TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 2

Mr.sc. Petronila Lokner

SADRŽAJ

1 NEODREĐENI INTEGRAL

Neka je f realna funkcija zadana na segmentu $[a, b]$. Ako funkcija f ima derivaciju u svakoj točki otvorenog intervala $I = \langle a,b \rangle$, onda je time definirana jedna nova funkcija $x \to f'(x)$, za svaki $x \in I$.
Na primjer, sinus funkcija ima derivaciju za svaki $x \in \mathbb{R}$ i ako je $x \in \mathbb{R}$, onda je $(\sin x)' = \cos x$, tj.derivacijom sinusa definirana je nova kosinus funkcija.
Postavlja se sada suprotan problem. Za zadanu funkciju f: $\langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$, da li postoji funkcija F: $\langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$, takva da je $F'(x) = f(x)$, za svaki $x \in \langle a,b \rangle$?
Odgovor na to pitanje i određivanje funkcije F je sadržaj ovog poglavlja.

1.1 Definicija neodređenog integrala

Definicija 1. Neka je f realna funkcija zadana na $I = \langle a,b \rangle$. Svaku funkciju F nazivamo **primitivnom funkcijom** ili **antiderivacijom** funkcije f na intervalu I, ako za svaki $x \in I$ vrijedi da je $F'(x) = f(x)$.

Primjer 1. F(x) = x3 je primitivna funkcija funkcije f(x) = 3x2, jer je

$$F'(x) = (x3)' = 3x2 = f(x).$$

Primjer 2. $F(x) = arctgx$ je primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, jer je $\frac{1}{1+x^2}$

$$F'(x) = (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2} = f(x).$$

Ako je $f(x) = e^x$, onda je $F_1(x) = e^x + 5$, ali i $F_2(x) = e^x - 1$, jer je $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$. Slijedi da je $F_1(x) - F_2(x)$ = konstanta. Dakle svake dvije primitivne funkcije neke zadane funkcije razlikuju se za konstantu. To znači da ako znamo jednu primitivnu funkciju F neke funkcije f, drugu primitivnu funkciju možemo naći dodavanjem proizvoljne konstante.

Definicija 2. Skup svih primitivnih funkcija dane funkcije f na intervalu $I = \langle a,b \rangle$ nazivamo **neodređenim integralom** funkcije f na intervalu I.

Neodređeni integral funkcije f označavamo s

$$\int f(x)dx .$$

Dakle je

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c : x \in \mathbb{R}\}$$

što kraće pišemo u obliku

$$\int f(x)dx = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Primjer 3. a) Budući da je $(x)' = 1$, to je funkcija $F(x) = x$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = 1$, pa je

$$\int 1dx = \int dx = x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

b) Kako je $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, to je $F(x) = tgx$ antiderivacija funkcije $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, pa je

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

c) Kako je $(cosx)' = -sinx$, to je $F(x) = cosx$ antiderivacija funkcije $f(x) = -\sin x$. Dakle je

$$\int (-\sin x)dx = \cos x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

1.2 Osnovna svojstva neodređenog integrala

Iz definicije neodređenog integrala i svojstava derivacije slijedi:

1. $\dfrac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$, tj. derivacija bilo koje primitivne funkcije $F(x) + c$ je jednaka $f(x)$.

2. $\int \dfrac{df}{dx}dx = f(x) + c$.

3. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, a je konstanta.

4. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Svojstva 1. i 2. pokazuju da su deriviranje i integriranje na neki način jedan drugom inverzni. Svojstva 3. i 4. pokazuju da neodređeni integral ima svojstvo «linearne funkcije». Naime neka funkcija f je linearna, ako za nju vrijedi da je:

$$f(ax) = af(x)$$

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Ilustrirajmo navedena svojstva sljedećim primjerom.

Primjer 4.

$$\frac{d}{dx}\left(\int \sin x dx\right)=\frac{d}{dx}\left(-\cos x+c\right)=\sin x$$

$$\int \frac{d\sin x}{dx}dx=\int \cos x dx=\sin x+c$$

$$\int 8x^2dx=8\int x^2dx=8\frac{x^3}{3}+c_1$$

$$\int (x^3+\cos x-\frac{1}{x}-e^x)dx=\int x^3dx+\int \cos x dx-\int \frac{1}{x}dx-\int e^x dx=\frac{x^4}{4}+\sin x-\ln x-e^x+c_2 .$$

1.3 Tablica neodređenih integrala

1. $\int 0dx=c$

2. $\int 1dx=x+c$

3. $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c, (n\neq -1)$

4. $\int \dfrac{dx}{x}=\ln|x|+c,\ (x\neq 0)$ (Na svakom intervalu koji ne sadrži $x = 0$)

5. $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+c$, ($a > 0$ i $a \neq 1$)

6. $\int e^x dx=e^x+c$

7. $\int \sin x dx=-\cos x+c$

8. $\int \cos x dx=\sin x+c$

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}=tgx+c$,($x\neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$)

10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+c$, ($x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$)

11. $\int ctgx dx=\int \dfrac{\cos x}{\sin x}dx=\ln|\sin x|+c$,($x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$)

12. $\int tgx dx=\int \dfrac{\sin x}{\cos x}dx=-\ln|\cos x|+c$,($x\neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$)

13. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}+c$

14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c, |x| < a$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c, a \neq 0$

17. $\int shx dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = chx + c = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + c$

18. $\int chx dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = shx + c = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + c$

19. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + c$

20. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + c$

21. $\int thx dx = \ln |chx| + c$

22. $\int cthx dx = \ln |shx| + c$.

Određivanje primitivne funkcije F za zadanu funkciju f nije uvijek tako jednostavno. Čak za jednostavne funkcije kao što su e^{-x^2}, $\sin x^2$, $\frac{\sin x}{x}$ primitivna funkcija nije ni jedna od poznatih elementarnih funkcija. Integrale takvih funkcija nije jednostavno izračunati i za njih kažemo da **nisu elementarni**, a za funkciju F za koju je $F'(x)$ jedna od takvih funkcija kažemo da nije elementarna. Evo nekoliko takvih integrala:

$\int e^{-x^2} dx$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \sin x^2 dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$.

1.4 Metode integriranja

1.4.1 Direktno integriranje

Najjednostavnija metoda integriranja je direktno integriranje, gdje koristimo osnovna svojstva i tablicu neodređenih integrala.

Primjer 5. Direktnim integriranjem nađimo sljedeće integrale:

a) $\int \left(x^3 + \frac{3}{x^5} + \frac{5}{x} - \frac{2}{\cos^2 x} + 5^x \right) dx = \frac{x^4}{4} + 3\frac{x^{-4}}{-4} + 5 \ln x - 2tgx + \frac{5^x}{\ln 5} + c$

b) $\int(\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-\frac{1}{5}\sqrt[8]{x^7})dx=\int(x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{5}x^{\frac{7}{8}})dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+3\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-\frac{1}{5}\frac{x^{\frac{15}{8}}}{\frac{15}{8}}+c=$

$=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{9}{4}\sqrt[3]{x^4}-\frac{8}{75}\sqrt[8]{x^{15}}+c$

c) $\int\frac{x^5-2x^4+3\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}+5}{\sqrt{x}}dx=\int x^{\frac{9}{2}}dx-2\int x^{\frac{7}{2}}dx+3\int dx-\int x^{\frac{1}{6}}dx+5\int x^{-\frac{1}{2}}dx=$

$=\frac{2}{11}x^{\frac{11}{2}}-2\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}+3x-\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+5\cdot 2x^{\frac{1}{2}}+c=\frac{2}{11}\sqrt{x^{11}}-\frac{4}{9}\sqrt{x^9}+3x-\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}+10\sqrt{x}+c$

d) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt[3]{x\sqrt{x}}dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)x^{\frac{1}{2}}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int x^{-\frac{3}{2}}dx=$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}+c=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}+c$

e) $\int\left(2^x-\frac{3}{4}e^x+\frac{5}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx=\int 2^x\,dx-\frac{3}{4}\int e^x dx+5\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{2^x}{\ln x}-\frac{3}{4}e^x+5\arcsin\frac{x}{2}+c$

f) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}-shx+\frac{1}{ch^2x}\right)dx=2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}-\int shxdx+\int\frac{dx}{ch^2x}=$

$=2\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|-chx+thx+c$

g) $\int\frac{dx}{3x^2-12}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-4}=\frac{1}{3}\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

h) $\int\frac{3dx}{6+13x^2}=\frac{3}{13}\int\frac{dx}{\frac{6}{13}+x^2}=\frac{3}{13}\frac{1}{\sqrt{\frac{6}{13}}}arctg\frac{x}{\sqrt{\frac{6}{13}}}+c=\frac{3}{13}\sqrt{\frac{13}{6}}arctg\sqrt{\frac{13}{6}}x+c=$

$=\frac{3}{\sqrt{78}}arctg(\sqrt{\frac{13}{6}}x)+c$.

Primjer 6. Transformacijom podintegralne funkcije, a zatim direktnim integriranjem rješimo sljedeće integrale:

a) $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + c$

b) $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + c$

c) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \frac{\sin^2 2x}{4} dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\frac{\sin 4x}{4} + c$

d) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + c$

e) $\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + c$

1.4.2 Metoda supstitucije

Ako primitivnu funkciju F funkcije f odnosno $\int f(x)dx$ ne možemo naći direktnim integriranjem pokušavamo to napraviti metodom supstitucije: uvođenjem nove varijable ili nove funkcije. Dakle, pokušava se uvesti neka supstitucija $x = \varphi(t)$ kojom se dani integral svodi na tablični ili je jednostavniji za izračunavanje od polaznog.

Primjer 7. Rješimo sljedeće primjere uvođenjem odgovarajuće nove varijable:

a) $\int e^{ax} dx = \left| \begin{array}{l} ax = t, adx = dt, \\ dx = \frac{dt}{a} \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{a} = \frac{1}{a} e^t = \frac{1}{a} e^{ax} + c$

b) $\int \sin(ax+b) dx = \left| \begin{array}{l} ax + b = t, adx = dt, \\ dx = \frac{1}{a} dt \end{array} \right| = \frac{1}{a}\int \sin t dt = -\frac{1}{a}\cos t + c = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$

c) $\int \frac{\ln x}{x} dx = \left| \ln x = t, \frac{1}{x} dx = dt \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c$

d) $\int 2^{\cos x} \sin dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = -\int 2^t dt = -\frac{2^t}{\ln 2} + c = \frac{-2^{\cos x}}{\ln 2} + c$

e) $$\int \frac{2e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \left|e^x = t, e^x dx = dt\right| = \int \frac{2dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\arcsin t + c =$$

$$= 2\arcsin e^x + c$$

f) $$\int \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x} = \begin{vmatrix} \sin x = t \\ coxdx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{1+t^2} = arctgt = arctg(\sin x) + c$$

g) $$\int \frac{xdx}{4+x^4} = \begin{vmatrix} x^2 = t, 2xdx = dt, \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + c = \frac{1}{4}arctg\frac{x^2}{2} + c$$

h) $$\int \frac{x^4}{-5+8x^5}dx = \begin{vmatrix} -5+8x^5 = t, 40x^4 dx = dt \\ x^4 dx = \frac{1}{40}dt \end{vmatrix} = \frac{1}{40}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{40}\ln t + c = \frac{1}{40}\ln(-5+8x^5) + c$$

i) $$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10}-2}} = \begin{vmatrix} x^5 = t \\ 5x^4 dx = dt \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2}} = \frac{1}{5}\ln\left|t+\sqrt{t^2-2}\right| + c = \frac{1}{5}\ln\left|x^5+\sqrt{x^{10}-2}\right| + c.$$

j) $$\int \frac{ctg(\ln x)}{x}dx = \left|\ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt\right| = \int ctgtdt = \int \frac{\cos t}{\sin t}dt = \left|\sin t = z, \cos tdt = dz\right| =$$

$$= \int \frac{dz}{z} = \ln z = \ln\sin t = \ln\sin\ln x + c.$$

Primjer 8. Metodom supstitucije rješimo sada nešto složenije primjere:

a) $$\int x\sqrt{x-4}dx = \begin{vmatrix} x-4 = t^2, x = t^2+4 \\ dx = 2tdt \end{vmatrix} = \int \left(t^2+4)\right) t\cdot 2tdt = 2\int \left(t^4+4t^2\right)dt =$$

$$= 2\int t^4 dt + 8\int t^2 dt = = \frac{2}{5}t^5 + \frac{8}{3}t^3 + c = \frac{2}{5}(x-4)^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}} + c$$

b) $$\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \begin{vmatrix} 1+\ln x = t^2 \\ \frac{dx}{x} = 2tdt \end{vmatrix} = \int \frac{t^2-1}{t}2tdt = 2\int \left(t^2-1\right)dt = \frac{2}{3}t^3 - 2t + c =$$

$$= \frac{2}{3}\left(1+\ln x\right)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1+\ln x} + c = \frac{2}{3}\sqrt{\left(1+\ln x\right)^3} - 2\sqrt{1+\ln x} + c$$

c) $$\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}} = \left| \begin{array}{l} \cos^2 x = t \\ -2\cos x \sin x dx = dt \\ \sin 2x = -dt \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{\sqrt{3-t^2}} = -\arcsin \frac{t}{\sqrt{3}} + c =$$

$$= -\arcsin \frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}} + c$$

d) $$\int \frac{x \arcsin x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx = \left| \arcsin x^2 = t \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} 2x dx = dt \right| = \frac{1}{2}\int t dt = \frac{1}{2}\frac{t^2}{2} = \frac{1}{4}\arcsin^2 x^2 + c$$

e) $$\int \frac{dx}{\sin 2x} = \left| \begin{array}{l} \sin 2x = 2\sin x \cos x = 2\dfrac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x = 2tgx \cos^2 x, \\ tgx = t, \dfrac{dx}{\cos^2 x} dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{tgx \cos^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{1}{2}\ln|tgx| + c$$

f) $$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)} = \left| \begin{array}{l} 1+e^x = t, e^x dx = dt \\ e^x = t+1 \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t(t-1)} = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt =$$

$$= \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t} = \ln|t-1| - \ln|t| + c = \ln e^x - \ln\left(1+e^x\right) + c = x - \ln\left(1+e^x\right) + c$$

g) $$\int \frac{1}{2^x} th 2^{1-x} dx = \left| \begin{array}{l} 2^{1-x} = t, 2\cdot 2^{-x} = t \Rightarrow \dfrac{1}{2^x} = \dfrac{t}{2}, \\ -2^{1-x}\ln 2 dx = dt, -22^{-x}\ln 2 dx = dt \\ 2^{-x} dx = -\dfrac{dt}{2\ln 2} \end{array} \right| = -\frac{1}{2\ln 2}\int th t dt = -\frac{1}{2\ln 2}\int \frac{sht}{cht} dt =$$

$$= -\frac{1}{2\ln 2}\int \frac{d(cht)}{cht} = -\frac{1}{2\ln 2}\ln cht = -\frac{1}{2\ln 2}\ln ch 2^{1-x} + c$$

h) $$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x - J_1,$$ gdje je

$$J_1 = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} 1-x^2 = t^2, -2x dx = 2t dt \\ x dx = -t dt \end{array} \right| = -\int \frac{t dt}{t} = -t + c = -\sqrt{1-x^2} + c,$$ pa je

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

i) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \left| \frac{1}{x} = t, -\frac{1}{x^2}dx = dt \right| = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt =$$

$$= \left| t^2+1 = z^2, 2tdt = 2zdz \right| = -\int \frac{zdz}{z} = -\int dz = -z = -\sqrt{t^2+1} = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + c$$

j) $$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x-3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+4x+3)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left[(x+2)^2-1\right]}} = \left| \begin{matrix} x+2=t \\ dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \arcsin t + c = \arcsin(x+2) + c$$

Metoda supstitucije može se sastojati i u uvođenju nove funkcije, kao što se to vidi u sljedećem primjeru:

Primjer 9.

a) $$\int \sqrt{1-x^2}dx = \left| \begin{matrix} x = \sin t, ax = \cos tdt \\ t = \arcsin x \end{matrix} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt = \int \cos^2 tdt =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}2x\sqrt{1-x^2} + c$$

b) $$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \left| \begin{matrix} x = \dfrac{1}{\cos x}, \cos t = \dfrac{1}{x}, \\ dx = -\dfrac{-\sin t\, dt}{\cos^2 t} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{1}{\cos t}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt =$$

$$= \int \frac{\sin t}{\cos^3 t}\frac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}dt = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = tgt = \frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}} + c = \sqrt{x^2-1} + c.$$

Uočite da smo navedeni integral mogli puno brže rješiti supstitucijom kao u zadatku 8 h): ako je $x^2 - 1 = t^2$, tada je $xdx = tdt$, pa je

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{tdt}{t} = \int dt = \mathrm{t} = \sqrt{x^2-1} + c.$$

Isto tako, može se uočiti da je: $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x^2-1}+c\right] = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, pa se integral napamet mogao rješiti, ako se zna dobro derivirati.

