integral prvo pomoću malog trika svedemo na oblik (1.7):

$$\begin{aligned} I &= \int x^2\sqrt{4x^2+9}\,dx = \int \frac{x^2(4x^2+9)}{\sqrt{4x^2+9}}\,dx \\ &= (Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{4x^2+9} + E\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}. \end{aligned}$$

Deriviranje daje

$$\begin{aligned} x^2\sqrt{4x^2+9} &= (3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{4x^2+9} \\ &\quad + (Ax^3+Bx^2+Cx+D)\frac{4x}{\sqrt{4x^2+9}} + E\frac{1}{\sqrt{4x^2+9}}. \end{aligned}$$

Množenje ove jednakosti s $\sqrt{4x^2+9}$ daje

$$x^2(4x^2+9) = (3Ax^2+2Bx+C)(4x^2+9) + (Ax^3+Bx^2+Cx+D)4x + E.$$

Izjednačavanje koeficijenata uz iste potencije od x na lijevoj i desnoj strani, rješavanje dobivenog sustava linearnih jednadžbi, te rješavanje preostalog integrala daje

$$I = (\frac{1}{4}\,x^3 + \frac{9}{32}\,x)\sqrt{4x^2+9} - \frac{81}{32}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{arsh}\,(\frac{2}{3}x) + C.$$

Izvedite za vježbu sve preskočene detalje.

Zadatak 1.7 Riješite integral

$$\int \frac{dx}{(x-1)^4\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Uputa: integrali oblika

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{x^2+x+1}}$$

se supstitucijom $x-\alpha = 1/t$ svode na oblik (1.7).

1.6.2 Binomni integral

Binomni integral je integral oblika

$$\int x^m (x+bx^n)^p \, dx, \qquad a,b \in \mathbb{R}, \quad m,n,p \in \mathbb{Q}.$$

Vidimo da se u binomnom integralu mogu pojaviti i drugi korijeni osim kvadratnog, ali je zato oblik podintegralne funkcije nešto jednostavniji. Slijedeći teorem daje nam nužne i dovoljne uvjete rješivosti binomnog integrala.

Teorem 1.7 *Binomni integral je elementarno rješiv ako i samo ako je jedan od brojeva*

$$p, \qquad \frac{m+1}{n}, \qquad \frac{m+1}{n}+p$$

cijeli broj.

Dokaz. Dokažimo dovoljnost. Vrijedi

$$\begin{aligned}\int x^m (x+bx^n)^p \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} x^n = t, \quad x = 1/t^n, \\ dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} \, dt \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{n} \int t^{\frac{m}{n}} (a+bt)^p t^{\frac{1}{n}-1} \, dt \\ &= \frac{1}{n} \int \left(\frac{a+bt}{t} \right)^p t^{\frac{m+1}{n}+p-1} \, dt.\end{aligned}$$

Razlikujemo tri slučaja:

(i) ako je $p \in \mathbb{Z}$, tada koristimo supstituciju $t = z^k$, gdje je k najmanji nazivnik nakon kraćenja od $(m+1)/n$,

(ii) ako je $(m+1)/n$ cijeli broj, tada koristimo supstituciju $a + bt = z^k$, gdje je k nazivnik od p, a

(iii) ako je $(m+1)/n + p$ cijeli broj, tada koristimo supstituciju $(a + bt)/t = z^k$, gdje je k nazivnik od p.

Svaka od tri navedene supstitucije vodi na integral racionalne funkcije koji se rješava prema prema pravilima iz poglavlja 1.4. S ovim smo dokazali dovoljnost.

Dokaz nužnosti, odnosno dokaz da binomni integral nije elementarno rješiv za u bilo kojem slučaju kada nisu ispunjeni slučajevi (i)–(iii) je složen pa ga izostavljamo. ■

Primjer 1.13 Kod rješavanja integrala

$$I = \int \sqrt[3]{3x - x^3}\, dx$$

treba prvo prepoznati da se radi o binomnom integralu. Zaista,

$$I = \int \sqrt[3]{x(3 - x^2)}\, dx = \int x^{\frac{1}{3}}(3 - x^2)^{\frac{1}{3}}\, dx,$$

pa se radi o binomnom integralu uz $m = 1/3$, $n = 2$ i $p = 1/3$. Vrijedi

$$p \notin \mathbb{Z}, \qquad \frac{m+1}{n} = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}, \qquad \frac{m+1}{n} + p = 1 \in \mathbb{Z},$$

pa je integral elementarno rješiv po Teoremu 1.7. Integral rješavamo postupkom danim u dokazu Teorema 1.7:

$$\begin{aligned} I &= \left\{ x^2 = t, \quad x = \sqrt{t}, \quad dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \right\} = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{6}}(3 - t)^{\frac{1}{3}} t^{-\frac{1}{2}}\, dt \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{3 - t}{t} \right)^{\frac{1}{3}} dt \\ &= \left\{ \frac{3 - t}{t} = z^3, \quad t = \frac{3}{1 + z^3}, \quad dt = -\frac{9z^2}{(1 + z^3)^2}\, dz \right\} \\ &= -\frac{9}{2} \int \frac{z^3}{(1 + z^3)^2}\, dz. \end{aligned}$$

Za vježbu riješite integral do kraja.

Zadatak 1.8 Riješite integrale

??

1.7 Integriranje reda funkcija

U [M1, §6.4.3] pokazali smo kako se, uz određene uvjete, konvergentan red funkcija može derivirati član po član. Slična je situacija i s integriranjem. Najvažnije primjena integriranja reda funkcija je računanje integrala funkcija koje nisu elementarno integrabilna. Druga primjena je razvijanje u red potencija onih funkcija kod kojih se to ne može direktno napraviti pomoću Taylorove formule [M1, §6.5].

U slijedećem teoremu koriste se pojmovi uniformne konvergencije reda funkcija (vidi [M1, §6.4]) i reda potencija (vidi [M1, §6.4.2]).

Teorem 1.8 *Neka red neprekidnih funkcija $\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergira uniformno prema funkciji $s(x)$, odnosno*

$$s(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_n(x).$$

Tada je

$$\int s(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_n(x)\,dx.$$

Posebno, za red potencija vrijedi

$$\int \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\Big)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + C$$

na intervalu konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Pokažimo kako pomoću Teorema 1.8 možemo izračunati razvoj u red potencija integrala koji nisu elementarno rješivi.

Primjer 1.14 a) Integral

$$I = \int e^{-x^2}\,dx$$

nije elementarno rješiv, odnosno ne može se prikazati konačnim zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem, dijeljenjem i komponiranjem elementarnih funkcija. Ovaj integral je od velike važnosti u teoriji vjerojatnosti i statistici jer funkcija vjerojatnosti *Gaussove* ili *normalne* razdiobe ima oblik funkcije $f(x) = e^{-x^2}$. Prema [M1, §6.5] MacLaurinov razvoj funkcije e^x glasi

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pri tome je konvergencija uniformna po [M1, Teorem 6.16]. Zamijenimo li x s $-x^2$, za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!},$$

pri čemu je konvergencija uniformna. Teorem 1.8 daje

$$I = \int e^{-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C.$$

Dakle, našli smo razvoj traženog integrala u uniformno konvergentan red potencija. Pomoću ovog reda možemo izračunati vrijednost funkcije $I = I(x)$ u bilo kojoj točki x sa željenom točnošću. Dobiveni red nije Taylorov red, tako da ne vrijedi formula za ostatak. Međutim, kako je red alterniran, zaključujemo da pogreška prilikom aproksimacije konačnom parcijalnom sumom nije veća od prvog zanemarenog člana. Na primjer, vrijednost integrala I u točki $x = 0.1$ uz $C = 0$ izračunata s prva tri člana reda (za $n = 0, 1, 2$) je

$$I(0.1) = \frac{0.1}{1} - \frac{0.1^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{0.1^5}{5} = 0.099667\dot{6}.$$

Četvrti član reda (za $n = 3$) jednak je

$$-\frac{1}{6} \cdot \frac{0.1^7}{7} = -2.3809 \cdot 10^{-9},$$

pa zaključujemo da pogreška nije veća od $2.3809 \cdot 10^{-9}$, odnosno

$$\begin{aligned} I(0.1) &\in [0.099667\dot{6} - 2.3809 \cdot 10^{-9}, 0.099667\dot{6}] \\ &= [0.099667664, 0.099667667], \end{aligned}$$

što je *relativna pogreška manja od tri stota dijela tisućitog dijela jednog promila.*

b) Integral

$$I = \int \frac{\sin x}{x}\, dx$$

također nije elementarno rješiv. Prema [M1, §6.5] MacLaurinov razvoj funkcije $\sin x$ glasi

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

pri čemu je konvergencija uniformna po [M1, Teorem 6.16]. Za $x \neq 0$ vrijedi

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Primijetimo da je red na desnoj strani definiran za svaki $x \in R$, dok zadana funkcija nije definirana u točki $x = 0$. No, kako se oni razlikuju samo u jednoj točki, po Definiciji 1.1 oni imaju istu primitivnu funkciju, pa tako i isti integral. Sada možemo primijeniti Teorem 1.8:

$$I = \int \frac{\sin x}{x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int x^{2n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C.$$

Zadatak 1.9 a) Pomoću razvoja u red potencija izračunajte integral

$$\int \frac{e^{-x}}{x}\, dx.$$

b) Izračunajte vrijednosti integrala iz Primjera 1.14 a) u točkama $x = 0.2$ i $x = 1$ uz $C = 0$ koristeći prva tri člana reda i ocijenite pogrešku.

c) k-tu parcijalnu sumu reda I iz Primjera 1.14 a) u točki x uz $C = 0$ možemo izračunati pomoću slijedećeg Matlab programa:

```
format long
k=3;
x=0.1;
I=0;
for n=1:k
   I=I+(-1)^(n-1)*x^(2*n-1)/((2*n-1)*prod(1:n-1));
end
I
pogreska=(-1)^k*x^(2*k+1)/((2*k+1)*prod(1:k))
relativna_pogreska=abs(pogreska/I)
```

Izračunajte aproksimacije vrijednosti integrala I u različitim točkama x s različitim parcijalnim sumama (za različite vrijednosti k), te odgovarajuće pogreške. Za računanje možete koristiti program Octave On-line. Naredba `format long` je potrebna da bi se prikazalo svih 16 znamenki koje program računa.

d) Preradite prethodni program tako da računa k-tu parcijalnu sumu integrala I iz Primjera 1.14 b), te izračunajte vrijednosti integrala i odgovarajuće pogreške u raznim točkama x za razne vrijednosti k.

e) Funkciju e^{-x^2} možemo nacrtati na intervalu $[-4, 4]$ pomoću slijedećeg Matlab programa:

```
x=-4:0.01:4;
plot(x,exp(-x.^2))
```

Nacrtajte funkciju na različitim intervalima koristeći program Octave On-line.

Teorem 1.8 također možemo iskoristiti je računanje razvoja u red potencija onih funkcija kod kojih to ne možemo direktno napraviti.

Primjer 1.15 Funkciju $\operatorname{arctg} x$ ne možemo razviti u red potencija direktnom primjenom Taylorove formule [M1, §6.5]. Naime, sukcesivno deriviranje daje

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arctg} x)'' = \frac{-1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x, \ldots$$

pa derivacije postaju vrlo složene. Zato ćemo koristiti geometrijski red funkcija [M1, §6.4] za koji vrijedi

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x}, \qquad \forall x\in(-1,1).$$

Zamijenimo li x s $-x^2$, za $x\in(-1,1)$ vrijedi

$$1-x^2+x^4-x^6+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}=(\operatorname{arctg} x)'.$$

Teorem 1.8 daje

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int x^{2n}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+C.$$

No, zbog toga što se na lijevoj strani nalazi konkretna funkcija, konstanta C ne može biti proizvoljna. Iz uvjeta $\operatorname{arctg} 0=0$ slijedi $C=0$. Dakle,

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad \forall x\in(-1,1). \tag{1.8}$$

Ispitajmo konvergenciju reda na desnoj strani u rubovima intervala. U točki $x=-1$ red glasi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n+1}}{2n+1}=-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots.$$

Ovaj red konvergira po Leibnitzovom kriteriju [M1, §6.2.4]. nadalje, zbog neprekidnosti lijeve i desne u jednakosti (1.8), zaključujemo da red konvergira prema $\operatorname{arctg}(-1)=-\pi/4$. Slično razmatranje za točku $x=-1$ daje

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

Gornji red možemo koristiti za računanje broja π, međutim konvergencija je vrlo spora. Naime, red je alterniran, pa zaključujemo da pogreška prilikom aproksimacije konačnom parcijalnom sumom nije veća od prvog zanemarenog člana. (Slično smo već zaključili u Primjeru 1.14 a).) Na primjer, kada zbrojimo prvih 1000 članova reda, pogreška je jednaka $-1/(2001)$, što znači da smo izračunali tek prve tri decimale broja π.

Zadatak 1.10 k-tu parcijalnu sumu prethodnog reda I i odgovarajuću aproksimaciju broja π možemo izračunati pomoću slijedećeg Matlab programa:

```
format long
k=1000;
a=ones(k,1);
a(2:2:k)=-1;
for i=1:k; a(i)=a(i)/(2*i-1); end
p=4*sum(a)
pi
```

Izračunajte aproksimacije broja *pi* za različite vrijednosti k, i usporedite s pravom vrijednošću. Koliko se točnih decimala dobije za $n = 10, 100, 1000$? Za računanje koristite program Octave On-line.

1.8 Slobodan pad uz otpor zraka

Korištenjem integralnog računa iz ove glave i diferencijalnog računa iz [M1, §5], možemo rješavati razne probleme u fizici i tehnici, ili općenito prirodi, što je i svrha integralnog i diferencijalnog računa. U ovom poglavlju iskoristit ćemo do sada naučeno za rješavanje problema slobodnog pada.

Pretpostavimo da je prilikom slobodnog para otpor zraka proporcionalan kvadratu brzine. Tada prema drugom Newtonovom zakonu vrijedi

$$ma = mg - kv^2,$$

pri čemu je m masa tijela koje pada, a ubrzanje, g gravitacija, k koeficijent trenja i v brzina.

Izvest ćemo formulu za brzinu v u ovisnosti o prijeđenom putu s, $v(s)$ (vidi Sliku 1.2 za $m = k$).

Iz Newtonove formule slijedi

$$a = \frac{k}{m}\left(\frac{mg}{k} - v^2\right). \tag{1.9}$$

Kako je ubrzanje derivacija brzine po vremenu, a brzina derivacija puta po vremenu, možemo pisati

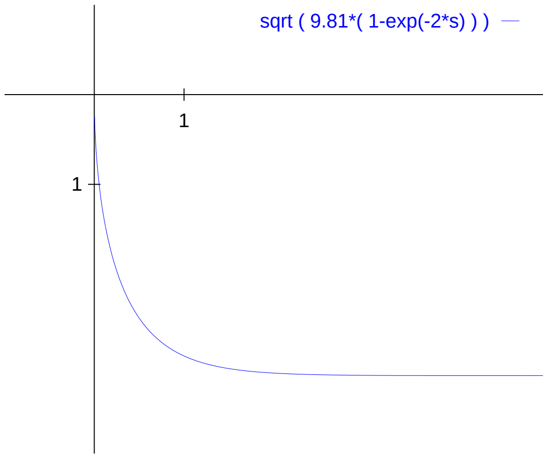
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}.$$

Kombinirajući dvije prethodne formule uz oznaku $\alpha = mg/k$ imamo

$$\frac{v}{\alpha - v^2}\, dv = \frac{k}{m}\, ds.$$

Integriranje obaju strana daje

$$\int \frac{v}{\alpha - v^2}\, dv = \frac{k}{m} \int ds = \frac{k}{m} s + C.$$



Slika 1.2: Slobodan pad uz otpor zraka za $m = k$

Integral na lijevoj strani riješimo supstitucijom $\alpha - v^2 = u$, pa je

$$-\frac{1}{2}\ln|\alpha - v^2| = \frac{k}{m}s + C.$$

Iz formule (1.9) i činjenice da je ubrzanje pozitivno slijedi $\alpha - v^2 > 0$, odnosno $\ln|\alpha - v^2| = \ln(\alpha - v^2)$. Dalje, potrebno je odrediti konstantu C. Pretpostavili smo da gibanje kreće iz ishodišta koordinatnog sustava (Slika 1.2), odnosno $v(0) = 0$, pa uvrštavanje u prethodnu formulu daje

$$C = -\frac{1}{2}\ln\alpha.$$

Dakle,

$$\ln(\alpha - v^2) = -2\frac{k}{m}s + \ln\alpha.$$

Svojstvo logaritma (L4) iz [M1, §4.6.4] daje

$$\ln\frac{\alpha - v^2}{\alpha} = -2\frac{k}{m}s,$$

pa eksponenciranje daje

$$\frac{\alpha - v^2}{\alpha} = e^{-2\frac{k}{m}s}.$$

Rješavanje ove jednadžbe po v, koristeći pri tome definiciju od α i činjenicu da je $v \geq 0$, konačno daje

$$v(s) = \sqrt{\frac{mg}{k}\left(1 - e^{-2\frac{k}{m}s}\right)}, \qquad s \geq 0.$$

Vidimo kako se brzina ne može beskonačno povećavati jer jer

$$v_\infty = \lim_{s\to\infty} \sqrt{\frac{mg}{k}\left(1-e^{-2\frac{k}{m}s}\right)} = \sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

Isto smo mogli zaključiti i direktno iz formule (1.9) jer za tu vrijednost brzine ubrzanje iščezava.

Pogledajmo još što se dogodi kada nema otpora zraka, odnosno za $k = 0$. Uvrštavanje daje neodređeni oblik, $v_{k=0}(s) = \sqrt{(1-1)/0}$. Svojstvo neprekidnih funkcija [M1, Teorem 4.7 (ii)] (u ovom slučaju drugi korijen) i L'Hospitalovo pravilo [M1, §5.5.3] daju poznatu formulu

$$\begin{aligned} v_{k=0}(s) &= \lim_{k\to 0} \sqrt{\frac{mg}{k}\left(1-e^{-2\frac{k}{m}s}\right)} = \sqrt{\lim_{k\to 0} \frac{mg}{k}\left(1-e^{-2\frac{k}{m}s}\right)} \\ &= \sqrt{\lim_{k\to 0} \frac{mg}{1}\left(0-e^{-2\frac{k}{m}s}((-2\frac{s}{m})\right)} \\ &= \sqrt{2gs}. \end{aligned}$$

Integralni račun se također korisiti i kod izvođenja formule za put u ovisnosti o vremenu. Drugačijim pristupom, čiji izvod preskačemo, dobije se formula za brzinu kao funkciju vremena

$$v(t) = \alpha \operatorname{th}(\beta t), \qquad t \geq 0,$$

gdje je $\alpha = \sqrt{mg/k}$ i $\beta = \sqrt{gk/m}$. Put kao funkcija vremena je integral brzine:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int \alpha \operatorname{th}(\beta t)\, dt = \alpha \int \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\, dt = \left\{ \begin{matrix} \operatorname{ch}(\beta t) = u \\ \beta \operatorname{ch}(\beta t) = du \end{matrix} \right\} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \int \frac{du}{u} = \frac{\alpha}{\beta} \ln|u| = \frac{\alpha}{\beta} \ln(\operatorname{ch}(\beta t)) + C. \end{aligned}$$

U zadnjoj jednakosti koristili smo činjenicu da je kosinus hiperbolni uvijek veći ili jednak jedan. Konstantu C odredimo iz početnog uvjeta $s(0) = 0$,

$$0 = \frac{\alpha}{\beta} \ln(\operatorname{ch} 0) + C = \frac{\alpha}{\beta} \ln 1 + C = C.$$

Dakle,

$$s(t) = \frac{\alpha}{\beta} \ln(\operatorname{ch}(\beta t)) = \frac{m}{k} \ln\left(\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}\, t\right)\right), \qquad t \geq 0.$$

2.

ODREĐENI INTEGRAL

2.1 Definicija i osnovna svojstva **41**
2.2 Newton-Leibnitzova formula **46**
2.3 Supstitucija i parcijalna integracija **47**
2.4 Teoremi o određenom integralu **48**
2.5 Nepravi integral **51**
2.5.1 Kriteriji konvergencije 54
2.6 Primjene određenog integrala **56**
2.6.1 Površina ravninskog lika 56
2.6.2 Duljina luka ravninske krivulje 63
2.6.3 Volumen rotacionog tijela 67
2.6.4 Oplošje rotacionog tijela 69
2.7 Numeričko integriranje **71**
2.7.1 Eliptički integrali 71
2.7.2 Trapezna formula 72
2.7.3 Simpsonova formula 74
2.7.4 Richardsonova ekstrapolacija 76
2.7.5 Programi 77

Za razliku od neodređenog integrala koji je skup funkcija (Definicija 1.2, određeni integral je realan broj. Taj broj je dobiven iz podintegralne funkcije i intervala na kojem tu funkciju promatramo, a način na koji se računa, kao i njegove primjene, tema su ovog poglavlja. Premda su, dakle, neodređeni i određeni integral dva potpuno različita matematička objekta, među njima postoji jaka veza.

2.1 Definicija i osnovna svojstva

U ovom poglavlju definirat ćemo prvo rastav segmenta, gornju i donju sume, gornji i donji integral, te konačno određeni integral. Potom ćemo dati osnovna svojstva određenog integrala i navesti dovoljan uvjet integrabilnosti.

Definicija 2.1 *Rastav* ili *dekompozicija* segmenta $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je svaki konačan skup točaka $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ takav da je

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b.$$

Skup svih dekompozicija segmenta $[a, b]$ označavamo s $\mathbb{D}$.

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. *Gornja suma* je broj (Slika 2.1)

$$g(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

gdje je

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Donja suma je broj (Slika 2.2)

$$d(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

gdje je

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Gornji (Riemannov) integral je broj

$$I^* = \inf\{g(f, D) : D \in \mathbb{D}\},$$

a *donji (Riemannov) integral* je broj

$$I_* = \sup\{d(f, D) : D \in \mathbb{D}\}.$$

Funkcija f je *(Riemann) integrabilna na segmentu* $[a, b]$ ako je $I^* = I_*$. *Riemannov integral* ili *određeni integral* funkcije f od a do b je broj

$$I = I_* = I^*.$$

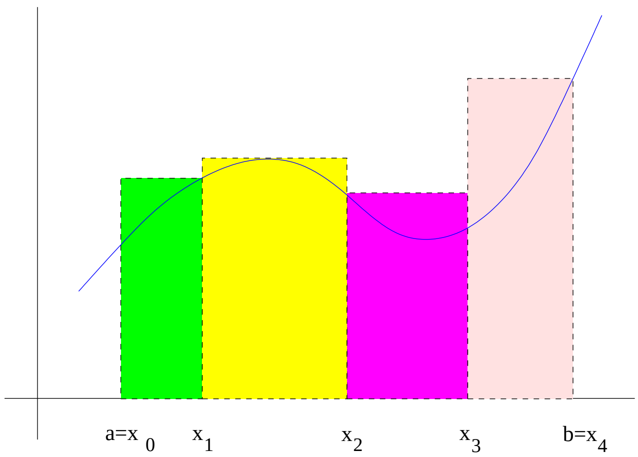
Određeni integral označavamo s

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Napomena 2.1 U literaturi se određeni integral često definira i pomoću *lijevih* i *desnih* suma,

$$l(f, D) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \Delta x_i,$$

$$r(f, D) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i.$$



Slika 2.1: Gornja suma

Iz Definicije 2.1 slijede osnovna svojstva i geometrijsko značenje određenog integrala:

O1. Za svaki rastav $D \in \mathbb{D}$ vrijedi

$$I \leq g(f, D), \qquad I \geq d(f, D).$$

O2. Ako je $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a, b]$, tada je integral I jednak površini između krivulje $x, f(x)$ is x-osi od a do b. Naime, na Slikama 2.1 i 2.2 vidimo da usitnjavanjem rastava D gornje i donje sume sve bolje aproksimiraju tu površinu.

O3. Očito vrijedi

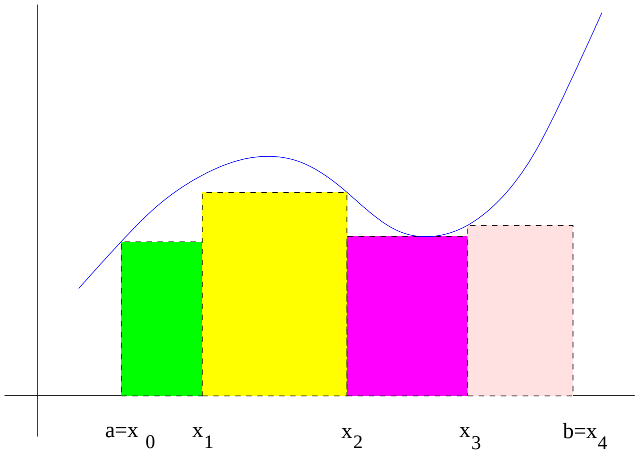
$$\int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

O4. Djelovi površine koji se nalaze ispod x-osi pribrajaju se s negativnim predznakom. Naime, za dio funkcije koji se nalazi ispod x-osi su veličine M_i i m_i negativne. Iz ovog svojstva, na primjer, slijedi da je $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = 0$, što možemo zaključiti i bez računanja integrala.

O5. Za $a \leq b$ definiramo

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

Smisao ove definicije je slijedeći: kada u $\int_a^b f(x)\, dx$ varijabla x ide od a do b, tada je prirast dx pozitivan, a kada x ide od b prema a, tada smatramo da je prirast dx negativan.

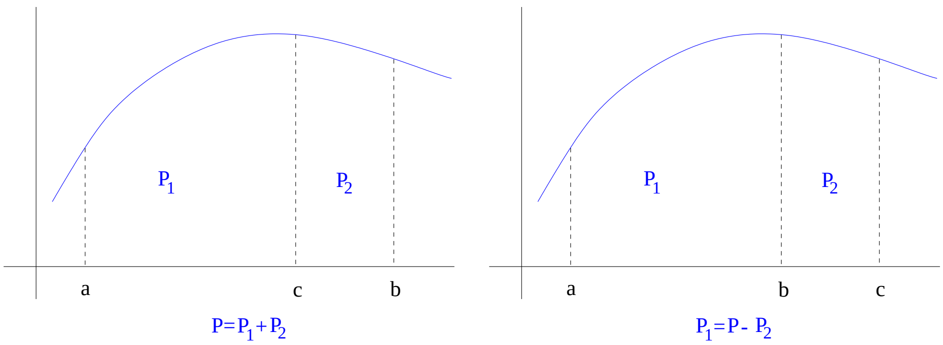


Slika 2.2: Donja suma

O6. Područje integracije možemo rastaviti na konačno djelova. Na primjer, ukoliko svi navedeni integrali postoje, tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Ako je $a \leq c \leq b$ tada je jednakost očita jer se radi o zbrajanju površina. No, zbog svojstva O5, jednakost vrijedi i kada je $c \leq a \leq b$ ili $a \leq b \leq c$ (Slika 2.3).



Slika 2.3: Rastav integrala na djelove

O7. Funkcija f je također integrabilna na svakom pod-segmentu $[c, d] \subseteq [a, b]$. Naime, gornji i donji integrali, I^* i I_*, mogu biti konačni i jednaki samo ako su gornji i donji integrali $I^*_{[c,d]}$ i$I_*^{[c,d]}$ konačni i jednaki za svaki pod-segment $[c,d]$.