Za integrale koji u podintegralnoj funkciji sadrže $\sqrt{x^2-1}$, često se koriste hiperbolne supstitucije. Kod takvih supstitucija koriste se sljedeće osnovne relacije:

$$ch^2t - sh^2t = 1$$
$$sh^2t = \frac{ch2t-1}{2}$$
$$ch^2t = \frac{ch2t+1}{2}$$
$$sh2t = 2shtcht$$
$$ch2t = ch^2t + sh^2t$$

Tada bi $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$, koristeći hiperbolnu supstituciju $x = cht$, odakle je $dx = shtdt$, prešao u

$$\int \frac{cht}{\sqrt{ch^2t-1}} \cdot shtdt = \int \frac{cht}{\sqrt{sh^2t}} shtdt = \int chtdt = sht = \sqrt{ch^2t-1} = \sqrt{x^2-1} + c\,.$$

c) $$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}} = \left| x = tgt, dx = \frac{1}{\cos^2 t}dt \right| = \int \frac{1}{\cos^2 t} \frac{1}{(tg^2t+1)\sqrt{1+tg^2t}} dt =$$

Koristeći trigonometrijske transformacije:

$$\sin t = \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2t}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

slijedi da je dani integral jednak

$$\int \frac{1}{\cos^2 t} \frac{\cos^2 t}{1} \frac{\cos t}{1} dt = \int \cos t dt = \sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$$

d) $$\int \cos^3 x\sqrt{\sin x}dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)\sqrt{\sin x}\cos xdx = \begin{vmatrix} \sin x = t^2, \cos xdx = 2tdt \\ \cos^2 x = 1-\sin^2 x \end{vmatrix} =$$

$$= \int \left(1-t^4\right)t2tdt = 2\int \left(1-t^4\right)t^2dt = 2\int t^2dt - 2\int t^6dt = \frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{7}t^7 =$$

$$= \frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x - \frac{2}{7}\sin^{\frac{7}{2}} x + c = \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} - \frac{2}{7}\sqrt{\sin^7 x} + c$$

e) $\int \sqrt{\left(x^2-1\right)^3}\,dx = \left|x = cht, dx = shtdt\right| = \int \sqrt{\left(ch^2t-1\right)^3}\,shtdt = \int sh^4tdt = \int \left(\frac{ch2t-1}{2}\right)^2 dt =$

$= \frac{1}{4}\int ch^2 2tdt - \frac{2}{4}\int ch2tdt + \frac{1}{4}\int dt = \frac{1}{8}\int (ch4t+1)dt - \frac{1}{2}\frac{sh2t}{2} + \frac{1}{4}t = \frac{1}{8}\frac{sh4t}{4} + \frac{1}{8}t - \frac{1}{4}sh2t + \frac{1}{4}t =$

$= \frac{1}{32}sh4t - \frac{1}{4}sh2t + \frac{3}{8}t + c = \frac{1}{32}2sh2tch2t - \frac{1}{4}2sht\,cht + \frac{3}{8}archx + c =$

$= \frac{1}{16}2shtcht\left(2ch^2t-1\right) - \frac{1}{2}\sqrt{ch^2t-1}\,cht + \frac{3}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + c =$

$= \frac{1}{8}\sqrt{x^2-1}\left(2x^3-x\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{3}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + c = \frac{1}{8}\sqrt{x^2-1}\left(2x^3-5x\right) + \frac{3}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + c$

Kod nekih integrala, koje smo stavili u tablicu neodređenih integrala, primitivna funkcija nije baš odmah vidljiva. Integral 12. u tablici može se jednostavno objasniti supstitucijom:

Primjer 10.

$$\int tgxdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \begin{vmatrix} \cos x = t \\ -\sin xdx = dt \end{vmatrix} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln t = -\ln\cos x + c\,.$$

1.4.3 Zadaci za vježbu

1. Direktnim integriranjem izračunajte sljedeće neodređene integrale

a) $\int (2+x^2)^3 dx$

b) $\int x^2(3-x)^4 dx$

c) $\int (x^4 - \sqrt{x} + x^3\sqrt{x} + x^{\frac{1}{2}})dx$

d) $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}dx$

e) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}dx$

f) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$

g) $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}dx$

h) $\int ctg^2 xdx$

2. Metodom supstitucije riješite sljedeće jednostavne

a) $\int \frac{dx}{(x-2)^3}$

b) $\int \sqrt[5]{1-x}\,dx$

c) $\int x\sqrt[3]{x-2}\,dx$

d) $\int \frac{2x-3}{1-x}dx$

e) $\int \frac{x^2dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}$

f) $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$

g) $\int \frac{xdx}{5+x^4}$

h) $\int (x^2-3)\sqrt[5]{x^3-9x}\,dx$

3. Metodom supstitucije izračunajte nešto složenije sljedeće neodređene integrale

a) $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$

b) $\int \sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^2}$

c) $\int \cos^5 x\sin^4 x$

d) $\int \frac{\cos x+1}{\sin x+x}dx$

e) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{2+\cos x}}$

f) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[4]{ctgx}}$

g) $\int \frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx$

h) $\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{1}{1+x}dx$

Rješenja

1.

a) $\frac{x^7}{7}+\frac{6}{5}x^5+4x^3+8x+c$

b) $\frac{x^7}{7}-2x^6+\frac{54}{5}x^5-27x^4+27x^3+c$

c) $\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^3}-\frac{1}{x}+c$

d) $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+c$

e) $-\frac{2}{\ln 5}5^{-x}+\frac{1}{5\ln 2}2^{-x}+c$

f) $\frac{1}{2}e^{2x} - e^{x} + x + c$

g) $x + 2\ln\frac{x-1}{x+1} + c$

h) $-x - ctgx + c$

2.

a) $-\frac{1}{2(x-2)^2} + c$

b) $-\frac{5}{6}(1-x)^{\frac{6}{5}} + c$

c) $\frac{3}{7}(x-2)^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{2}(x-2)^{\frac{4}{3}} + c$

d) $-2x + \ln(1-x) + c$

e) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3 + 27} + c$

f) $\frac{1}{4}\ln^4 x + c$

g) $\frac{\sqrt{5}}{10} arctg\frac{x^2}{\sqrt{5}}$

h) $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3 - 9x)^6}$

3.

a) $\ln(\ln(\ln x))$+c

b) $\cos\frac{1}{x} + c$

c) $\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{3}\sin^9 x + c$

d) $\ln(\sin x + x)$+c

e) $-2\sqrt{2 + \cos x} + c$

f) $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{ctg^3 x}+c$

g) $\frac{arctg^4 x}{4}+c$

h) $arctg^2\sqrt{x}+c$.

1.4.4 Metoda parcijalne integracije

Često se kod traženja primitivne funkcije $f(x)$, koja se ne može naći direktnim integriranjem ili supstitucijom, koristi metoda parcijalne integracije.
Neka su u, v: $\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije na otvorenom intervalu $\langle a,b\rangle$
Za derivaciju produkta dviju diferencijabilnih funkcija $u(x)$ i $v(x)$ vrijedi da je

$$[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

Odavde slijedi

$$u(x)\cdot v'(x) = [\,u(x)\cdot v(x)]' - u'(x)\cdot v(x)$$

Integriranjem slijedi:

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = \int\left[u(x)\cdot v(x)\right]' dx - \int u'(x)\cdot v(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)dx$$

Integriranje primjenom napisane formule zove se **parcijalna integracija** s tim da napisane derivacije i napisani integrali postoje (dovoljno je uzeti da su u i v neprekidno derivabilne funkcije).

Kako je

$$u'(x)dx = du$$
$$v'(x)dx = dv,$$

kraći oblik formule za parcijalnu integraciju glasi:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du\,.$$

Očito se metodom parcijalne integracije ne rješava dani neodređeni integral, već se problem $\int udv$ svodi na problem $\int vdu$ uz neki izbor u i dv. Taj izbor mora biti takav da $\int vdu$ bude jednostavniji ili barem isto toliko težak kao i početni $\int udv$.
Ako se parcijalnom integracijom dobije složenija podintegralna funkcija, primjenjuje se ili drugi izbor u i dv ili druga metoda za rješavanje danog integrala.
Metoda parcijalne integracije se često koristi i zahtjeva određenu vještinu, koja se stječe samo vježbanjem.

Primjer 11.

a) $\int xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx, \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{vmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = (x-1)e^x + c$;

b) $\int x^2 e^{\frac{x}{2}} dx = \begin{vmatrix} u = x^2,\ du = 2xdx, dv = e^{\frac{x}{2}} dx, \\ v = \int e^{\frac{x}{2}} dx = \begin{vmatrix} \frac{x}{2} = t, dx = 2dt \end{vmatrix} = \int e^{\frac{x}{2}} dx = 2\int e^t dt = 2e^t \ = 2e^{\frac{x}{2}} \end{vmatrix} = 2x^2 e^{\frac{x}{2}} - \int 2e^{\frac{x}{2}} 2xdx =$

$= 2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 4\int xe^{\frac{x}{2}} dx + c = \begin{vmatrix} u = x, du = dx \\ dv = e^{\frac{x}{2}} dx, v = \int e^{\frac{x}{2}} dx = 2e^{\frac{x}{2}} \end{vmatrix} = 2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 4\left(2xe^{\frac{x}{2}} - 2\int e^{\frac{x}{2}} dx \right) =$

$2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 4\left(2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} \right) = 2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 8xe^{\frac{x}{2}} + 16e^{\frac{x}{2}} + c$;

c) $\int e^x \sin 3x dx = \begin{vmatrix} u = \sin 3x, du = 3\cos 3x dx \\ dv = e^x dx, v = \int e^x dx = e^x \end{vmatrix} = e^x \sin 3x - 3\int e^x \cos 3x dx = \begin{vmatrix} u = \cos 3x, du = -3\sin 3x dx \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{vmatrix} =$

$= e^x \sin 3x - 3\left[e^x \cos 3x + 3\int e^x \sin 3x dx \right] = e^x \sin 3x - 3e^x \cos 3x - 9\int e^x \sin 3x dx$

Iz dobivene jadnakosti, koju smo dobili primjenom dvostruke parcijalne integracije, slijedi:

$$10\int e^x \sin 3x dx = e^x \sin 3x - 3e^x \cos 3x,$$

odakle je:

$$\int e^x \sin 3x dx = \frac{e^x}{10}(\sin 3x - 3\cos 3x) + c;$$

d) $\int x^2 \cos 2x dx = \begin{vmatrix} u = x^2, du = 2xdx \\ dv = \cos 2x dx, v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\sin 2x - \int x \sin 2x dx =$

$= \begin{vmatrix} u = x, du = dx, dv = \sin 2x dx \\ v = \int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\sin 2x - \left(-\frac{x \cdot \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx \right) =$

$= \frac{x^2}{2}\sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$.

Općenito integrali oblika $F(x)=\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$, α, β∈ℝ, α, β ≠ 0, rješavaju se parcijalnom integracijom u kojoj uzimamo da je eksponencijalna funkcija *u*, a trigonometrijska *v*, slijedi:

$$\left| \begin{array}{l} u=e^{\alpha x}, du=\alpha e^{\alpha x}dx \\ \cos\beta x dx=dv, v=\dfrac{\sin\beta x}{\beta} \end{array} \right|$$

Odatle je

$$F(x)=\frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta}-\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx .$$

Ponovnom primjenom parcijalne integracije sa istim izborom *u* i *v*:

$$\left| \begin{array}{l} e^{\alpha x}=u, du=\alpha e^{\alpha x} \\ \sin\beta x dx=dv, v=-\dfrac{\cos\beta x}{\beta} \end{array} \right|$$

slijedi da je:

$$F(x)=\frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta}-\frac{\alpha}{\beta}\left[-\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx\right]=\frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos\beta x-\frac{\alpha^2}{\beta^2}F(x)$$

Odatle je

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta^2}F(x)=\frac{\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x}{\beta^2}e^{\alpha x},$$

odnosno

$$F(x)=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x)+c .$$

e) $$\int x^3 arctgx dx=\left| \begin{array}{l} u=arctgx, du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ x^3dx=dv, v=\dfrac{x^4}{4} \end{array} \right|=\frac{x^4 arctgx}{4}-\frac{1}{4}\int\frac{x^4}{1+x^2}dx=$$

Jer je:

$$\frac{x^4}{x^2+1}=x^2-1+\frac{1}{x^2+1}$$

slijedi da je

$$\int x^3 arctgx dx=\frac{x^4 arctgx}{4}-\frac{1}{4}\left[\int x^2dx-\int dx+\int\frac{dx}{x^2+1}\right]=$$

$$=\frac{x^4 arctgx}{4}-\frac{1}{4}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}arctgx+c=\frac{1}{4}(x^4-1)arctgx+\frac{1}{12}\left(3x-x^3\right)+c .$$

Primjer 12. a) $\int \ln^2 x dx = \begin{vmatrix} u = \ln^2 x, du = 2\dfrac{\ln x}{x}dx \\ dv = dx, v = x \end{vmatrix} = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{vmatrix} =$

$$= x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int \frac{xdx}{x}\right) = x\ln^2 x - 2(x\ln x - x) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c\ ;$$

b) $\int \sin\ln x dx = \begin{vmatrix} u = \sin\ln x, du = \cos\ln x\dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{vmatrix} = x\sin\ln x - \int x\cos\ln x\dfrac{dx}{x} = x\sin\ln x - \int \cos\ln x\, dx =$

$$= \begin{vmatrix} u = \cos\ln x, du = -\sin\ln x\dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{vmatrix} = x\sin\ln x - \left(x\cos\ln x + \int x\sin\ln x\frac{dx}{x}\right) = x\sin\ln x - x\cos\ln x + \int \sin\ln x dx$$

Odatle je

$$2\int \sin\ln x dx = x\sin\ln x - x\cos\ln x,$$

odnosno

$$\int \sin\ln x dx = \frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x) + c\ ;$$

c) $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx = \begin{vmatrix} u = \ln^2 x, du = 2\ln x\dfrac{dx}{x} \\ dv = \sqrt{x}dx, v = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \end{vmatrix} = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \dfrac{2}{3}\int x^{\frac{3}{2}}\cdot 2\ln x\dfrac{dx}{x} = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \dfrac{4}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\ln x dx =$

$$= \begin{vmatrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \sqrt{x}dx, v = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \end{vmatrix} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{4}{3}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{x}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}\ln x + \frac{8}{9}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}\ln x + \frac{16}{27}x^{\frac{3}{2}} + c =$$

$$= \frac{2}{27}\sqrt{x^3}\left(9\ln^2 x - 12\ln x + 8\right) + c\ ;$$

d) $$\int \frac{xdx}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} x = u, dx = du, \\ \dfrac{dx}{\cos^2 x} = dv, v = tgx \end{array} \right| = xtgx - \int tgxdx = xtgx + \ln\cos x + c .$$

1.4.5 Zadaci za vježbu

1.Metodom parcijalne integracije izračunajte sljedeće jednostavne neodređene integrale:

a) $\int x\ln(x^2 - 1)dx$

b) $\int x^2 \sin 2xdx$

c) $\int arctgxdx$

d) $\int x^3 e^{-x^2} dx$

e) $\int e^{-x} \sin dx$

f) $\int x^2 \arccos xdx$

g) $\int x^2 e^x dx$

Rješenja:

a) $\frac{1}{2}(x^2 - 1)\ln(x^2 - 1) - \frac{1}{2}x^2 + c$

b) $\frac{1 - 2x^2}{4}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + c$

c) $xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + c$

d) $-\frac{x^2 + 1}{2}e^{-x^2} + c$

e) $-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x) + c$

f) $-\frac{2 + x^2}{9}\sqrt{1 - x^2} + \frac{x^3}{3}\arccos x + c$

g) $(x^2 - 2x - 2)e^x + c$

2. Različitim metodama izračunajte sljedeće nešto teže neodređene integrale:

a) $\int e^{x+\ln x}dx$

b) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$

c) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$

d) $\int x^2 \ln\frac{1-x}{1+x}dx$

e) $\int \arccos^2 x dx$

Rješenja

a) $e^x(x-1)+c$

b) $-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sin^2 x}+ctgx)+c$

c) $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+c$

d) $-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}\ln(1-x^2)+\frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x}+c$

e) $x\arccos^2 x-2\sqrt{1-x^2}\arccos x-2x+c$

1.5 Integral racionalne funkcije

Integriranje racionalne funkcije $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$, gdje su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi n-tog odnosno m-tog stupnja, započet ćemo sa najjednostavnijim slučajem:

1.5.1 Integrali oblika $\int \frac{P_0(x)}{Q_1(x)}dx$

Integrali oblika $\int \frac{P_0(x)}{Q_1(x)}dx$, gdje je P0(x) = A i Q1(x) = ax + b.

$$\int \frac{A}{ax+b}dx = \left|ax+b=t, adx=dt\right| = \frac{A}{a}\int\frac{dt}{t} = \frac{A}{a}\ln\left(ax+b\right)+c.$$

1.5.2 Integrali oblika $\int \frac{P_0(x)}{Q_2(x)}dx$

Integrali oblika $\int \frac{P_0(x)}{Q_2(x)}dx$, gdje je $P_0(x) = A$ i $Q_2(x) = ax^2+bx+c$.

$$\int \frac{A}{ax^2+bx+c}dx$$

rješavamo tako da $Q_2(x) = ax^2+bx+c$ napišemo u obliku punog kvadrata

$$\begin{aligned} &a(u^2+k^2)\\ &a(u^2-k^2)\\ &a(k^2-u^2) = -a(u^2-k^2) \end{aligned}$$

a zatim supstitucijom dobijemo ili tablični integral broj 13 ili 14.

Primjer 13.

a) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = \left| x+2=t, dx=dt \right| = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}arctg\frac{x+2}{2}+c$;

b) $\int \frac{dx}{x^2+3x-4} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-4} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}} = \left| x+\frac{3}{2}=t, dx=dt \right| =$

$= \frac{1}{2\cdot\frac{5}{2}}\ln\frac{x+\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{x+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}+c = \frac{1}{5}\ln\frac{2x-2}{2x+8}+c = \frac{1}{5}\ln\frac{x-1}{x+4}+c$;

c) $\int \frac{dx}{x^2+6x+25} = \int \frac{dx}{(x+3)^2-9+25} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+16} = \left| x+3=t, dx=dt \right| =$

$= \int \frac{dt}{t^2+16} = \frac{1}{4}arctg\frac{t}{4} = \frac{1}{4}arctg\frac{x+3}{4}+c$;

d) $\int \frac{dx}{3x^2+6x+25} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+2x+\frac{25}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2-1+\frac{25}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2+\frac{22}{3}} = \left| \begin{matrix} x+1=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| =$

$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{22}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{22}}arctg\frac{t}{\sqrt{\frac{22}{3}}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{22}}arctg\sqrt{\frac{3}{22}}(x+1)+c$;

1.5.3 Integrali oblika $\int \frac{P_1(x)}{Q_2(x)}dx$

Integrali oblika $\int \frac{P_1(x)}{Q_2(x)}dx$, gdje je $P_1(x) = Ax + B$ i $Q_2(x) = ax^2 + bx + c$, tada integral

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$$

rješavamo tako da prvo $P_1(x)$ napišemo kao diferencijal $Q_2(x)$, na taj način će prvi integral uvjek biti $\ln Q_2(x)$, a drugi ili 13. ili 14. tablični integral.

Primjer 14.

a) $\int \frac{2x+1}{x^2-4x+8}dx = \left|d\left(x^2-4x+8\right)=(2x-4)dx\right| = \int \frac{2x-4+5}{x^2-4x+8}dx =$

$= \int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx + \int \frac{5}{x^2-4x+8}dx = \left|x^2-4x+8=t, (2x-4)dx = dt\right| = \int \frac{dt}{t} + 5\int \frac{dx}{(x-2)^2+4} =$

$= \ln\left(x^2-4x+8\right) + 5\frac{1}{2}arctg\frac{x-2}{2} + c = \ln\left(x^2-4x+8\right) + \frac{5}{2}arctg\frac{x-2}{2} + c$;

b) $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx = \left|d\left(x^2+2x+10\right)=(2x+2)dx\right| = 5\int \frac{2x+2-2+\frac{2}{5}}{x^2+2x+10}dx =$

$= 5\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}dx - 8\int \frac{dx}{x^2+2x+10} = \left|d\left(x^2+2x+10\right)=(2x+2)dx\right| = 5\int \frac{dt}{t} - 8\int \frac{dx}{(x+1)^2+9} =$

$= 5\ln\left(x^2+2x+10\right) - 8\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{x+1}{3} + c = 5\ln\left(x^2-4x+8\right) - \frac{8}{3}arctg\frac{x+1}{2} + c$.

1.5.4 Integriranje prave racionalne funkcije

Integriranje prave racionalne funkcije $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $n < m$, provodimo tako da je rastavljamo na parcijalne razlomke.

Ako je polinom $Q_m(x)$ prave racionalne funkcije $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ dan u faktoriziranom obliku

$$Q_m(x) = (x-x_1)^{k1}\cdot(x-x_2)^{k2}\cdots(x-x_l)^{kl}\cdot\left(ax^2+bx+c\right)^{r1}\cdots\left(ex^2+fx+g\right)^{rm}$$

Tada se $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ može napisati kao zbroj parcijalnih razlomaka, odnosno

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \int \frac{A_1}{x-x_1}dx + \cdots + \int \frac{A_{k1}}{(x-x_1)^{k1}}dx + \int \frac{B_1}{x-x_2}dx + \cdots + \int \frac{B_{k2}}{(x-x_2)^{k2}}dx +$$

$$+ \cdots + \int \frac{C_1}{x-x_l}dx + \cdots + \int \frac{C_{kl}}{(x-x_l)^{kl}}dx + \int \frac{D_1 x + E_1}{ax^2+bx+c}dx + \cdots + \int \frac{D_{r1} x + E_{r1}}{(ax^2+bx+c)^{r1}}dx +$$

$$+ \cdots + \int \frac{F_1 x + G_1}{ex^2+fx+g}dx + \cdots + \int \frac{F_{rm} x + G_{rm}}{(ex^2+fx+g)^{rm}}dx ,$$

gdje su $A_1,\dots,A_{k1},\dots,C_1,\dots,C_{kl},D_1,\dots,D_{r1},\dots,G_1,\dots,G_{rm}$ konstante koje se određuju metodom neodređenih koeficijenata.

Primjer 15.

a) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^3-x}dx = \int \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)}dx .$

Rastav podintegralne funkcije je:

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} .$$

Množenjem sa zajedničkim nazivnikom slijedi:

$$x-3 = Ax^2 - A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx .$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije polinoma na lijevoj i desnoj strani jednakosti dobivamo sustav:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ B - C &= 1 \\ -A &= -3 \end{aligned}$$

Slijedi da je $A = 3$. Zbrajanjem prve dvije jednadžbe i uvrštavanjem $A = 3$, slijedi da je $B = -1$ i $C = -2$. Sada je

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} ,$$

pa je

$$\int \frac{x-3}{x^3-x}dx = 3\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} - 2\int \frac{dx}{x+1} = 3\ln x - \ln(x-1) - 2\ln(x+1) + c = \ln \frac{x^3}{(x-1)\cdot(x+1)^2} + c$$

gdje smo u drugom integralu koristili supstituciju $x - 1 = t$ i u trećem integralu $x + 1 = z$.

b) $\displaystyle\int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)(x^2+1)}dx$.

Rastav podintegralne funkcije na parcijalne razlomke je:

$$\frac{3x^2+x-2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+c}{x^2+1} = \frac{1}{x-1} + \frac{2x+3}{x^2+1}.$$

Množenjem sa zajedničkim nazivnikom slijedi:

$$3x^2 + x - 2 = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C.$$

Ako izjednačimo koeficijenata uz iste potencije polinoma na lijevoj i desnoj strani jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} A + B &= 3 \\ -B + C &= 1 \\ A - C &= -2. \end{aligned}$$

Zbrajanjem prve dvije jednadžbe dobivamo $A + C = 4$. Zbrajanjem s trećom jednadžbom slijedi: $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$.

Sada je

$$\frac{3x^2+x-2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2x+3}{x^2+1},$$

pa je

$$\int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)(x^2+1)}dx = \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{2x+3}{x^2+1} = \ln(x+1) + \int \frac{2x}{x^2+1}dx + 3\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \ln(x+1) + \ln(x^2+1) + 3arctgx + c,$$

gdje smo u prvom integralu koristili supstituciju $x + 1 = t$, a u drugom $x^2 + 1 = z$.

c) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^3+2x^2}dx = \int \frac{x-2}{x^2(x+2)}dx$.

Rastav podintegralne funkcije na parcijalne razlomke je:

$$\frac{x-2}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}.$$

Množenjem sa zajedničkim nazivnikom slijedi:

$$x - 2 = Ax^2 + 2Ax + Bx + 2B + Cx^2.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije, dobijemo sljedeći sustav:

$$A + C = 0$$
$$2A + B = 1$$
$$2B = -2.$$

Odatle proizlazi da je A = 1, $B = -1$, $C = -1$. Prema tome je:

$$\int \frac{x-2}{x^2(x+2)}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{1}{x+2}dx = \ln x + \frac{1}{x} - \ln(x+2) + c$$

1.5.5 Integriranje neprave racionalne funkcije

Integriranje neprave racionalne funkcije $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $n \geq m$

Ako je stupanj polinoma brojnika veći ili jednak stupnju polinoma nazivnika, uvijek ćemo prvo podjeliti brojnik s nazivnikom:

$$P_n(x) : Q_m(x) = C_{n-m}(x) + R(x),$$

Gdje je $C_{n-m}(x)$ polinom $(n - m)$ stupnja, a $R(x) = \frac{ostatak}{Q_m(m)}$ je prava racionalna funkcija.

Primjer 16. a) $I = \int \frac{x^3 + 10x^2 + 40x + 39}{x^2 + 8x + 20}dx$.

Djeljenjem polinama brojnika s onim u nazivniku slijedi:

$$\frac{x^3 + 10x^2 + 40x + 39}{x^2 + 8x + 20} = x + 2 + \frac{4x - 1}{x^2 + 8x + 20}$$

pa je

$$I = \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{4x-1}{(x+4)^2 + 4}dx =$$

$$= \left| d(x^2+8x+20) = (2x+8)dx \right| = \frac{x^2}{2} + 2x + 2\int \frac{2x+8-8-\frac{1}{2}}{x^2+8x+20}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + 2\int \frac{2x+8}{x^2+8x+20}dx - 17\int \frac{1}{x^2+8x+20}dx = \left| x^2+8x+20 = t, (2x+8)dx = dt \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + 2\int \frac{dt}{t} - 17\int \frac{dx}{(x+4)^2+4} = \begin{vmatrix} x+4=z \\ dx = dz \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln t - 17\int \frac{dz}{z^2+4} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln(x^2+8x+20) - \frac{17}{2} arctg \frac{x+4}{2} + c.$$

b) $\quad I = \int \frac{x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 4x + 15}{x^3 - 5x^2 - x + 5}dx$

Djeljenjem polinoma brojnika sa polinomom u nazivniku slijedi:

$$x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 4x + 15 : (x^3 - 5x^2 - x + 5) = x + 2 + \frac{x+5}{x^3 - 5x^2 - x + 5}$$

pa je

$$I = \int x dx + 2\int dx + \int \frac{x+5}{x^3 - 5x^2 - x + 5}dx = \frac{x^2}{2} + 2x + I_1$$

Gdje je I_1 je prava racionalna funkcija, koju da bi integrirali moramo rastaviti na parcijalne razlomke :

$$\frac{x+5}{x^3 - 5x^2 - x + 5} = \frac{x+5}{(x-1)(x+1)(x-5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-5}.$$

Množenjem jednakosti sa zajedničkim nazivnikom slijedi da je:

$$x + 5 = (A + B + C)x^2 + (-4A - 6B)x + (-5A + 5B - C).$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije polinoma na lijevoj i desnoj strani dobivamo sustav:

$$A + B + C = 0$$

$$-4A - 6B = 1$$

$$-5A + 5B - C = 5.$$

Zbrajanje prve i treće jednadžbe, a zatim novo dobivene jednadžbe i druge sljede koeficijenti: $A=-\frac{3}{4}$, $B=\frac{1}{3}$, $C=\frac{5}{12}$, pa je

$$I_1=\int\frac{x+5}{x^3-5x^2-x+5}dx=\int\frac{x+5}{(x-1)(x+1)(x-5)}dx=$$

$$=-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{5}{12}\int\frac{dx}{x-5}=-\frac{3}{4}\ln(x-1)+\frac{1}{3}\ln(x+1)+\frac{5}{12}\ln(x-5)+c_1 .$$

Dakle je

$$I=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{3}{4}\ln(x-1)+\frac{1}{3}\ln(x+1)+\frac{5}{12}\ln(x-5)+c .$$

Primjer 17. Integral oblika $F_n(x)=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$,$(n=1,2,3,....;a\neq 0)$ koji se jako često pojavljuje ćemo posebno razmotriti.

Krenimo sa parcijalnom integracijom:

$$\left|\begin{array}{l} u=\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}, du=-\frac{2nx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx \\ dx=dv, v=x \end{array}\right|$$

tada je

$$F_n(x)=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx=$$

$$=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{\left(x^2+a^2\right)-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}-2na^2\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}=$$

$$=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2nF_n(x)-2na^2F_{n+1}(x) .$$

Slijedi da je:

$$F_n(x)=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2nF_n(x)-2na^2F_{n+1}(x) ,$$

odakle je:

$$F_{n+1}(x)=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}F_n(x) .$$

Kako je za $n = 1$, $F_1(x)$ tablični integral tj.:

$$F_1(x) = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c,$$

to je

$$F_2(x) = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^2} F_1(x) = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} arctg \frac{x}{a} + c.$$

Primjer 18. Riješimo jedan složeniji primjer u kojem ćemo iskoristiti rekurzivnu formulu iz primjera 17:

$$F(x) = \int \frac{x^3 + x^2 + 2}{(x^2 + 2)^2} dx.$$

Prvo ćemo podintegralnu funkciju rastaviti na parcijalne razlomke tako da je:

$$\frac{x^3 + x^2 + 2}{(x^2 + 2)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2}.$$

Da bismo odredili koeficijente A, B, C, D, pomnožit ćemo cijelu jednadžbu s $(x^2 + 2)^2$. Time dobivamo:

$$x^3 + x^2 + 2 = Cx^3 + Dx^2 + (A + 2C)x + B + 2D.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije polinoma s lijeve i s desne strane jednakosti dobivamo sustav

$$\begin{gathered} C = 1 \\ D = 1 \\ A + 2C = 0 \\ B + 2D = 2 \end{gathered}$$

Odatle je

$$A = -2,\ B = 0,\ C = 1,\ D = 1.$$

Slijedi da je

$$F(x) = \int \left[\frac{-2x}{(x^2 + 2)^2} + \frac{x + 1}{x^2 + 2} \right] dx = -\int \frac{2x}{(x^2 + 2)^2} dx + \int \frac{x}{x^2 + 2} dx + \int \frac{dx}{x^2 + 2} =$$

$$= \left| x^2 + 2 = t, 2xdx = dt \right| = -\int \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln t + \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{x}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{x^2 + 2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) + \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + c.$$

Primjer 19. $I=\int\frac{xdx}{\left(x^2-2x+2\right)^2}=\int\frac{xdx}{((x-1)^2+1)^2}=\left|x-1=t, dx=dt\right|=\int\frac{t+1}{(t^2+1)^2}dt=$

$$=\int\frac{tdt}{(t^2+1)^2}+\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=I_1+I_2,$$

gdje je

$$I_1=\int\frac{tdt}{(t^2+1)^2}=\begin{vmatrix}t^2+1=z\\2tdt=dz\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2}=-\frac{1}{2z}=-\frac{1}{2(t^2+1)}+c_1,$$

$I_2=\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}$ je prema rekurzivnoj formuli $F_{n+1}(x)=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}F_n(x)$ u varijabli t, a za $n=1$ i $a=1$ jednak:

$$I_2=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}arctg\, t+c_2.$$

Dakle je

$$I=-\frac{1}{2\left(t^2+1\right)}+\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}arctgt+c=\frac{t-1}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}arctgt+c=$$

$$=\frac{x-2}{2\left[(x-1)^2+1\right]}+\frac{1}{2}arctg(x-1)+c=\frac{x-2}{2x^2-4x+4}+\frac{1}{2}arctg(x-1)+c$$

1.5.6 Zadaci za vježbu

a) $\int\frac{2x-1}{x^2-4x+8}dx$

b) $\int\frac{x^3+1}{x(x^3-8)}dx$

c) $\int\frac{x-5}{(x-1)(x-2)^2}dx$

d) $\int\frac{3x^2+x-2}{(x-1)\left(x^2+1\right)}dx$

e) $\int\frac{x^3-x^2+2x+3}{x^2+3x+2}dx$

Rješenja:

a) $\ln(x^2-4x+8)+\frac{3}{2}arctg\frac{x-2}{2}+c$

b) $\frac{3}{8}\ln\left(x^3-8\right)-\frac{1}{8}\ln x+c$

c) $-4\ln\left(x-1\right)+\frac{3}{x-2}+c$

d) $\ln(x-1)+\ln(x^2+1)+3\text{arctg}x+\text{c}$

e) $\frac{x^2}{2}-4x+\ln\frac{\left(x+2\right)^{13}}{x+1}+c$.

1.6 Integriranje trigonometrijskih funkcija

1.6.1 Integrali oblika $\int R(\sin x,\cos x)dx$

Integrali oblika $\int R(\sin x,\cos x)dx$, gdje je R racionalna funkcija koja ovisi o sin$x$ i cos$x$, supstitucijom $\text{tg}\frac{x}{2}=t$ (tzv. univerzalna supstitucija), se svode na integrale $\int\frac{P_n(t)}{Q_m(t)}dt$, tj. racionalne funkcije u varijabli t.