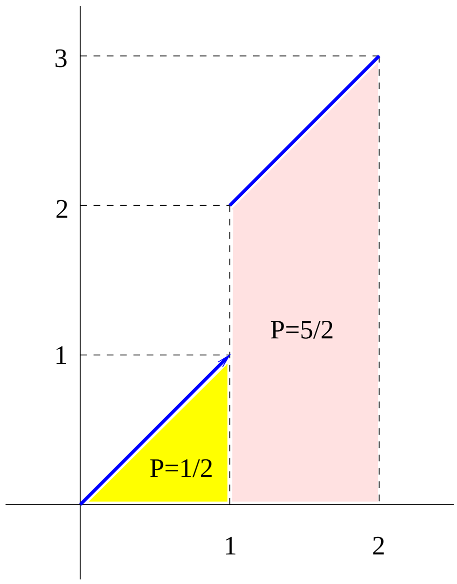
Slijedeći važan teorem dam daje dovoljan uvjet integrabilnosti funkcije f. Teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 2.1 *Ako je funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ omeđena i neprekidna na skupu $[a,b]\setminus A$, pri čemu je skup točaka $A\subset[a,b]$ prebrojiv, tada je f integrabilna na $[a,b]$.*

Na primjer, kako vrijednost funkcije u jednoj točki ne utječe na površinu, za funkciju prikazanu na Slici 2.4 vrijedi

$$\int\limits_0^2 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \int\limits_1^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}+2+\frac{1}{2}=3,$$

bez obzira na definiranost ili vrijednost funkcije u točki $x=2$. Slično vrijedi i za prebrojivo mnogo točaka.



Slika 2.4: Dovoljan uvjet integrabilnosti

Slijedeći primjer pokazuje što se može dogoditi kada je skup A iz Teorema 2.1 neprebrojiv.

Primjer 2.1 Promotrimo funkciju $f:[0,1]\to\{0,1\}$ definiranu s

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

Ovu funkciju smo već promatrali u [M1, §4.4.2]. Funkcija f je očito omeđena. Međutim, kako su skupovi $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ gusti jedan u drugom (vidi [M1, §1.7]), funkcija f ima prekid u svakoj točki segmenta $[0,1]$, odnosno ima neprebrojivo mnogo prekida. Stoga za svaki rastav D vrijedi $m_i = 0$ i $M_i = 1$, pa je

$$d(f,D) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0, \qquad g(f,D) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = 1.$$

Dakle, $I_* = 0 \neq 1 = I^*$, pa funkcije f nije integrabilna.

2.2 Newton-Leibnitzova formula

U ovom poglavlju dokazat ćemo osnovni teorem integralnog računa koji daje vezu između neodređenog i određenog integrala.

Teorem 2.2 *Neka je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna na $[a,b]$ i neka je $F(x)$ neka primitivna funkcija funkcije f na $[a,b]$. Tada vrijedi* Newton-Leibnitzova formula*:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Dokaz. Neka je $g(f,D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ proizvoljna gornja suma. Jednakost $F'(x) = f(x)$ znači da je f brzina kojom se F mijenja. Kako je na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ brzima kojom se F mijenja uvijek manja ili jednaka M_i, zaključujemo da će se na čitavom intervali funkcija F promijeniti najviše za $M_i \Delta x_i$. Drugim riječima,

$$M_i \Delta x_i \geq F(x_i) - F(x_{i-1}).$$

Zbrajajući ove nejednakosti za $i = 1, 2, \ldots, n$ imamo

$$g(f,D) \geq \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a).$$

Slično, za proizvoljnu donju sumu vrijedi

$$d(f,D) \leq F(b) - F(a).$$

Dakle, broj $F(b) - F(a)$ je veći ili jednak od svake donje sume, a manji ili jednak od svake gornje sume, pa je teorem dokazan. ■

Iz teorema zaključujemo da se određeni integral može riješiti tako da se nađe neodređeni integral podintegralne funkcija, a onda uvrste granice. Newton-Leibnitzovu formulu još zapisujemo kao

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

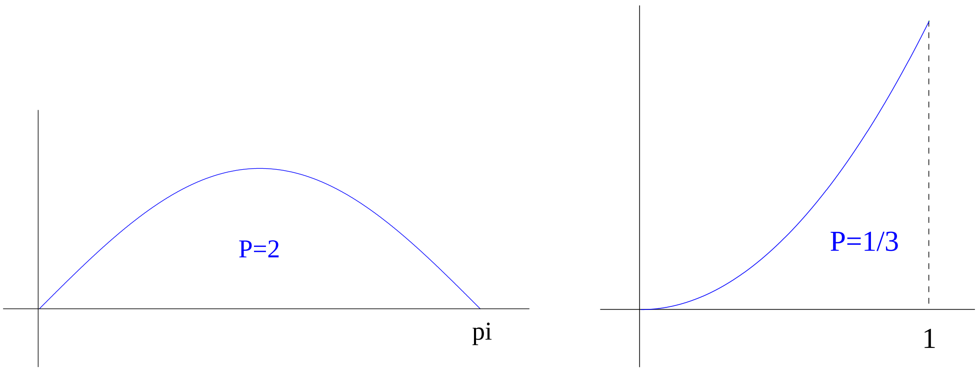
Primjer 2.2 Površina između funkcije $y = \sin x$ i x-osi od 0 do π jednaka je

$$\int_0^\pi \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2.$$

Slično, površina između kvadratne parabole $y = x^2$ i x-osi od 0 do 1 jednaka je

$$\int_0^1 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Površine su prikazane na Slici 2.5.



Slika 2.5: Primjena Newton-Leibnitzove formule

2.3 Supstitucija i parcijalna integracija

Svaki određeni integral možemo riješiti tako da prvo riješimo pripadni neodređeni integral, a potom uvrstimo granice prema Newton-Leibnitzovoj formulu. Promotrimo integral

$$I = \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}.$$

Prvo pomoću supstitucije riješimo neodređeni integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}-1} = \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2\,t\,dt \end{array} \right\} = \int \frac{2\,t\,dt}{t-1} = 2\,t + 2\ln|t-1|$$
$$= 2\sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x}-1|.$$

Primijetimo da je supstitucija dobro definirana jer je $x \geq 0$. Također primijetimo da kod rješavanja neodređenog integrala ne treba pisati konstantu integracije C, jer nam ona ne treba u Newton-Leibnitzovoj formuli. Dakle,

$$I = 2\sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x}-1| \Big|_4^9 = 2\,(3+\ln 2) - 2\,(2+\ln 1) = 2 + 2\ln 2.$$

Ako prilikom zamjene varijabli ujedno izvršimo i odgovarajuću zamjenu granica, određeni integral rješavamo na slijedeći način:

$$\begin{aligned}
\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1} &= \left\{ \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2\,t\,dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array} \right\} = \int_2^3 \frac{2\,t\,dt}{t-1} \\
&= 2\int_2^3 dt + 2\int_2^3 \frac{dt}{t-1} = 2\,t\Big|_2^3 + 2\ln|t-1|\Big|_2^3 \\
&= 2(3-2) + 2(\ln 2 - \ln 1) = 2 + 2\ln 2.
\end{aligned}$$

Kod zamjene granica trebamo uvijek paziti da ona bude dobro definirana. Tako u ovom primjeru supstitucija $x = t^2$ zapravo znači $t = \sqrt{x}$, pa smo prema tome i odabrali nove granice. Posebno oprezan treba biti kod zamjene granica u slučaju periodičkih (trigonometrijskih) funkcija.

Formula za parcijalnu integraciju također vrijedi u određenom integralu:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \ln x\,dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \dfrac{1}{x}\,dx, \\ dv = dx, & v = x \end{array} \right\} = x\ln x\,\Big|_1^2 - \int_1^2 x\frac{1}{x}\,dx \\
&= 2\ln 2 - 1\ln 1 - x\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1.
\end{aligned}$$

2.4 Teoremi o određenom integralu

U ovom poglavlju dokazat ćemo još neka svojstva određenog integrala.

U Teoremu 2.2 smo pokazali kako se određeni integral može izračunati pomoću primitivne funkcije. Slijedeći teorem nam daje obrnutu vezu, odnosno kazuje kako se primitivna funkcija može dobiti pomoću određenog integrala, to jest pomoću površine između podintegralne funkcije i x-osi.

Teorem 2.3 *Neka je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna na $[a,b]$. Tada je funkcija F definirana s*

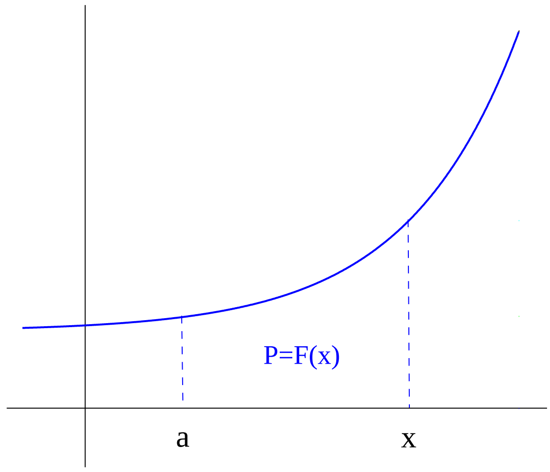
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad x \in [a,b],$$

primitivna funkcija funkcije f na intervalu $[a,b]$ za koju je $F(a) = 0$ (Slika 2.6).

Dokaz. Prema svojstvu O3 iz poglavlja 2.1 je $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$. Vrijedi $F(x) = G(t)\big|_a^x = G(x) - G(a)$, gdje je G neka primitivna funkcija funkcije f. No,

$$F'(x) = (G(x) - G(a))' = G'(x) = f(x),$$

pa je F također primitivna funkcija funkcije f. ■



Slika 2.6: Primitivna funkcija kao određeni integral

U [M1, §5.5.2] dokazali smo Lagrangeov teorem srednje vrijednosti za derivaciju. Slijedeći teorem je analogija tog teorema za određeni integral, a dokazuje se pomoću Lagrangeovog teorema.

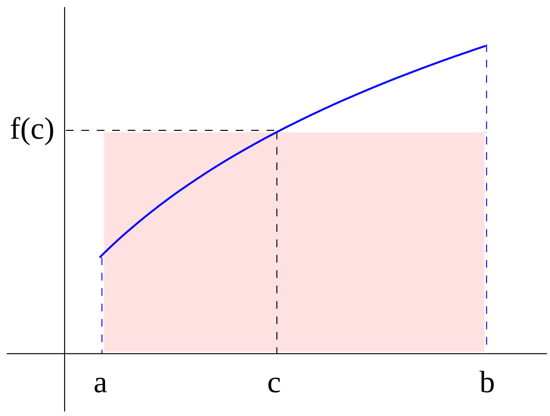
Teorem 2.4 (Teorem srednje vrijednosti) *Ako je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna, tada postoji točka $c \in (a,b)$ takva da je*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Dokaz. Neka je F primitivna funkcija funkcije f na segmentu $[a,b]$. Kako je f neprekidna, to je F derivabilna na $[a,b]$. Dakle, funkcija F ispunjava uvjete Lagrangeovog teorema, pa postoji točka $c \in (a,b)$ takva da je

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a},$$

i teorem je dokazan. ■



Slika 2.7: Teorem srednje vrijednosti

Grafička interpretacija ovog teorema je slijedeća: površina između funkcija $f(x)$ i x-osi od a do b jednaka je površini pravokutnika s bazom $b-a$ i visinom $f(c)$, s time što površina i visina mogu biti i negativne (Slika 2.7).

Zadatak 2.1 Neka je $f(x)=x^2$, $a=0$ i $b=1$ (vidi Primjer 2.2). Izračunajte točku c koja zadovoljava tvrdnju Teorema srednje vrijednosti 2.4.

Teorem 2.5 *Neka su funkcije $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilne na $[a,b]$. Tada vrijedi:*

(i) određeni integral je linearan*:*

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx,$$

(ii) određeni integral je monoton*, odnosno ako je $f(x)\le g(x)$ za svaki $x\in[a,b]$, tada je*

$$\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx,$$

(iii) određeni integral zadovoljava nejednakost trokuta*:*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Dokaz.

(i) Neka su F i G primitivne funkcije od f i g, redom. Kako je $(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha f(x) + \beta g(x)$, zaključujemo da je funkcija $\alpha F + \beta G$ primitivna funkcija funkcije $\alpha f + \beta g$. Newton-Leibnitzova formula daje

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx &= \alpha F(x) + \beta G(x)\Big|_a^b \\ &= \alpha F(b) + \beta G(b) - (\alpha F(a) + \beta G(a)) \\ &= \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a)) \\ &= \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

(ii) Zbog $f(x) \leq g(x)$, za svaku dekompoziciju D segmenta $[a, b]$ odgovarajuće donje sume zadovoljavaju nejednakosti

$$d(f, D) \leq d(g, D) \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Dakle

$$\int_a^b g(x)\,dx \geq \sup_{D \in \mathbb{D}} d(f, D) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(iii) Svojstvo apsolutne vrijednosti realnog broja iz [M1, §1.7.2] povlači

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Druga tvrdnja teorema povlači

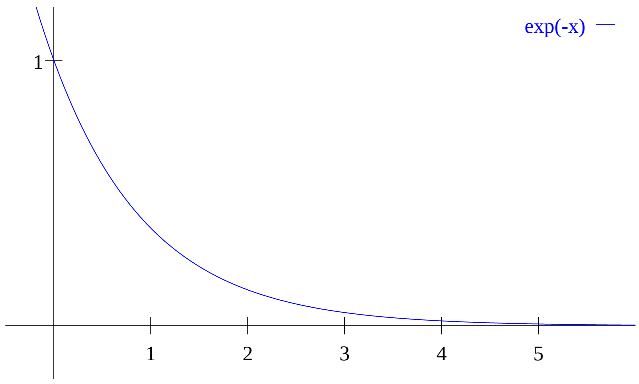
$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

pa isto svojstvo apsolutne vrijednosti (primijenjeno u obratnom smjeru) daje tvrdnju. ■

2.5 Nepravi integral

Nepravi integral je poopćenje određenog integrala kada područje integracije ima barem jednu beskonačnu granicu, ili kada funkcija unutar područja integracije nije omeđena (na primjer, ima vertikalnu asimptotu). Neprave integrale se rješavamo pomoću limesa. Ako je nepravi integral konačan, kažemo da je *konvergentan* ili da *konvergira*, u protivnom je *divergentan* odnosno *divergira*.

Želimo, na primjer, odrediti površinu između krivulje $y = e^{-x}$ i x-osi od nula do beskonačno (Slika 2.8).



Slika 2.8: Nepravi integral

Lako se možemo uvjeriti da je tražena površina konačna, unatoč tome što se područje proteže u beskonačno. Naime, ako uzmemo gornju sumu za $\Delta x_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, tada je tražena površina manja od sume reda brojeva (vidi Sliku 2.9)

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \Delta x_n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)}.$$

No, taj red je konvergentan po D'Alembertovom kriteriju [M1, §6.2.2], jer je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n}}{e^{-(n-1)}} = \frac{1}{e} < 1.$$

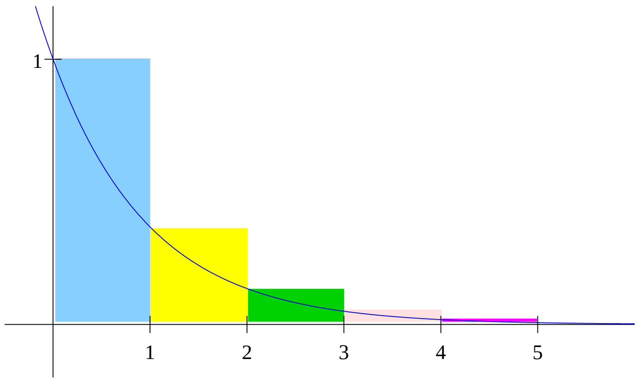
Površinu računamo pomoću nepravog integrala:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a e^{-x}\,dx = \lim_{a\to+\infty} (-e^{-x})\Big|_0^a = \lim_{a\to+\infty} -e^{-a} + e^0 = 1.$$

Slijedeći nepravi integral ponaša se kao red brojeva $\sum 1/n^p$ koji konvergira za $p > 1$, a divergira za $p \leq 1$ (vidi [M1, §6.2.2]).

Primjer 2.3 Izračunajmo integral

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx.$$



Slika 2.9: Konvergentna gornja suma nepravog integrala

Prelaskom na limes imamo

$$I = \lim_{a\to+\infty} \int_1^a x^{-p}\, dx.$$

Slučajeve $p = 1$, $p < 1$ i $p > 1$ ćemo analizirati posebno Za $p = 1$ vrijedi

$$I = \lim_{a\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^a = \lim_{a\to+\infty} \ln a - \ln 1 = +\infty,$$

pa integral divergira. Za $p \neq 1$ vrijedi

$$I = \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{-p+1} x^{-p+1}\Big|_1^a = \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{1-p} a^{1-p} - \frac{1}{1-p}.$$

Za $p < 1$ je $1 - p > 0$, pa je $I = +\infty$, odnosno integral divergira. Za $p > 1$ je $1 - p < 0$, pa je $I = 1/(p-1)$, odnosno integral konvergira.

Kao primjer nepravog integrala koji u rubu područja integracije ima vertikalnu asimptotu, uzet ćemo istu podintegralnu funkciju kao u prethodnom primjeru. Ponašanje integrala u odnosu vrijednost parametra p je obrnuto nego u prethodnom primjeru.

Primjer 2.4 Izračunajmo integral

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx.$$

Prelaskom na limes imamo

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_\varepsilon^1 x^{-p}\, dx.$$

Slučajeve $p=1$, $p<1$ i $p>1$ ćemo analizirati posebno Za $p=1$ vrijedi

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0_+}\ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon\to 0_+}\ln 1-\ln\varepsilon=-(-\infty)+\infty,$$

pa integral divergira. Za $p\neq 1$ vrijedi

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0_+}\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\Big|_{\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon\to 0_+}\frac{1}{1-p}-\frac{1}{1-p}\varepsilon^{1-p}.$$

Za $p<1$ je $1-p>0$, pa je $I=1/(1-p)$, odnosno integral konvergira. Za $p>1$ je $1-p<0$, pa je $I=+\infty$, odnosno integral divergira.

U slučaju kada u nepravom integralu imamo i beskonačne granice i točke prekida, integral rastavljamo na više djelova. Na primjer,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\,dx&=\int_0^{1}\frac{1}{x\ln^2 x}\,dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\,dx\\&=\lim_{\varepsilon\to 0_+}\lim_{\delta\to 0_+}\int_{\varepsilon}^{1-\delta}\frac{1}{x\ln^2 x}\,dx+\lim_{\gamma\to 0_+}\lim_{a\to+\infty}\int_{1+\gamma}^{a}\frac{1}{x\ln^2 x}\,dx.\end{aligned}$$

Zadatak 2.2 Riješite prethodni integral i pokažite da divergira u $+\infty$.

2.5.1 Kriteriji konvergencije

Slično kao kod redova brojeva [M1, §6.2.2 i §6.2.3], i kod nepravog integrala možemo zaključiti da li konvergira bez računanja samog integrala.

Poredbeni kriterij za nepravi integral glasi (usporedi [M1, Teorem 6.10]): ako je $0\leq f(x)\leq g(x)$ za svaki $x\in(a,b)$, pri čemu su a i b granice nepravog integrala, tada vrijedi slijedeće:

(i) konvergencija integrala $\int_a^b g(x)\,dx$ povlači konvergenciju integrala $\int_a^b f(x)\,dx$;

(ii) divergencija integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ povlači divergenciju integrala $\int_a^b g(x)\,dx$.

Teorem o apsolutnoj konvergenciji za nepravi integral glasi (usporedi [M1, Teorem 6.11]): konvergencija integrala $\int_a^b |f(x)|\,dx$ povlači konvergenciju integrala $\int_a^b f(x)\,dx$.

Primjer 2.5 Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi},$$

koji ima važnu primjenu u teoriji vjerojatnosti, nije elementarno rješiv. Međutim, koristeći poredbeni kriterij lako vidimo da taj integral konvergira. Kako je podintegralna funkcija parna, očito vrijedi (Slika 2.10)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Iz Slike 2.10, činjenice da za $x > 1$ vrijedi $0 < e^{-x^2} < e^{-x}$ i poredbenog kriterija, zaključujemo da je

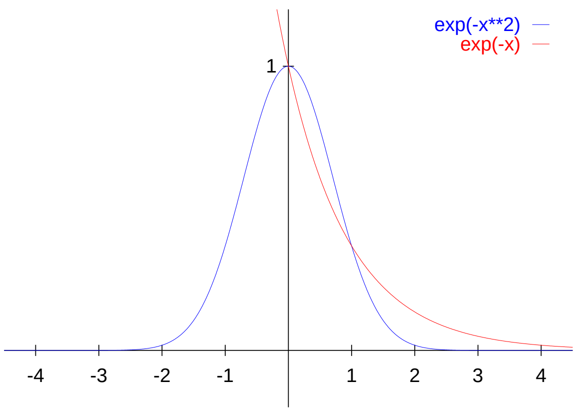
$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx + \int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leq 1 + \int_{1}^{+\infty} e^{-x}\,dx < 2,$$

pa promatrani integral konvergira.

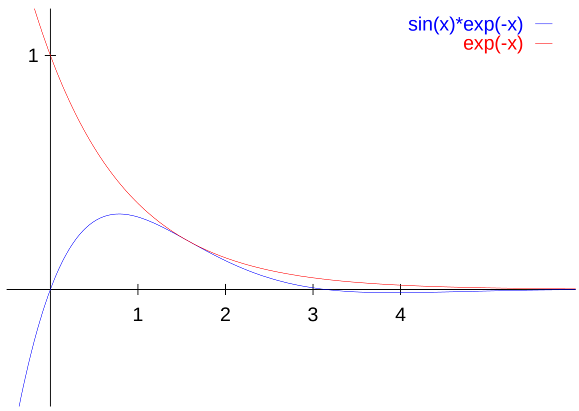
Kao ilustraciju apsolutne konvergencije promotrimo integral (vidi Sliku 2.11)

$$\int_{0}^{+\infty} \sin x\, e^{-x}\,dx.$$

Kako za $x \geq 0$ vrijedi $|\sin x\, e^{-x}| \leq e^{-x}$, po poredbenom kriteriju zaključujemo da $\int_0^{+\infty} |\sin x\, e^{-x}|\,dx$ konvergira. No, tada i zadani integral konvergira po teoremu o apsolutnoj konvergenciji.



Slika 2.10: Poredbeni kriterij za određeni integral



Slika 2.11: Apsolutna konvergencija nepravog integrala

2.6 Primjene određenog integrala

Osnovne primjene određenog integrala su:

– računanje površine ravninskih likova,

– računanje duljine luka ravninskih krivulja,

– računanje volumena (obujma) tijela koja nastaju rotacijom ravninskih krivulja oko zadane osi,

– računanje oplošja tijela koja nastaju rotacijom ravninskih krivulja oko zadane osi.

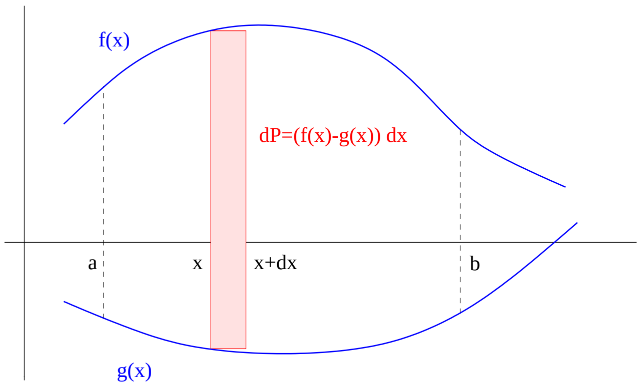
Svi navedeni problemi su u osnovi jednodimenzionalni, odnosno ovise samo o jednoj varijabli. Za svaku od ovih primjena izvest ćemo formule i dati primjere za slučajeve kada su funkcije zadane u Kartezijevim koordinatama, parametarski i u polarnim koordinatama, što ukupno daje 12 različitih primjena.

2.6.1 Površina ravninskog lika

Površinu između krivulja $f(x)$ i $g(x)$ od točke a do točke b računamo kao beskonačnu (integralnu) sumu beskonačno malih *elemenata površine* (Slika 2.12). Elementi površine su beskonačno mali pravokutnici s bazom δx i visinom $f(x) - g(x)$.

Površina se računa s formulom

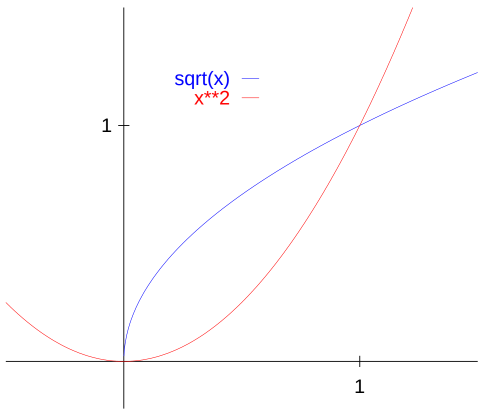
$$P = \int\limits_{[a,b]} dP = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\, dx. \tag{2.1}$$



Slika 2.12: Površina ravninskog lika i element površine

Primjer 2.6 Površina između krivulja $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$ dana je s (vidi Sliku 2.13)

$$P = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$



Slika 2.13: Površina ravninskog lika I

Kod računanja površina kao varijablu integracije možemo uzeti x ili y, ovisno o tome što je povoljnije.

Primjer 2.7 Izračunajmo površinu omeđenu krivuljama $y = x^2$ i $y = x - 2$ (Slika 2.14). Da bi odredili granice integracije prvo moramo naći sjecišta krivulja.

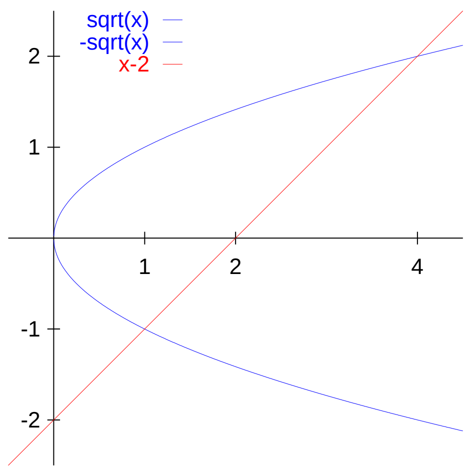
Izjednačavanje daje $y^2 = y + 2$, odnosno krivulje se sijeku u točkama $M = (1, -1)$ i $N = (4, 2)$.

Ako za varijablu integracije odaberemo y, tada je $y \in [-1, 2]$, gornja funkcija dana je s $f(y) = y + 2$, a donja funkcija dana je s $g(y) = y^2$. Dakle,

$$P = \int\limits_{-1}^{2} ((y+2) - y^2)\, dy = \frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

Ako za varijablu integracije odaberemo x, tada integral moramo rastaviti na dva dijela. U tom slučaju vrijedi

$$P = \int\limits_{0}^{1} (\sqrt{x} - (-\sqrt{x}))\, dx + \int\limits_{1}^{4} (\sqrt{x} - (x-2))\, dx = \cdots = \frac{9}{2}.$$



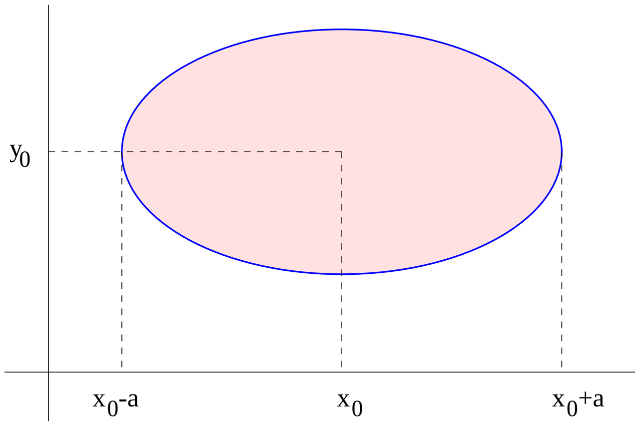
Slika 2.14: Površina ravninskog lika II

Pomoću određenog integrala možemo izvesti dobro poznate formule za površinu elipse i kružnice.