Ako je $\text{tg}\frac{x}{2}=t$ tada je

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Ako je $tg\frac{x}{2}=t$, tada je $\frac{x}{2}=arctgt$, odakle je $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

Primjer 20. Koristeći se univerzalnom supstitucijom rješite sljedeće integrale:

a) $$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+3}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+3}=2\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{4t-1+t^2+3+3t^2}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{4t^2+4t+2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+t+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}=arctg\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+c=arctg(2t+1)+c=arctg(2tg\frac{x}{2}+1)+c$$

b) $$I=\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t_2}}=\int\frac{2dt}{1-t^2}=2\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}=\ln\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}+c\,;$$

Integral I možemo rješiti i drugom trigonometrijskom supstitucijom, nakon što smo transformirali podintegralnu funkciju:

$$I=\int\frac{\cos xdx}{\cos^2 x}=\int\frac{\cos xdx}{1-\sin^2 x}=\left|\sin x=t,\cos xdx=dt\right|=\int\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}+c\,;$$

Čini se kao da su rješenja različita. To se često događa kod integrala trigonometrijskih funkcija. Jednostavnom transformacijom može se pokazati da su rješenja ista:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}{1-\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg\frac{2x}{2}}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+tg^2\frac{x}{2}+2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}-2tg\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{\left(1+tg\frac{x}{2}\right)^2}{\left(1-tg\frac{x}{2}\right)^2}=\ln\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}.$$

c) $$\int\frac{1+\sin x}{\sin x\cdot\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int\frac{2(1+\sin x)}{\sin x(1+\cos x)}=2\int\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$=\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)dt=\frac{t^2}{2}+2t+\ln t+c=\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}+2tg\frac{x}{2}+\ln tg\frac{x}{2}+c\,.$$

d) $$\int\frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx=\int\frac{1-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$= 2\int \frac{1+t^2-2t+1-t^2}{1+t^2+2t-1+t^2}\frac{dt}{1+t^2} = 2\int \frac{1-t}{t(t+1)(1+t^2)}dt\ .$$

Rastavimo podintegralnu funkciju na parcijalne razlomke:

$$\frac{1-t}{t(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1},$$

tj.

$$1 - t = (A + B + C)t^3 + (A + C + D)t^2 + (A + B + D)t + A.$$

Iz te jednakosti proizlazi da je $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$ i $D = -1$. Pa je

$$\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx = 2\left[\int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t^2+1}\right] =$$

$$= 2\left[\ln t - \ln(t+1) - arctgt + c\right] = 2\left[\ln tg\frac{x}{2} - \ln(tg\frac{x}{2}+1) - \frac{x}{2} + c\right] = 2\ln\frac{tg\frac{x}{2}}{tg\frac{x}{2}+1} - x + c\ .$$

Često se umjesto univerzalne supstitucije $tg\frac{x}{2} = t$, radi jednostavnosti koriste i sljedeće trigonometrijske supstitucije:

1. $\cos x = t$, ako podintegralna funkcija $R(\sin x, \cos x)$ mjenja predznak, kada se promjeni predznak svakoj funkciji $\sin x$ koja se pojavljuje u podintegralnoj funkciji tj. ako je

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x);$$

2. $\sin x = t$, ako podintegralna funkcija $R(\sin x, \cos x)$ mjenja predznak, kada se promjeni predznak svakoj funkciji $\cos x$ koja se pojavljuje u podintegralnoj funkciji tj. ako je

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x);$$

3. $tg x = t$, ako podintegralna funkcija $R(\sin x, \cos x)$ ne mjenja predznak, kada se promjeni predznak svakoj funkciji $\sin x$ i $\cos x$ koje se pojavljuju u podintegralnoj funkciji tj. ako je

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).$$

Kod supstitucije $tg x = t$:

$$\sin x = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \ \text{ i } \ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

I kako je $x = \text{arctg}\, t$ slijedi $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

Primjer 21. Korištenjem odgovarajućih supstitucija rješite sljedeće integrale trigonometrijskih funkcija:

a) $\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos 2x} dx$.

Ako promjenimo predznak funkciji sin$x$ u podintegralnoj funkciji, dobivamo

$$\frac{-\sin x - (-\sin x)^3}{\cos^2 x - (-\sin x)^2} = -\frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

tj. R(–sin$x$, cos$x$) = –R(sin$x$, cos$x$), pa je najbolje koristiti supstituciju cos$x$ = t, a tada je –sin$x$ dx = dt

$$\int \frac{\sin x(1-\sin^2 x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = -\int \frac{2-t^2}{2t^2-1} dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t^2-4}{2t^2-1} dt = \frac{1}{2}\left[\int \frac{2t^2-1}{2t^2-1} dt - \int \frac{3dt}{2t^2-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-1} = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\ln \frac{2t-\sqrt{2}}{2t+\sqrt{2}} + c =$$

$$= \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2\cos x - \sqrt{2}}{2\cos x + \sqrt{2}}\right| + c;$$

b) $\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x - \sin^4 x} dx$

Ako promjenimo predznak svakoj funkciji cos$x$ koja se pojavljuje u podintegralnoj funkciji, dobivamo

$$\frac{(-\cos x)^3 + (-\cos x)^5}{\sin^2 x - \sin^4 x} = -\frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x - \sin^4 x},$$

tj. R(sin$x$, –cos$x$) = –R(sin$x$, cos$x$). Kako je podintegralna funkcija pri toj promjeni predznaka cos$x$ promjenila predznak, koristimo supstituciju sin$x$ = t, cos$x$ $dx = dt$.
Slijedi da je

$$\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x - \sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x(1+\cos^2 x)\cos x}{\sin^2 x - \sin^4 x} dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)(2-\sin^2 x)\cos x}{\sin^2 x - \sin^4 x} dx =$$

$$= \int \frac{(1-t^2)(2-t^2)}{t^2-t^4} dt = \int \frac{(1-t^2)(2-t^2)}{t^2(1-t^2)} dt = \int \left(\frac{2}{t^2} - 1\right) dt = -\frac{2}{t} - t + c = -\frac{2}{\sin x} - \sin x + c;$$

c) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x - \cos^3 x} dx$

Ako promjenimo predznak svakoj funkciji sin$x$ i cos$x$ koja se pojavljuje u podintegralnoj funkciji dobivamo

$$\frac{-\cos x}{(-\sin x)^3 - (-\cos x)^3} = \frac{-\cos x}{-\left(\sin^3 x - \cos^3 x\right)} = \frac{\cos x}{\left(\sin^3 x - \cos^3 x\right)},$$

tj. R(–sin$x$, –cos$x$) = R(sin$x$, cos$x$). Kako podintegralna funkcija pri toj promjeni predznaka sin$x$ i cos$x$ nije promjenila predznak, koristimo supstituciju tg$x = t$,

za koju je onda

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \text{ i } dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Slijedi da je

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x - \cos^3 x} dx = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{t^3}{\sqrt{(1+t^2)^3}} - \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)^3}}} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t^3-1} dt$$

Rastavom podintegralne funkcije na parcijalne razlomke je

$$\frac{1}{t^3-1} = \frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1}$$

Množenjem sa zajedničkim nazivnikom slijedi

$$1 = At^2 + At + A + Bt^2 - Bt + Ct - C.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije polinama na lijevoj i desnoj strani slijedi sustav

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A - B + C &= 0 \\ A - C &= 1 \end{aligned}$$

Odatle je $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$ i $C = -\frac{2}{3}$, pa je

$$\int \frac{1}{t^3-1} dt = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{3}\int \frac{t+2}{t^2+t+1} dt = \frac{1}{3}\ln(t-1) - \frac{1}{6}\int \frac{2t+4}{t^2+t+1} dt =$$

$$= \frac{1}{3}\ln(t-1) - \frac{1}{6}\int \frac{2t+1+3}{t^2+t+1} dt = \frac{1}{3}\ln(t-1) - \frac{1}{6}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt - \frac{1}{6}\int \frac{3}{t^2+t+1} dt =$$

$$=\frac{1}{3}\ln(t-1)-\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln(tgx-1)-\frac{1}{6}\ln(tg^2x+tgx+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2tgx+1}{\sqrt{3}}+c\,.$$

d) $$I=\int tg^5 xdx=\left|\begin{matrix} tgx=t, x=arctgt \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{t^5}{t^2+1}dt$$

Djeljenjem polinoma brojnika i polinoma nazivnika dobivamo:

$$t^5:(t^2+1)=t^3-t+\frac{t}{t^2+1},$$

pa je

$$I=\int\left(t^3-t+\frac{t}{t^2+1}\right)dt=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)=\frac{tg^4x}{4}-\frac{tg^2x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(tg^2x+1\right)+c\,.$$

1.6.2 Integrali oblika $\int\sin^n xdx$ i $\int\cos^n xdx$

$$\int\sin^n xdx,$$

$$\int\cos^n xdx,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2,$$

mogu se rješiti koristeći rekurzivne formule

$$\text{a)}\int\sin^n xdx=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}xdx$$

$$\text{b)}\int\cos^n xdx=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}xdx\,.$$

Dokaz navedenih rekurzivnih formula se može provesti parcijalnom integracijem.

Dokaz za b):

$$I_n=\int\cos^n xdx=\int\cos^{n-1}x\cos xdx=\left|\begin{matrix} u=\cos^{n-1}x, du=(n-1)\cos^{n-2}x\cdot(-\sin x)dx \\ dv=\cos xdx, v=\sin x\end{matrix}\right|=$$

$$=\cos^{n-1}x\cdot\sin x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\cdot\sin^2 xdx=$$

$$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \cdot (1-\cos^2 x)dx =$$

$$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} xdx - (n-1)\int \cos^n xdx .$$

Dakle je

$$I_n = \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n ,$$

pa je

$$I_n + (n-1)I_n = \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)I_{n-2}$$

odnosno

$$nI_n = \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)I_{n-2} ,$$

odakle je

$$I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \cdot \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} .$$

Primjer 22.

a) $\int \cos^6 xdx = \frac{1}{6}\cos^5 x \cdot \sin xdx + \frac{5}{6}\int \cos^4 xdx =$

Ponovnom primjenom rekurzivne formule na $\int \cos^4 xdx$, slijedi da je

$$\int \cos^6 xdx = \frac{1}{6}\cos^5 x \sin x + \frac{5}{6}\left[\frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{4}\int \cos^2 xdx\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\cos^5 x \sin x + \frac{5}{24}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{4}\int \cos^2 xdx =$$

i ponovnom primjenom na $\int \cos^2 xdx$ je

$$\int \cos^6 xdx = \frac{1}{6}\cos^5 x \sin x + \frac{5}{24}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{4}\frac{1}{2}\cos x \sin x + \frac{1}{2}\int dx =$$

$$= \frac{1}{6}\cos^5 x \cdot \sin x + \frac{5}{24}\cos^3 x \cdot \sin x + \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{1}{2}x + c .$$

b) $\int \sin^4 xdx$ može se rješiti na sljedeći način:

$$\int \sin^4 xdx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)dx =$$

$$=\frac{1}{4}\left[x-2\frac{\sin 2x}{2}+\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx\right]=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{\sin 4x}{32}=+c=$$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 2x\cos 2x=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\sin x\cos x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=$$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\sin x\cos^3 x-\frac{1}{8}\sin^3 x\cos x=$$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\sin x\cos x\left(1-\sin^2 x\right)-\frac{1}{8}\sin^3 x\cos x=$$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{3}{16}\sin 2x-\frac{1}{4}\sin^3 x\cdot\cos x+c\,.$$

Primjenom rekurzivne relacija imali bi da je:

$$\int\sin^4 xdx=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cdot\cos x+\frac{3}{4}\int\sin^2 xdx=$$

$$=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cdot\cos x+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{2}\int dx\right)=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cdot\cos x-\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{8}x+c\,.$$

c) $\int\sin^5 xdx$ može se rješiti na sljedeći način:

$$\int\sin^5 xdx=\int\sin^4 x\sin xdx=-\int\left(1-\cos^2 x\right)d\left(\cos x\right)=-\int\left(1-2\cos^2 x+\cos^4 x\right)d(\cos x)=$$

$$=-\cos x+2\frac{\cos^3 x}{3}-\frac{\cos^5 x}{5}+c\,,$$

ili rekurzijom

$$\int\sin^5 xdx=-\frac{1}{5}\sin^4 x\cdot\cos x+\frac{4}{5}\int\sin^3 xdx=$$

$$=-\frac{1}{5}\sin^4 x\cdot\cos x+\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{3}\sin^2 x\cos x+\frac{2}{3}\int\sin xdx\right)=-\frac{1}{5}\sin^4 x\cdot\cos x-\frac{4}{15}\sin^2 x\cos x-\frac{8}{15}\cos x+c$$

Isti oblik rješenja zahtjevao bi više vremena za transformiranje jednog u drugo nego samo izračunavanje integrala.

1.6.3 Zadaci za vježbu

1.

a) $\int \frac{dx}{\sin x}$

b) $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$

c) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$

d) $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

e) $\int \frac{\sin^3 x+1}{\cos^2 x}dx$

f) $\int \frac{(\sin x-\cos x)^2}{\sin 2x}dx$

g) $\int \cos^5 xdx$

h) $\int \sin^6 xdx$

Rješenja

1.

a) $\ln tg\frac{x}{2}+c$

b) $\frac{2}{3}arctg\frac{tg\frac{x}{2}}{3}$

c) $\frac{2}{3}arctg\frac{tg\frac{x}{2}+4}{3}$

d) $\frac{1}{2}\ln(1+tgx)+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\ln(1+tg^2x)+c$

e) $\frac{1}{\cos x}+\cos x+tgx$

f) $\frac{1}{2}\ln tgx-x$

g) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x$

h) $\frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x$

1.6.4 Integrali oblika $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Integrali oblika

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx\,,\ m,\ n \in Z$$

mogu se rješiti primjenom rekurzivnih formula:

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x dx$$

ili

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^{n} x dx$$

Integrali oblika $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx,\ m,\ n \in Z$ mogu se rješiti i pogodnim transformacijama podintegralne funkcije u ovisnosti o tome da li su m i n parni brojevi ili je barem jedan od njih neparan prirodan broj.
Ako je bar jedan eksponent m ili n neparan i veći od nule, onda se koristi supstitucija sin$x = t$ ili cos$x = t$, uz korištenje osnovne trigonometrijske jednakosti: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
Ako su $m \geq 0$ i $n \geq 0$ parni brojevi onda podintegralnu funkciju možemo transformirati pomoću poznatih trigonometrijskih formula:

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Pimjer 23.

a) $$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)d(\sin x) =$$

$$= \int \left(\sin^3 x - \sin^4 x\right)d(\sin x) = \left|\sin x = t, d(\sin x) = \cos x dx = dt\right| = \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^5 x}{5} + c\,.$$

b) $$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int \left(\sin x \cos x\right)^2 \cdot \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \frac{1+\cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int \sin^2 2x dx + \int \sin^2 2x \cos 2x dx\right] = \frac{1}{8}\left[\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx + \frac{1}{2}\int \sin^2 2x d(\sin 2x)\right] =$$

$$= \left|\sin 2x = t, d(\sin 2x) = 2\cos 2x dx\right| = \frac{1}{16}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + \frac{1}{16}\frac{\sin^3 2x}{3} + c\,.$$

Primjer 24. Riješimo jedan teži primjer.

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx = \int \frac{\sin^2 x \cos x}{\cos^4 x}dx = \left|\sin x = t, \cos x dx = dt\right| = \int \frac{t^2 dt}{\left(1-t^2\right)^2} =$$

Podintegralnu funkciju rastavimo na parcijalne razlomke:

$$\frac{t^2}{(1-t)^2(1+t)^2} = \frac{A}{(1-t)^2} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{(1+t)^2} + \frac{D}{1+t}.$$

Množenjem jadnakosti sa $(1-t)^2(1+t)^2$ je

$$t^2 = A(1+t)^2 + B(1-t)(1+t)^2 + C(1-t)^2 + D(1+t)(1-t)^2,$$

odakle izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije polinoma na lijevoj i desnoj strani slijedi sustav

$$-B + D = 0$$

$$A - B + C - D = 1$$

$$2A + \mathrm{B} - 2C - D = 0$$

$$A + B + C + D = 0.$$

Odakle je $A = C = \frac{1}{4}, B = D = -\frac{1}{4}$.

Prema tome je

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx = \frac{1}{4}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{4}\ln(1-t)) + \frac{1}{4}\frac{-1}{1+t} - \frac{1}{4}\ln(1+t) + c =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{4}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x} + c.$$

$$\sin^2 x = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2 x}} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

1.6.5 Integrali oblika $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \sin ax \cos bx dx$ i $\int \cos ax \cos bx dx$

Integrali oblika:

$$\int \sin ax \sin bx dx,$$

$$\int \sin ax \cos bx dx,$$

$$\int \cos ax \cos bx dx,$$

gdje je a, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, se mogu rješiti tako da se podintegralna funkcija transformira pomoću jedne od sljedećih formula:

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$$

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x].$$

Primjer 25.

a) $\int \sin 5x \cos x dx$

Jer je

$$\sin 5x \cos x = \frac{1}{2}[\sin 4x + \sin 6x],$$

$$\int \sin 5x \cos x dx = \frac{1}{2}\left[\int \sin 4x dx + \int \sin 6x dx\right] = -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{12}\cos 6x + c.$$

b) $\int \sin 3x \sin 5x dx$

Jer je

$$\sin 3x \sin 5x = \frac{1}{2}[\cos 2x - \cos 8x]$$

$$\int \sin 3x \sin 5x dx = \frac{1}{2}\left[\int \cos 2x dx - \int \cos 8x dx\right] = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + c.$$

c) $\int \cos 2x \cos 3x dx$

Jer je

$$\cos 2x \cos 3x = \frac{1}{2} [\cos x + \cos 5x]$$

$$\int \cos 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\left[\int \cos x dx + \int \cos 5x dx\right] = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + c.$$

1.6.6 Zadaci za vježbu

a) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

b) $\int \sin 2x \cos^5 2x dx$

c) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$

d) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$

e) $\int tg^3 x dx$

f) $\int \sin 5x \cos x dx$

g) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 dx}$

h) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$

Rješenja

a) $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48}$

b) $-\frac{1}{12}\cos^6 2x$

e) $\frac{tg^2 x}{2} + \ln \cos x$

c) $\frac{\cos^2 x}{2} - \ln \cos x$

d $)-\frac{1+\sin^2 x}{\sin x}$

f) $-\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{12}\cos 6x + c$

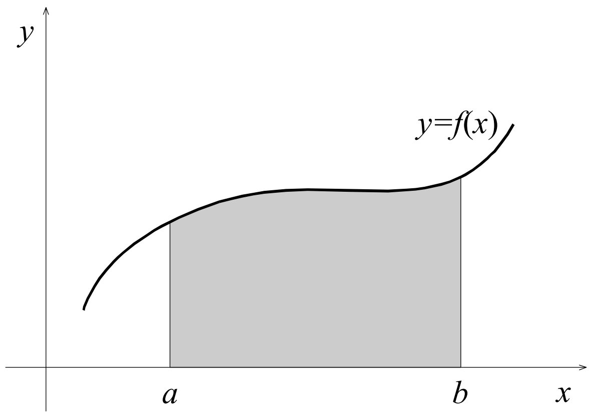
g) $tgx - 2ctgx - \frac{1}{3}ctg^3 x$

h) $\frac{tg^4 x}{4} + \frac{3}{2}tg^2 x - \frac{1}{2}ctg^2 x + 3\ln tgx + c$

2 ODREĐENI INTEGRAL

2.1 Definicija određenog integrala

Promatrajmo skup T točaka ravnine koji je odozgo omeđen grafom neprekidne funkcije $y = f(x)$ definirane na $I = [a, b]$, pravcima $x = a$ i $x = b$ i, segmentom $[a, b]$ osi x, kao na slici 1. Takav skup zovemo krivocrtni trapez. Postavlja se pitanje kako naći površinu tog skupa T?



Slika 1.

Osnovna pretpostavka je neprekidnost funkcije

$$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$$

i njezine pozitivnosti tj. da je

$$f(x) \geq 0, \text{ za svako } x \in I.$$

U svrhu određivanja površine tako definiranog skupa T, podjelimo interval $[a, b]$, $a < b$, na n djelova točkama $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, tako da je

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Takvom podjelom dobili smo intervale

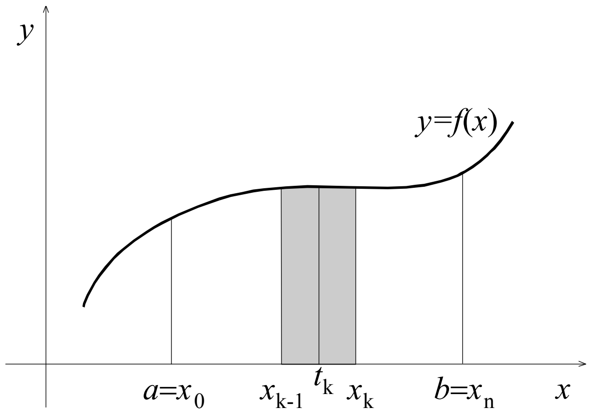
$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{k-1}, x_k], [x_{n-1}, x_n].$$

Na svakom intervalu odeberimo bilo koju točku

$$t_k \in [x_{k-1}, x_k],\ k = 1, \ldots, n.$$

Sa T_1 označimo pravokutnik kojemu je jedna stranica duljina intervala $[x_0, x_1]$, tj. $x_1 - x_0$, a druga duljine $f(t_1)$. Općenito sa T_k označavamo pravokutnik kojemu je jedna stranica duljina intervala $[x_{k-1}, x_k]$, tj. $x_k - x_{k-1}$, a druga duljine $f(t_k)$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Površina pravokutnika T_k jednaka je

$$P(T_k) = f(t_k)\cdot(x_k - x_{k-1}),\ k = 1, 2, \ldots, n.$$



Slika 2.

Površina skupa T tada će približno biti jednaka zbroju površina pravokutnika $P(T_1), P(T_2), \ldots, P(T_{n-1}), P(\mathrm{T}_n)$, tj.

$$P(T) \approx \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot\left(x_k - x_{k-1}\right). \quad (1)$$

Suma (1) naziva se **integralna suma** funkcije f na intervalu $[a, b]$.
Ako interval $[a, b]$ dijelimo na sve veći i veći broj intervala, duljina $x_k - x_{k-1}$ svakog od njih će biti sve manja i težiti prema 0. Intuitivno je jasno da će pri tom suma površina pravokutnika $P(T_1), P(T_2), \ldots, P(T_{n-1}), P(T_n)$ sve bolje i bolje aproksimirati ukupnu površinu $P(T)$ skupa T. Limes integralne sume u (1) kada $n \to +\infty$, a $(x_k - x_{k-1}) \to 0$ za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$, zovemo **određenim integralom funkcije** f na $[a, b]$ i pišemo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}).(2)$$

Uvođenje pojma integrala pripisuje se Newtonu i Leibnizu, iako se osnovna ideja prepoznaje već kod starogrčkih matematičara. Međutim, Cauchy je prvi dokazao da za neprekinute funkcije postoji dani limes. Riemann je definiciju (2) proširio na širu klasu funkcija koje nisu nužno neprekinute, na tzv. Riemann integrabilne funkcije.

Za ograničenu funkciju f: $[a, b] \to \mathbb{R}$, kažemo da je **Riemann integrabilna** na $[a, b]$ ako limes (2) postoji i ako ne ovisi ni o načinu podjele intervala $[a, b]$, ni o izboru točaka t_k.

Integral u (2) nazivat ćemo **Riemannovim integralom** ili samo **određenim integralom** funkcije f na $[a, b]$, označavati sa:

$$\int_a^b f(x)dx,$$

i čitati "*određeni integral funkcije f od a do b*". Funkcija f naziva se podintegralna funkcija, a je donja, a b gornja granica integracije. Vidimo iz (2) da je $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}$ zamjenjen s $\int\limits_a^b$, $f(t_k)$ zamjenjen je s $f(x)$, a oznaka dx dolazi od

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

tj. od duljine intervala $[x_{k-1}, x_k]$.

Određeni integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ u (2) definirali smo za $a < b$.

Za $a > b$ i $a = b$ definiramo

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \text{ i}$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Iz same definicije određenog integrala slijedi da je

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy,$$

tj. varijablu po kojoj integriramo možemo označiti kako želimo.

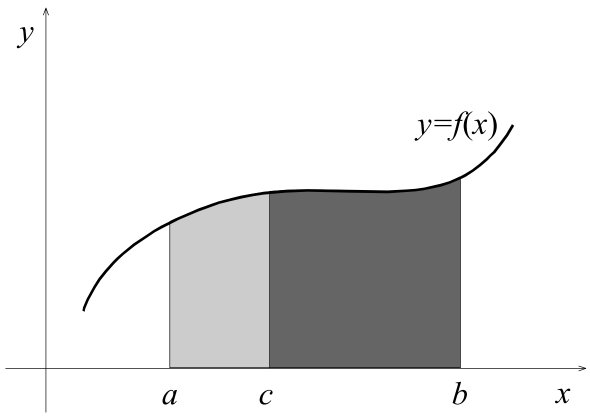
2.2 Osnovna svojstva određenog integrala

1. $\int\limits_a^b c\cdot f(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$, $c \in \mathbb{R}$,

2. $\int\limits_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$,

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $a < c < b$.

Geometrijsku interpretaciju svojstva 3. ilustrira sljedeća slika



Slika 3.

4. Ako je $f(x) \leq g(x)$, za svaki $x \in [a, b]$, onda je i

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx .$$

Prva tri svojstva proizlaze direktno iz definicije određenog integrala.

Svojstvo 4. slijedi iz činjenice da ako je $f(x) \leq g(x)$ za $x \in [a, b]$, onda je i

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} g(t_k)(x_k - x_{k-1}) .$$

Kako ista nejednakost vrijedi i za limese, iz definicije (2) slijedi da je

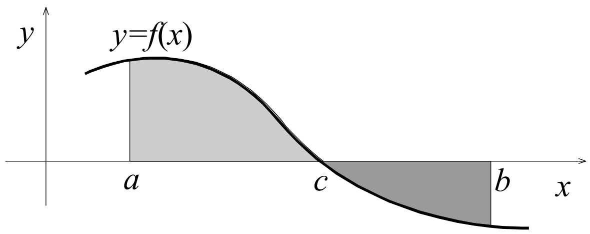
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx .$$

Iz svojstva 4. slijedi da ako je $f(x) \leq 0$ na $[a, b]$, onda je i

$$\int_a^b f(x)dx \leq 0.$$

Napomena:
Ako je f ograničena i integrabilna funkcija na $[a, b]$ i ako f poprima i negativne vrijednosti, onda je

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b |f(x)|dx .$$



Slika 4.

Definicija određenog integrala (2) geometrijski je prirodna i teorijski vrlo važna, ali je kod računanja određenog integrala gotovo neupotrebljiva. Za računanje određenog integrala koristimo se Leibniz–Newtonova formulom, najvažnijom formulom diferencijalnog i integralnog računa.

Teorem 1. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $f\colon I \to \mathbb{R}$ neprekinuta funkcija.

1. Za svaki interval $[a, b] \subset I$ postoji $\int_a^b f(x)dx$.

2. Funkcija f ima primitivnu funkciju na I.

3. Ako je F bilo koja primitivna funkcija od f na I, onda je

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

Formula (3) naziva se **Leibniz–Newtonova** formula. Iz (3) vidimo da je za računanje određenog integrala, kao i kod neodređenog, potrebno znati naći primitivnu funkciju. Zato je potrebno dobro uvježbati postupak deriviranja, a onda i antideriviranja.

Primjer 1. Primjenom Leibniz–Newtonova formule nađimo sljedeće određene integrale elementarnih funkcija:

a) $\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$;

b) $\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}$;

c) $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$;

d) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx \Big|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$;

e) $\int_0^2 e^x dx = e^x \Big|_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1$;

f) $\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$;

g) $\int_0^\pi \sin^2 x dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]\Big|_0^\pi = \frac{1}{2}\left[\pi - \frac{\sin 2\pi}{2} - 0 + \frac{\sin 0}{2}\right] = \frac{\pi}{2}$;

Primjer 2. Izračunajmo sljedeće određene integrale:

a) $\int_0^8 (1+\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx = \left(x + \sqrt{2}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right)\Big|_0^8 =$

$= \left(8 + \frac{2\sqrt{2}}{3}16\sqrt{2} + \frac{3}{4}\cdot 16\right) = 8 + 16\left(\frac{4}{3} + \frac{3}{4}\right) = 8 + 16\cdot\frac{25}{12} = \frac{124}{3}$;

b) $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$;

c) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} - \ln\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{2}\ln 3^2 = \ln 3$;

d) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg(-\frac{\pi}{4}) = 1 + 1 = 2$;

e) $\int_2^3 \frac{x+1}{x}dx = \int_2^3 (1+\frac{1}{x})dx = x\Big|_2^3 + \ln x\Big|_2^3 = 3 - 2 + \ln 3 - \ln 2 = 1 + \ln\frac{3}{2}$.

2.3 Metoda supstitucije kod određenog integrala

U određenom integralu $\int_a^b f(x)dx$, kod zamjene varijabli naročito treba paziti da se i granice *a* i *b*, koje se odnose na varijablu *x*, promjene i nađu odgovarajuće granice novo uvedene varijable.

Primjer 3. Metodom supstitucije rješimo sljedeće određene integrale:

a) $$\int_0^4 x^3\sqrt{x^2+9}dx = \int_0^4 x^2\sqrt{x^2+9}\cdot xdx = \left|\begin{array}{l} x^2+9=t^2, 2xdx = 2tdt \\ x=0 \Rightarrow t=3 \\ x=4 \Rightarrow t=5 \end{array}\right| = \int_3^5 (t^2-9)\cdot t\cdot tdt =$$

$$=(\frac{t^5}{5}-9\frac{t^2}{2})\Big|_3^5 = 625-\frac{225}{2}-\frac{243}{5}+\frac{81}{2}=\frac{1412}{5};$$

b) $$\int_1^e \frac{\sin\ln x}{x}dx = \left|\begin{array}{l} \ln x = t, \frac{1}{x}dx = dt \\ x=1 \Rightarrow t=\ln 1 = 0 \\ x=e \Rightarrow t=\ln e = 1 \end{array}\right| = \int_0^1 \sin tdt = -\cos t = -\cos 1+\cos 0 = 1-\cos 1;$$

c) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sin^2 xdx = \left|\begin{array}{l} \sin x = t, \cos xdx = dt \\ x=0 \Rightarrow t=\sin 0 = 0 \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=\sin\frac{\pi}{2}=1 \end{array}\right| = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3};$$

d) $$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x-1}{\sqrt{e^x-1}}dx = \int_0^{\pi} (e^x-1)dx = \left|\begin{array}{l} e^x-1=t^2, e^x dx = 2tdt, dx=\frac{2tdt}{t^2+1} \\ e^x = t^2+1 \\ x=0 \Rightarrow t^2 = e^0-1=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\ln 2 \Rightarrow t^2 = e^{\ln 2}-1 = 2-1=1 \Rightarrow t=1 \end{array}\right| =$$

$$=2\int_0^1 t\frac{tdt}{t^2+1} = 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = 2\int_0^1 (1-\frac{1}{t^2+1})dt = 2[t-arctgt]\Big|_0^1 =$$

$$=2[1-arctg1-0+arctg0]=2(1-\frac{\pi}{4})=2-\frac{\pi}{2};$$

e) $$\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \left| \begin{array}{l} \ln x = t, \dfrac{dx}{x} = dt \\ x = 0 \Rightarrow t = \ln e = 1 \\ x = e^2 \Rightarrow t = \ln e^2 = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2}\Big|_1^2 = \frac{3}{8}.$$

2.4 Zadaci za vježbu

1. Metodom supstitucije rješite sljedeće određene integrale:

a) $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$;

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$;

c) $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x\sin(x^2+\pi)\,dx$;

d) $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-6e^x+13}$;

e) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$;

f) $\displaystyle\int_2^3 \frac{z\,dz}{1+z^2}$;

g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin^3 t\,dt$;

h) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{2x+3}$.

Rješenja

a) $\dfrac{98}{3}$;

b) 1;

c) 1;

d) $\dfrac{\pi}{8}$;

e) $\dfrac{\pi}{2}$;

f) $\dfrac{1}{2}\ln 2$;

g) $\dfrac{1}{5}$;

h) $\dfrac{1}{2}\ln 3$.

2.5 Parcijalna integracija kod određenog integrala

Parcijalnu integraciju možemo primjeniti i na određene intagrale. Iz Newton – Leibnizove formule (3) i iz

$$\int [u'(x)v(x)+u(x)v'(x)]dx = u(x)v(x)+c$$

slijedi da je

$$\int_a^b [u'(x)v(x)+u(x)v'(x)]dx = u(b)v(b)-u(a)v(a) = u(x)v(x)\Big|_a^b$$

Odatle je

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx\,,$$

što opet kraće zapisujemo:

$$\int_a^b udv = (u\cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b vdu\,. \tag{4}$$

Primjer 4. Primjenom parcijalne integracije izračunajmo sljedeće određene integrale:

a) $$\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2}dx = \left| \begin{array}{l} u=\ln x, dv=\dfrac{dx}{x} \\ dv=\dfrac{dx}{x^2}, v=\dfrac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2}(-\frac{1}{x})\frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^{e^2} + \int_1^{e^2}\frac{dx}{x^2} =$$

$$= -\frac{\ln e^2}{e^2} + \frac{\ln 1}{1} - \frac{1}{x}\Big|_1^{e^2} = -\frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2} + 1 = 1 - \frac{3}{e^2}\,;$$

b) $$\int_0^1 \arcsin x dx = \left| \begin{array}{l} u=\arcsin x dx, du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=dx, v=x \end{array} \right| = x\arcsin x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 1-x^2=t^2, -2xdx=2tdt \\ x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=0 \end{array} \right| = \arcsin 1 + \int_0^1 dt = \frac{\pi}{2} - 1\,;$$

c) $$\int_0^1 x\ln(x+3)dx = \left| \begin{array}{l} u=\ln(x+3) \Rightarrow du = \dfrac{1}{x+3}dx \\ dv = xdx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left[\ln(x+3)\cdot\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x+3} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+3}dx = \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\int_0^1 (x-3+\frac{9}{x+3})dx = \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - 3x + 9\ln(x+3)\right]\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - 3 + 9\ln 4 - 9\ln 3\right] = \frac{1}{2}\ln 4 + \frac{5}{4} - \frac{9}{2}\ln 4 + \frac{9}{2}\ln 3 = \frac{5}{4} - 4\ln 4 + \frac{9}{2}\ln 3\,;$$

d) $$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx = \left| \begin{array}{l} e^x - 1 = t^2,\ e^x dx = 2tdt,\ dx = \dfrac{2tdt}{t^2+1} \\ x=0 \Rightarrow t=0,\ x=\ln 5 \Rightarrow t=2 \end{array} \right| = \int_0^2 \frac{t\cdot 2tdt}{t^2+1+3} =$$

$$= 2\int_0^2 \frac{t^2+4-4}{t^2+4}dt = 2\int_0^2 \frac{t^2+4}{t^2+4}dt + 2\int_0^2 \frac{-4}{t^2+4}dt = 2t\Big|_0^2 - 8\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}\Big|_0^2 =$$

$$= 4 - 4arctg1 = 4 - 4\cdot\frac{\pi}{4} = 4 - \pi\,.$$

2.6 Zadaci za vježbu

1. Primjenom parcijalne integracije izračunajte sljedeće određene integrale:

a) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} x\ln(x^2-1)dx$;

b) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$;

c) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x+1)dx$;

d) $\displaystyle\int_0^8 (x-3)e^{x^2-6x}dx$.

Rješenja

a) $\ln 2 - \frac{1}{2}$;

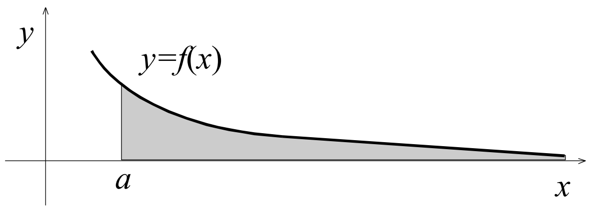
b) $2 - \frac{5}{e}$;

c) $\ln 4 - 1$;

d) $\frac{1}{2}\left(e^{16}-1\right)$.

3 NEPRAVI INTEGRALI

Integral nenegativne funkcije *f* na intervalu [*a*, *b*], $\int_a^b f(x)dx$, jednak je površini onog područja ispod grafa funkcije *f*, i znad osi *x*, koje se nalazi između $x = a$ i $x = b$. Ako pustimo da *b* ode u beskonačnost, područje postaje neomeđeno, kao što se vidi na sljedećoj slici:



Slika 1

Osjenčan dio ravnine ispod grafa je neograničen, pa se na prvi pogled čini da je i njegova površina beskonačna. To je u nekim slučajevima točno, ali može biti i krivi zaključak, jer je najveći dio tog skupa toliko tanak da mu je površina zanemarivo mala.