Primjer 2.8 Neka je zadana elipsa

$$\frac{(x-{}_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{2.2}$$

Zadana elipsa ima središte u točki $S = (x_0, y_0)$, a polu-osi su joj duge a i b (Slika 2.15).



Slika 2.15: Površina elipse

Očito je $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, a gornja i donja funkcija dane su s

$$f(x) = y_0 + b\sqrt{1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2}}, \qquad g(x) = y_0 - b\sqrt{1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2}}.$$

Površina elipse dana je s

$$\begin{aligned} P &= \int\limits_{x_0-a}^{x_0+a} \left[y_0 + b\sqrt{1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2}} - \left(y_0 - b\sqrt{1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2}} \right) \right] dx \\ &= \int\limits_{x_0-a}^{x_0+a} 2\, b \sqrt{1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2}}\, dx. \end{aligned}$$

Trigonometrijska supstitucija iz poglavlja 1.6 daje

$$\begin{aligned} P &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{x-x_0}{a} = \sin t, \quad t = \arcsin \frac{x-x_0}{a}, \\ dx = a \cos t\, dt, \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & x_0 - a & x_0 + a \\ \hline t & -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \\ &= 2\, a\, b \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t\, dt = 2\, a\, b \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \| \cos t| \cos t\, dt. \end{aligned}$$

Kako je na promatranom intervalu $\cos t \geq 0$, koristeći poznatu vezu između funkcija $\cos^2 t$ i $\cos 2t$ imamo

$$\begin{aligned} P &= 2\, a\, b \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 2\, a\, b \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\, dt = a\, b \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right] \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= a\, b\, \pi. \end{aligned}$$

Za $a = b = r$ formula (2.2) prelazi u jednadžbu kružnice radijusa r s centrom u točki $S = (x_0, y_0)$,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

čija je površina jednaka $P = r^2\pi$.

Zadatak 2.3 a) Riješite Primjer 2.8 pomoću supstitucije $(x - x_0)/a = \cos t$.

b) Riješite Primjer 2.8 integrirajući po varijabli y.

Parametarski zadana krivulja

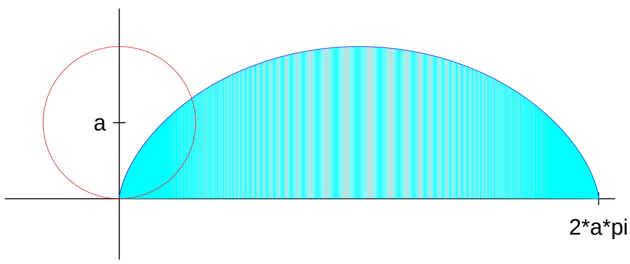
Kod parametarski zadane krivulje

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad t \in [t_1, t_2],$$

uzimamo da je donja krivulja $g = 0$, odnosno gledamo površinu između parametarski zadane krivulje i x-osi. Pri tome se dx računa kao diferencijal $dx = \dot{\varphi}(t)\, dt$.

Primjer 2.9 Izračunajmo površinu ispod jednog luka cikloide (Slika 2.16),

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t), \qquad a > 0, \quad t \in [0, 2\,\pi].$$



Slika 2.16: Površina ispod jednog luka cikloide

Tražena površina jednaka je

$$P = \int_0^{2\pi} [a(1 - \cos t) - 0] \cdot a(1 - \cos t)\, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t)\, dt = 3a^2\pi.$$

Formulu za površinu elipse iz Primjera 2.8 možemo još jednostavnije izvesti pomoću parametarski zadane funkcije.

Primjer 2.10 Elipsa iz Primjera 2.8 je parametarski zadana s

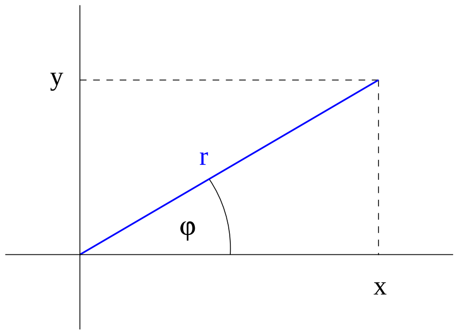
$$x = x_0 + a\cos t, \qquad y = y_0 + b\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Kada usporedimo ove formule s formulom (2.2) i Slikom 2.15, vidimo da za t od 0 do π prirast dx pada. Međutim, da bi mogli ispravno primijeniti formulu (2.1) dx mora rasti. Problem ćemo riješit tako što ćemo izračunati površinu donje polovice elipse, u kojem slučaju dx raste kada t ide od π do 2π. Dakle,

$$\begin{aligned} P &= 2\int_{\pi}^{2\pi} [y_0 - (y_0 + b\sin t)] \cdot a(-\sin t)\, dt = 2\,a\,b \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 t\, dt \\ &= 2\,a\,b \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)\, dt = a\,b\,\pi. \end{aligned}$$

Krivulja zadana u polarnim koordinatama

U polarnom koordinatnom sustavu točka $T = (x, y)$ zadaje se pomoću kuta φ kojeg polu-pravac koji izlazi iz ishodišta i prolazi točkom T zatvara s x-osi i udaljenošću r točke T od ishodišta (Slika 2.17).



Slika 2.17: Polarni koordinatni sustav

Transformacije iz polarnog u Kartezijev koordinatni sustav vrše se prema formulama

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Transformacije iz Kartezijevog u polarni koordinatni sustav vrše se prema formulama

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \end{aligned}$$

pri čemu se kvadrant u kojem se nalazi kut φ odredi sa slike ili iz kombinacije predznaka od x i y. Vidimo da je polarni koordinatni sustav, kao i gornje formule, identične formulama za trigonometrijski oblik kompleksnog broja iz [M1, §1.8.1].

Traženje površine likova zadanih u polarnom koordinatnom sustavu prikazano je na Slici 2.18. U polarnom koordinatnom sustavu krivulju zadajemo formulom

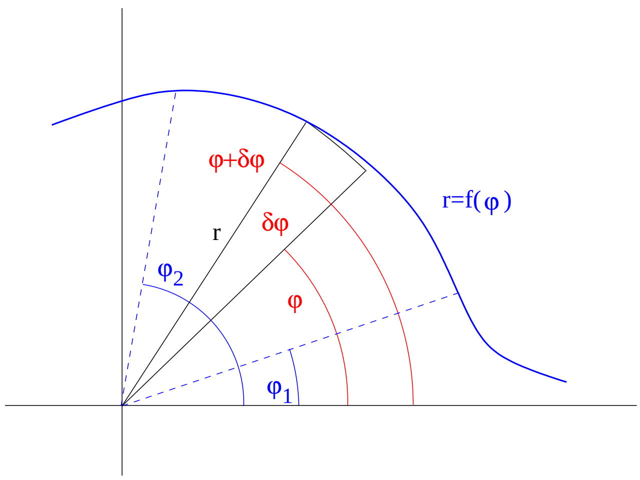
$$r = f(\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}.$$

Zbog prirode samog sustava obično tražimo površinu između krivulje $r = f(\varphi)$ i zraka $\varphi = \varphi_1$ i $\varphi = \varphi_2$. Shodno tome, element površine u polarnom koordinatnom sustavu je kružni isječak radijusa r s kutom $d\varphi$, odnosno

$$dP = \frac{1}{2} r^2 \, d\varphi.$$

Kao i Kartezijevim koordinatama, površina je jednaka beskonačnoj (integralnoj) sumi beskonačno malih elemenata površine, odnosno

$$P = \int\limits_{[\varphi_1,\varphi_2]} dP = \frac{1}{2} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \, d\varphi = \frac{1}{2} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi) \, d\varphi.$$



Slika 2.18: Element površine u polarnim koordinatama

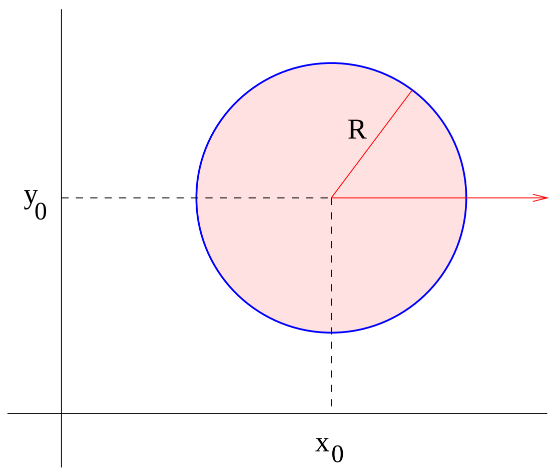
U polarnom koordinatnom sustavu vrlo je jednostavno izvesti formulu za površinu kružnice.

Primjer 2.11 Neka je zadana kružnica radijusa R s centrom u točki $T = (x_0, y_0)$,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Ako ishodište polarnog koordinatnog sustava postavimo u središte kružnice (Slika 2.19), tada kružnica ima jednadžbu $r = R$ (konstantna funkcija!), pa je

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2 \, d\varphi = \frac{1}{2} R^2 \, \varphi \, \Big|_0^{2\pi} = R^2 \, \pi.$$



Slika 2.19: Površina kruga u polarnim koordinatama

Linearne funkcije u polarnim koordinatama su spirale.

Primjer 2.12 Izračunajmo površinu određenu prvim zavojem Arhimedove spirale (Slika 2.20),

$$r = a\,\varphi, \qquad a > 0, \qquad \varphi \geq 0.$$

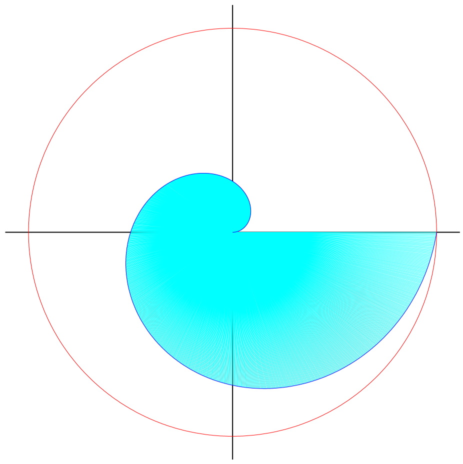
Vrijedi

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\,\varphi)^2 \, d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \, \frac{\varphi^3}{3} \, \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} a^2 \, \pi^3.$$

Primijetimo da je tražena površina jednaka trećini površine kružnice radijusa $2\,a\,\pi$.

2.6.2 Duljina luka ravninske krivulje

Postupak računanja duljine luka ravninske krivulje još se naziva *rektifikacija krivulje*. Slično kao i kod računanja površine, duljinu luka krivulja $f(x)$ od točke a do točke b računamo kao beskonačnu (integralnu) sumu beskonačno malih *elemenata duljine* dS. Formula za element duljine slijedi iz Pitagorinog poučka i



Slika 2.20: Arhimedova spirala $r = a\,\varphi$

činjenice da se funkcija u okolini neke točke može aproksimirati njenom tangentom (Slika 2.21),

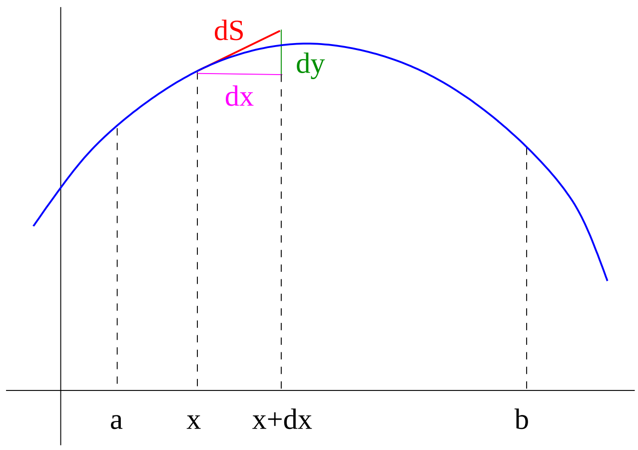
$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{2.4}$$

Ovdje po dogovoru uzimamo da je duljina luka pozitivna ako x raste, odnosno ako je dx pozitivan. Dakle, duljina luka krivulje $y = f(x)$ od a do b računa se formulom

$$S = \int\limits_{[a,b]} dS = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Primjer 2.13 Izračunajmo duljinu luka kvadratne parabole $y = x^2$ od 0 do 1. Na Slici 2.5 vidimo da za traženu duljinu S vrijedi $\sqrt{2} < S < 2$. Koristeći, na primjer, metodu neodređenih koeficijenata iz poglavlja 1.6.1, imamo

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln|2x + \sqrt{1+4x^2}|\,\Big|_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2 + \sqrt{5}) \approx 1.4789. \end{aligned}$$



Slika 2.21: Duljina luka ravninske krivulje i element duljine

Parametarski zadana krivulja

Kod parametarski zadane krivulje

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad t \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R},$$

također uzimamo da je duljina luka pozitivna kad t raste. Stoga je element duljine dan s

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt,$$

pa se duljina luka računa formulom

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

Primjer 2.14 a) Opseg kružnice radijusa r,

$$x = r\cos t, \qquad y = r\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

jednak je

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r(-\sin t))^2 + (r\cos t)^2}\, dt \int_0^{2\pi} r\, dt = r\, t \Big|_0^{2\pi} = 2\, r\, \pi.$$

b) Duljina jednog luka cikloide iz Primjera 2.9 (Slika 2.16) jednaka je

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{[a(1-\cos t)]^2 + (a\sin t)^2}\, dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt.$$

Koristeći poznatu vezu između trigonometrijskih funkcija, $1-\cos t = 2\sin^2(t/2)$, i činjenicu da je $\sin^2(t/2) \geq 0$ za $t \in [0, 2\pi]$, imamo

$$S = 2\,a \int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = -4\,a\cos\frac{t}{2}\,\Big|_0^{2\pi} = 8\,a.$$

Krivulja zadana u polarnim koordinatama

Krivulju zadanu u polarnim koordinatama,

$$r = r(\varphi), \qquad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2],$$

prvo pomoću transformacija (2.3) prebacimo u parametarski oblik,

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi = r(\varphi)\sin\varphi. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sada je

$$\dot{x} = r'(\varphi)\cos\varphi + r(\varphi)(-\sin\varphi), \qquad \dot{y} = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi,$$

odnosno

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = &\quad (r'(\varphi))^2\cos^2\varphi + r^2(\varphi)\sin^2\varphi - 2r'(\varphi)r(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi \\ &+ (r'(\varphi))^2\sin^2\varphi + r^2(\varphi)\cos^2\varphi + 2r'(\varphi)r(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi \\ = &\quad (r'(\varphi))^2 + r^2(\varphi). \end{aligned}$$

Dakle, duljinu luka krivulje u polarnim koordinatama računamo formulom

$$S = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi^2} \sqrt{r'^2 + r^2}\,d\varphi.$$

Primjer 2.15 Duljina luka prvog zavoja Arhimedove spirale (vidi Primjer 2.12 i Sliku 2.20) jednaka je

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + (a\,\varphi)^2}\,d\varphi = a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \cdots \\ &= a\left(\frac{1}{2}\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \frac{1}{2}\ln|\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}|\right)\Big|_0^{2\pi} \approx 21.256\,a. \end{aligned}$$

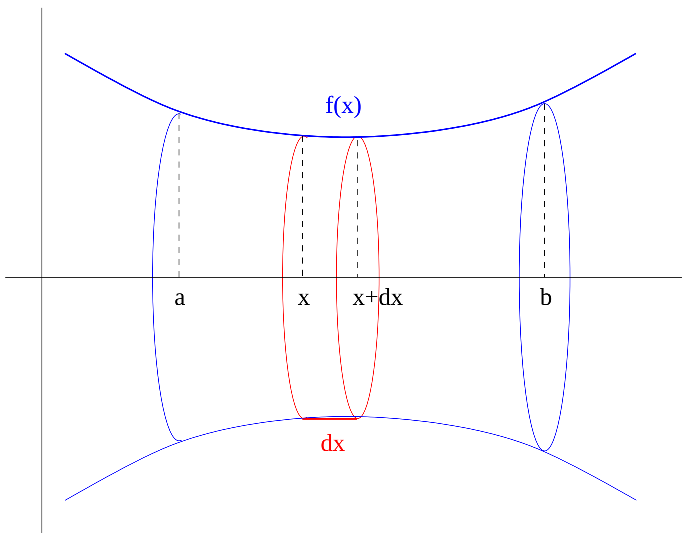
2.6.3 Volumen rotacionog tijela

Rotaciono tijelo je tijelo koje nastaje rotacijom neke krivulje oko zadane osi. Promotrimo slučaj kada rotaciono tijelo nastaje rotacijom krivulje $y = f(x)$ oko x-osi. U tom slučaju volumen (obujam) nastalog tijela od točke a do točke b računamo kao beskonačnu (integralnu) sumu beskonačno malih *elemenata volumena*. Element volumena dV je volumen cilindra visine dx i radijusa baze $r = f(x)$ (Slika 2.22), odnosno

$$dV = \pi f^2(x)\, dx,$$

pa se volumen rotacionog tijela računa formulom

$$V = \int\limits_{[a,b]} dV = \pi \int\limits_a^b y^2\, dx. \tag{2.6}$$



Slika 2.22: Volumen rotacionog tijela i element volumena

Primjer 2.16 a) Kuglu radijusa r s centrom u ishodištu, možemo dobiti rotirajući polukružnicu $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ oko x-osi. Stoga je volumen kugle jednak

$$V = \pi \int\limits_{-r}^{r} (r^2 + x^2)\, dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-r}^{r} = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

b) Izvedimo formulu za volumen stošca visine h i radijusa baze r. Takav stožac nastaje, na primjer, rotacijom pravca $y = \frac{r}{h} x$ oko x-osi za $x \in [0, h]$, pa je njegov volumen jednak dobro poznatoj formuli

$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=\pi\,\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\,\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi\,r^2\,h.$$

Za parametarski zadanu krivulju

$$x=\varphi(t),\qquad y=\psi(t),\qquad t\in\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R},$$

uvrštavanje u formulu (2.6) daje

$$V=\pi\int_{t_1}^{t_2}\psi^2(t)\,\varphi'(t)\,dt=\pi\int_{t_1}^{t_2}y^2\,\dot{x}\,dt. \tag{2.7}$$

Primjer 2.17 Volumen tijela koje nastaje rotacijom jednog luka cikloide iz Primjera 2.9 (Slika 2.16) oko x-osi jednak je

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2a\,(1-\cos t)\,dt\\&=a^3\,\pi\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,dt\\&=a^3\,\pi\int_0^{2\pi}(1+3\cos^2 t)\,dt.\end{aligned}$$

Zadnja jednakost slijedi iz činjenice da je $\int_0^{2\pi}\cos^{2n-1}t\,dt=0$ za svaki $n\in\mathbb{N}$. Dakle,

$$V=a^3\,\pi\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{3}{2}(1+\cos 2t)\right)dt=a^3\,\pi\left(\frac{5}{2}t+\frac{3}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}=5\,a^3\,\pi^2.$$

Napomena 2.2 Kod računanja volumena rotacionih tijela, zadana krivulja može rotirati i oko y-osi, oko pomaknute osi (na primjer, $x=1$), oko vertikalne asimptote (u kojem slučaju se dobije nepravi integral), i slično. U tom slučaju se izvrši odgovarajuća zamjena varijabli, na primjer $t=x-1$.

Zadatak 2.4 Izračunajte volumen kugle nastale rotacijom polukružnice $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $t\in[-\pi/2,\pi/2]$ oko y-osi. *Uputa:* u formuli (2.7) treba zamijeniti uloge varijabli x i y.

Krivulju zadanu u polarnim koordinatama,

$$r = r(\varphi), \qquad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2],$$

prvo prebacimo u parametarski oblik (2.5), pa uvrštavanje u formulu (2.7) daje

$$V = \pi \int_{\varphi_1}^{\varphi^2} r^2(\varphi) \sin^2 \varphi (r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi) \, d\varphi,$$

Primjer 2.18 Kugla radijusa R s centrom u ishodištu nastaje rotacijom krivulje $r = R$, $\varphi \in [0, \pi]$, oko x-osi. Volumen kugle jednak je

$$V = \pi \int_0^\pi R^2 \sin^2 \varphi (-R \sin \varphi) \, d\varphi = -R^3 \pi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi \, d\varphi$$

$$= \left\{ \cos \varphi = t \right\} = -R^3 \pi \int_1^{-1} (1 - t^2) \, dt = \frac{4}{3} R^3 \pi.$$

2.6.4 Oplošje rotacionog tijela

Potupak računanja oplošja rotacionog tijela još se naziva *komplanacija plohe.* Oplošje rotacionog tijela od točke a do točke b računamo kao beskonačnu (integralnu) sumu beskonačno malih *elemenata oplošja.* Element oplošja dO je površina plašta krnjeg stošca čiji je radijus jedna baze jednak $y = f(x)$, radijus druge baze jednak $y + dy = f(x) + f'(x) \, dx$, a duljina izvodnice jednaka $dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ (Slika 2.23). Zapravo, u ovom slučaju duljinu luka krivulje u okolini točke x aproksimiramo elementom duljine luka dS kao što smo to učinili u poglavlju 2.6.2.

Površina plašta krnjeg stošca baznih radijusa r_1 i r_2 i izvodnice s jednaka je

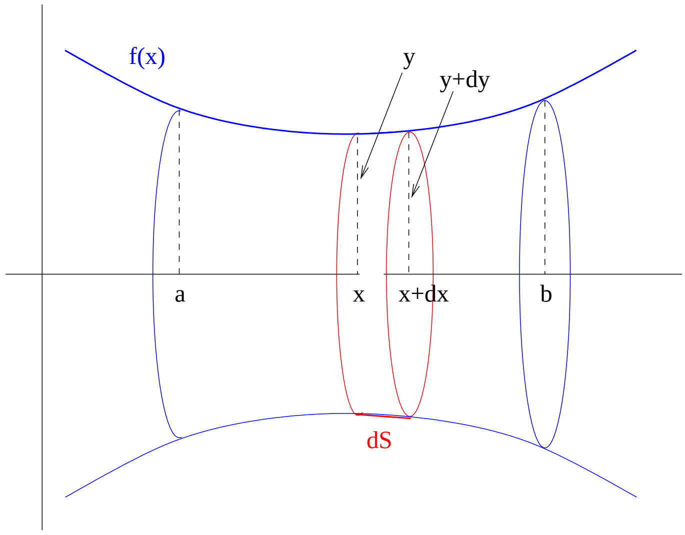
$$P = s \, (r_1 + r_2) \, \pi.$$

Dakle, u našem slučaju vrijedi

$$dO = dS(|y| + |y + dy|) \, \pi = 2 \, |y| \, dS \, \pi \pm 2 \, dy \, dS \, \pi.$$

U ovoj formuli smo uzeli apsolutne vrijednosti, jer se radi o radijusima koji ne mogu biti negativni. Kako je drugi pribrojnik, $2 \, dy \, dS \, \pi$, infinitezimalno manji od prvog, možemo ga zanemariti, pa je konačno element oplošja dan s

$$dO = 2 \, |y| \, dS \, \pi.$$



Slika 2.23: Oplošje rotacionog tijela i element oplošja

U Kartezijevim koordinatama element duljine luka dS dan je izrazom (2.4), pa se oplošje rotacionog tijela računa formulom

$$O = \int\limits_{[a,b]} dO = 2\,\pi \int\limits_a^b |y|\,\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Slično kao u prethodnim poglavljima, za parametarski zadanu krivulju

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad t \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R},$$

imamo

$$O = 2\,\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} |y(t)|\,\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt, \tag{2.8}$$

a za krivulju zadanu u polarnim koordinatama,

$$r = r(\varphi), \qquad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2],$$

imamo

$$O = 2\,\pi \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} |r(\varphi)\sin\varphi|\,\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi. \tag{2.9}$$

Zadatak 2.5 a) Izvedite formule (2.8) i (2.9).

b) Izvedite formulu za oplošje kugle radijusa r na dva tri načina. *Rješenje:* $O = 4\,r^2\,\pi$.

2.7 Numeričko integriranje

Pored rješavanja elementarno rješivih integrala koristeći pravila opisana u poglavljima 1 i 2, ostale načini računanja određenih integrala su

- numeričko integriranje,
- integriranje razvoja podintegralne funkcije u red potencija, i
- korištenje integrala ovisnih o parametru.

Prve dvije metode se mogu koristi za rješavanje svih određenih integrala, dakle, i onih koji su elementarno rješivi, ukoliko je rješenje jednostavnije i dovoljno točno. S druge stane, jednu od tih metoda moramo koristiti želimo li izračunati integral koji nije elementarno rješiv.

Postupak korištenja integrala ovisnih o parametru bit će opisan u Matematici 3. Postupak integriranja reda funkcija već smo opisali u poglavlju 1.7. Kod rješavanja određenog integrala postupak je isti, samo što na kraju uvrstimo granice i nađemo sumu tako dobivenog reda, uz uvjet da se granice nalaze unutar područja konvergencije promatranog reda potencija.

U ovom poglavlju detaljnije ćemo opisati dvije osnovne metode numeričke integracije – trapeznu i Simpsonovu formulu. Kao ilustraciju pokazat ćemo primjenu tih metoda na rješavanje eliptičkih integrala. Također ćemo dati formulu za Richardsonovu ekstrapolaciju pomoću koje se određuje pogreška nastala numeričkim integriranjem. Na kraju ćemo dati Matlab programe za trapeznu i Simpsonovu formulu.

Dokazi svih formula u ovom poglavlju su jednostavni, ali ih zbog preglednosti izlaganja izostavljamo. Dokazi se mogu naći u gotovo svim knjigama koje se bave numeričkom matematikom.

2.7.1 Eliptički integrali

Eliptički integrali su važna klasa integrala koji nisu elementarno rješivi, a na koji se svode mnoge tehničke primjene. Općenito, *eliptički integrali prvog tipa* su integrali oblika

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}\,dx,$$

a *eliptički integrali drugog tipa* su integrali oblika

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\cos^2 x}\,dx,$$

pri čemu je $0 \leq k^2 \leq 1$. Dokažimo jednakosti u gornjim formulama:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}\,dx &= \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2(x+\pi/2)}}\,dx \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} t = x+\pi/2, & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \pi/2 \\ \hline t & \pi/2 & 0 \end{array} \\ dt = dx, & \end{array} \right\} \\ &= \int\limits_{-\pi/2}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}\,dt = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}\,dt,\end{aligned}$$

pri čemu zadnja jednakost vrijedi zbog parnosti podintegralne funkcije. U jednakost gornjih integrala se lako možete uvjeriti i grafički, odnosno tako što ćete podintegralne funkcije nacrtati pomoću programa NetPlot.

Promotrimo parametarski zadanu elipsu

$$x = 2\cos t, \qquad y = \sin t, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Opseg te elipse je prema poglavlju 2.6.2 jednak

$$S = 4\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{(-2\sin^2 t)^2 + \cos^2 t}\,dt = 4\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{4-3\cos^2 t}\,dt = 8\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{3}{4}\cos^2 t}\,dt.$$

Dakle, radi se o eliptičkom integralu drugog tipa. Tu vidimo i veliku razlike između elipse i kružnice – dok je podjednako lako izračunati površine, računanje opsega elipse je bitno složenije od računanja opsega kružnice.