Primjer 1. a) Izračunajmo integral

$$\int_2^b \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

koji je jednak površini područja koje se proteže nad intervalom [2, *b*], do grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Što se događa kada $b \to \infty$?
Kako je

$$\int_2^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left(2\sqrt{x}\right)\Big|_2^b = 2\sqrt{b} - 2\sqrt{2},$$

kada $b \to \infty$, integral također teži u beskonačnost jer je $\lim_{b\to\infty} \sqrt{b} = \infty$. Dakle je

$$\lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to\infty}\left(2\sqrt{x}\right)\Big|_2^b = \lim_{b\to\infty}\left(2\sqrt{b} + 2\sqrt{2}\right) = \infty.$$

Međutim, prva misao da je površina neomeđena područja beskonačna, kao ni ovaj primjer koji to potvrđuje, ne smiju nas zavarati. Primjer koji slijedi jasno će nam pokazati da površina neomeđena područja može biti konačna.

b) Izračunajmo integral

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2},$$

koji je jednak površini područja koje se proteže nad intervalom [1, b], do grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Što se događa kada $b \to \infty$? Kolika je površina područja koje se proteže nad neomeđenim intervalom [1, ∞>, do grafa funkcije $y = \frac{1}{x^2}$?

Kako je

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b = \left(-\frac{1}{b}+1\right),$$

kada $b \to \infty$, jer je $\lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{b} = 0$, integral $\int_1^b \frac{dx}{x^2}$ teži prema 1, dakle je

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$$

Naime, graf funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pod a) se približava osi x sporije nego graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$ pod b) pa je površina ispod njega beskonačna.

Ovaj nas primjer upućuje na to da granice određenih integrala budu ∞, pa npr. $\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2}$ u gornjem primjeru, označimo sa $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ i uvedemo kao novu vrstu tzv. nepravih integrala na neomeđenim intervalima.

3.1 Integrali nad neomeđenim intervalima

Ako je $f(x)$ integrabilna na [a, b] za svaki $b > a$ i ako postoji konačni limes

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

onda se taj limes naziva **nepravi integral** funkcije f na skupu $[a, +\infty\rangle$ i označava se s

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

U tom slučaju još se kaže da

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

konvergira. Ako limes u definiciji nepravog integrala ne postoji ili je jednak ±∞, onda kažemo da integral

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

divergira (ili ne postoji).

Slično, ako je $f(x)$ integrabilna na $[a, b]$, za svaki a i b i ako postoji konačni limes

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

onda se taj limes naziva **nepravi integral** funkcije f na skupu $\langle -\infty, b]$ i označava se s

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx\,. \qquad (2)$$

Također se u tom slučaju kaže da

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx$$

konvergira, a ako limes iz definicije ne postoji ili je jednak ±∞, kaže se da

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx$$

divergira ili ne postoji.

Ako je $f(x)$ integrabilna na $[a, b]$, za svaki a i b i ako postoje konačni limesi

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx \ \text{ i } \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)dx\,,\ c\in\mathbb{R},$$

onda postoji nepravi integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

koji definiramo kao

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx\,. \tag{3}$$

gdje je c bilo koja točka tog intervala.

Ako je u tim izrazima limes desne strane konačan, određen broj, kaže se da integral konvergira, a ako takav broj ne postoji, da integral divergira.

Primjer 2. Izračunajmo sljedeće neprave integrale:

a) $$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(arctgx\right)\Big|_0^{b} = \lim_{b\to\infty}\left(arctgb - arctg0\right) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Drugim riječima, površina ispod krivulje

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

od 0 do ∞ je jednaka $\frac{\pi}{2}$.

b) $$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{0} e^x dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\left(e^x\right)\Big|_{\alpha}^{0} = \lim_{\alpha\to-\infty}\left(1 - e^{\alpha}\right) = 1\,.$$

Površina ispod krivulje

$$f(x) = e^x$$

od $-\infty$ do 0 jednaka je 1.

c) $$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{0} xe^{-x^2} dx = \left| -x^2 = t, xdx = -\frac{1}{2}dt \right| = \lim_{\alpha\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Big|_{\alpha}^{0} =$$

$$= \lim_{\alpha\to-\infty}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\alpha^2}\right) = -\frac{1}{2}$$, integral konvergira.

d) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+1} + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[arctg(x+1)\right]\Big|_{a}^{0} + \lim_{b\to\infty}\left[arctg(x+1)\right]\Big|_{0}^{b} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[arctg1 - arctg(a+1)\right] + \lim_{b\to\infty}\left[arctg(b+1) - arctg1\right] = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi .$$

Postoji i drugi tip nepravog integrala. Ako graf od *f* ima vertikalnu asimptotu u rubnoj točki intervala [*a*, *b*], onda integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

nije definiran na uobičajen način, jer funkcija nije omeđena u okolini te rubne točke, tj. $f(x) \to +\infty$ ili $-\infty$, kada $x \to a$ ili $x \to b$. I tu se susrećemo s površinom neomeđena područja, što se proteže nad intervalom [*a*, *b*] ispod grafa funkcije *f*.

Područje je ovog puta neomeđeno u smjeru osi *y*. Njegovu površinu opet možemo pronaći kao limes pravih integrala, a njega ćemo opet zvati nepravim integralom.

Dakle postoje dva tipa nepravog integrala: ili područje integracije [*a*, *b*] nije konačno ili $f(x)$ nije konačna na danom području integracije.

3.2 Integrali neomeđenih funkcija

Promotrimo prvo slučaj kada je funkcija *f* neomeđena na lijevom kraju intervala [*a*, *b*],tj.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty .$$

Ako je funkcija integrabilna za sve $x \in \langle a, b]$ i ako postoji konačan limes

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

onda se taj limes zove **nepravi integral** funkcija *f* na $\langle a, b]$ i označava se kao obični integral

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx . \qquad (4)$$

U tom slučaju, reći ćemo da nepravi integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

konvergira, a u suprotnom da divergira.

Ako je funkcija f neomeđena na desnom kraju intervala $[a, b]$,tj.

$$\lim_{x\to b} f(x) = \pm\infty,$$

i ako je integrabilna za sve $x \in [a, b\rangle$, a postoji konačan limes

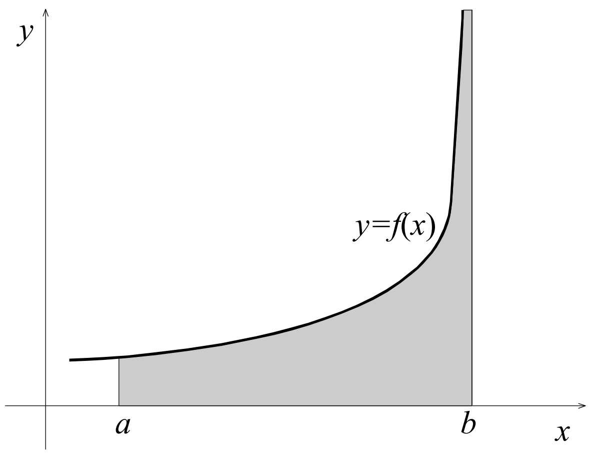
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

onda se taj limes zove **nepravi integral** funkcija f na $[a, b\rangle$ i označava kao obični integral

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{5}$$

I u ovom slučaju kažemo da nepravi integral konvergira, a ako je limes u danoj definiciji jednak $\pm\infty$ ili ne postoji, kažemo da integral divergira, tj. ne postoji.

Geometrijska interpretacija nepravog integrala funkcije f na $[a, b\rangle$, kada f nije ograničena u b je osjenčani dio na slici



Slika 2

Promotrimo sada i slučaj kada je podintegralna funkcija neograničena u nekoj točki $c \in \langle a, b\rangle$, tj.

$$\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty.$$

Tada se integral $\int_a^b f(x)dx$ rastavlja točkom $c \in \langle a, b\rangle$, na dva integrala

$$\int_a^c f(x)dx \ \text{ i } \int_c^b f(x)dx.$$

koji su nepravi prama prethodnim definicijama.

Dakle definiramo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx, \qquad (6)$$

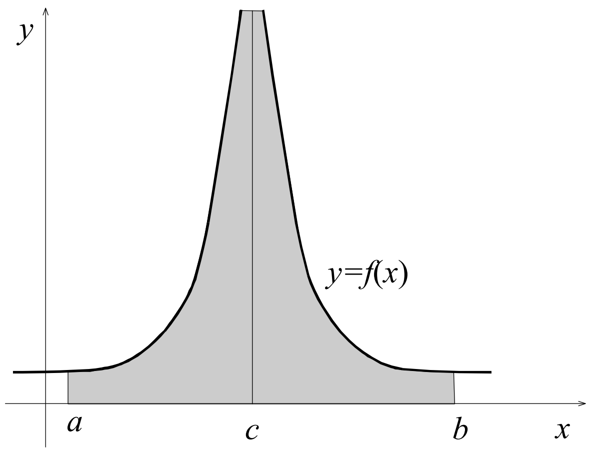
kao **nepravi integral**.

Ako su limesi na desnoj strani konačni kažemo da integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

konvergira, a ako takav broj ne postoji integral divergira.

Geometrijska interpretacija ovog integrala je površina osjenčanog lika na sljedećoj slici:



Slika 3

Primjer 3. Ispitajmo konvergenciju sljedećih nepravih integrala:

a) $$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left|\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \infty\right| = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}(\arcsin\frac{x}{2})\Big|_0^{2-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\arcsin\frac{2-\varepsilon}{2} - \arcsin 0\right] == \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\arcsin\frac{2-\varepsilon}{2} - 0\right] = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2};$$

Iako je lik neograničen, vidimo da je površina konačna i jednaka $\frac{\pi}{2}$. Dakle

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

konvergira.

b) $$\int_0^1 \ln x dx = \left|\lim_{x\to 0}\ln x = -\infty\right| = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[x\ln x - x\right]\Big|_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[1\ln 1 - 1 - \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon\right] =$$

$$= -1 - \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon = -1 - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = -1 - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -1 + \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon = -1 .$$

Integral

$$\int_0^1 \ln x dx$$

konvergira.

c) $$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left|\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty\right| = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\frac{1}{x})\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0}(\frac{-1}{x})\Big|_{\varepsilon}^{1} =$$

$$= \left[\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)\right] = \infty \text{, pa}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$$

divergira. Dakle, površinu ne možemo izračunati tj. beskonačna je.

d) $$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} = \left|\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3} = \infty\right| = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3} + \int_0^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x^3} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\frac{1}{2x^2})\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0}(\frac{-1}{2x^2})\Big|_{\varepsilon}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)\right] = 0 ;$$

e) $$\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \left|\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty\right| = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{8} = \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(4 - \varepsilon^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3}{2}\cdot 4 = 6 .$$

Primjer 4. Izračunajmo sljedeći određeni integral supstitucijom $tg\frac{x}{2} = t$.

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{5 + 4\cos x} dx .$$

Uz navedenu supstituciju znamo da je $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ i $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

Sada promjenimo još i granice:

za $x = 0$ slijedi da je $t = tg0 = 0$, a za $x = \pi$ je $t = tg\dfrac{\pi}{2} = \infty$.

Tada je

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{5+4\cos x}dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{5+4\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+9}.$$

Dakle, dobili smo nepravi integral, kojeg možemo rješiti prema (1) pomoću limesa:

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+9} = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} \frac{dt}{t^2+9} = \frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(arctg\frac{t}{3}\right)\Bigg|_0^b = \frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(arctg\frac{b}{3} - arctg0\right) = \frac{1}{3}\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{6},$$

pa je

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{5+4\cos x}dx = \frac{\pi}{3}.$$

3.3. Zadaci za vježbu

1. Izračunati sljedeće neprave integrale:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+4}$;

b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{arctgx}{x^2+1}dx$;

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$;

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\ln^2 x dx$;

e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

g) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$

2. Pokazati da sljedeći nepravi integrali divergiraju:

a) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$

b) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \cos x dx$

c) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1+x^2}{x^3}dx$

d) $\displaystyle\int_{0}^{5} \frac{dx}{x^7}$

e) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2}$

Rješenja:

1.

a)	$\frac{\pi}{4}$;	c)	$\frac{\pi}{2}$;	e)	$\frac{1}{\ln 2}$;	g)	6.
b)	$\frac{\pi^2}{8}$;	d)	$\frac{1}{4}$;	f)	$\frac{\pi}{2}$;		

4 PRIMJENE ODREĐENOG INTEGRALA

4.1 Površina

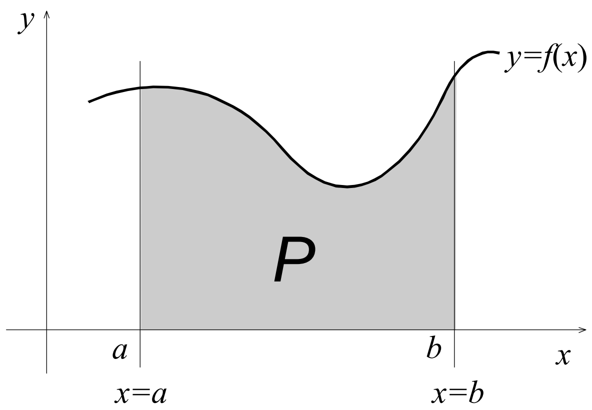
4.1.1 Površina u pravokutnim koordinatama

Ako je neprekidna funkcija zadana u pravokutnim koordinatama jednadžbom

$$y = f(x) \text{ i } f(x) \geq 0,$$

onda se površina krivocrtnog trapeza omeđenog tom krivuljom, pravcima $x = a$ i $x = b$, te osi apscisa od a do b određuje formulom:

$$P = \int_a^b f(x)dx\,. \tag{1}$$



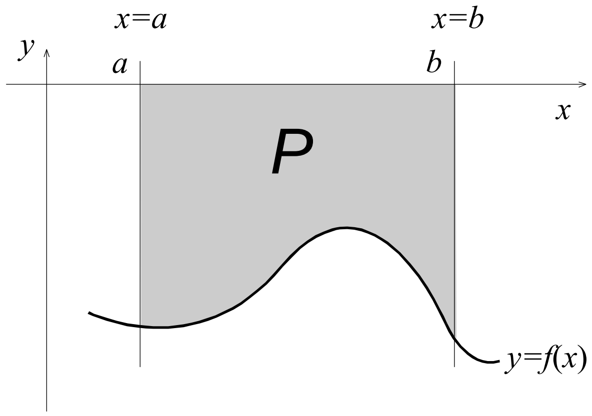
Slika 1.

Ako je

$$y = f(x) \text{ i } f(x) \leq 0,\ x \in [a, b],$$

onda se površina između osi x i grafa negativne funkcije omeđene pravcima $x = a$ i $x = b$ računa tako da integriramo funkciju $-f$, a ne f:

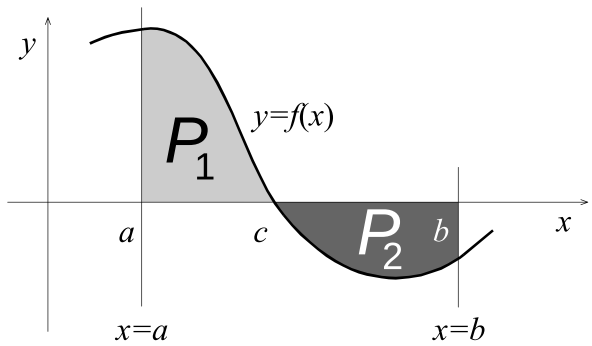
$$P = -\int_a^b f(x)dx\,. \tag{2}$$



Slika 2.

Neka je c nultočka funkcije f, tj. $f(c) = 0$. Ako funkcija f mjenja predznak, tj. na djelu intervala $[a, b]$ od $x = a$ do $x = c$ funkcija $f(x) \geq 0$, a na djelu intervala $[a, b]$ od $x = c$ do $x = b$ funkcija $f(x) \leq 0$, tada je površina omeđena grafom funkcije f, osi x, pravcima $x = a$ i $x = b$ jednaka

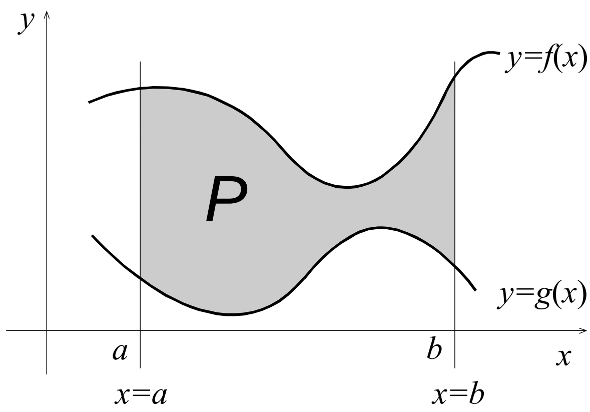
$$P = P_1 + P_2 = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx \,. \tag{3}$$



Slika 3.

Ako je područje nad intervalom $[a, b]$ omeđeno grafovima neprekinutih funkcija f i g koje ispunjavaju nejednakosti $0 \leq g(x) \leq f(x)$ za $x \in [a, b]$, tada je površina takvog područja

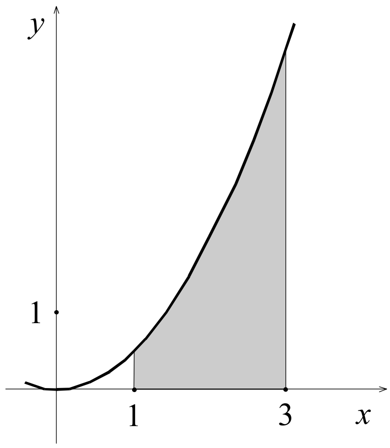
$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \,. \tag{4}$$



Slika 4.

Primjer 1. Izračunajmo površine područja omeđena grafovima funkcija:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ i pravcima $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$. Skicirajmo površinu.

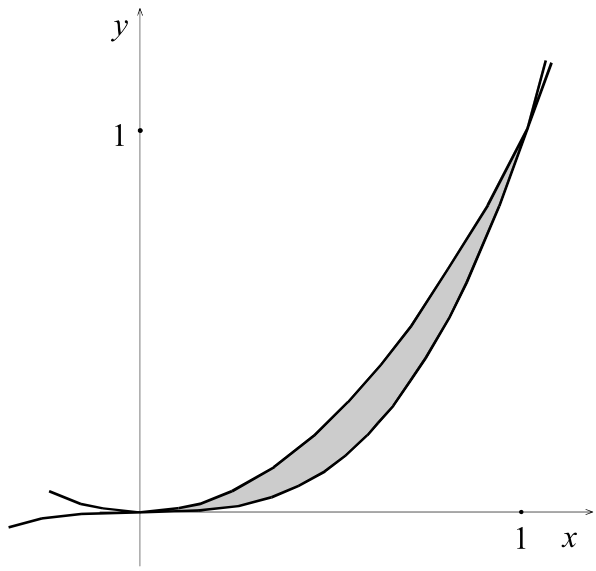


Slika 5.

Iz slike se vidi da je površina područja smještena nad intervalom [1, 3], pa je prema (1)

$$P = \int_1^3 \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{1}{2}\left(9 - \frac{1}{3}\right) = \frac{13}{3};$$

b) $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^3$.

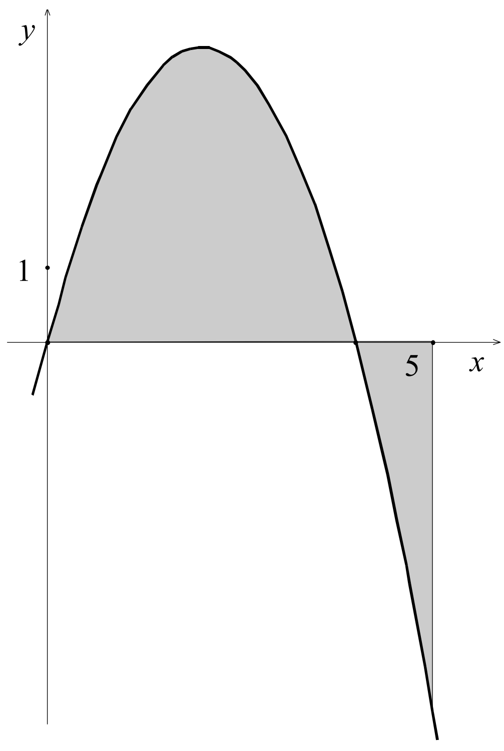


Slika 6.

Površina područja, koje je smješteno nad intervalom [0, 1] između grafova funkcija *f* i *g* prema (4) je

$$P = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\,;$$

c) $f(x) = 4x - x^2$ i pravcima $x = 5$, $y = 0$.



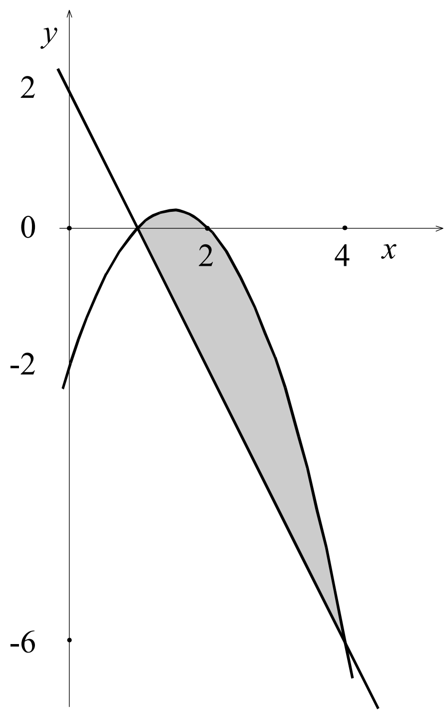
Slika 7.

Nultočke funkcije f su $x_1 = 0$ i $x_2 = 4$, pa je prema (3)

$$P = P_1 + P_2 = \int_0^4 \left(4x - x^2\right)dx + \int_4^5 \left(x^2 - 4x\right)dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 + \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\Bigg|_4^5 =$$

$$= 2\cdot 16 - \frac{64}{3} + \frac{125}{3} - 2\cdot 25 - \frac{64}{3} + 2\cdot 16 = 13;$$

d) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ i pravcem $y = -2x + 2$.



Slika 8.

Grafovi tih funkcija se sjeku u apscisama u kojima je

$$-x^2 + 3x - 2 = -2x + 2,$$

Odakle je

$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$

pa je $x_1 = 1$ i $x_2 = 4$.

$$P = \int_1^4 (-x^2 + 3x - 2 + 2x - 2)dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - 4x\right)\Bigg|_1^4 =$$

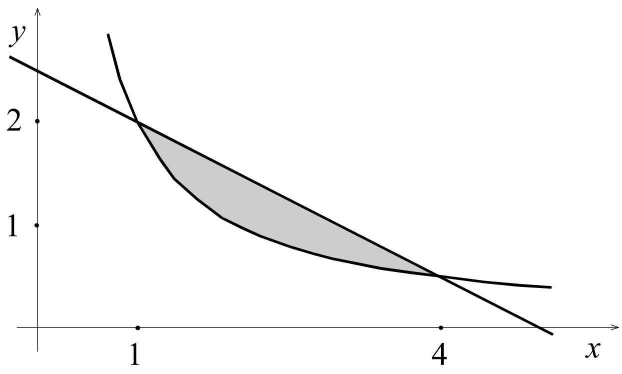
$$= -\frac{64}{3} + \frac{80}{2} - 8 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = \frac{9}{2};$$

e) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ i pravcem $x + 2y - 5 = 0$.

Riješimo sustav jednadžbi $y = \dfrac{2}{x}$ i $x + 2y - 5 = 0$, da bismo dobili presječne točke zadanih krivulja. Slijedi kvadratna jednadžba

$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$

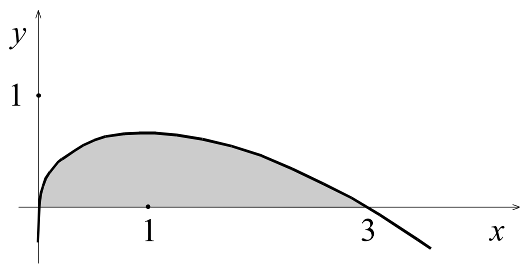
čija su rješenja $x_1 = 1$ i $x_2 = 4$. Presječne točke su A(1, 2) i B(4, $\dfrac{1}{2}$). Prema (4) je:



Slika 9.

$$P = \int_1^4 (-\frac{x}{2} + \frac{5}{2} - \frac{2}{x})dx = \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{5}{2}x - 2\ln x \right)\Bigg|_1^4 =$$
$$= -4 + 10 - 2\ln 4 + \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 2\ln 1 = \frac{15}{4} - 2\ln 4\,;$$

f) $f(x) = \dfrac{1}{3}\sqrt{x}(3 - x)$ od $x_1 = 0$ do $x_2 = 3$.



Slika 10.

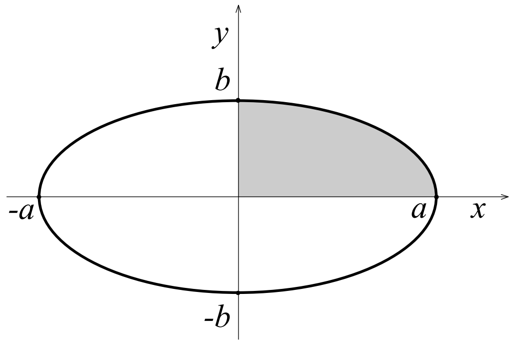
Područje definicije funkcije f je $\mathcal{D}(f) = [0, \infty\rangle$, nul-točke su $x_1 = 0$ i $x_2 = 3$, pa se površina koju tražimo nalazi između nul-točaka. Prema (1) je:

$$P = \int_0^3 \left(\sqrt{x} - x\frac{\sqrt{x}}{3} \right) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^3 = 2\sqrt{3} - \frac{6}{5}\sqrt{3} = \frac{4}{5}\sqrt{3} .$$

g) Izračunajmo površinu omeđenu elipsom: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Eksplicitni oblik krivulje iznad osi OX je:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$



Slika 11.

$$P = 4P_1 = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t, dx = a\cos t dt \\ x = a \Rightarrow \sin t = 0, t = 0 \\ x = a \Rightarrow \sin t = 1, t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot a\cos t dt =$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = 2ab\left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi ,$$

pa je površina elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ jednaka $P = ab\pi$.

Primjer 2. Izračunajmo površinu područja omeđenu grafovima funkcija

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \;\text{ i }\; g(x) = \frac{x^2}{2} .$$

Grafovi se sjeku u točkama gdje je

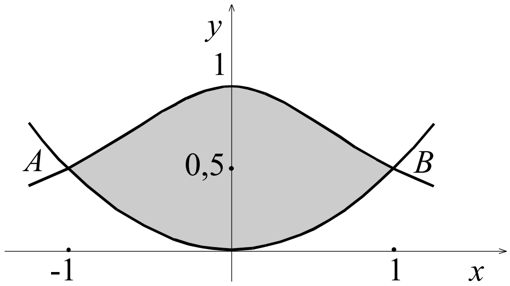
$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} .$$

Slijedi da je

$$x^4 + x^2 - 2 = 0,$$

a realna rješenje ove jednadžbe su $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$, pa su presječne točke

$$A(-1, \frac{1}{2}) \text{ i } B(1, \frac{1}{2}).$$

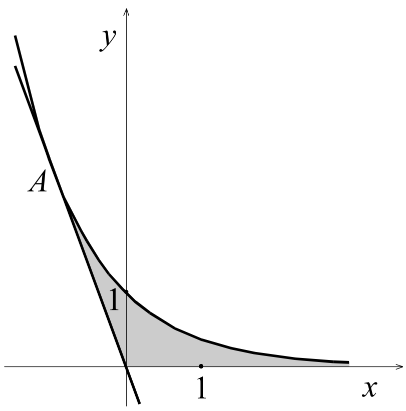


Slika 12.

Primjenom formule (4) slijedi da je

$$P = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} - \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} dx = \left[arctg - \frac{x^3}{6} \right] \Bigg|_{-1}^{1} = arctg 1 - arctg(-1) - \left[\frac{1}{6} - \frac{-1}{6} \right] = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Primjer 3. a) Izračunajmo površinu područja omeđeno grafom funkcije $f(x) = e^{-x}$, tangentom iz ishodišta na tu krivulju i asimptotom te krivulje.



Slika 13.

Jednadžba pravca tangente kroz ishodište je

$$y = kx$$

Jer je $k = y'(x_0) = -e^{-x_0}$, gdje je A(x_0, $f(x_0)$) točka u kojoj tangenta dodiruje graf funkcije $f(x) = e^{-x}$. Kako je $y_0 = f(x_0) = e^{-x_0}$, slijedi da je

$$e^{-x_0} = -e^{-x_0}\, x_0$$

pa je $x_0 = 1$, a $y_0 = f(x_0) = e$, tj.:

$$A(-1, e).$$

Slijedi da je jednadžba tangente

$$y = -ex$$

Horizontalna asimptota funkcije $f(x) = e^{-x}$ je pravac $y = 0$, jer je $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

Površinu područja ispod $y = e^{-x}$ za $x \in [-1, \infty\rangle$ označimo sa P_2.

$$P_2 = \int_a^b y(x)dx = \int_{-1}^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{-1}^{b} e^{-x}dx = -\lim_{b\to\infty}\left(e^{-x}\right)\Big|_{-1}^{b} = -\lim_{b\to\infty}(e^{-b} - e) = 0 + e = e\,.$$

Površinu područja ispod tangente $y = -ex$ za $x \in [-1, 0]$ označimo sa P_1 i ono predstavlja površinu trokuta, pa je

$$P_1 = \frac{a\cdot b}{2} = \left|\frac{-1\cdot e}{2}\right| = \frac{e}{2}\,.$$

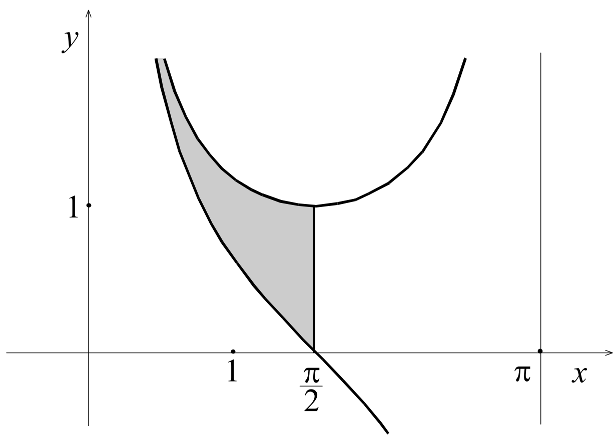
Ukupna površina područja koje smo tražili je

$$P = P_2 - P_1 = e - \frac{e}{2} = \frac{e}{2}\,.$$

b) Izračunajmo površinu područja omeđenu grafovima funkcija

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} \text{ i } g(x) = \text{ctg}x,$$

od $x = 0$ do $x = \dfrac{\pi}{2}$.



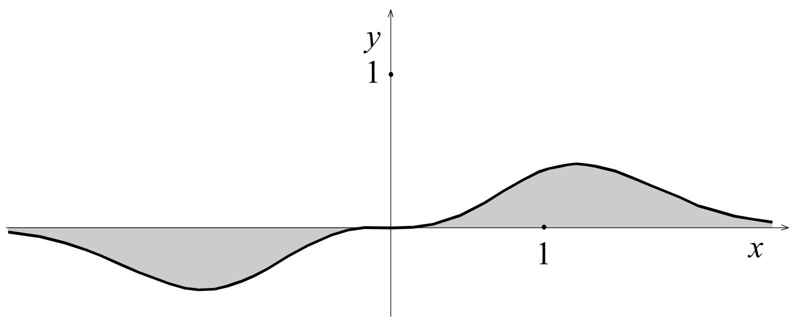
Slika 14.

Prema formuli (4) je

$$P = P_1 - P_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin x} - ctgx \right) dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{\sin x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx =$$

$$= -2 \lim_{\varepsilon \to 0} \ln \cos \frac{x}{2} \Big|_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} = -2 \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \ln \cos \frac{\pi}{4} - \lim_{\varepsilon \to 0} \ln \cos \varepsilon \right) = \ln 2 .$$

c) Izračunajmo površinu područja omeđenu grafom funkcije $f(x) = x^3 \cdot e^{-x^2}$ i njenom asimptotom.



Slika 15.

Funkcija f je neparna pa je graf simetričan s obzirom na ishodište koordinatnog sustava

Funkcija $f(x) = x^3 \cdot e^{-x^2} = \dfrac{x^3}{e^{x^2}}$ ima horizontalnu asimptotu pravac $y = 0$, jer je

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Iz slike se vidi da je površina jednaka

$$P = 2\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2}\,dx = 2\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} x^3 e^{-x^2}\,dx\,.$$

Neodređeni integral $\int x^3 e^{-x^2}\,dx$ možemo rješiti tako da prvo primjenimo metodu supstitucije, a zatim parcijalne integracije:

$$\int x^3 e^{-x^2}\,dx = \int x^2 e^{-x^2}\,x dx = \left|-x^2 = t,\ -2xdx = dt\right| = -\frac{1}{2}\int te^t\,dt =$$

$$= \begin{vmatrix} u = t,\ du = dt \\ e^t\,dt = dv,\ v = e^t \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\left(te^t - e^t\right) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}(1+x^2)\,.$$

Sada je

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b x^3 e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}(1+x^2)\right]\Bigg|_0^b = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1+b^2}{e^{b^2}} - 1\right) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1+b^2}{e^{b^2}}\right) + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

pa je $P = 1$.

4.1.2 Zadaci za vježbu

1. Izračunajte površinu omeđenu grafom funkcije $f(x) = x^2 + x + 1$, te pravcima $x = 0$, $x = 1$ i $y = 0$.

2. Izračunajte površinu omeđenu grafom funkcije $f(x) = 2x - x^2$ i pravcem $y = -x$.

3. Izračunajte površinu omeđenu krivuljom $x = 6 - y - y^2$ i osi y.

4. Izračunajte površinu omeđenu krivuljama $y^2 = 2x + 1$ i $y = x - 1$.

5. U točkama pravca $x - y + 1 = 0$ i parabole $y = x^2 - 4x + 5$ povučene su tangente na parabolu. Izračunajte površinu omeđenu parabolom i tangentama.

6. Izračunajte površinu omeđenu krivuljama $x^2 = 4y$ i $y^2 = 4x$.

7. Izračunajte površinu omeđenu grafom funkcije $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ i pravcem $x + y = 6$.

8. Izračunajte površinu omeđenu krivuljama $y = -x^2 + 4x - 3$ i $y = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x - 3$.