Uvedimo oznaku

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{3}{4}\cos^2 t}\,dt. \tag{2.10}$$

Eliptički integrali se zbog svoje važnosti nalaze u mnogim matematičkim tablicama. Tako iz tablice u poznatom Matematičkom priručniku Bronštejna i Semandjajeva možemo očitati vrijednost

$$I = 1.2111,$$

pa je opseg zadane elipse približno jednak $S \approx 9.6888$.

2.7.2 Trapezna formula

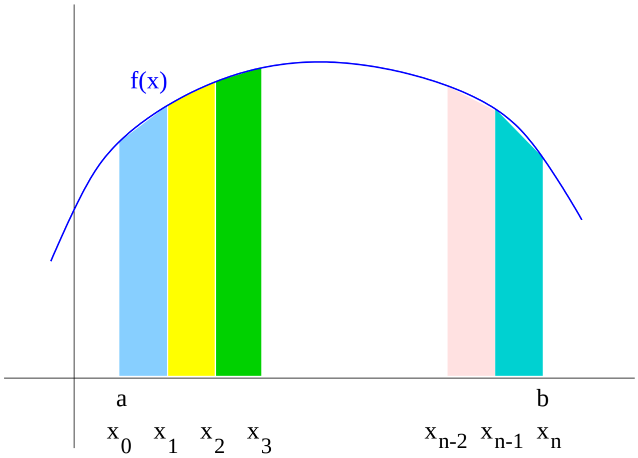
Kod trapezne formule odaberemo dekompoziciju D koja dijeli interval $[a, b]$ na n jednakih djelova,

$$D = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, b = x_n\},$$

pa je prirast jednak

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

Zadanu krivulju $y = f(x)$ aproksimiramo izlomljenom crtom koja nastaje spajanjem točaka (x_{i-1}, y_{i-1}) i (x_i, y_i), a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ aproksimiramo s tako dobivenom integralnom sumom J_n (vidi Sliku 2.24).



Slika 2.24: Trapezna formula

Vidimo da je integralna suma zapravo suma površina dobivenih trapeza, pa odatle i ime trapezna formula. Poznata formula za površinu trapeza daje

$$\begin{aligned} J_n &= \sum_{i=1}^{n} \Delta x\, y_{i-1} + \Delta x\, \frac{y_i - y_{i-1}}{2} = \Delta x \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \\ &= \Delta x\, \big(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\big), \end{aligned}$$

odnosno, trapezna formula glasi

$$J_n = \Delta x\, \big(\frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_n}{2}\big). \tag{2.11}$$

Pogrešku trapezne formule daje slijedeći teorem: ako je druga derivacija $f''(x)$ neprekidna i omeđena na intervalu $[a, b]$, tada vrijedi

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = J_n + R,$$

pri čemu je ostatak R omeđen s

$$|R| \leq M\, \frac{b-a}{12}\, \Delta x^2, \qquad M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Primjer 2.19 Izračunajmo integral (2.10) trapeznom formulom za $n = 4$. Vrijednosti x_i i y_i dane su su slijedećoj tablici:

i	x_i	y_i
0	0	0.5
1	$\pi/8$	0.59986
2	$\pi/4$	0.79057
3	$3\pi/8$	0.94348
4	$\pi/2$	1

Dakle,

$$J_4 = \frac{\pi}{8}\,(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2}) = 1.211051.$$

Traženje broja M u gornjoj formulu za ocjenu ostatka (pogreške) je složeno, pa ćemo umjesto toga pogrešku ocijeniti Richardsonovom ekstrapolacijom (poglavlje 2.7.4).

2.7.3 Simpsonova formula

Simpsonovu formulu dobijemo kada umjesto linearnih koristimo kvadratne aproksimacije zadane funkcije. Preciznije, zadani interval $[a, b]$ podijelimo na paran broj točaka $n = 2k$, uzmemo

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},$$

a zadanu funkciju $f(x)$ na intervalu $[x_{2i-2}, x_{2i}]$, $i = 1, \ldots, k$ aproksimiramo kvadratnom parabolom $p(x) = ax^2 + bx + c$ koja prolazi kroz tri susjedne točke (Slika 2.25)

$$(x_{2i-2}, y_{2i-2}), \quad (x_{2i-1}, y_{2i-1}), \quad (x_{2i}, y_{2i}).$$

Određeni integral parabole $p(x)$ na intervalu $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ jednak je

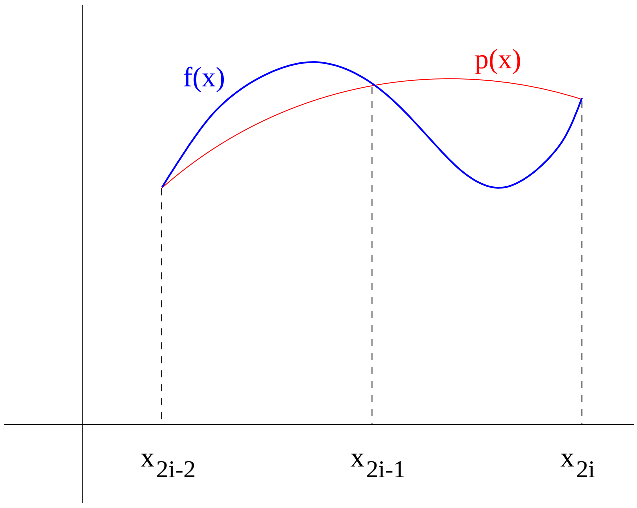
$$\int\limits_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} (ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{\Delta x}{3}\,(y_{2i-2} + 4\,y_{2i-1} + y_{2i}). \tag{2.12}$$

Zaista, postavimo li pomoćni koordinatni sustav tako da mu je ishodište u točki x_{2i-1}, tada je

$$x_{2i-2} = -\Delta x, \quad x_{2i-1} = 0, \quad x_{2i} = \Delta x,$$

pa uvjeti da $p(x)$ prolazi zadanim točkama glase

$$\begin{aligned} y_{2i-2} &= a\,\Delta x^2 - b\,\Delta x + c, \\ y_{2i-1} &= c, \\ y_{2i} &= a\,\Delta x^2 + b\,\Delta x + c. \end{aligned} \tag{2.13}$$



Slika 2.25: Simpsonova formula

Integral (2.12) jednak je, dakle, integralu

$$\int\limits_{-\Delta x}^{\Delta x} (ax^2 + bx + c)\, dx = a\,\frac{x^3}{3} + b\,\frac{x^2}{2} + c\,x\,\Bigg|_{-\Delta x}^{\Delta x} = \frac{\Delta x}{3}\,(2\,a\,\Delta x^2 + 6c).$$

No, iz formula (2.13) vidimo da je

$$2\,a\,\Delta x^2 + 6c = y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i},$$

pa je formula (2.12) dokazana.

Konačno, zbrajanjem integrala (2.12) za $i = 1, \ldots, k$, nakon sređivanja dobijemo Simpsonovu formulu

$$J_n = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 2\,(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + 4\,(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + y_n). \quad (2.14)$$

Pogrešku Simpsonove formule daje slijedeći teorem: ako je četvrta derivacija $f^{IV}(x)$ neprekidna i omeđena na intervalu $[a, b]$, tada vrijedi

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = J_n + R,$$

pri čemu je ostatak R omeđen s

$$|R| \leq M\,\frac{b-a}{180}\,\Delta x^4, \qquad M = \max_{x\in[a,b]} |f^{IV}(x)|.$$

Primjer 2.20 Izračunajmo integral (2.10) Simpsonovom formulom za $n = 4$. Koristeći vrijednosti dane u tablici iz Primjera 2.19 imamo

$$J_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{8} \left(y_0 + 2y_2 + 4(y_1 + y_3) + y_4\right) = 1.211415.$$

Traženje broja M u gornjoj formulu za ocjenu pogreške je složeno, pa ćemo umjesto toga u slijedećem poglavlju pogrešku ocijeniti Richardsonovom ekstrapolacijom.

2.7.4 Richardsonova ekstrapolacija

Richardsonova ekstrapolacija je izuzetno jednostavan način za ocjenu pogreške kod numeričkog računanja određenog integrala.

Metoda se sastoji u slijedećem: ako smo numerički izračunali integral J_n za paran broj točaka n, i integral $J_{n/2}$ koristeći samo pola točaka, te ako se u pripadnoj ocjeni ostatka javlja član Δx^m, tada je pogreška kod računanja J_n manja od broja

$$E = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^m}{n^m - \left(\frac{n}{2}\right)^m} \left(J_n - J_{n/2}\right).$$

Drugim riječima, ako je $E > 0$ tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \in [J_n, J_n + E],$$

a ako je $E \leq 0$, tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \in [J_n + E, J_n].$$

Primjer 2.21 a) Ocijenimo pogrešku u integralu J_4 iz Primjera 2.19. Da bi primijenili Richardsonovu formulu, treba nam J_2, pri čemu možemo koristiti istu tablicu. Trapezna formula (2.11) za $n = 2$ daje

$$J_2 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{y_0}{2} + y_2 + \frac{y_4}{2}\right) = 1.209960,$$

pa je

$$E = \frac{2^2}{4^2 - 2^2} \left(J_4 - J_2\right) = \frac{1}{3} \left(1.211051 - 1.209960\right) = 0.000363666.$$

Dakle, za zadani integral (2.10) vrijedi

$$I \in [1.211051,\ 1.211051 + 0.000363666] = [1.211051,\ 1.211414].$$

b) Ocijenimo pogrešku u integralu J_4 iz Primjera 2.20. Koristeći tablicu iz Primjera 2.19, Simpsonova formula (2.14) za $n = 2$ daje

$$J_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} (y_0 + 4y_2 + y_4) = 1.220581,$$

pa je

$$E = \frac{2^4}{4^4 - 2^4} (J_4 - J_2) = \frac{1}{15} (1.211415 - 1.220581) = -0.000611066.$$

Dakle, za integral (2.10) vrijedi

$$I \in [1.211415 - 0.000611066,\ 1.211415] = [1.210803,\ 1.211415].$$

Zadatak 2.6 Izračunajte $\int_0^4 e^{-x^2}\, dx$ pomoću trapezne i Simpsonove formule za $n = 8$, a pogreške ocijenite Richardsonovom ekstrapolacijom.

2.7.5 Programi

Trapezna i Simpsonova formula, (2.11) i (2.14), mogu se vrlo jednostavno programirati u programskom jeziku Matlab.

Program za trapeznu formulu glasi

```
%%% TRAPEZNA FORMULA
format long e
%%% Interval [a,b] i broj točaka integracije n (paran)
a=0
b=pi/2
n=4
dX=(b-a)/n
%%% Vektor x
x=a:dX:b
%%% Podintegralna funkcija i vektor y
y=sqrt(1-0.75*cos(x).^2)
%%% Trapezna formula
J=dX*(y(1)/2+y(n+1)/2+sum(y(2:n)))
%%% Priprema za Richardsonovu ekstrapolaciju
n1=n/2
y1=y(1:2:n+1)
%%% Integral s n/2 tocaka integracije
J1=2*dX*(y1(1)/2+y1(n1+1)/2+sum(y1(2:n1)))
%%% Richardsonova ocjena
E=n1^2/(n^2-n1^2)*(J-J1)
%%% Graf podintegralne funkcije
plot(x,y)
```

Program za Simpsonovu formulu glasi

```
%%% SIMPSONOVA FORMULA
format long e
%%% Interval [a,b] i broj tocaka integracije k (djeljiv s 4)
a=0
b=pi/2
n=4
dX=(b-a)/n
%%% Vektor x
x=a:dX:b
%%% Podintegralna funkcija i vektor y
y=sqrt(1-0.75*cos(x).^2)
%%% Simpsonova formula
J=(dX/3)*(y(1)+y(n+1)+2*sum(y(3:2:n-1))+4*sum(y(2:2:n)))
%%% Priprema za Richardsonovu ekstrapolaciju
n1=n/2
y1=y(1:2:n+1)
%%% Integral s n/2 tocaka integracije
J1=(2*dX/3)*(y1(1)+y1(n1+1)+2*sum(y1(3:2:n1-1))+4*sum(y1(2:2:n1)))
%%% Richardsonova ocjena
E=n1^4/(n^4-n1^4)*(J-J1)
%%% Graf podintegralne funkcije
plot(x,y)
```

Zadatak 2.7 a) Izvedite ove programe pomoću programa Octave On-line za razne vrijednosti od n. Za koje (najmanje) vrijednosti od n je pogreška E jednaka nuli?

b) Modificirajte programe tako da računaju $\int_0^{100} e^{-x^2}\,dx$. Izvedite programe za $n = 100, 200, 400, 800$. Koliko dobiveni rezultati odstupaju od $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$?

3.

FUNKCIJE VIŠE VARIJABLI

3.1 Definicija **79**
3.2 Limes **83**
3.3 Neprekidnost **87**
3.4 Plohe drugog reda **88**
3.4.1 Eliptički paraboloid 90
3.4.2 Hiperbolički paraboloid 93
3.4.3 Hiperboloid 93
3.4.4 Stožac 95
3.4.5 Cilindri 96
3.4.6 Neke zanimljive plohe 96
3.4.7 Presjek ploha 99
3.5 Parcijalne derivacije **100**
3.6 Totalni diferencijal **103**
3.7 Tangencijalna ravnina **106**
3.8 Parcijalne derivacije kompozicije funkcija **110**
3.9 Totalni diferencijal višeg reda **111**
3.9.1 Taylorova formula 112
3.10 Ekstremi funkcija više varijabla **114**
3.11 Implicitno zadane funkcije **122**
3.12 Problem vezanog ekstrema **133**

3.1 Definicija

Definicija 3.1 Skup $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n-terostruki Kartezijev produkt skupa realnih brojeva sa samim sobom), odnosno

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R} \;\; i = 1, \cdots, n\}$$

zovemo n-dimenzionalni Euklidski prostor, a uređene n-torke $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ su točke tog prostora. Preslikavanje $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ koje svakoj točki iz područja definicije D pridružuje realan broj zovemo realna funkcija od n realnih varijabla. Koristimo oznaku $T \to f(T), \ T \in D$ ili

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$$

Za razliku od realne funkcije jedne realne varijable (slučaj $n = 1$) kad god imamo funkciju od n varijabla sa $n > 1$ govorimo o funkciji više varijabla. Takve funkcije možemo kao i u jednodimenzionalnom slučaju zadavati eksplicitnim analitičkim izrazom, tablicom (u slučaju diskretnog područja definicije), grafički (u slučaju $n = 2$), parametarskim jednadžbama i implicitnim analitičkim izrazom.

Primjer 3.1 Na primjer, eksplicitnom formulom $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ definirana je jedna realna funkcija dviju varijabla čije prirodno područje definicije je

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \geq 0\} \equiv \mathbb{R}^2.$$

Da bi 'vidjeli' grafički tu funkciju koristimo projekcije na koordinatne ravnine. Sustavom $y = 0, \ z = \sqrt{x^2 + y^2}$ određena je jednadžba $z = \sqrt{x^2} = |x|$ projekcije na xz-ravninu (vidi sliku 3.1).

Slika 3.1:

Slično, sustavom $x = 0, \ z = \sqrt{x^2 + y^2}$ određena je jednadžba $z = \sqrt{y^2} = |y|$ projekcije na yz-ravninu (vidi sliku 3.2).

Napokon, za zadani $z_0 > 0$ sustavom $z = z_0, \ z = \sqrt{x^2 + y^2}$ određena je jednadžba $x^2 + y^2 = z_0^2$ što pokazuje da je presjek grafa zadane funkcije sa ravninom $z = z_0$ jedna kružnica polumjera z_0 (vidi sliku 3.3)

Slika 3.2:

Iz svega zaključujemo da je graf zadane funkcije jedan kružni stožac kojemu je ishodište $(0,0,0)$ vrh, a Oz-os os simetrije. Općenito

$$z - z_0 = \sqrt{a^2(x - x_0)^2 + b^2(y - y_0)^2}$$

je eliptički stožac s vrhom u (x_0, y_0, z_0) a presijek tog stošca sa ravninom $z = c$ $(c > z_0)$ je elipsa

$$\frac{(x - x_0)^2}{\left(\frac{c-z_0}{a}\right)^2} + \frac{(y - y_0)^2}{\left(\frac{c-z_0}{b}\right)^2} = 1$$

Na primjer, na Slici 3.4 prikazan je eliptički stožac

$$z - 3 = \sqrt{\frac{1}{4}(x+1)^2 + \frac{1}{9}(y-2)^2}.$$

Napomena 3.1 Jednadžbama $f(x_1, \ldots, x_n) = c$, gdje je c konstanta, određene su takozvane nivo plohe koje služe za lakše predočavanje grafa funkcije. Jasno najinteresantnije su u slučaju $n = 2$ kada ih zovemo nivo krivulje i crtamo ih u istoj ravnini. Na slici 3.5 vidimo nekoliko nivo krivulja funkcije $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ovaj primjer nije osobito interesantan, interesantnije su na primjer *izohipse* (krivulje na zemljopisnim kartama koje povezuju točke iste nadmorske visine ili morske dubine) ili *izobare* (krivulje na meteorološkim kartama koje povezuju točke jednakog atmosferskog pritiska).

Primjer 3.2 a) Funkcija $z = \ln(x + y - 2)$ definirana je na području $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ određenom nejednadžbom $x + y - 2 > 0$ (vidi sliku 3.6).

Slika 3.3:

b) Formulom $u = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2 - 2)$ zadana je jedna funkcija triju varijabla definirana na području $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ koje je određeno nejednadžbama $-1 \leq x^2 + y^2 + z^2 - 2 \leq 1$ odnosno

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$$

Nivo plohe su plaštevi kugli (vidi sliku 3.7).

c) Funkcija triju varijabla $u = -\frac{x^2+y^2}{z}$ definirana je za

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Nivo plohe su kružni paraboloidi (bez tjemena). Na primjer za $u = 1$ dobijamo $z = -(x^2 + y^2)$. Presijek sa ravninom $x = 0$ je parabola $z = -y^2$, presijek sa ravninom $y = 0$ je parabola $z = -x^2$, a presijek sa ravninom $z = -1$ je kružnica $x^2 + y^2 = 1$. Nivo ploha $u = 1$ prikazana je na slici 3.8. Općenito, $z - z_0 = a^2(x - x_0)^2 + b^2(y - y_0)^2$ je prema gore okrenut eliptički paraboloid s vrhom u točki (x_0, y_0, z_0), a $z - z_0 = -a^2(x - x_0)^2 - b^2(y - y_0)^2$ je prema dolje okrenut eliptički paraboloid s vrhom u točki (x_0, y_0, z_0).

Definicija 3.2 Funkcija f je omeđena ako postoji $M > 0$ takav da je

$$|f(T)| \leq M, \ \forall T \in \mathcal{D}.$$

Definicija 3.3 Neka je zadana funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Ako svim varijablama osim jedne, recimo x_i, pridružimo konkretne vrijednosti

$$x_1 = x_1^0, \cdots, x_{i-1} = x_{i-1}^0, x_{i+1} = x_{i+1}^0, \cdots, x_n = x_n^0,$$

Slika 3.4:

onda možemo definirati funkciju jedne varijable $f_i : \mathcal{D}_i \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_i \subseteq \mathbb{R}$ formulom

$$f_i(x) = f(x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \cdots, x_n^0).$$

Kažemo da je funkcija f rastuća (strogo rastuća, padajuća, strogo padajuća) s obzirom na varijablu x_i ako je funkcija f_i takva.

3.2 Limes

U ovom poglavlju definirat ćemo limes funkcije više varijabli i dati osnovna svojstva limesa.

Definicija 3.4 Neka su $T_1 = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ i $T_2 = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ dvije točke iz $\mathbb{R}^n$. Njihovu udaljenost definiramo kao

$$d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Skup

$$K(T_0, \delta) = \{T \in \mathbb{R}^n \mid d(T_0, T) < \delta\}$$

nazivamo otvorena kugla radijusa δ oko točke T_0 ili δ-okolina točke T_0.

Napomena 3.2 Gornja formula za udaljenost je direktno poopćenje formula za udaljenost u $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$). Za $n = 1$ $K(T_0, \delta)$ je otvoreni interval oko T_0, za $n = 2$ to je krug oko T_0 (bez oboda) radijusa δ, a za $n = 3$ to je kugla oko T_0 (bez plašta) radijusa δ (vidi sliku 3.9)

Slika 3.5:

Definicija 3.5 Neka su zadane funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ i točka $T_0 \in \mathcal{D}$ takva da svaku δ-okolinu od T_0 vrijedi

$$K(T_0, \delta) \cap \mathcal{D} \setminus \{T_0\} \neq \emptyset.$$

Kažemo da je $a \in \mathbb{R}$ *granična vrijednost* ili *limes* funkcije f u točki T_0 ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\} \Rightarrow |f(T) - a| < \varepsilon.$$

Pišemo

$$\lim_{T \to T_0} f(T) = a.$$

Primjer 3.3 Pokažimo da je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Zbog $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$ imamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^2 y}{2xy} \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x}{2} \right| = 0.$$

Određivanje limesa funkcije više varijabla teže je nego određivanje limesa funkcije jedne varijable jer se točka T može približavati točki T_0 po neprebrojivo mnogo različitih putova a limes po svim tim putovima mora biti isti.

Teorem 3.1 *Slijedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) $\lim_{T \to T_0} f(T) = a,$

Slika 3.6:

(ii) za svaki niz točaka ($T_k \in \mathcal{D} \setminus \{T_0\},\ k \in \mathbb{N}$)*, koji konvergira prema točki* T_0*, pripadajući niz funkcijskih vrijednosti* ($f(T_k),\ k \in \mathbb{N}$) *konvergira prema broju* a*.*

Gornji teorem nepogodan je za primjenu u slučaju kada moramo pokazati da neki limes postoji (potrebno je provjeriti beskonačno mnogo različitih nizova). Češće ga koristimo u slučaju kad želimo pokazati da neki limes ne postoji (dovoljno je pronaći jedan ili dva niza koji upućuju na nepostojanje limesa).

Primjer 3.4 Pokažimo da funkcija

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

nema limes u točki $(0,0)$. Uzmemo li nizove točaka $((1/n, 1/n), n \in \mathbb{N})$ i $((1/n, 0), n \in \mathbb{N})$ vidimo da oba konvergiraju k $(0,0)$, ali za pripadajuće nizove funkcijskih vrijednosti imamo

$$\begin{aligned} f(1/n, 1/n) &= \frac{(1/n)^2 - (1/n)^2}{(1/n)^2 + (1/n)^2} \to 0, \\ f(1/n, 0) &= \frac{(1/n)^2 - 0}{(1/n)^2 + 0} \to 1. \end{aligned}$$

Koristeći Teorem 3.1 zaključujemo da $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ne postoji.

Citirajmo ovdje i teorem o uzastopnim limesima za funkciju dviju varijabla:

Slika 3.7:

Teorem 3.2 *Neka je*

$$L = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Ako postoje uzastopni limesi

$$L_1 = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y\right) \quad i \quad L_2 = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y\right)$$

onda je $L_1 = L = L_2$.

Jasno je da obratna tvrdnja od ove u gornjem teoremu ne vrijedi tj. postojanje i jednakost uzastopnih limesa L_1 i L_2 u točki (x_0, y_0) znači samo postojanje granične vrijednosti za dva od beskonačno mnogo putova približavanja točki (x_0, y_0), što ne osigurava postojanje limesa L. Međutim, postojanje uzastopnih limesa L_1 i L_2 koji su različiti tj. $L_1 \neq L_2$ sigurno povlači nepostojanje limesa L.

Primjer 3.5 a) Za funkciju iz Primjera 3.3 vrijedi

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

b) Za funkciju iz Primjera 3.4 vrijedi

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1,$$
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Zadatak 3.1 ???

Slika 3.8:

3.3 Neprekidnost

Definicija neprekidnost funkcije više varijabli jednaka je definiciji neprekidnosti funkcije jedne varijable (M1, ...)

Definicija 3.6 Funkcija f je *neprekidna* u točki $T_0 \in \mathcal{D}$ ako je

$$\lim_{T \to T_0} f(T) = f(T_0).$$

Ako je f neprekidna u svakoj točki $T \in A \subseteq \mathcal{D}$ kažemo da je f *neprekidna na skupu* A, a ako je $A = \mathcal{D}$ kažemo da je f *neprekidna funkcija.*

Neka je

$$T = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \qquad T_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0).$$

Veličina

$$\Delta x_i = x_i - x_i^0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

je *prirast varijable* x_i u točki T_0. Veličina

$$\Delta u = u - u_0, \qquad u = f(T), \quad u_0 = F(T_0),$$

je *prirast funkcije* f u točki T_0. Iz definicije 3.6 slijedi da je f neprekidna u točki T_0 ako i samo ako je $\lim_{T \to T_0} [f(T) - f(T_0)] = 0$ ili ekvivalentno

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ i=1,\cdots,m}} \Delta u = 0,$$

odnosno, ako i samo ako prirast funkcije f u točki T_0 teži k nuli čim prirasti svih varijabli x_i istovremeno teže k nuli.

Slika 3.9:

Svojstva neprekidnih funkcija više varijabli su slična svojstvima neprekidnih funkcija jedne varijable. Navedimo neka od tih svojstava:

(i) Neka je funkcija f neprekidna i neka je $f(T_0) > 0$ (< 0) u nekoj točki $T_0 \in \mathcal{D}$. Tada postoji okolina točke T_0 za koju vrijedi

$$T \in K(T_0, \delta) \Rightarrow f(T) > 0 \ (< 0).$$

(ii) Neka je funkcija f neprekidna i neka je $A \subseteq \mathcal{D}$ zatvoren i omeđen podskup domene $\mathcal{D}$. Tada funkcija f na skupu A dostiže svoju najmanju i svoju najveću vrijednost u nekim točkama. Drugim riječima, postoje točke $T_1, T_2 \in A$ takve da je

$$T \in A \Rightarrow f(T_1) \leq f(T) \leq f(T_2),$$

odnosno

$$f(T_1) = \min_{T \in A} f(T), \qquad f(T_2) = \max_{T \in A} f(T)$$

(vidi sliku 3.10).

(iii) Ako su funkcije $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, neprekidne, tada su zbroj $f + g$, razlika $f - g$, produkt fg i kvocijent f/g (uz uvjet $g \neq 0$) također neprekidne funkcije.

3.4 Plohe drugog reda

Ploha drugog reda je skup svih točaka trodimenzionalnog prostora koje zadovoljavaju jednadžbu drugog stupnja (ili reda):

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0,$$

Slika 3.10:

pri čemu je barem jedan od koeficijenata[1] A, B, C, D, E i F različit od nule, odnosno, u formuli postoji barem jedan netrivijalni nelinerani član. Na primjer, jednadžba *sfere* (*kugline plohe*) radijusa r s centrom u točki (x_0, y_0, z_0) dana je s:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

S ovom formulom su zapravo zadane dvije funkcije dvije varijable:

$$z = f_1(x, y) = z_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2} \quad \text{i}$$
$$z = f_2(x, y) = z_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}.$$

Nivo-plohe sfere (presjeci s ravninama paralelnim s xy-ravninom) i presjeci s ravninama paralelnim s xz- i yz-ravninama su kružnice.[2]

Nadalje,

$$\frac{(x - x_0)2}{a^2} + \frac{(y - y_0)2}{b^2} + \frac{(z - z_0)2}{c^2} = 1$$

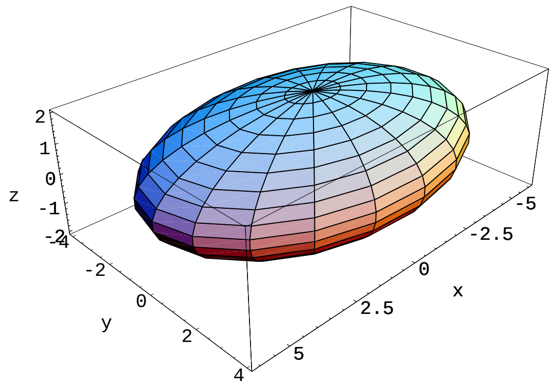
je jednadžba *elipsoida* čije su glavne osi paralne s koordinatnim osima x, y i z, a duljine poluosi su a, b i c redom (slika 3.11).

Nivo-plohe elipsoida kao i presjeci s ravninama paralelnim s xz- i yz-ravninama su elipse.

Zadatak 3.2 Za elipsoid iz slike 3.11 nacrtajte nivo-plohu za $z = -1$ i presjek s ravninama $x = 4$ i $x = 7$.

[1] Svi koeficijenti su realni brojevi.

[2] U rubovima je nivo–ploha ili pak presjek s ravninom koja je paralelna s xz- ili yz-ravninom jednaka točki koju možemo interpretirati kao degeneriranu kručnicu s radijusom 0.



Slika 3.11: Elipsoid $x^2/36 + y^2/16 + z^2/4 = 1$

Elipsoid na slici možemo definirati i parametarski kao skup točaka:

$$E = \{(x, y, z) : x = 6 \cos t \cos u, y = 4 \sin t \cos u, z = 2 \sin u,$$
$$t \in \{0, 2\pi\}, u \in \{-\pi/2, \pi/2\}\}.$$

Elipsoid na slici 3.11 nacrtan je upravo koristeći parametarski prikaz.

3.4.1 Eliptički paraboloid

Opća formula *eliptičkog paraboloida* je (vidi sliku 3.12):

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Nivo plohe eliptičkog paraboloida su elipse, a presjeci s ravinama koje su paralelne s xz-ravninom i yz ravninom su parabole (vidi sliku 3.13).

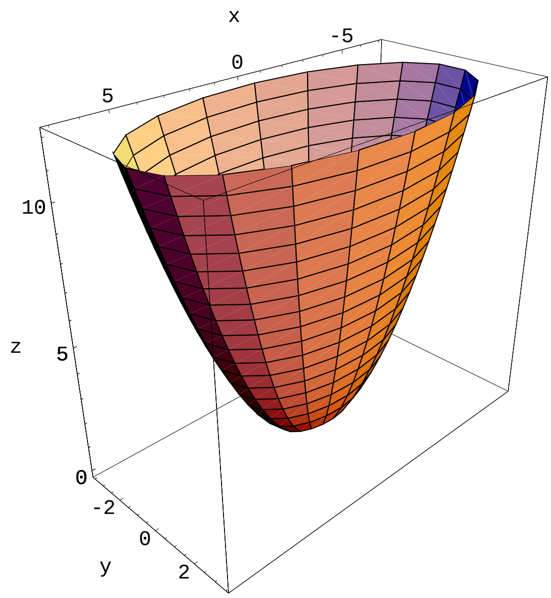
Paraboloid na slici možemo prikazati i parametarski kao skup

$$P = \{(x, y, z) : x = 2\sqrt{u} \cos t, y = \sqrt{u} \sin t, z = u, t \in \{0, 2\pi\}, u \geq 0\}.$$

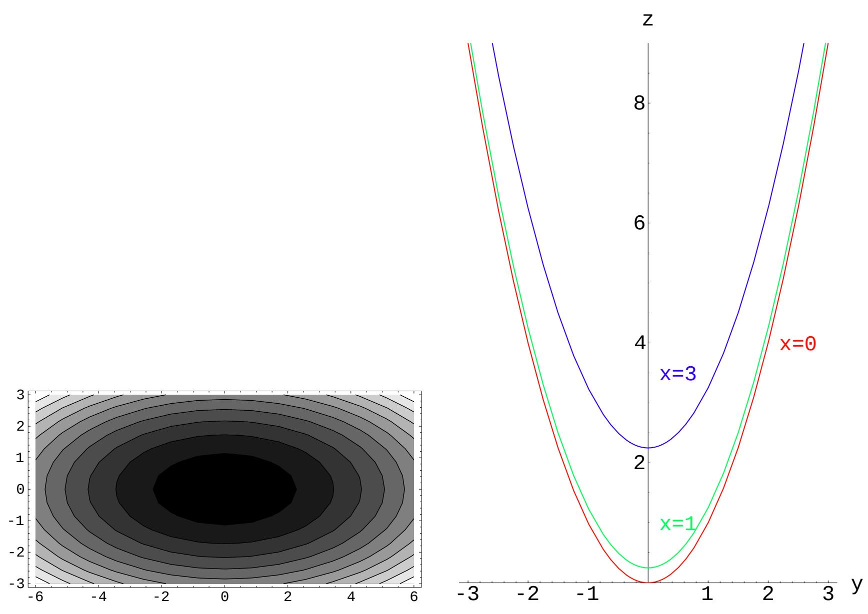
Eliptički paraboloid s vrhom u točki (x_0, y_0, z_0) zadan je s formulom (slika 3.14):

$$z - z_0 = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2}.$$

Zamjenom varijabli dobijemo eliptički paraboloid uzduž neke druge osi, a pomoću predznaka nezavisne varijable određujemo na koju stranu je paraboloid otvoren (slika 3.15).

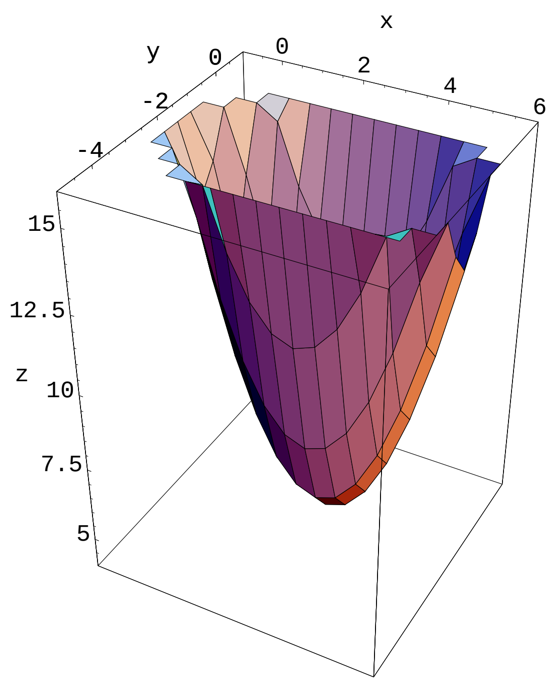


Slika 3.12: Paraboloid $z = x^2/4 + y^2$

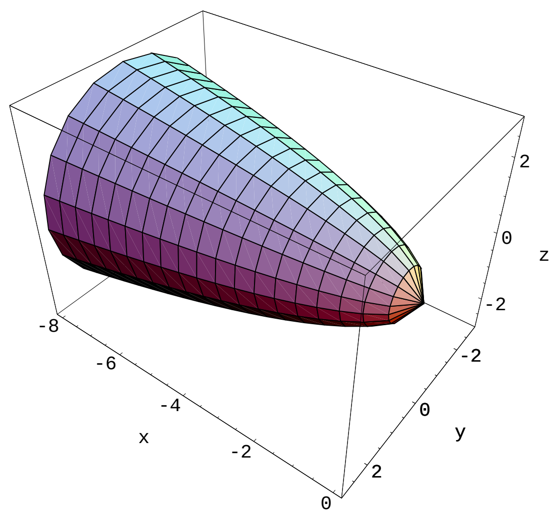


(A) (B)

Slika 3.13: (A) Nivo plohe i (B) presjeci paralelni s yz-ravninom za paraboloid $z = x^2/4 + y^2$.



Slika 3.14: Pomaknuti paraboloid $z - 5 = (x - 3)^2 + 4(y + 2)^2$

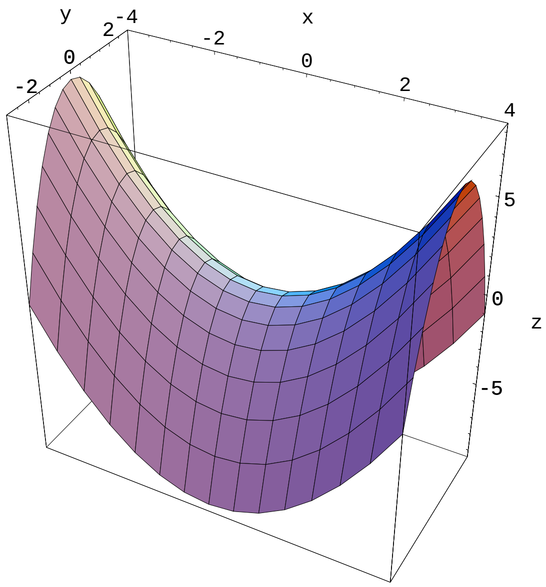


Slika 3.15: Polegnuti paraboloid $-x = y^2 + z^2$

3.4.2 Hiperbolički paraboloid

Opća formula *hiperboličkog paraboloida* je (vidi sliku 3.16):

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$



Slika 3.16: Hiperbolički paraboloid $z = x^2 - y^2$

Hiperbolički paraboloid ima oblik sedla. Nivo plohe su hiperbole (slika 3.17), a presjeci s ravinama koje su paralelne s xz-ravninom i yz ravninom su parabole.

Zadatak 3.3 Nacrtajte nivo-plohe za $z = 0, 2, 3$ i presjeke s yz-ravninom za $x = 4$ za $z - 2 = x^2 - (y-2)^2/4$.

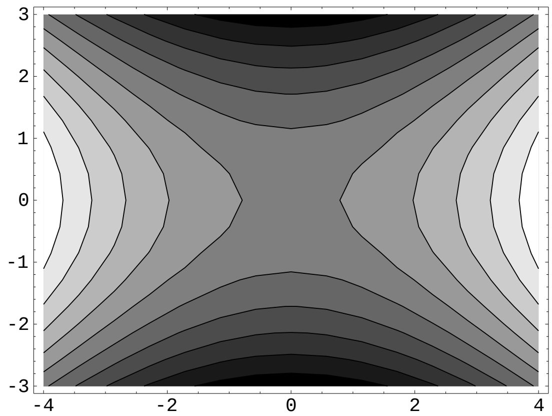
3.4.3 Hiperboloid

Jednokrilni hiperboloid zadan je s formulom (slika 3.18):

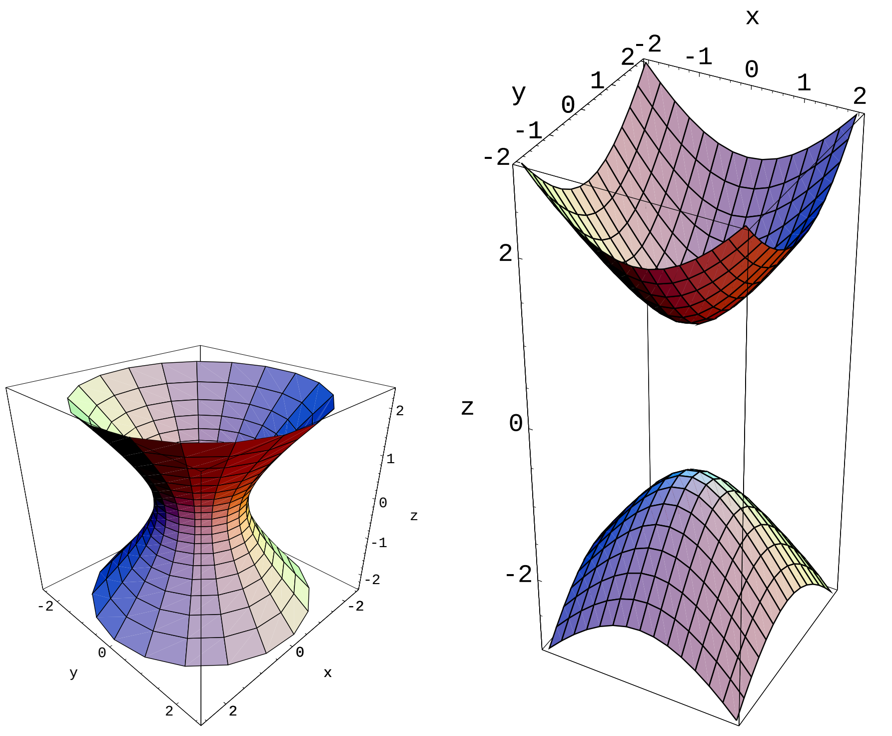
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Dvokrilni hiperboloid zadan je s formulom (slika 3.18):

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Slika 3.17: Nivo plohe za $z = x^2 - y^2$.



Slika 3.18: (A) Jednokrilni i (B) dvokrilni hiperboloid za $a = b = c = 1$.

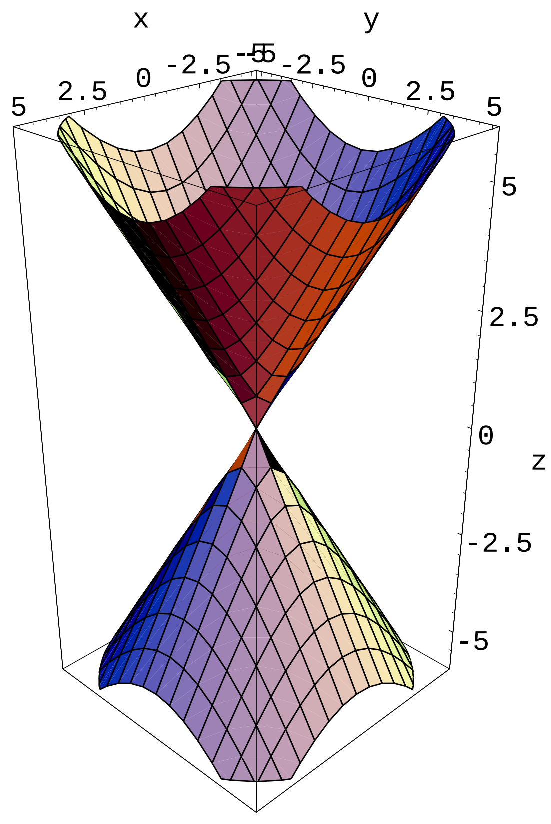
Nivo-plohe hiperboloida su elipse, a presjeci s ravinama koje su paralelne s z-osi su hiperbole. Kao i kod ostalih ploha, pomoću transformacije $x \to x - x_0$ pomičemo središte hiperboloida, a cikličkom zamjenom varijabli nastaju hiperboloidi koji se protežu u smjeru ostalih koordinatnih osi.

Zadatak 3.4 Prikažite hiperboloide sa slike 3.18 u parametarskom obliku. *Uputa: treba koristiti hiperbolne funkcije* sinh *i* cosh.

3.4.4 Stožac

Stožac ili *konus* je zadan s formulom (vidi sliku 3.19):

$$(z - z_0)^2 = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2}.$$



Slika 3.19: Stožac $z^2 = x^2 + y^2$

S ovim izrazom su zapravo zadane dvije funkcije od dvije varijable:

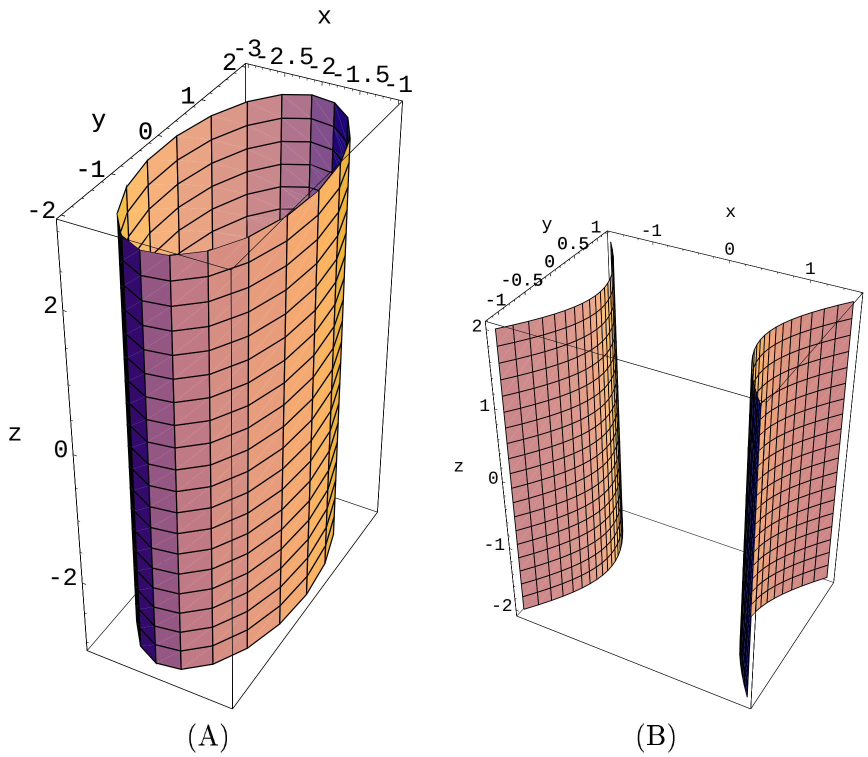
$$z = z_0 + \sqrt{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2}} \quad \text{i} \quad z = z_0 - \sqrt{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2}}.$$

3.4.5 Cilindri

Cilindrična ploha ili *cilindar* nastaje kada jednadžbu krivulje u ravnini interpretiramo u trodimenzionalnom prostoru. Tako su, na primjer,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
$$z = y^2,$$

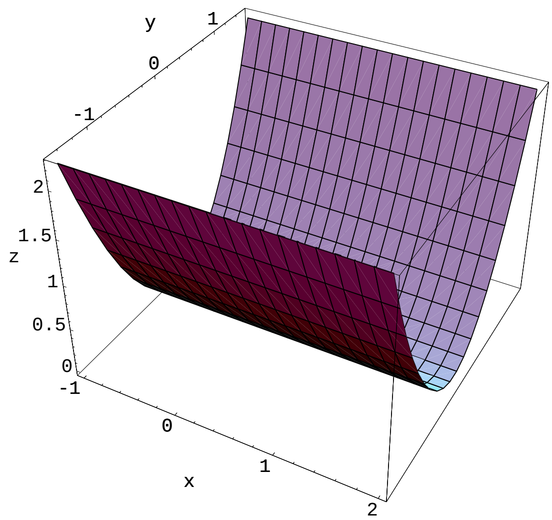
jednadžbe *eliptičkog*, *hiperboličkog* i *paraboličkog* cilindra redom (vidi slike 3.20 i 3.21).



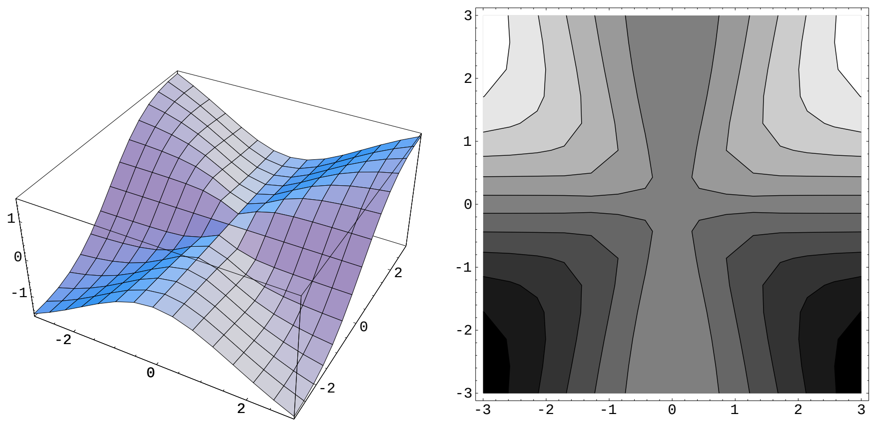
Slika 3.20: (A) $(x+2)^2 + y^2/4 = 1$ i (B) $x^2 - y^2 = 1$.

3.4.6 Neke zanimljive plohe

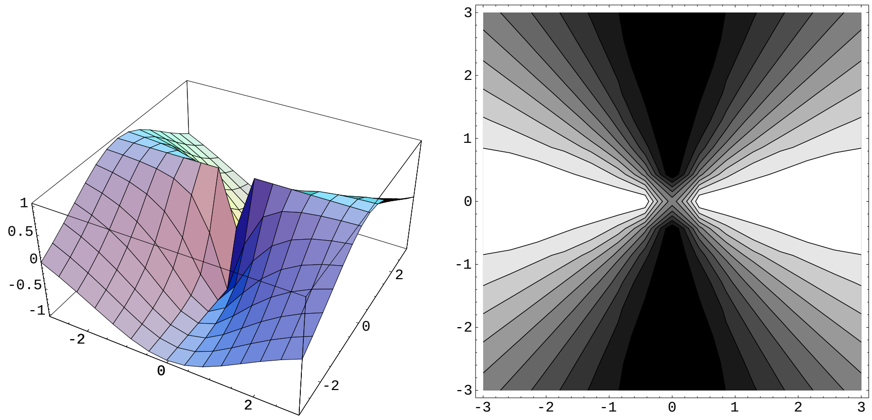
Slijede grafovi i nivo-plohe nekih zanimljivih funkcija dvije varijable:



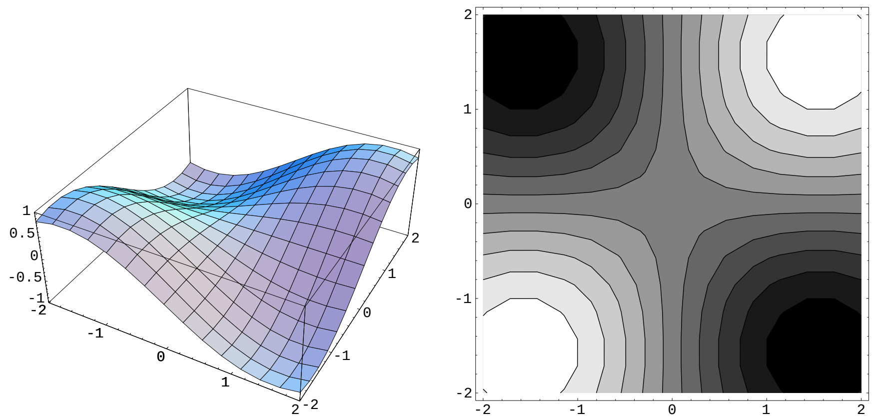
Slika 3.21: Parabolički cilindar $z = y^2$



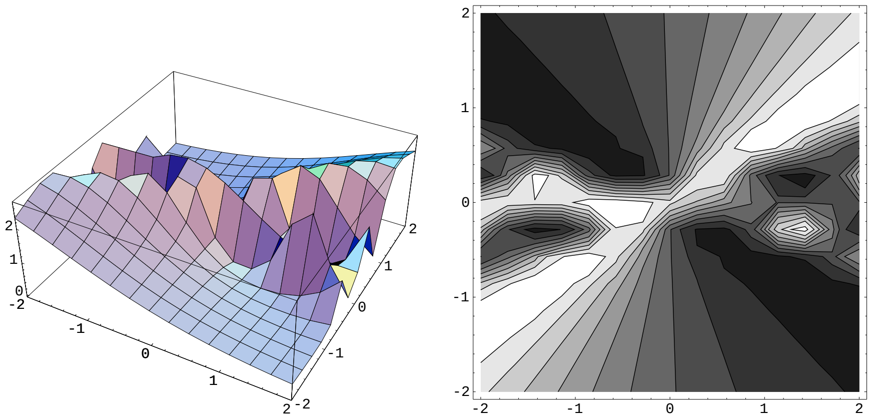
Slika 3.22: $(x^2y)/(x^2+y^2)$



Slika 3.23: $(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$



Slika 3.24: $\sin x \sin y$



Slika 3.25: $\exp(\sin(x/y))$

3.4.7 Presjek ploha

Kod rješavanja dvostrukih integrala važno je znati predočiti presjek raznih ploha. Neka je skup D zadan s

$$D = \{(x,y) : (x-1/2)^2 + y^2 \leq 1/4, y \leq 0\},$$

a ploha K sa (gornja polukugla) s

$$K = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}.$$

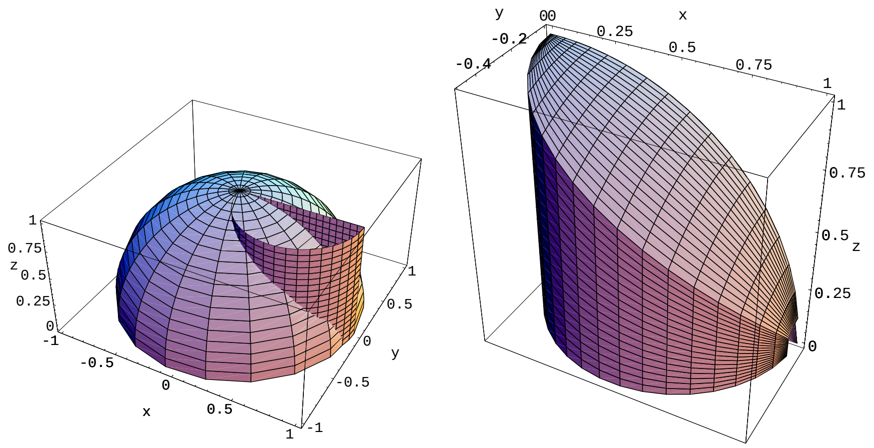
Tada dvostruki integral

$$I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1/4-(x-1/2)^2}}^{0} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx$$

daje volumen tijela s bazom D od xy ravnine do plašta kugle, odnosno tijela koje je odozdo omeđeno xy-ravninom, sa strane s plaštom stožca cije su stranice x-os i polukružnica $(x-1/2)^2 + y^2 = 1$ za $y \leq 0$, i odozgo s plaštom kugle (vidi sliku 3.26). Ovaj integral se rješava prelaskom na polarne koordinate:

$$D = \left\{(r,\varphi) : \varphi \in \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right], r \in [0, \cos\varphi]\right\},$$

$$I = \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \int_0^{\cos\varphi} \sqrt{1-r^2}r\,dr\,d\varphi.$$



Slika 3.26: Presjek ploha.

3.5 Parcijalne derivacije

Definicija 3.7 *Parcijalna derivacija* funkcije $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, po varijabli x_i u točki $T_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ je derivacija funkcije jedne varijable $f_i : \mathcal{D}_i \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_i \subseteq \mathbb{R}$ definirane sa

$$f_i(x) = f(x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \cdots, x_n^0), \qquad x \in D_i,$$

u točki x_i^0. Dakle,

$$\frac{\partial f(T_0)}{\partial x_i} \equiv f'_{x_i}(T_0) = \lim_{x \to x_i^0} \frac{f_i(x) - f_i(x_i^0)}{x - x_i^0}.$$

Ako za funkciju f u točki T_0 postoje parcijalne derivacije $f'_{x_i}(T_0)$ po svim varijablama x_i onda kažemo da je funkcija f *derivabilna* u točki T_0. Ako je funkcija f derivabilna u svakoj točki $T \in \mathcal{D}$ onda kažemo da je f *derivabilna funkcija*.

Definicija 3.8 Neka je $A \subseteq \mathcal{D}$ skup svih točaka $T \in \mathcal{D}$ u kojima postoji parcijalna derivacija $f'_{x_i}(T)$ po varijabli x_i. Funkciju $f'_{x_i} : A \to \mathbb{R}$ zovemo parcijalna derivacija funkcije f po varijabli x_i. To je opet jedna funkcija od n varijabli koja može imati svoje parcijalne derivacije. Parcijalnu derivaciju po varijabli x_j funkcije f'_{x_i} zovemo parcijalna derivacija drugog reda funkcije f po varijablama x_i, x_j i označavamo sa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \equiv f''_{x_i x_j}.$$

Analogno definiramo parcijalnu derivaciju trećeg reda funkcije f po varijablama x_i, x_j, x_k,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \equiv f'''_{x_i x_j x_k},$$

Indukcijom definiramo parcijalnu derivaciju m-tog reda funkcije f po varijablama $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m}$,

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_n}} \equiv f^{(m)}_{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}},$$

gdje je $i_1, i_2, \cdots, i_m \in \{1, 2, \cdots, n\}$ i $m \in \mathbb{N}$.

Primjer 3.6 Funkcija $f(x, y) = \sin(x + y^2)$ dobro je definirana na $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$ te ima parcijalne derivacije svakog reda. Postupak deriviranja je jednostavan: kad računamo $f'_x(x, y)$ varijablu y u izrazu za $f(x, y)$ tretiramo kao konstantu, a kad računamo $f'_y(x, y)$ onda varijablu x u izrazu za $f(x, y)$ tretiramo kao konstantu. Dakle

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \frac{\partial[\sin(x + y^2)]}{\partial x} = \cos(x + y^2), \\ f'_y(x, y) &= \frac{\partial[\sin(x + y^2)]}{\partial y} = 2y \cos(x + y^2). \end{aligned}$$

Slično postupamo kod računanja parcijalnih derivacija višeg reda. Na primjer, parcijalne derivacije drugog reda su

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y) &= \frac{\partial\left[f'_x(x, y)\right]}{\partial x} = \frac{\partial[\cos(x + y^2)]}{\partial x} = -\sin(x + y^2), \\ f''_{xy}(x, y) &= \frac{\partial\left[f'_x(x, y)\right]}{\partial y} = \frac{\partial[\cos(x + y^2)]}{\partial y} = -2y \sin(x + y^2), \\ f''_{yx}(x, y) &= \frac{\partial\left[f'_y(x, y)\right]}{\partial x} = \frac{\partial[2y \cos(x + y^2)]}{\partial x} = -2y \sin(x + y^2), \\ f''_{yy}(x, y) &= \frac{\partial\left[f'_y(x, y)\right]}{\partial y} = \frac{\partial[2y \cos(x + y^2)]}{\partial y} = 2 \cos(x + y^2) - 4y^2 \sin(x + y^2). \end{aligned}$$

U gornjem primjeru vidimo da su funkcije f''_{xy} i f''_{yx} jednake. To nije slučajnost već pravilo. Naime vrijedi slijedeći važan teorem kojega navodimo bez dokaza:

Teorem 3.3 (Schwartz) *Pretpostavimo da funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, u nekoj okolini $K(T_0, \delta)$ točke $T_0 \in D$ ima neprekidne sve parcijalne derivacije do uključivo $(r-1)$-vog reda i da u toj okolini od T_0 postoje sve parcijalne derivacije r-tog reda. Ako su parcijalne derivacije r-tog reda od f neprekidne u točki T_0 onda njihove vrijednosti u toj točki ne zavise od redoslijeda deriviranja po pojedinim varijablama.*

Primjer 3.7 Za funkciju dviju varijabla formalno možemo promatrati ukupno

$2^3 = 8$ parcijalnih derivacija trećeg reda. To su redom

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x},$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y},$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial y}.$$

Međutim, koristeći Teorem 3.3 stvarno promatramo samo 4 parcijalne derivacije trećeg reda (uz razumljivu pretpostavku o njihovoj neprekidnosti). Prvu od funkcija u gornjem nizu označavamo kraće s

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3},$$

druga, treća i četvrta su jednake i označavamo ih kraće sa

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y},$$

peta, šesta i sedma u nizu su jednake i označavamo ih s

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2},$$

a osmu označavamo kraće sa

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Općenitije, za bilo koji $r \in \mathbb{N}$ formalno postoji 2^r parcijalnih derivacija r-tog reda, ali ih različitih ima stvarno samo $(r+1)$?? i označavamo ih s

$$\frac{\partial^r f}{\partial x^i \partial y^{r-i}}, \qquad i = 0, 1, \cdots, r.$$

Zadatak 3.5 a) Izračunaj sve parcijalne derivacije trećeg reda za funkciju triju varijabla $u = \ln(x^2 + y + z)$. Koliko ih ima stvarno različitih?

b) Koliko ima stvarno različitih parcijalnih derivacija r-tog reda funkcije od m varijabla?

Za razliku od funkcije jedne varijable koja je neprekidna u svakoj točki u kojoj je derivabilna, derivabilnost funkcije više varijabla u nekoj točki ne povlači nužno neprekidnost funkcije u toj točki.

Primjer 3.8 Funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{za } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{za } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

je definirana na $D = \mathbb{R}^2$ i ima prekid u točki $(0,0)$. Naime nizovi točaka $((1/n, c/n),\ n \in \mathbb{N})$ za različite vrijednosti od c svi konvergiraju k nuli, a pripadajući nizovi funkcijskih vrijednost imaju različite limese za različite vrijednosti od c jer

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{c}{n}\right) = \frac{c}{1+c^2} \to \frac{c}{1+c^2}.$$

S druge strane u točki $(x,y) \neq (0,0)$ imamo

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \frac{y(x^2+y^2) - xy(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \\ f'_y(x,y) &= \frac{x(x^2+y^2) - xy(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \end{aligned}$$

a u točki $(0,0)$ je

$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0, \\ f'_y(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0. \end{aligned}$$

Dakle f je derivabilna u točki $(0,0)$, ali nije neprekidna u toj točki.

3.6 Totalni diferencijal

Neka je zadana funkcija f i točke

$$T_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \in \mathcal{D}, \qquad T = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathcal{D}.$$

Uvedimo oznake

$$u = f(T), \quad u_0 = f(T_0), \qquad \Delta u = u - u_0.$$

Prirast $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ još nazivamo i *diferencijalom nezavisne varijable* x_i i označavamo s dx_i.

Parcijalni diferencijal funkcije f u točki T_0 s obzirom na varijablu x_i definiramo kao diferencijal funkcije jedne varijable:

$$d_{x_i} f(T_0) \equiv d_{x_i}(u_0) = f'_{x_i}(T_0) dx_i = \frac{\partial f(T_0)}{\partial x_i} dx_i.$$

Definicija 3.9 Neka je funkcija f derivabilna u točki T_0 i neka je

$$\rho = d(T_0, T) = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2}.$$

Ako je

$$\Delta u = f'_{x_1}(T_0)\Delta x_1 + \cdots + f'_{x_n}(T_0)\Delta x_n + \rho\alpha(\rho)$$

gdje je $\alpha : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ funkcija za koju vrijedi

$$\lim_{\rho \to 0} \alpha(\rho) = 0,$$

tada je funkcija f *diferencijabilna* u točki T_0, a izraz

$$df(T_0) = f'_{x_1}(T_0)dx_1 + \cdots + f'_{x_n}(T_0)dx_n$$

je *totalni diferencijal* (ili kraće *diferencijal*) funkcije f u točki T_0. Ako je f diferencijabilna u svakoj točki $T \in \mathcal{D}$ tada je f *diferencijabilna funkcija*.

Napomena 3.3 (1) Iz definicije 3.9 vidimo da za malene vrijednosti prirasta Δx_i, $i = 1, \cdots, n$, prirast Δu možemo aproksimirati diferencijalom $df(T_0)$,

(2) Iz same definicije diferencijabilnosti slijedi da je diferencijabilnost jače svojstvo od derivabilnosti: ako je funkcija f diferencijabilna onda je f i derivabilna, dok obratno ne mora vrijediti.

(3) Funkcija f može biti derivabilna u točki T_0 a da u toj točki nije neprekidna (vidi Primjer 3.8), dočim funkcija f koja je diferencijabilna u toćki T_0 nužno mora biti neprekidna u toj točki. Naime, $T \to T_0$ onda i samo onda kad $\Delta x_i \to 0$ za sve $i = 1, \cdots, n$, odnosno, onda i samo onda kad $\rho = d(T_0, T) \to 0$. Zato imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{T \to T_0} \Delta u &= \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ i=1,\cdots,m}} \Delta u \\
&= \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ i=1,\cdots,m}} \left[f'_{x_1}(T_0)\Delta x_1 + \cdots + f'_{x_m}(T_0)\Delta x_m \right] + \lim_{\rho \to 0} \rho\alpha(\rho) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Međutim,

$$\lim_{T \to T_0} \Delta u = 0$$

je ekvivalentno s

$$\lim_{T \to T_0} f(T) = f(T_0),$$

odnosno, s neprekidnošću funkcije f u točki T_0.

Primjer 3.9 Funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{za } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{za } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

je neprekidna na $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$ (vidi Primjer 3.3). Također,

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0,$$
$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0,$$

što znači da je f derivabilna u točki $(0,0)$. Međutim f nije diferencijabilna u točki $(0,0)$. Naime, vrijedi

$$\Delta x = x - 0 = x, \qquad \Delta y = y - 0 = y,$$

odnosno,

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} \quad \to \quad 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \to 0,\ y \to 0.$$

Zato je

$$\begin{aligned} \lim_{\rho\to 0} \alpha(\rho) &= \lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta f(0,0) - [f'_x(0,0)dx + f'_y(0,0)dy]}{\rho} \\ &= \lim_{\rho\to 0} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\rho} \\ &= \lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Za nizove točaka $((1/n, c/n),\ n \in \mathbb{N})$ koji konvergiraju u $(0,0)$ za sve $c \in \mathbb{R}$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{c}{n}}{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{c^2}{n^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{(1+c^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{c}{(1+c^2)^{\frac{3}{2}}},$$

što je zavisno od c pa zaključujemo da $\lim\limits_{\rho\to 0} \alpha(\rho)$ ne postoji i zato f nije diferencijabilna u točki $(0,0)$.

Razlog radi kojeg funkcija f iz prethodnog primjera nije diferencijabilna u točki $(0,0)$, premda je u toj točki i neprekidna i derivabilna, je taj što parcijalne derivacije f'_x i f'_y nisu neprekidne u točki $(0,0)$. To potvrđuje i slijedeći teorem kojega dajemo bez dokaza:

Teorem 3.4 *Ako postoji okolina $K(T,\delta)$ točke T takva da je f derivabilna na $K(T,\delta)$, te ako su sve parcijalne derivacije f'_{x_i}, $i = 1,\cdots,n$ neprekidne u točki T, onda je funkcija f diferencijabilna u točki T.*

Iz svega dosad rečenog vidimo da postoji bitna razlika između funkcija jedne varijable i funkcija više varijabla. Naime, za funkciju jedne varijable vrijedi

(i) f je derivabilna u točki $x \quad \Leftrightarrow \quad f$ je diferencijabilna u točki x,

(ii) f je derivabilna (diferencijabilna) u točki $x \quad \Rightarrow \quad f$ je neprekidna u točki x,

dočim za funkciju f od $n > 1$ varijabla vrijede slijedeće implikacije:

(i) f je diferencijabilna u točki $T \quad \Rightarrow \quad f$ je derivabilna u točki T,

(ii) f je neprekidno derivabilna u točki $T \quad \Rightarrow \quad f$ je diferencijabilna u točki T,

(iii) f je diferencijabilna u točki $T \quad \Rightarrow \quad f$ je neprekidna u točki T.

3.7 Tangencijalna ravnina

Ako je funkcija jedne varijable $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna (dakle diferencijabilna) u točki x_0, onda je pravac t zadan jednadžbom

$$t \ \ldots \ y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \ y_0 = f(x_0)$$

tangenta krivulje $y = f(x)$ u točki (x_0, y_0). Diferencijal $df(x_0) = f'(x_0)dx$ možemo interpretirati kao prirast te tangente u promatranoj točki koji odgovara prirastu dx nezavisne varijable (vidi sliku 3.27).

Slika 3.27:

Slično možemo postupiti kad imamo funkciju dviju varijabla. Neka je $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$. Ako je f diferencijabilna u točki (x_0, y_0), onda postoje parcijalne derivacije $f'_x(x_0, y_0)$ i $f'_y(x_0, y_0)$, te možemo definirati dva pravca t_x i t_y u prostoru koji prolaze točkom (x_0, y_0, z_0), gdje je $z_0 = f(x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned} t_x \ \cdots \ \frac{x-x_0}{1} &= \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{f'_x(x_0,y_0)}, \\ t_y \ \cdots \ \frac{x-x_0}{0} &= \frac{y-y_0}{1} = \frac{z-z_0}{f'_y(x_0,y_0)}. \end{aligned}$$

Kad gledamo dvodimenzionalno, pravac t_x možemo interpretirati kao tangentu na krivulju $z = f(x, y_0)$ u točki s koordinatama (x_0, z_0) (sve se nalazi u ravnini $y - y_0 = 0$ kao što se vidi na Slici 3.28). Slično, pravac t_y možemo interpretirati kao tangentu na krivulju $z = f(x_0, y))$ u točki s koordinatama (y_0, z_0) (sve se nalazi u ravnini $x - x_0 = 0$).

Slika 3.28:

Pravci t_x i t_y imaju vektore smjerova

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{s}}_x &= \vec{\mathbf{i}} + f'_x(x_0,y_0)\vec{\mathbf{k}}, \\ \vec{\mathbf{s}}_y &= \vec{\mathbf{j}} + f'_y(x_0,y_0)\vec{\mathbf{k}}, \end{aligned}$$

te određuju točno jednu ravninu R_t koja prolazi točkom (x_0, y_0, z_0) i ima vektor normale

$$\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{s}}_x \times \vec{\mathbf{s}}_y = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & f'_x(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & f'_y(x_0,y_0) \end{vmatrix} = -f'_x(x_0,y_0)\vec{\mathbf{i}} - f'_y(x_0,y_0)\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}.$$

Prema tome, jednadžba ravnine R_t glasi

$$R_t \ \ldots \ z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0), \ z_0 = f(x_0,y_0).$$

Ravnina R_t je *tangencijalna ravnina* na plohu $z = f(x,y)$ u točki (x_0, y_0, z_0). Diferencijal

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$$

možemo interpretirati kao prirast varijable z u tangencijalnoj ravnini odgovara prirastima dx i dy nezavisnih varijabli (vidi Sliku 3.29).

Slika 3.29:

Napomena 3.4 Iz prethodnog izlaganja je jasno da ravninu R_t možemo definirati čim je funkcija f derivabilna u točki (x_0, y_0). Međutim, ravninu R_t ima smisla zvati tangencijalnom ravninom plohe $z = f(x,y)$ u točki (x_0, y_0, z_0) samo onda kad je f diferencijabilna u točki (x_0, y_0) jer tada svaki pravac u ravnini R_t kroz točku (x_0, y_0, z_0), a ne samo pravce t_x i t_y, možemo promatrati kao tangentu na plohu $z = f(x,y)$ u točki (x_0, y_0, z_0), Naime, bilo koji pravac u ravnini R_t kroz točku (x_0, y_0, z_0) različit od t_x može se dobiti kao presijek ravnine R_t i ravnine paralelne sa Oz osi $y - y_0 = c(x - x_0)$, gdje je $c \in \mathbb{R}$ dana konstanta. Taj pravac ima jednadžbu

$$t_c \cdots \frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{c} = \frac{z - z_0}{f'_x(x_0, y_0) + cf'_y(x_0, y_0)}.$$

S druge strane, presijek plohe $z = f(x,y)$ i ravnine $y - y_0 = c(x - x_0)$ možemo promatrati kao graf funkcije jedne varijable

$$x \mapsto z = g_c(x) = f(x, y_0 + c(x - x_0))$$

(sve se dakako nalazi u ravnini $y - y_0 = c(x - x_0)$). Nije teško vidjeti da je zbog diferencijabilnosti funkcije f u točki (x_0, y_0) funkcija g_c derivabilna u točki x_0 s derivacijom $g'_c(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + cf'_y(x_0, y_0)$, te da je tangenta na krivulju

$z = g_c(x)$ u x_0 upravo pravac t_c. U ovom smislu onda pravac t_c promatramo i kao tangentu na plohu $z = f(x, y)$ u točki (x_0, y_0, z_0).

Primjer 3.10 Za funkciju f iz Primjera 3.9 u točki $(0, 0)$ pravci t_x, t_y i ravnina R_t imaju jednadžbe

$$\begin{aligned} t_x &\ \ldots\ \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}, \\ t_y &\ \ldots\ \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}, \\ R_t &\ \ldots\ z = 0, \end{aligned}$$

ali nijedan drugi pravac u ravnini $z = 0$, osim pravaca t_x i t_y, nije tangenta plohe $z = f(x, y)$ u točki $(0, 0)$ (vidi Sliku 3.30).

Slika 3.30:

Naime, za dani $c \in \mathbb{R}$ pravac t_c u ravnini R_t ima jednadžbu

$$t_c\ \cdots\ \frac{x}{1} = \frac{y}{c} = \frac{z}{0},$$

a za funkciju g_c dobijamo

$$g_c(x) = \begin{cases} \frac{cx}{1+c^2}, & \text{za } x \neq 0, \\ 0, & \text{za } x = 0 \end{cases}$$

i očito je za $c \neq 0$

$$g_c'(0) = \frac{c}{1 + c^2} \neq f_x'(0, 0) + c f_y'(0, 0) = 0.$$

Zadatak 3.6 a) Odredi jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $z = f(x, y)$ u točki $(0, 0)$ ako je f funkcija iz Primjera 3.6.

b) Ispitaj neprekidnost, derivabilnost i diferencijabilnost funkcije

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{za } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{za } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

u točki $(0,0)$.

c) Odredi jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu

$$z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1+xy}$$

u točki $(0,0)$.

3.8 Parcijalne derivacije kompozicije funkcija

Prisjetimo se formule za derivaciju kompozicije funkcija jedne varijable

$$[g(f(x))]'=g'(f(x))f'(x).$$

Kad imamo funkcije više varijabla tada za računanje parcijalnih derivacija složene funkcije (kompozicije funkcija) vrijedi analogno pravilo, dakako uz nešto kompliciraniji zapis.

Teorem 3.5 *Neka su zadane funkcije*

$$\begin{aligned}\varphi_1,\cdots,\varphi_k:\mathcal{D}\to\mathbb{R}, &\qquad \mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^n,\\ f:X\to\mathbb{R}, &\qquad X\subseteq\mathbb{R}^k,\end{aligned}$$

pri čemu je

$$\varphi_1[D]\times\cdots\times\varphi_k[D]\subseteq X.$$

Tada možemo definirati kompoziciju $F=f\circ(\varphi_1,\cdots,\varphi_k):\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ *formulom*

$$F(x_1,\cdots,x_n)=f(\varphi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_k(x_1,\cdots,x_n)),\quad (x_1,\cdots,x_n)\in D.$$

Ako su funkcije $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$ *i* f *diferencijabilne, onda je i funkcija* F *također diferencijabilna, a njene parcijalne derivacije su dane formulom*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial u_j}\cdot\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i},\qquad i=1,\cdots,n,$$

gdje je $u_j=\varphi_j(x_1,\cdots,x_n)$, $j=1,\cdots,k$.

Primjer 3.11 Neka su zadane diferencijabilne funkcije

$$\varphi : \mathcal{D} \to [a,b],\ \ \psi : \mathcal{D} \to [c,d],\ \ \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

$$f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$$

i neka je

$$F(x,y,z) = f(\varphi(x,y,z), \psi(x,y,z)),\ \ (x,y,z) \in D.$$

Uvedemo li oznake $u = \varphi(x,y,z)$ i $v = \psi(x,y,z)$ onda prema prethodnom teoremu imamo

$$\begin{aligned} F'_x &= f'_u \cdot \varphi'_x + f'_v \cdot \psi'_x, \\ F'_y &= f'_u \cdot \varphi'_y + f'_v \cdot \psi'_y, \\ F'_z &= f'_u \cdot \varphi'_z + f'_v \cdot \psi'_z. \end{aligned}$$

Napomena 3.5 Ako je funkcija F zadana kao u Teoremu 3.5, onda je njen diferencijal jednak

$$\begin{aligned} dF(x_1,\cdots,x_m) &= \sum_{i=1}^{m} F'_{x_i}(x_1,\cdots,x_m)dx_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{k} f'_{u_j}(u_1,\cdots,u_k) \cdot (\varphi_j)'_{x_i}(x_1,\cdots,x_m) \right) dx_i \\ &= \sum_{j=1}^{k} f'_{u_j}(u_1,\cdots,u_k) \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} (\varphi_j)'_{x_i}(x_1,\cdots,x_m)dx_i \right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} f'_{u_j}(u_1,\cdots,u_k)du_j \\ &= df(u_1,\cdots,u_k). \end{aligned}$$

3.9 Totalni diferencijal višeg reda

Definicija 3.10 Neka funkcija f ima u nekoj okolini $K(T\delta) \subseteq D$ sve parcijalne derivacije do uključivo $(r-1)$-vog reda. Ako su sve parcijalne derivacije $(r-1)$-vog reda funkcije f diferencijabilne u točki T, onda totalni diferencijal r-tog reda funkcije f u točki T definiramo kao

$$d^r f(T) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} \frac{\partial^r f(T)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_r}} dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_r}.$$

Primjer 3.12 Neka je f funkcija dviju varijabla. Pod pretpostavkom da f u nekoj okolini točke (x,y) ima neprekidne sve parcijalne derivacije r-tog reda, uvažavajući Schwarzov teorem, za $r=2$ imamo

$$\begin{aligned} d^2 f(x,y) &= f''_{xx}(x,y)dxdx + f''_{xy}(x,y)dxdy \\ &\quad + f''_{yx}(x,y)dydx + f''_{yy}(x,y)dydy \\ &= f''_{xx}(x,y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{yy}(x,y)(dy)^2, \end{aligned}$$

a za $r=3$ imamo

$$\begin{aligned} d^3 f(x,y) &= f'''_{xxx}(x,y)dxdxdx + f'''_{xxy}(x,y)dxdxdy \\ &\quad + f'''_{xyx}(x,y)dxdydx + f'''_{xyy}(x,y)dxdydy \\ &\quad + f'''_{yxx}(x,y)dydxdx + f'''_{yxy}(x,y)dydxdy \\ &\quad + f'''_{yyx}(x,y)dydydx + f'''_{yyy}(x,y)dydydy \\ &= f'''_{xxx}(x,y)(dx)^3 + 3f'''_{xxy}(x,y)(dx)^2 dy \\ &\quad + 3f'''_{xyy}(x,y)dx(dy)^2 + f'''_{yyy}(x,y)(dy)^3. \end{aligned}$$

Nije teško dokazati (na primjer indukcijom) da za bilo koji r vrijedi

$$d^r f(x,y) = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{\partial^r f(x,y)}{\partial x^{r-i} \partial y^i} (dx)^{r-i} (dy)^i.$$

Zbog očigledne analogije sa binomnom formulom gornji izraz često skraćeno zapisujemo kao

$$d^r f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^r f(x,y).$$

Zadatak 3.7 a) Odredi $d^2 f(0,0)$ ako je f funkcija iz Primjera 3.6.

b) Koristeći formulu iz Primjera 3.12 odredi $d^r f(0,0)$ za funkciju

$$f(x,y) = e^{x-2y}.$$

3.9.1 Taylorova formula

Promatrimo funkciju $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, i točke

$$T_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0), \qquad T = (x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

iz $\mathcal{D}$. Činjenicu da je f diferencijabilna u točki T_0 možemo reinterpretirati na slijedeči način: za svaku točku $T \in K(T_0, \delta) \subseteq \mathcal{D}$ vrijedi

$$f(T) = f(T_0) + \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(T_0)(x_i - x_i^0) + R_1(T),$$

pri čemu ostatak $R_1(T)$ ima svojstvo da teži k nuli kad T teži k T_0 i to brže nego T teži k T_0, odnosno

$$\lim_{T\to T_0}\frac{R_1(T)}{\rho}=0, \qquad \rho=d(T,T_0)=\sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2}.$$

Praktična korist od gornje interpretacije je slijedeći zaključak: ako je točka T blizu točki T_0 tj. ako je ρ malen onda je veličina $R_1(T)$ zanemarivo malena pa se vrijednost funkcije f u točki T može računati korištenjem približne jednakosti

$$f(T)\approx f(T_0)+\sum_{i=1}^{n}f'_{x_i}(T_0)(x_i-x_i^0).$$

Desnu stranu u gornjoj približnoj jednakosti je jednostavno računati ako su poznate vrijednosti $f(T_0)$ i $f'_{x_i}(T_0)$, $i=1,\cdots,n$. Ako želimo imati približnu jednakost sa većim stupnjem točnosti onda u račun moramo ubaciti i vrijednosti parcijalnih derivacija viših redova funkcije f u točki T_0.

Koristeći Taylorovu formulu za realne funkcije jedne varijable te formulu za deriviranje kompozicije funkcija više varijabla lako se dobije Taylorova formula za funkcije više varijabla. Taj rezultat ovdje iskazujemo bez dokaza:

Teorem 3.6 *Ako funkcija f ima u nekoj okolini $K(T_0,\delta)\subseteq D$ neprekidne parcijalne derivacije do uključivo $(m+1)$-vog reda, $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, onda za svaku točku $T\in K(T_0,\delta)$ vrijedi Taylorova formula*

$$f(T)=f(T_0)+\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{r!}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^r f(T_0)+R_m(T).$$

Ovdje je

$$R_m(T)=\frac{(1-\theta)^{m+1-p}}{m!\cdot p}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{m+1} f(T_\theta)$$

za neki unaprijed zadani $p\in\mathbb{N}$, a $0<\theta<1$ zavisi od točke T i određuje točku

$$T_\theta=(x_1^0+\theta(x_1-x_1^0),\cdots,x_n^0+\theta(x_n-x_n^0))$$

koja se nalazi između točaka T_0 i T.

Napomena 3.6 1) Izraz kojim je dan ostatak $R_n(T)$ u iskazu Teorema 3.6 je takozvani Schlömilchov oblik ostatka. Za $p=1$ dobijamo Cauchyjev oblik ostatka, a za $p=m+1$ dobijamo Lagrangeov oblik ostatka koji je najjednostavniji i najčešće korišten. Također nije teško pokazati da vrijedi

$$\lim_{T\to T_0}\frac{R_m(T)}{\rho^m}=0, \qquad \rho=d(T,T_0)=\sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2},$$

što se u literaturi (naročito u numeričkoj analizi) simbolički zapisuje kao

$$R_m(T) = O(\rho^m)$$

(ovakav zapis zovemo Peannov oblik ostatka). Posebno za $m = 0$ tvrdnja u Teoremu 3.6 svodi se praktično na uvodnu interpretaciju diferencijabilnosti funkcije f u točki T_0.

2) Ako su uvjeti Teorema 3.6 ispunjeni za svako $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i ako je

$$\lim_{m\to\infty} R_m(T) = 0, \qquad \forall T \in K(T_0, \delta),$$

onda grničnim prijelazom iz Taylorove formule dobijamo razvoj funkcije u Taylorov red oko točke T_0 koji glasi

$$f(T) = f(T_0) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^r f(T_0).$$

U slučaju kad je $T_0 = (0, \cdots, 0)$ Taylorova formula (red) zove se Maclaurinova formula (red).

Primjer 3.13 ???

3.10 Ekstremi funkcija više varijabla

Definicija 3.11 Funkcija f ima u točki T_0 lokalni minimum (maksimum) ako postoji okolina $K(T_0, \delta) \subseteq D$ takva da za sve $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$ vrijedi

$$f(T) > f(T_0) \quad (f(T) < f(T_0)).$$

Točke lokalnih minimuma i točke lokalnih maksimuma funkcije f zajedničkim imenom zovemo točkama lokalnih ekstrema od f. Kao i kod funkcija jedne varijable, ukoliko je funkcija f više varijabla neprekidna te barem dvaput derivabilna u nekoj okolini promatrane točke T_0, možemo dati nužne i dovoljne uvjete da bi f imala lokalni ekstrem u T_0 izražene pomoću vrijednosti parcijalnih derivacija od f u promatranoj točki. Ti su uvjeti analogni onima za funkcije jedne varijable, ali dakako nešto složenije izraženi.

Teorem 3.7 (Nuždan uvjet ekstrema) *Neka funkcija f ima lokalni ekstrem u točki T_0. Ako postoji parcijalna derivacija od f po varijabli x_i u točki T_0, onda je nužno*

$$f'_{x_i}(T_0) = 0.$$

Dokaz. Ako funkcija f ima lokalni ekstrem u točki T_0, onda za fiksirani i i funkcija jedne varijable $f_i : \mathcal{D}_i \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$f_i(x) = f(x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \cdots, x_n^0), \qquad x \in \mathcal{D}_i,$$

gdje je $\mathcal{D}_i = \{x \in \mathbb{R} \mid (x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \cdots, x_n^0) \in D\}$, ima u točki x_i^0 lokalni ekstrem. Ako za neki indeks i postoji parcijalna derivacija od f po varijabli x_i u točki T_0 onda je u stvari

$$f'_{x_i}(T_0) = f'_i(x_i^0).$$

Kako nuždan uvjet ekstrema za funkcije jedne varijable povlači $f'_i(x_i^0) = 0$, zaključujemo da mora biti $f'_{x_i}(T_0) = 0$. ■

Napomena 3.7 Neka je funkcija f kao u iskazu Teorema 3.7. Ako je f diferencijabilna u točki T_0 onda se nuždan uvjet da bi f imala lokalni ekstrem u točki T_0

$$f'_{x_i}(T_0) = 0, \qquad \forall i = 1, \cdots,$$

može ekvivalentno iskazati korištenjem diferencijala kao

$$df(T_0) = 0.$$

Kao što ćemo vidjeti, ovaj uvjet je nuždan ali ne i dovoljan. Inače, ako je funkcija f diferencijabilna u točki T_0 i pri tom je $df(T_0) = 0$ onda kaženo da je T_0 stacionarna točka funkcije f. U slučaju funkcije dviju varijabla ($n = 2$) stacionarnu točku (x_0, y_0) funkcije f geometrijski možemo interpretirati kao točku u kojoj je tangencijalna ravnina na plohu $z = f(x, y)$ paralelna sa xOy koordinatnom ravninom Naime jednadžba tangencijalne ravnine u stacionarnoj točki (x_0, y_0) glasi

$$z = z_0, \quad z_0 = f(x_0, y_0).$$

Primjer 3.14 a) Točka $(-1, 2)$ je stacionarna točka funkcije

$$f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 3, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

jer je ta funkcija beskonačno puta diferencijabilna s parcijalnim derivacijama prvog reda

$$f'_x(x, y) = 2x + 2, \; f'_y(x, y) = 2y - 4$$

i očito je $f'_x(-1, 2) = 0$ i $f'_y(-1, 2) = 0$. Nadalje točka $(-1, 2)$ je i točka lokalnog minimuma (u stvari točka globalnog minimuma na $\mathbb{R}^2$) za ovu funkciju jer je

$$f(x, y) = (x + 1)^2 + (y - 2)^2 - 2 > -2 = f(-1, 2), \quad \forall (x, y) \neq (-1, 2).$$

Jednadžba tangencijalne ravnine na plohu $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 3$ u točki $(-1, 2)$ glasi $z = -2$ (vidi Sliku 3.31).

Slika 3.31:

b) Funkcija

$$f(x,y) = xy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

je beskonačno puta diferencijabilna, a parcijalne derivacije prvog reda su joj

$$f'_x(x,y) = y, \; f'_y(x,y) = x.$$

Očito je $f'_x(0,0) = 0$ i $f'_y(0,0) = 0$, pa je točka $(0,0)$ stacionarna točka za ovu funkciju. Međutim točka $(0,0)$ nije točka lokalnog ekstrema funkcije f. Naime, u svakoj okolini točke $(0,0)$ postoje točke oblika (t,t), $t \neq 0$, u kojima je

$$f(t,t) = t^2 > 0 = f(0,0),$$

ali isto tako i točke oblika $(t,-t)$, $t \neq 0$ u kojima je

$$f(t,-t) = -t^2 < 0 = f(0,0).$$

Stoga zaključujemo da $(0,0)$ nije ni točka lokalnog maksimuma ni točka lokalnog minimuma. Točku $(0,0)$ zovemo sedlastom točkom plohe $z = xy$. Jednadžba tangencijalne ravnine na plohu $z = xy$ u točki $(0,0)$ glasi $z = 0$ (vidi Sliku 3.32).

c) Funkcija

$$f(x,y) = 1 - x^2 - 2x - |y-2|, \quad (x,y) \in D = \mathbb{R}^2$$

ima u točki $(-1,2)$ lokalni maksimum (u stvari globalni maksimum na D) jer je

$$f(x,y) = 2 - (x+1)^2 - |y-2| < 2 = f(-1,2), \quad \forall (x,y) \neq (-1,2).$$

Slika 3.32:

Međutim točku $(-1, 2)$ ne možemo nazvati stacionarnom točkom od f u smislu Napomene 3.7 jer f nije diferencijabilna u toj točki. Naime lako se vidi da je $f'_x(-1, 2) = 0$ ali i da $f'_y(-1, 2)$ ne postoji. Prema tome tangencijalna ravnina na plohu $z = 1 - x^2 - 2x - |y - 2|$ u točki $(-1, 2)$ ne postoji (vidi Sliku 3.33).

Slika 3.33:

Kako smo vidjeli u gornjem primjeru stacionarnost neke točke nije dovoljan uvjet da bi ta točka bila točka lokalnog ekstrema. Da bi mogli dati primjenjljive dovoljne uvjete moramo, kao i u slučaju funkcija jedne varijable, koristiti derivacije viših redova. Iz definicije 3.11 je vidljivo da je T_0 točka lokalnog ekstrema funkcije f ako i samo ako je razlika $f(T) - f(T_0)$ stalnog predznaka u nekoj okolini

$K(T_0, \delta)$ točke T_0. Za ocijenu predznaka te razlike najprikladnije je upotrijebiti Taylorovu formulu danu u Teoremu 3.6 i to sa $n = 1$ (što znači korištenje parcijalnih derivacija od f do uključivo drugog reda) koja se dodatno pojednostavnjuje uvažavanjem nužnog uvjeta $df(T_0) = 0$.

Dakle, uz pretpostavku da je f funkcija od n varijabla koja u nekoj okolini $K(T_0, \delta) \subseteq D$ stacionarne točke $T_0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)$ ima neprekidne parcijalne derivacije do uključivo drugog reda, primjenom Taylorove formule s Lagrangeovim oblikom ostatka $R_1(T)$ dobijamo da za svaku točku $T = (x_1, \cdots, x_n) \in K(T_0, \delta)$ vrijedi

$$f(T) - f(T_0) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(T_\theta).$$

U daljnjoj analizi ključno je uočiti da se, zbog pretpostavljene neprekidnosti svih parcijalnih derivacija drugog reda funkcije f, ostatak

$$R_1(T) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(T_\theta)$$

i veličina

$$\tilde{R}_1(T) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(T_0)$$

vrlo malo razlikuju čim je točka T dovoljno blizu točki T_0, odnosno, čim je $d(T_0, T)$ dovoljno maleno. Posljedica toga su slijedeća četiri zaključka:

a) Ako je $\tilde{R}_1(T) > 0$ za sve $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$ onda f u točki T_0 ima lokalni minimum.

b) Ako je $\tilde{R}_1(T) < 0$ za sve $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$ onda f u točki T_0 ima lokalni maksimum.

c) Ako $\tilde{R}_1(T)$ mijenja predznak na $K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$, odnosno ako je $\tilde{R}_1(T) > 0$ u nekim točkama $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$ i $\tilde{R}_1(T) < 0$ u nekim točkama $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$, onda f u točki T_0 nema lokalni ekstrem (kažemo da je T_0 sedlasta točka od f).

d) Ako je $\tilde{R}_1(T) \geq 0$ za sve $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$ i ako postoji točka $T \neq T_0$ u kojoj je $\tilde{R}_1(T) = 0$, ili ako je $\tilde{R}_1(T) \leq 0$ za sve $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$ i postoji točka $T \neq T_0$ u kojoj je $\tilde{R}_1(T) = 0$, onda ne možemo bez daljnje analize odgovoriti da li je točka T_0 točka lokalnog ekstrema funkcije f ili nije.

Interesantno je da nastupanje bilo kojeg od gore navedenih četiriju slučajeva zavisi isključivo o vrijednostima parcijalnih derivacija drugog reda funkcije f u promatranoj točki T_0. Naime vrijedi slijedeći teorem:

Teorem 3.8 (Dovoljni uvjeti ekstrema) *Neka funkcija f u nekoj okolini $K(T_0,\delta) \subseteq D$ stacionarne točke T_0 ima neprekidne parcijalne derivacije do uključivo drugog reda. Uvedimo oznake*

$$A_{ij} = f''_{x_i x_j}(T_0), \qquad i,j = 1,2,\cdots,n$$

i definirajmo veličine Δ_r, $r = 1,2,\cdots,n$ formulama

$$\Delta_1 = A_{11}, \quad \Delta_r = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rr} \end{vmatrix}, \quad r = 2,\cdots,n.$$

Tada vrijedi:

a) ako je $\Delta_r > 0$ za sve indekse r, onda f u točki T_0 ima lokalni minimum;

b) ako je $\Delta_r < 0$ za sve neparne indekse r i $\Delta_r > 0$ za sve parne indekse r, onda f u točki T_0 ima lokalni maksimum;

c) ako je $\Delta_r < 0$ za barem jedan paran indeks r ili ako postoje dva neparna indeksa r i r' takva da je $\Delta_r > 0$ i $\Delta_{r'} < 0$, onda f u točki T_0 nema lokalni ekstrem;

d) ako je $\Delta_r \geq 0$ za sve indekse r i $\Delta_r = 0$ za barem jedan indeks r ili ako je $\Delta_r \leq 0$ za sve indekse r i $\Delta_r = 0$ za barem jedan indeks r, onda f može ali i ne mora imati lokalni ekstrem u točki T_0.

Napomena 3.8 a) Treba uočiti da za brojeve A_{ij} iz iskaza Teorema 3.8 vrijedi $A_{ji} = A_{ij}$ (Schwarzov teorem), odnosno da je matrica $A = (A_{ij})$ simetrična. Dokaz samog teorema osniva se na na nužnim i dovoljnim uvjetima uz koje je kvadratna forma definirana simetričnom matricom A pozitivno ili negativno definitna (semidefinitna) ili indefinitna te ga izostavljamo.

b) U posebnom slučaju za funkciju dviju varijabla koja u nekoj okolini $K(T_0,\delta) \subseteq D$ stacionarne točke $T_0 = (x_0, y_0)$ ima neprekidne parcijalne derivacije do uključivo drugog reda imamo:

$$A_{11} = f''_{xx}(x_0,y_0), \qquad A_{12} = A_{21} = f''_{xy}(x_0,y_0), \qquad A_{22} = f''_{yy}(x_0,y_0)$$

i

$$\Delta_1 = A_{11}, \qquad \Delta_2 = A_{11}A_{22} - A_{12}^2.$$

Tvrdnje Teorema 3.8 svode se na slijedeća četiri slučaja:

(1) ako je $\Delta_1 > 0$ i $\Delta_2 > 0$, onda funkcija f u točki (x_0, y_0) ima lokalni minimum,

(2) ako je $\Delta_1 < 0$ i $\Delta_2 > 0$, onda funkcija f u točki (x_0, y_0) ima lokalni maksimum,

(3) ako je $\Delta_2 < 0$, onda f u točki (x_0, y_0) nema lokalni ekstrem,

(4) ako je $\Delta_2 = 0$ onda f u točki (x_0, y_0) može ali i ne mora imati lokalni ekstrem.

Primjer 3.15 a) Za funkciju iz Primjera 3.14 a)

$$f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 3, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

jedina stacionarna točka je $(-1, 2)$. Parcijalne derivacije drugog reda od f su kostantne funkcije,

$$f''_{xx}(x,y) = 2, \quad f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 0, \quad f''_{yy}(x,y) = 2,$$

pa u točki $(-1, 2)$ imamo

$$\Delta_1 = 2 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Po Teoremu 3.8 a) zaključujemo da funkcija f u točki $(-1, 2)$ ima lokalni minimum.

b) Za funkciju iz Primjera 3.14 b)

$$f(x,y) = xy, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

jedina stacionarna točka je $(0, 0)$. Parcijalne derivacije drugog reda od f su kostantne funkcije

$$f''_{xx}(x,y) = 0, \quad f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 1, \quad f''_{yy}(x,y) = 0,$$

pa u točki $(0, 0)$ imamo

$$\Delta_1 = 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Po Teoremu 3.8 c) zaključujemo da funkcija f u točki $(0, 0)$ nema lokalni ekstrem.

c) Funkcija iz Primjera 3.14 c)

$$f(x,y) = 1 - x^2 - 2x - |y - 2|, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

ima u točki $(-1, 2)$ lokalni maksimum, ali taj zaključak ne možemo dobiti primjenom Teorema 3.8 jer f ne udovoljava pretpostavkama tog teorema (nema neprekidne sve parcijalne derivacije drugog reda).

d) Funkcija triju varijabla

$$f(x,y,z) = -2x^2 - y^2 - 3z^2, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

je beskonačno puta diferencijabilna, a parcijalne derivacije prvog reda su joj

$$f_x(x,y,z) = -4x, \qquad f'_y(x,y,z) = -2y, \qquad f'_z(x,y,z) = -6z.$$

Očito je $(0,0,0)$ jedina stacionarna točka od f. Parcijalne derivacije drugog reda od f su kostantne (po Schwarzovom teoremu dovoljno ih i gledati samo šest)

$$f''_{xx} = -4, \quad f''_{xy} = f''_{xz} = 0, \quad f''_{yy} = -2, \quad f''_{yz} = 0, \quad f''_{zz} = -6,$$

pa u točki $(0,0,0)$ imamo

$$\Delta_1 = -4 < 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -48 < 0.$$

Po Teoremu 3.8 b) zaključujemo da f u točki $(0,0,0)$ ima lokalni maksimum.

e) Slično kao u prethodnom primjeru, funkcija triju varijabla

$$f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

je beskonačno puta diferencijabilna, a parcijalne derivacije prvog reda su joj

$$f_x(x,y,z) = 4x, \qquad f'_y(x,y,z) = 2y, \qquad f'_z(x,y,z) = -6z.$$

Opet je $(0,0,0)$ jedina stacionarna točka od f, a parcijalne derivacije drugog reda od f su sada

$$f''_{xx} = 4, \quad f''_{xy} = f''_{xz} = 0, \quad f''_{yy} = 2, \quad f''_{yz} = 0, \quad f''_{zz} = -6.$$

U točki $(0,0,0)$ imamo

$$\Delta_1 = 4 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -48 < 0,$$

pa po Teoremu 3.8 c) zaključujemo da funkcija f u točki $(0,0,0)$ nema lokalni ekstrem.

f) Da bi ilustrirali zaključak d) iz Teorema 3.8 pogledajmo slijedeće dvije funkcije triju varijabla

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2+y^2+z^4, \\ g(x,y,z) &= x^2+y^2+z^3, \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Točka $(0,0,0)$ je točka lokalnog minimuma funkcije f jer je očito

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^4>0=f(0,0,0), \qquad \forall (x,y,z)\neq(0,0,0).$$

Nadalje točka $(0,0,0)$ nije točka lokalnog ekstrema funkcije g što odmah slijedi iz slijedećih dviju nejednakosti

$$\begin{aligned} g(0,0,t) &= t^3>0=g(0,0,0), \\ g(0,0,-t) &= -t^3<0=g(0,0,0), \qquad \forall t>0. \end{aligned}$$

S druge strane točka $(0,0,0)$ je jedina stacionarna točka i od f i od g, što se lako provjeri, Jednostavnim računom parcijalnih derivacija drugog reda u točki$(0,0,0)$ za obje funkcije dobijamo

$$\Delta_1=2>0, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}=4>0, \quad \Delta_3=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{vmatrix}=0,$$

odnosno radi se o slučaju d) iz Teorema 3.8

3.11 Implicitno zadane funkcije

U Matematici I smo već govorili o tome kako jednadžbu oblika

$$F(x,y)=0,$$

gdje je $F:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^2$, neka funkcija dviju varijabla, možemo interpretirati i kao jednadžbu kojom je implicitno zadana neka funkcija jedne varijable

$$y=f(x), \qquad x\in I\subseteq\mathbb{R}.$$

Jednažbi $F(x,y)=0$ prirodno pridružujemo skup $S\subseteq\mathbb{R}^2$ definiran s

$$S=\{(x,y)\in\mathcal{D}\mid F(x,y)=0\}$$

i u pravilu ga poistovjećujemo sa samom jednadžbom kojoj je pridružen.

Definicija 3.12 Za funkciju jedne varijable $f : I \to \mathbb{R}$, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ (obično je I interval ili unija intervala u $\mathbb{R}$), za koju vrijedi

$$F(x, f(x)) = 0, \qquad \forall x \in I$$

kažemo da je implicitno zadana jednadžbom $F(x, y) = 0$. Ovo iskazujemo i ekvivalentnim zahtjevom da je graf Γ_f funkcije f sadržan u skupu S, odnosno

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in I\} \subseteq S.$$

Ova definicija zahtijeva dva komentara koja dajemo u slijedeće dvije napomene, zajedno s jednostavnim primjerima

Napomena 3.9 Ako je funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ $I \subseteq \mathbb{R}$ implicitno zadana jednadžbom $F(x, y) = 0$ onda je prema Definiciji 3.12 i svaka rastrikcija $f : I' \to \mathbb{R}$, $I' \subseteq I$ of f implicitno zadana istom tom jednadžbom. Dakle, $F(x, y) = 0$ u pravilu promatramo kao jednadžbo kojom je implicitno zadana ne jedna već više funkcija jedne varijable, a dijelovi od S su grafovi tih funkcija. Naravno, od interesa je slučaj kada postoji točno jedna osnovna funkcija f koja je implicitno zadana tom jednadžbom i čiji se graf podudara sa čitavim skupom S, $\Gamma_f = S$. Takvu funkciju f dakako nije uvijek moguće naći.

Primjer 3.16 a) Ako je funkcija f zadana eksplicitno formulom

$$y = f(x), \quad x \in I \subseteq \mathbb{R},$$

onda je možemo shvatiti i kao funkciju koja je implicitno zadana jednadžbom

$$F(x, y) \equiv y - f(x) = 0,$$

pri čemu je domena od F skup $D = I \times \mathbb{R}$, a skup S je upravo graf Γ_f zadane funkcije f.

b) Kako je dobro poznato, jednadžbu

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

obično zovemo implicitnom jednadžbom kružnice sa središtem u ishodištu $(0, 0)$ i polumjerom 1. Jasno je da je možemo shvatiti i kao jednadžbu oblika $F(x.y) = 0$ kojom je implicitno zadana neka funkcija jedne varijable x. U ovom slučaju je $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ definirana na $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$, a pridruženi skup S sastoji se od točaka (x, y) ravnine koje su od ishodišta $(0, 0)$ udaljene za 1. Kad tu jednadžbu razriješimo po varijabli y kao nepoznanici dobijamo

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2},$$

Slika 3.34:

odnosno y nije jednoznačno određen. Zaključujemo da ne postoji jedna osnovna funkcija f čiji se graf podudara sa S. U stvari, jednadžbu $x^2+y^2-1=0$ obično interpretiramo kao jednadžbu kojom su implicitno zadane slijedeće dvije osnovne funkcije (vidi Sliku 3.34)

$$f^-(x) = -\sqrt{1-x^2}, \quad f^+(x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad x \in I = [-1,1].$$

Jasno je da je na primjer i funkcija (vidi Sliku 3.35)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{za } x \in [-1, 0.5) \\ -\sqrt{1-x^2}, & \text{za } x \in [0.5, 1] \end{cases}$$

također implicitno zadana jednadžbom $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Napomena 3.10 Prema Definiciji 3.12, jednažbu $F(x,y) = 0$ interpretiramo kao implicitnu vezu između varijabla x i y, pri čemu varijablu x tretiramo kao nezavisnu, a varijablu y kao zavisnu. Naravno da je ponekad zgodno zamijeniti takve uloge varijabla x i y.

Primjer 3.17 a) Jednadžbu

$$x + 2 = 0$$

često interpretiramo kao jednadžbu pravca u ravnini koji prolazi tčkom $(-2,0)$ na osi Ox i paralelan je sa osi Oy. Jasno je da u toj jednadžbi varijablu y ne možemo tretirati kao zavisnu jer se ona u njoj ne pojavljuje. Međutim tu jednadžbu možemo interpretirati kao jednažbu oblika $F(x,y) = 0$ sa $F(x,y) = x + 2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, u kojoj varijablu y tretiramo kao nezavisnu. Stoga je tom jednadžbom implicitno zadana konstantana funkcija $x = f(y) = -2$, $y \in I = \mathbb{R}$.

Slika 3.35:

b) Jednadžbu

$$x + y^2 = 0$$

obično nazivamo implicitnom jednažbom parabole. Tu je $F(x, y) = x + y^2$ definirana na $D = \mathbb{R}^2$. Ako u toj jednadžbi varijablu x interpretiramo kao nezavisnu onda su njom implicitno zadane dvije osnovne funkcije čiji grafovi su dijelovi skupa S pridruženog jednadžbi (vidi Sliku 3.36). To su funkcije

$$y = f^{-}(x) = -\sqrt{-x}, \quad y = f^{+}(x) = \sqrt{-x}, \qquad x \in I = (-\infty, 0].$$

Slika 3.36:

S druge strane zgodnije je varijablu y interpretirati kao nezavisnu jer se onda $x+y^2=0$ može interpretirati kao jednadžba kojom je implicitno zadana jedna osnovne funkcija

$$x = f(y) = -y^2, \qquad y \in I = \mathbb{R},$$

čiji graf se podudara sa skupom S pridruženim toj jednadžbi.

Definiciju 3.12 na prirodan način poopćavamo na slučaj implicitne veze $(n+1)$-ne varijable $(n \geq 1)$:

Definicija 3.13 Neka je $F : X \to \mathbb{R}$ funkcija od $(n+1)$-ne varijable definirana na $X \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ i neka je skup $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ definiran kao

$$S = \{(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in X \mid F(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = 0\}.$$

Za bilo koju funkciju $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ od n varijabla koja je definirana na $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ i za koju vrijedi

$$F(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n)) = 0, \quad \forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{D}$$

kažemo da je implicitno zadana jednadžbom

$$F(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Ovo iskazujemo i ekvivalentnim zahtjevom da je graf Γ_f funkcije f sadržan u skupu S:

$$\Gamma_f = \{(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n)) \mid (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{D}\} \subseteq S.$$

Napomena 3.11 Primjedbe slične onima u Napomeni 3.9 mogu se dati i uz Definiciju 3.13. Dakle, jednadžbu

$$F(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = 0$$

uvijek promatramo kao jednadžbu kojom može biti implicitno zadano više funkcija od n varijabla pri čemu varijablu x_{n+1} tretiramo kao zavisnu a $x_1, \cdots, x_n$ kao nezavisne varijable. Jasno je da i ovdje po potrebi možemo zamijeniti uloge varijabla tj. bilo koju od varijabla, recimo varijablu x_i, tretirati kao zavisnu a preostale varijable $x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1}$ kao nezavisne. Također, u slučaju veze triju varijabla $(n = 2)$ umjesto x_1, x_2 i x_3 koristimo uobičajene oznake x, y i z.

Primjer 3.18 a) Jednadžbom

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

Slika 3.37:

implicitno su zadana dva kružna stošca, oba s vrhom u ishodištu $(0, 0, 0$, jednom je os simetrije negativna Oz poluos, a drugomu pozitivna Oz poluos (vidi Sliku 3.37).

Naime ovdje je $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ definirana na $X = \mathbb{R}^3$, pa ako varijablu z tretiramo kao zavisnu onda su gornjom jednadžbom implicitno zadane dvije osnovne funkcije dviju nezavisnih varijabla x i y:

$$z = f^-(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = f^+(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ako bi na primjer u gornjoj jednadžbi varijablu y tretirali kao zavisnu onda su tom jednadžbom implicitno zadane slijedeće dvije osnovne funkcije dviju nezavisnih varijabla x i z

$$y = f^-(x, z) = -\sqrt{z^2 - x^2}, \quad (x, z) \in D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid |z| \leq |x|\}$$

i

$$y = f^+(x, z) = \sqrt{z^2 - x^2}, \quad (x, z) \in D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid |z| \leq |x|\}.$$

Kako izgledaju grafovi ovih funkcija možemo vidjeti na Slici 3.38.

b) U jednadžbi

$$x + y^2 + 2y + z^2 = 0$$

je $F(x, y, z) = x + y^2 + 2y + z^2$ definirana na $X = \mathbb{R}^3$. Najjednostavnije je varijablu x tretirati kao zavisnu jer je u tom slučaju ovom jednadžbom implicitno zadana točno jedna osnovna funkcija dviju nezavisnih varijabla y i z

$$x = f(y, z) = -y^2 - 2y - z^2, \qquad (y, z) \in \mathbb{R}^2.$$

Slika 3.38:

U stvari se ova jednadžba može ekvivalentno zapisati kao

$$x - 1 = -(y + 1)^2 - z^2$$

iz čega se vidi da je to jednadžba kružnog paraboloida s vrhom u točki $(1, -1, 0)$ okrenutog u smjeru negativne Ox poluosi (vidi Sliku 3.39).

Slika 3.39:

Kako smo u prethodnom izlaganju vidjeli, jednadžbu oblika

$$F(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}) = 0$$

interpretiramo kao implicitnu vezu između $(n+1)$-ne varijable kojom jedna od varijabla, na primjer x_{n+1}, može biti zadana kao funkcija preostalih n varijabla. Međutim nismo rekli ništa o tome koji su dovoljni uvjeti da bi takva eksplicitna veza

$$x_{n+1} = f(x_1, \cdots, x_n)$$

postojala. Također nismo rekli ništa o svojstvima funkcije f implicitno zadane gornjom jednadžbom. Odgovore na ta pitanja daje slijedeći teorem:

Teorem 3.9 *Neka je $F : X \to \mathbb{R}$ funkcija od $(n+1)$-ne varijable definirana na otvorenom skupu $X \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ koja ima neprekidne parcijalne derivacije F'_{x_i} na X po svim varijablama x_i, $i = 1, \cdots, n+1$ (dakle, F je diferencijabilna u svim točkama iz X). Dalje, neka je $T_0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0, x_{n+1}^0) \in X$ točka iz X za koju vrijedi*

$$F(x_1^0, \cdots, x_n^0, x_{n+1}^0) = 0, \qquad F'_{x_{n+1}}(x_1^0, \cdots, x_n^0, x_{n+1}^0) \neq 0.$$

Tada vrijedi:

(i) Postoji okolina $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ točke $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ i samo jedna funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$x_{n+1}^0 = f(x_1^0, \cdots, x_n^0)$$

i

$$F(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n)) = 0, \qquad \forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{D}.$$

(ii) Funkcija f ima neprekidne parcijalne derivacije f'_{x_i} na $\mathcal{D}$ po svim varijablama x_i, $i = 1, \cdots, n$, te u svakoj točki $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{D}$ vrijede formule

$$f'_{x_i}(x_1, \cdots, x_n) = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})}{F'_{x_{n+1}}(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})}, \qquad i = 1, \cdots, n,$$

gdje je

$$x_{n+1} = f(x_1, \cdots, x_n).$$

Napomena 3.12 a) Kad imamo implicitnu vezu dviju varijabla

$$F(x, y) = 0$$

definiranu pomoću funkcije $F : X \to \mathbb{R}$ koja na $X \subseteq \mathbb{R}^2$ ima neprekidne parcijalne derivacije F'_x i F'_y, Teorem 3.9 kaže da će za svaku točku $(x_0, y_0) \in X$ u kojoj vrijedi

$$F(x_0, y_0) = 0, \qquad F'_y(x_0, y_0) \neq 0$$

postojati okolina $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ od x_0 i samo jedna funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ koja je implicitno zadana sa $F(x, y) = 0$ i koja je neprekidno derivabilna na D. Derivacija $f'(x)$ u bilo kojoj točki $x \in D$ je određena s

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \qquad F(x, y) = 0.$$

b) U slučaju implicitne veze triju varijabla

$$F(x,y,z) = 0$$

definirane pomoću funkcije $F : X \to \mathbb{R}$ koja na $X \subseteq \mathbb{R}^3$ ima neprekidne parcijalne derivacije F'_x, F'_y i F'_z, Teorem 3.9 kaže da će za svaku točku $(x_0, y_0, z_0) \in X$ u kojoj je

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

postojati okolina $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ točke (x_0, y_0) i samo jedna funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ koja je implicitno zadana sa $F(x,y,z) = 0$ i koja ima neprekidne parcijalne derivacije f'_x i f'_y na $\mathcal{D}$. Vrijednosti parcijalnih derivacija $f'_x(x,y)$ i $f'_y(x,y)$ u bilo kojoj točki $(x,y) \in \mathcal{D}$ su određene s

$$\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\\
f'_y(x,y) &= -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\\
F(x,y,z) &= 0.
\end{aligned}$$

Primjer 3.19 a) U Primjeru 3.17 b) smo vidjeli da su jednadžbom

$$x + y^2 = 0$$

implicitno zadane dvije osnovne funkcije nezavisne varijable x

$$y = f^-(x) = -\sqrt{-x}, \quad y = f^+(x) = \sqrt{-x}, \qquad x \in I = (-\infty, 0].$$

Ovdje je $F(x,y) = x + y^2$ definirana i neprekidno derivabilna na $X = \mathbb{R}^2$ te su joj parcijalne derivacije dane formulama

$$F'_x(x,y) = 1, \qquad F'_y(x,y) = 2y.$$

U točki $(-4, -2)$ imamo

$$F(-4,-2) = 0, \qquad F'_x(-4,-2) = 1, \qquad F'_y(-4,-2) = -4.$$

Dakle pretpostavke Teorema 3.9 su ispunjene i zato mora postojati okolina $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ od -4 i samo jedna derivabilna funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ implicitno zadana jednadžbom $x + y^2 = 0$. Očito, to je funkcija f^-. Međutim, tu funkciju ne možemo gledati na čitavom $I = (-\infty, 0]$ već samo na podskupu $D = (-\infty, 0)$, jer u točki 0 nije derivabilna. Dakle

$$f(x) = -\sqrt{-x}, \qquad x \in D = (-\infty, 0),$$

Da bi izračunali na primjer $f'(-4)$ ne treba nam eksplicitni izraz za $f'(x)$ već imamo

$$f'(-4) = -\frac{F'_x(-4,-2)}{F'_y(-4,-2)} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}.$$

U ovom slučaju gornji račun možemo provjeriti koristeći eksplicitni izraz

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}}, \qquad x \in \mathcal{D} = (-\infty, 0),$$

Jasno je da općenito takvu provjeru nećemo moći napraviti jer nećemo imati funkciju f eksplicitno zadanu već ćemo samo znati da postoji!. Uočimo još da i točka $(0,0)$ zadovoljava $F(0,0) = 0$, ali Teorem 3.9 u toj točki nije primjenjljiv jer je $F'_y(0,0) = 0$.

b) Promotrimo jednadžbu

$$xyz - e^{-xyz} = 0$$

kao implicitnu vezu triju varijabla. Zbog očite simetrije svejedno je koju varijablu tretiramo kao zavisnu pa uzmimo da je to varijabla z. Imamo

$$F(x,y,z) = xyz - e^{-xyz}, \qquad (x,y,z) \in X = \mathbb{R}^3$$

i u svim točkama $(x,y,z) \in X$ vrijedi

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,z) &= \left(1 + e^{-xyz}\right) yz, \\ F'_y(x,y,z) &= \left(1 + e^{-xyz}\right) xz, \\ F'_z(x,y,z) &= \left(1 + e^{-xyz}\right) xy. \end{aligned}$$

Kako je

$$1 + e^{-xyz} > 1, \qquad \forall (x,y,z) \in X,$$

imamo

$$F'_z(x,y,z) = \left(1 + e^{-xyz}\right) xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee y = 0.$$

Prema tome, Teorem 3.9 možemo primijeniti u svakoj točki $(x,y,z) \in X$ u kojoj je zadovoljena početna jednadžba i za koju je $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Dakle, za svaku takvu točku postojat će okolina $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ i samo jedna funkcija f nezavisnih varijabla x i y koja je implicitno zadana početnom jednadžbom i neprekidno derivabilna na $\mathcal{D}$. Za parcijelane derivacije funkcije f vrijedit će

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= -\frac{F'x(x,y,z)}{F'z(x,y,z)} = -\frac{z}{x}, \\ f'_y(x,y) &= -\frac{F'x(x,y,z)}{F'z(x,y,z)} = -\frac{z}{y}. \end{aligned}$$

Naravno, za konkretno zadane vrijednosti $x \neq 0$ i $y \neq 0$ pripadajuća vrijednost varijable z je jednoznačno određena početnom jednadžbom i ne možemo je egzaktno izraziti pomoću elementarnih funkcija varijabla x i y. Međutim i u ovom primjeru možemo gornje formule za parcijalne derivacije provjerit neposrednim deriviranjem slično kao u prethodnom primjeru. Naime, uvođenjem pomoćne varijable $t = xyz$ početnu jednadžbu možemo napisati kao

$$t = e^{-t}, \qquad t = xyz.$$

Krivulja $y = e^{-x}$ i pravac $y = x$ sijeku se točno u jednoj točki s apscisom $c \in (0, 1)$ kako se vidi na Slici 3.40.

Slika 3.40:

Stoga jednadžba $t = e^{-t}$ ima točno jedno riješenje $t = c$. Veličinu c ne možemo egzaktno izraziti koristeći elementarne funkcije jedne varijable već samo možemo upotrijebiti neku od elementarnih numeričkih metoda (na primjer metodu iteracije) da bi dobili po volji točnu približnu vrijednost za c. Zaključujemo da je početna jednadžba ekvivalentna sa jednadžbom

$$xyz = c$$

iz koje dobijamo eksplicitno varijablu z kao funkciju varijabla x i y,

$$z = f(x, y) = \frac{c}{xy}, \qquad x \neq 0 \wedge y \neq 0.$$

Sada neposrednim deriviranjem dobijamo

$$f'_x(x, y) = -\frac{c}{x^2 y} = -\frac{z}{x}, \qquad f'_y(x, y) = -\frac{c}{xy^2} = -\frac{z}{y}.$$

3.12 Problem vezanog ekstrema

Pretpostavimo da su zadane dvije funkcije dviju varijabla $f, \varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ definirane na skupu $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Funkciji φ pridružimo implicitnu jednadžbu

$$\varphi(x, y) = 0$$

i pripadajući skup $S \subseteq \mathcal{D}$ definiran tom jednadžbom

$$S = \{(x, y) \in \mathcal{D} \mid \varphi(x, y) = 0\}$$

Definicija 3.14 Ako za točku $T_0 = (x_0, y_0) \in S$ postoji okolina $K(T_0, \delta) \subseteq \mathcal{D}$ tako da je

$$f(x, y) > f(x_0, y_0), \qquad \forall (x, y) \in S \cap K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$$

onda kažemo da funkcija f u točki T_0 ima *vezani (uvjetni) lokalni minimum* uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$. Ako je

$$f(x, y) < f(x_0, y_0), \qquad \forall (x, y) \in S \cap K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$$

onda kažemo da funkcija f u točki T_0 ima vezani (uvjetni) lokalni maksimum uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$. Zajedničkim imenom točke vezanih lokalnih minimuma ili maksimuma zovemo točkama vezanih lokalnih estrema.

Problem određivanja točaka u kojima funkcija $z = f(x, y)$ ima vezane lokalne ekstreme uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$ kraće zapisujemo

$$\begin{cases} z = f(x, y) \to \min, \max \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Taj problem možemo geometrijski interpretirati na slijedeći način: međe točkama (x, y, z) plohe zadane eksplicitno sa $z = f(x, y)$ čije prve dvije koordinate određuju točku iz skupa S tražimo one u kojima je vrijednost treće koordinate z lokalno najmanja (najveća) (vidi Sliku 3.41).

Ukoliko su funkcije f i φ kojima je zadan problem vezanog ekstrema dovoljno lijepe (na primjer neprekidno derivabilne) mogu se dati nužni i dovoljni uvjeti da bi točka (x_0, y_0) bila rješenje tog problema.

Promatramo dakle gore opisani problem vezanog ekstrema i pretpostavljamo da funkcije f i φ imaju neprekidne sve parcijalne derivacije do uključivo drugog reda. Neka je točka $(x_0, y_0) \in S$ takva da je

$$\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Koristeći tvrdnju (i) iz Teorema 3.9 zaključujemo da mora postojati otvoreni interval $I \subseteq \mathbb{R}$ sa $x_0 \in I$ i točno jedna funkcija $y = g(x)$, $x \in I$ implicitno zadana

Slika 3.41:

jednadžbom $\varphi(x,y) = 0$. Zbog toga funkciju $z = f(x,y)$, $(x,y) \in S$ možemo lokalno u nekoj okolini promatrane točke (x_0, y_0) interpretirati kao funkciju samo jedne varojable x,

$$z = \tilde{f}(x) = f(x, g(x)), \qquad x \in I$$

Očigledno vrijedi slijedeća tvrdnja: *Funkcija f u točki (x_0, y_0) ima lokalni vezani minimum (maksimum) ako i samo ako funkcija $\tilde{f}$ u točki x_0 ima lokalni minimum (maksimum).*

Prema tvrdnji (ii) Teorema 3.9 znamo da je funkcija g neprekidno derivabilna na I i derivacija joj zadovoljava

$$g'(x) = -\frac{\varphi'_x(x,y)}{\varphi'_y(x,y)}. \tag{A1}$$

U stvari zbog pretpostavke da φ ima neprekidne i parcijalne derivacije drugog reda, zaključujemo da g na I ima neprekidnu i drugu derivaciju. Iz formule (A1) koristeći formulu za derivaciju kompozicije funkcija više varijabla dobijamo da je $g''(x)$ jednako

$$-\frac{\left[\varphi''_{xx}(x,y) + \varphi''_{xy}(x,y)g'(x)\right]\varphi'_y(x,y) - \varphi'_x(x,y)\left[\varphi''_{yx}(x,y) + \varphi''_{yy}(x,y)g'(x)\right]}{\varphi'_y(x,y)^2},$$

što se sređivanjem i još jednom upotrebom formule (A1) može zapisati kao

$$g''(x) = -\frac{1}{\varphi'_y(x,y)}\left[\varphi''_{xx}(x,y) + 2\varphi''_{xy}(x,y)g'(x) + \varphi''_{yy}(x,y)g'(x)^2\right]. \tag{A2}$$

Nadalje zbog pretpostavke da funkcija f ima neprekidne parcijalne derivacije drugog reda zaključujemo da i funkcija $\tilde{f}$ ima na I neprekidnu prvu i drugu derivaciju. Koristeći opet formulu za deriviranje kompozicije funkcija više varijabla, dobijamo da za sve $x \in I$ vrijedi

$$\tilde{f}'(x) = f'_x(x,y) + f'_y(x,y)g'(x). \tag{B1}$$

Iz ove formule još jednim deriviranjem dobijamo da je $\tilde{f}''(x)$ jednako

$$f''_{xx}(x,y) + f''_{xy}(x,y)g'(x) + \left[f''_{yx}(x,y) + f''_{yy}(x,y)g'(x)\right] g'(x) + f'_y(x,y)g''(x),$$

što se nakon sređivanja i uvrštavanja izraza za $g''(x)$ danog formulom (A2) može zapisati kao

$$\begin{aligned} \tilde{f}''(x) &= f''_{xx}(x,y) + 2f''_{xy}(x,y)g'(x) + f''_{yy}(x,y)g'(x)^2 \\ &\quad - \frac{f'_y(x,y)}{\varphi'_y(x,y)} \left[\varphi''_{xx}(x,y) + 2\varphi''_{xy}(x,y)g'(x) + \varphi''_{yy}(x,y)g'(x)^2\right] \end{aligned} \tag{B2}$$

Sad možemo na jednostavan način dobiti nužne i dovoljne uvjete lokalnih vezanih ekstrema funkcije $z = f(x,y)$ uz uvjet $\varphi(x,y) = 0$.

Teorem 3.10 (Nuždan i dovoljan uvjet vezanog ekstrema) *Neka funkcije $f, \varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, imaju na $\mathcal{D}$ neprekidne sve parcijalne derivacije do uključivo drugog reda.*

(i) Ako funkcija f u točki $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ u kojoj je $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ ima lokalni vezani ekstrem uz uvjet $\varphi(x,y) = 0$, onda mora postojati realan broj λ_0 takav da za trojku (x_0, y_0, λ_0) vrijedi

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0) + \lambda_0 \varphi'_x(x_0,y_0) = 0, \\ f'_y(x_0,y_0) + \lambda_0 \varphi'_y(x_0,y_0) = 0, \\ \varphi(x_0,y_0) = 0. \end{cases} \tag{C}$$

(ii) Ako su točka $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ i realan broj λ_0 takvi da trojka (x_0, y_0, λ_0) zadovoljava uvjet (C) i ako je

$$\tilde{f}''(x_0) \neq 0,$$

pri čemu je $\tilde{f}''(x)$ definirano formulom (B2), onda funkcija f u točki (x_0, y_0) ima lokalni vezani ekstrem uz uvjet $\varphi(x,y) = 0$ i to minimum ako je $\tilde{f}''(x_0) > 0$, odnosno maksimum ako je $\tilde{f}''(x_0) < 0$.

Dokaz. Treća jednakost u (C) je očito nužna po Definiciji 3.14. Zbog pretpostavke da je $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ vrijede sva prethodna razmatranja pa je pretpostavka da f u točki (x_0, y_0) ima lokalni vezani ekstrem uz uvjet $\varphi(x,y) = 0$ ekvivalentna pretpostavci da funkcija $\tilde{f}$ jedne varijable x ima običan lokalni ekstrem u točki x_0. Zato je nužno da bude $\tilde{f}'(x_0) = 0$, što zbog (B1) daje jednakost

$$f'_x(x_0,y_0) + f'_y(x_0,y_0)g'(x_0) = 0.$$

Ovu jednakost, uvažavajući formulu (A1), možemo zapisati u obliku

$$f'_x(x_0, y_0) + \left(-\frac{f'_y(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)}\right) \varphi'_x(x_0, y_0) = 0.$$

Ovo je upravo prva jednakost u (C) ako definiramo realan broj λ_0 s jednakošću

$$\lambda_0 = -\frac{f'_y(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)},$$

koja je očito ekvivalentna drugoj jednakosti u (C). Time je prvi dio teorema dokazan.

Istinitost drugog dijela teorema slijedi neposredno primjenom dovoljnih uvjeta za običan ekstrem funkcije $\tilde{f}$ jedne varijable x i uvažavanjem razmatranja koja su prethodila teoremu. ■

Napomena 3.13 Jasno je da zbog ravnopravnosti varijabla x i y sve što smo do sada rekli o problemu vezanog ekstrema vrijedi i ako zamijenimo uloge varijabla. To znači da smo umjesto od pretpostavke da je $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ u promatranoj točki mogli krenuti od pretpostavke da je $\varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0$. Zbog simetrije po x i y nuždan uvjet (C) lokalnog vezanog ekstrema ostao bi isti, dok bi se dovoljan uvjet iskazao pomoću vrijednosti $\tilde{f}''(y_0)$. Pri tome bi $\tilde{f}''(y)$ bilo definirano desnom stranom od (B2) u kojoj je $g'(x)$ zamijenjeno sa $g'(y) = -\varphi'_y(x, y)/\varphi'_x(x, y)$, a faktor $-f'_y(x, y)/\varphi'_y(x, y)$ zamijenjen faktorom $-f'_x(x, y)/\varphi'_x(x, y)$.

Problem vezanog ekstrema

$$\begin{cases} z = f(x, y) \to \min, \max \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

ponekad riješavamo uvođenjem Lagrangeove funkcije (Lagrangeijana) $L(x, y, \lambda)$ triju nezavisnih varijabla x, y i λ:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \qquad (x, y) \in \mathcal{D}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Očito je da se nuždan uvjet (C) lokalnog vezanog ekstrema funkcije $f(x, y)$ uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$ u točki (x_0, y_0) podudara s nužnim uvjetom običnog ekstrema Lagrangeove funkcije $L(x, y, \lambda)$ u točki (x_0, y_0, λ_0). Što se tiče dovoljnih uvjeta, nije teško neposrednim računom provjeriti da se vrijednost $\tilde{f}''(x_0)$ može izraziti kao

$$\tilde{f}''(x_0) = -\frac{1}{\varphi'_y(x_0, y_0)^2} \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Naravno, s izmjenjenim ulogama varijabla x i y imali bi

$$\tilde{f}''(y_0) = -\frac{1}{\varphi_x'(x_0,y_0)^2}\begin{vmatrix} 0 & \varphi_x'(x_0,y_0) & \varphi_y'(x_0,y_0) \\ \varphi_x'(x_0,y_0) & L_{xx}''(x_0,y_0,\lambda_0) & L_{xy}''(x_0,y_0,\lambda_0) \\ \varphi_y'(x_0,y_0) & L_{xy}''(x_0,y_0,\lambda_0) & L_{yy}''(x_0,y_0,\lambda_0) \end{vmatrix}.$$

To nas navodi na slijedeću jednostavniju formulaciju dovoljnih uvjeta: neka trojka (x_0, y_0, λ_0) zadovoljava uvjet (C) i neka je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi_x'(x_0,y_0) & \varphi_y'(x_0,y_0) \\ \varphi_x'(x_0,y_0) & L_{xx}''(x_0,y_0,\lambda_0) & L_{xy}''(x_0,y_0,\lambda_0) \\ \varphi_y'(x_0,y_0) & L_{xy}''(x_0,y_0,\lambda_0) & L_{yy}''(x_0,y_0,\lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Ako je $\Delta < 0$ onda funkcija f u točki (x_0, y_0) ima lokalni vezani minimum, a ako je $\Delta > 0$ onda f u točki (x_0, y_0) ima lokalni vezani maksimum.

Ako trojka (x_0, y_0, λ_0) zadovoljava uvjet (C), možemo promatrati i samo vrijednost

$$\delta = \begin{vmatrix} L_{xx}''(x_0,y_0,\lambda_0) & L_{xy}''(x_0,y_0,\lambda_0) \\ L_{xy}''(x_0,y_0,\lambda_0) & L_{yy}''(x_0,y_0,\lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Interesantno je da vrijedi slijedeće: ako je $\delta > 0$ i $L_{xx}''(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$, onda je sigurno $\Delta < 0$ pa funkcija f u točki (x_0, y_0) ima lokalni vezani minimum, a ako je $\delta > 0$ i $L_{xx}''(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$, onda je sigurno $\Delta > 0$ pa f u točki (x_0, y_0) ima lokalni vezani maksimum. Međutim, ako je $\delta \leq 0$ ne možemo ništa zaključiti već moramo izračunati Δ.

Nalaženje vezanog ekstrema ilustrirat ćemo s tri primjera.

Primjer 3.20 Neka je zadan problem vezanog ekstrema

$$\begin{cases} z = xy \to \min, \max \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Pridružena Lagrangeova funkcija je

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2),$$

pa je nuždan uvjet ekstrema

$$\begin{aligned} L_x' &= y + 2\lambda x = 0, \\ L_y' &= x + 2\lambda y = 0, \\ L_\lambda' &= x^2 + y^2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Iz prve dvije jednadžbe dobijamo

$$\lambda = -\frac{y}{2x} = -\frac{x}{2y},$$

odakle slijedi

$$y^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm x.$$

Uvrštavanje u treću jednadžbu daje

$$x^2 + (\pm x)^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

Zaključujemo da postoje četiri točke koje zaduvoljavaju nuždan uvjet:

$$\begin{aligned}
T_1 &= (-1, 1), & \lambda_1 &= \frac{1}{2}, \\
T_2 &= (1, -1), & \lambda_2 &= \frac{1}{2}, \\
T_3 &= (-1, -1), & \lambda_3 &= -\frac{1}{2}, \\
T_4 &= (1, 1), & \lambda_4 &= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Kako je

$$\delta = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2 - 1,$$

uvrštavanjem odgovarajuće vrijednosti od λ za sve četiri točke dobijamo $\delta = 0$ pa ne možemo donijeti zaključak već moramo računati

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 1 \\ 2y & 1 & 2\lambda \end{vmatrix}.$$

Uvrštavanjem odgovarajućih vrijednosti od x, y i λ za pojedine točke dobijamo: u točkama T_1 i T_2 je $\Delta = -16 < 0$, a u točkama T_3 i T_4 je $\Delta = 16 > 0$, Zaključujemo da funkcija $z = xy$ ima u točkamaT_1 i T_2 lokalni vezani minimum uz dani uvjet $x^2 + y^2 - 2 = 0$, a u točkamaT_3 i T_4 lokalni vezani maksimum (vidi Sliku 3.42).

Primjer 3.21 Za problem vezanog ekstrema

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \to \min, \max \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

imamo Lagrangeovu funkciju

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 2).$$

Nuždan uvjet ekstrema glasi

$$\begin{aligned}
L'_x &= 2x + \lambda = 0, \\
L'_y &= 2y + \lambda = 0, \\
L'_\lambda &= x + y - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Slika 3.42:

Iz prve dvije jednadžbe dobijamo

$$\lambda = -2x = -2y \quad \Rightarrow \quad y = x,$$

pa uvrštavanjem u treću jednadžbu dobijamo

$$x + x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

Zaključujemo da postoji samo jedna točka koja zaduvoljava nuždan uvjet:

$$T_0 = (1, 1), \qquad \lambda_0 = -2.$$

Kako je

$$\delta = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

vidimo da u točki T_0 vrijedi $L''_{xx}(1, 1, -2) = 2 > 0$ i $\delta = 4 > 0$. Dakle ne moramo računati vrijednost Δ već smijemo zaključiti da funkcija $z = x^2 + y^2$ u točki T_0 ima lokalni vezani minimum uz dani uvjet $x + y - 2 = 0$ (vidi Sliku 3.43).

Primjer 3.22 Problemu vezanog ekstrema

$$\begin{cases} z = xy \to \min, \max \\ y - x = 0 \end{cases}$$

pridružena je Lagrangeova funkcija

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(y - x),$$

Slika 3.43:

pa je nuždan uvjet ekstrema

$$
\begin{aligned}
L'_x &= y - \lambda = 0, \\
L'_y &= x + \lambda = 0, \\
L'_\lambda &= y - x = 0.
\end{aligned}
$$

Očigledno je da su gornje jednadžbe zadovoljene u samo jednoj točki

$$T_0 = (0,0), \quad \lambda_0 = 0.$$

Također imamo

$$\delta = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

što znači da u točki T_0 vrijedi $\delta = -1 < 0$. Dakle ne možemo donijeti zaključak već moramo računati vrijednost Δ. Za sve točke imamo

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

pa je $\Delta = -2 < 0$ i u točki T_0. Zaključujemo da funkcija $z = xy$ ima u točki T_0 lokalni vezani minimum uz dani uvjet $y - x = 0$.

4.

VIŠESTRUKI INTEGRALI

5.

VEKTORSKA ANALIZA

6.

KRIVULJNI I PLOŠNI INTEGRALI

Indeks

A

anti-derivacija, 7
Arhimedova spirala
  duljina luka, 66
  površina, 63

B

Bronštejn, I. N., 72

C

cikloida, 68
  duljina luka, 65
  površina, 60
cilindar, 96
  eliptički, 96
  hiperbolički, 96
  parabolički, 96

D

dekompozicija, 42, 72
desna suma, 42
diferencijal, 10
  produkta, 16
donja suma, 42
duljina luka krivulje, 63

E

element
  duljine, 63
  oplošja, 69
  površine, 56, 62
  volumena, 67
elipsa
  opseg, 72
  površina, 58, 61
elipsoid, 89

G

Gaussova eliminacija, 23
Gaussova razdioba, 34
gornja suma, 42

H

hiperboloid, 93
  dvokrilni, 93
  jednokrilni, 93

I

integral
  binomni, 32
  divergentan, 52
  donji, 42
  eliptički, 71
  gornji, 42
  hiperbolne funkcije, 27
  iracionalne funkcije, 29, 30
  konvergentan, 52
  neodređeni, 7, 9
    svojstva, 11
  neparvi, 51
  određeni, 41, 42
    svojstva, 43, 48
  racionalne funkcije, 18, 19, 21, 22
  reda funkcija, 33
  Riemannov, 42
  trigonometrijske funkcije, 24
integrand, 9
interval, 8

K

komplanacija, 69
konstanta integracije, 9, 16
konus, 95

kriteriji konvergencije, 54
krivulja u polarnim koordinatama, 61, 66, 69, 70
kružnica
  opseg, 65
  površina, 60, 62
kugla, 89
  oplošje, 70
  volumen, 67–69

L

lijeva suma, 42

M

Matlab, 36, 37, 77

N

nejednakost trokuta, 50
neposredno integriranje, 13
NetPlot, 27, 72
Newton, Isaac, 38
Newton-Leibnitzova formula, 46
numeričko integriranje, 71
  pogreška, 76

O

Octave On-line, 36, 37, 78

P

paraboloid
  eliptički, 90
  hiperbolički, 93
parametarski zadana krivulja, 60, 65, 68, 70
parcijalna integracija, 16, 48
Pitagorin poučak, 63
ploha
  drugog reda, 88
podintegralna funkcija, 9
pogreška, 35
  relativna, 35
polarni koordinatni sustav, 61
poredbeni kriterij, 54
površina ravninkog lika, 56
prava racionalna funkcija, 20
primitivna funkcija, 8

R

rastav, 42
rastav na parcijalne razlomke, 21
rektifikacija, 63
rekurzivna formula, 18
Richardsonova ekstrapolacija, 74, 76
rotaciono tijelo
  oplošje, 69
  volumen, 67

S

segment
  dekompozicija, 42
  rastav, 42
Semendjajev, K. A., 72
sfera, 89
Simpsonova formula, 74, 77
  pogreška, 75
stožac, 95
  krnji, 69
  volumen, 67
supstitucija, 13
  Eulerova, 29, 31
  trigonometrijska, 29, 31, 59
  u određenom integralu, 47
  univerzalna hiperbolna, 28
  univerzalna trigonometrijska, 25

T

tablica osnovnih integrala, 12
Teorem
  adicioni, 25
  o apsolutnoj konvergenciji, 54
  srednje vrijednosti, 49
The Integrator, 24, 27, 30
trapezna formula, 72, 77
  pogreška, 73

U

uniformna konvergencija, 33

V

varijabla integracije, 9

Z

zamjena varijabli, 13