9. Izračunajte površinu omeđenu krivuljom $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ i osi x.

Rješenja:

1. $P = \int_0^1 (x^2 + x + 1)dx = \frac{11}{6}$;

2. $P = \frac{9}{2}$;

3. $P = \int_{-3}^{2} (6 - y - y^2)dy = \frac{125}{6}$;

4. $P = \int_{-1}^{3} \left[(y+1) - \frac{y^2 - 1}{2} \right] dy = \frac{16}{3}$;

5. $P = \frac{9}{4}$;

6. $P = \frac{16}{3}$;

7. $P = 4 - 3\ln 3$;

8. $P = \frac{11}{3}$;

9. $P = \pi - 2$.

4.1.3 Površina u parametarskim koordinatama

Površina ispod krivulje zadane parametarski sa

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

gdje je $\psi(t) \geq 0$ na intervalu $[t_1, t_2]$, dana je sa

$$P = \int_a^b y dx = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt \tag{5}$$

gdje se t_1 i t_2 određuju iz jednakosti

$$a = \varphi(t_1)$$

$$b = \varphi(t_2).$$

Primjer 4. a) Ako je elipsa zadana parametarski

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

prema formuli (5) će dio elipse u prvom kvadrantu biti

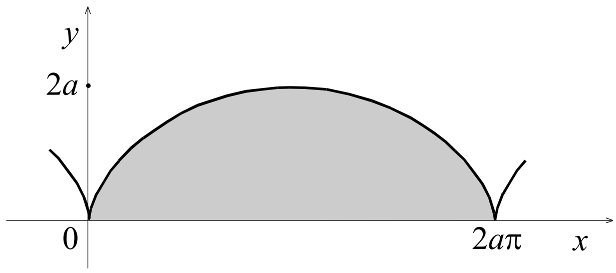
$$\frac{1}{4}P_1 = \int_{t1}^{t2} \psi(t)\varphi'(t)dt = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{ab}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = ab\frac{\pi}{4},$$

pa je površina elipse $P = 4P_1 = ab\pi$.

b) Ako se krug radijusar a kotrlja (bez klizanja) po pravcu, onda točka na rubu tog kruga opisuje krivulju čija je jednadžba dana parametarski:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \; 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Tu krivulju nazivamo **cikloidom**.



Slika 16.

Naći površinu ispod jednog luka cikloide. Prema (5) slijedi da je

$$P = \int_a^b y dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt \; =$$

$$= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt =$$

$$= a^2 \left[\left(t - 2\sin t \right) \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \right] = 2a^2 \pi + a^2 \, \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 3a^2 \pi \, .$$

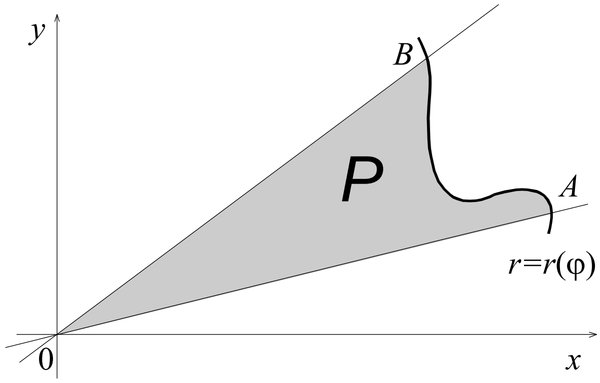
4.1.4 Površina u polarnim koordinatama

Kada je neprekidna funkcija zadana u polarnim koordinatama

$$r = r(\varphi)$$

tada je površina isječka AOB ograničena lukom krivulje $r = r(\varphi)$ i s dva polarna radijusa OA i OB kojima odgovaraju kutevi φ_1 i φ_2 dana sa

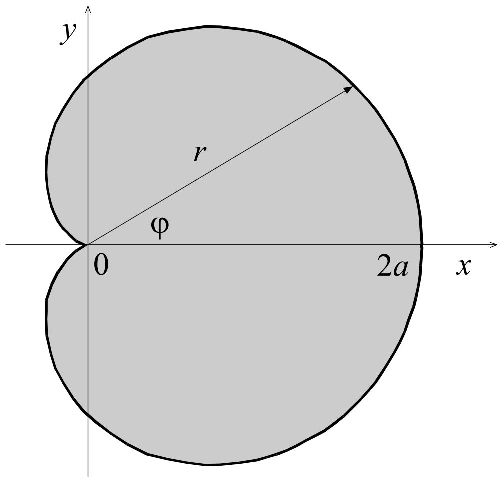
$$P = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[r(\varphi) \right]^2 d\varphi \tag{6}$$



Slika 17.

Primjer 5. a) Izračunajmo površinu lika omeđenog **kardioidom**

$$r = a(1 + \cos\varphi).$$



Slika 18.

Kako je površina iznad i ispod x-osi jednaka, a krivulja je zadana u polarnim koordinatama, prema (6) je ukupna površina koja je omeđena kardioidom jednaka:

$$P = 2\ \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = a^2\left(\int_0^{\pi} d\varphi + \int_0^{\pi} 2\cos\varphi d\varphi + \int_0^{\pi}\cos^2\varphi d\varphi\right) =$$

$$= a^2\left((\varphi + 2\cos\varphi)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi\right) = a^2\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 2\varphi d\varphi\right) = \frac{3}{2}a^2\pi\ ;$$

b) Izračunajmo veći dio površine lika omeđenog kružnicom $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ i pravcem $y = x$ u polarnim koordinatama.

Kružnicu

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

izrazimo u polarnim koordinatama u kojima je:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi:$$

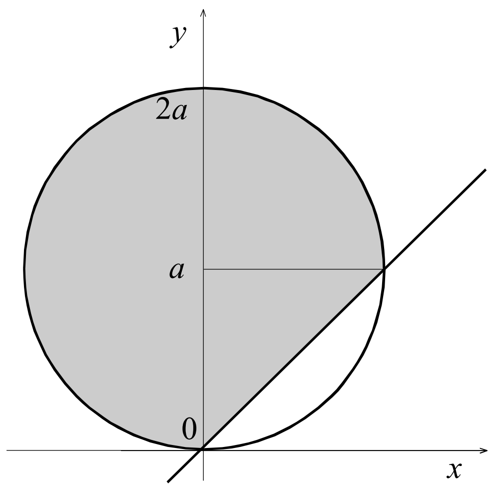
Jer je u polarnim koordinatama $x^2 + y^2 = r^2$, slijedi da jednadžbu zadane kružnice možemo napisati kao

$$r^2 - 2ar\sin\varphi \;\; = 0,$$

odakle je

$$r = 2a\sin\varphi,$$

jednadžba pomaknute kružnice po osi y za a, sa središtem u S(0, a) i radijusom a, tj .tangira os OX u ishodištu.



Slika 19.

Dio ravnine između pravca

$$y = x$$

i kružnice

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2$$

odnosno

$$r = 2a\sin\varphi,$$

nalazi se između polarnih kuteva $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}$ i $\varphi_2 = \pi$, pa je površina koju tražimo prema (6) jednaka:

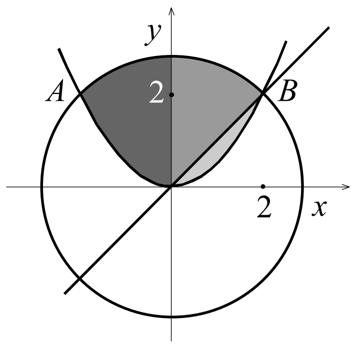
$$P = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\phi_2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 4a^2 \sin^2 \varphi d\varphi = 2a^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi = a^2\left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} =$$

$$= a^2\left[\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\sin 2\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{a^2}{4}(3\pi + 2).$$

Primjer 6. Nađimo manju površinu između

$$x^2 + y^2 = 8 \text{ i}$$
$$x^2 = 2y,$$

koristeći polarne koordinate.



Slika 20.

Presječne točke grafova kružnice $x^2 + y^2 = 8$ i parabole $y = \dfrac{x^2}{2}$ nalazimo rješavanjem sustava te dvije jednadžbe. U tu svrhu uvrstimo x^2 iz jednadžbe parabole u jednadžbu kružnice, slijedi

$$y^2 + 2y - 8 = 0,$$

odakle je $y = 2$, za koji je $x_1 = -2$ i $x_2 = 2$. Pa su presječne točke:

$$A(-2, 2) \quad \text{i} \quad B(2, 2).$$

U polarnim koordinatama je:

$$x^2 + y^2 = 8$$
$$r^2 = 8,$$

pa je jednadžba centralne kružnice radijusa $2\sqrt{2}$ u polarnim koordinatama dana sa

$$r = 2\sqrt{2}.$$

Ako sada i jednadžbu parabolu $x^2 = 2y$ izrazimo u polarnim koordinatama, slijedi da je

$$r^2 \cos^2 \varphi = 2r \sin \varphi ,$$

pa je jednadžba zadane parabole u polarnim koordinatama

$$r = \frac{2\sin\varphi}{\cos^2\varphi} .$$

Površinu područja, koje je smješteno između polarne osi $\varphi = 0$ i $\varphi = \frac{\pi}{4}$, a ograničeno parabolom $r = \frac{2\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$, označimo sa P_1. Površinu područja, koje je smješteno između polarne osi $\varphi = \frac{\pi}{4}$ i $\varphi = \frac{\pi}{2}$, a ograničeno kružnicom $r = 2\sqrt{2}$, označimo sa P_2.Ukupna površina je tada jednaka:

$$P = 2(P_1 + P_2),$$

gdje je

$$P_1 = \frac{1}{2}\int r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi} d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^4\varphi} d\varphi = 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^4\varphi} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\right] =$$

$$= 2\left[\int (1+tg^2\varphi) d(tg\varphi) - tg\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right] = 2\left[tg\varphi + \frac{tg^3\varphi}{3} - tg\varphi\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3},$$

dok je

$$P_2 = \frac{1}{2}\int r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 8 d\varphi = 4(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \pi ,$$

pa je

$$P = 2(\frac{2}{3} + \pi) = 2\pi + \frac{4}{3} .$$

4.1.5 Zadaci za vježbu

1. Izračunajte površinu omeđenu grafom funkcija:

a) $r = a\cos\varphi$, ako je $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$;

b) $r = a\cos 2\varphi$, ako je $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$;

c) $r = a\cos 3\varphi$, ako je $\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}$.

Rješenja:

1. a) $a^2\frac{\pi}{4}$; b) $a^2\frac{\pi}{8}$; c) $a^2\frac{\pi}{12}$.

4.2 Duljina luka krivulje

Problem određivanja duljine luka kružnice i još nekih drugih krivulja, pojavio se još kod Grka, da bi u 17. stoljeću to bio jedan od problema na kome se razvijao diferencijabilni i integralni račun.

4.2.1 Duljina luka u pravokutnim koordinatama

Neka je

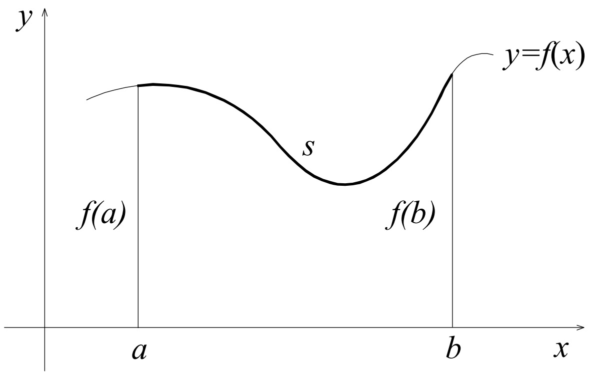
$$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$$

neprekidna funkcija.

Skup svih točaka grafa funkcije f:

$$(x, f(x)),\ x \in [a, b]$$

nazivamo njezinim lukom.



Slika 21.

Podjelimo interval $[a, b]$, $a < b$, na n djelova točkama $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, tako da je

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Točkama $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ na osi x odgovaraju točke na grafu

$$A = T_0, T_1, T_2, \ldots, T_n = B$$

Udaljenost točaka $T_{k-1}(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ i $T_k(x_k, f(x_k))$ je

$$d_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}\,.$$

Suma svih udaljenosti d_k je tada

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

Označimo sa s skup brojeva s_n koje dobivamo za različite izbore točaka $T_0, T_1, T_2, \ldots, T_n$. Ako broj točaka teži prema ∞, tada udaljenosti d_k teže prema nuli i vrijedi sljedeći teorem:

Teorem Neka je $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, koja ima neprekidnu derivaciju u $\langle a, b\rangle$.
Duljina luka s krivulje $y = f(x)$ između točaka A i B s apscisama $x = a$ i $x = b$ $(a < b)$ je broj:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx\,. \tag{7}$$

Dokaz: Udaljenost

$$d_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}\,(x_k - x_{k-1}).$$

Prema Lagrangeovom teoremu

$$\left(\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right) = f'(c_k),\ x_{k-1} < c_k < x_k,$$

pa je

$$d_k = \sqrt{1+\left(f'(c_k)\right)^2}\left(x_k - x_{k-1}\right).$$

Integralna suma

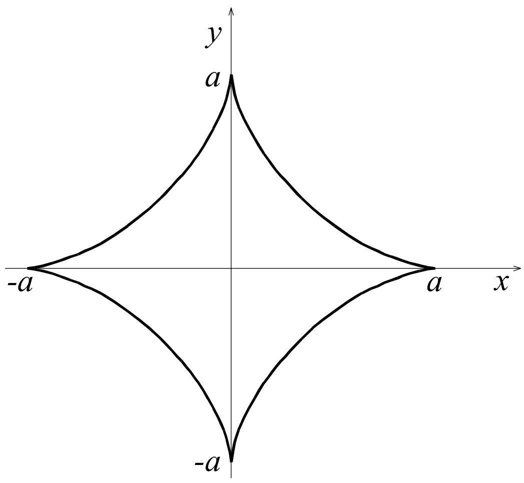
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\left[f'(c_k)\right]^2}\,(x_k - x_{k-1})$$

Limes integralne sume u (?) kada $n \to +\infty$, a $(x_k - x_{k-1}) \to 0$ za svaki $k = 1, 2, \dots, n$, će tada biti integral funkcije $\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$ na $[a, b]$. Slijedi da je:

$$s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx\,.$$

Primjer 7. a) Naći duljinu luka **astroide**

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$



Slika 22.

Iz općeg oblika astroide slijedi njezin eksplicitni oblik:

$$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},$$

odakle je

$$y' = \frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Primjenom formule (7) je

$$\frac{1}{4}s = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx = \int_0^a \sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx = \int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx = a^{\frac{1}{3}} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Bigg|_0^a = \frac{3}{2}a,$$

pa je duljina luka astroide

$$s = 6a.$$

b) Odrediti duljinu luka krivulje zadane eksplicitno:

$$y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}\text{, od } x = 0 \text{ do } x = 4.$$

Derivacija zadane funkcije je:

$$y' = \frac{1 - 2x}{2\sqrt{x - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{1 - x}{x}},$$

pa je primjenom formule (7)

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1 - x}{x}}dx = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Bigg|_0^4 = 4.$$

Primjer 8. Naći duljinu luka s krivulje $y = \arcsin e^{-x}$ od $x = 0$ do $x = 1$

Kako je

$$y' = \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}$$

to je

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{-e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}}dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - e^{-2x} + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}}dx =$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}}=\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}=\left|\begin{array}{l} e^x=t,\ e^x dx=dt \\ x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=e \end{array}\right|=\int_1^e \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)\Big|_1^e=$$

$$=\ln(e+\sqrt{e^2-1})-\ln(1+\sqrt{1^2-1})=\ln(e+\sqrt{e^2-1}).$$

4.2.2 Duljina luka u parametarskim koordinatama

Duljina luka s krivulje zadane u parametarskom obliku:

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

gdje su $x = \varphi(t)$ i $y = \psi(t)$ neprekidno derivabilne funkcije je:

$$s=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt, \tag{8}$$

vrijednosti parametra t_1 i t_2 odgovaraju krajevima luka.

Primjer 9. a) Odredimo duljinu luka krivulje zadane parametarski:

$$\begin{cases} x=t^2 \\ y=\frac{t}{3}\left(t^2-3\right) \end{cases}$$

između točaka presjeka sa osi apscisa.
Za $y = 0$ je:

$$\frac{t}{3}\left(t^2-3\right)=0.$$

Slijedi da su točke presjeka sa osi x

$$t_1 = 0 \text{ i } t_{2,3} = \pm\sqrt{3}.$$

S druge strane je $x' = 2t$ i $y' = t^2 - 1$ pa je

$$s=2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{t^4+2t^2+1}\,dt=2\int_0^{\sqrt{3}} \left(t^2+1\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=4\sqrt{3};$$

b) Duljina luka astroide zadane parametarski:

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$$

Jer je

$$x' = -3\,a\cos^2 t\,\sin t$$
$$y' = 3a\sin^2 t\cos t,$$

a za $x = 0$, $\cos t = 0$, pa je $t = \dfrac{\pi}{2}$, dok za $x = a$ je $\cos t = 1$, pa je $t = 0$, slijedi da je

$$\frac{1}{4}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t\cdot(\sin^2 t + \cos^2 t)}\,dt =$$

$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\,dt = \frac{3}{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt = \frac{3}{2}a\frac{-\cos 2t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4}a\left(-\cos\pi + \cos 0\right) = \frac{3}{2}a\,,$$

pa je duljina luka astroide $s = 6a$.

4.2.3 Zadaci za vježbu

1. Nađite duljinu luka krivulje zadane eksplicitno:

a) $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$, od $x = 3$ do $x = 8$;

b) $y = \ln\sin(x-1)$, između točaka $x_1 = 1 + \dfrac{\pi}{3}$ i $x_2 = 1 + \dfrac{2\pi}{3}$.

2. Nađite duljinu luka krivulje zadane parametarski:

a) $y = \begin{cases} x = \dfrac{t}{3}\left(t^2 - 3\right) \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$ od $t_1 = 0$ do $t_2 = 3$;

b) $y = \begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$.

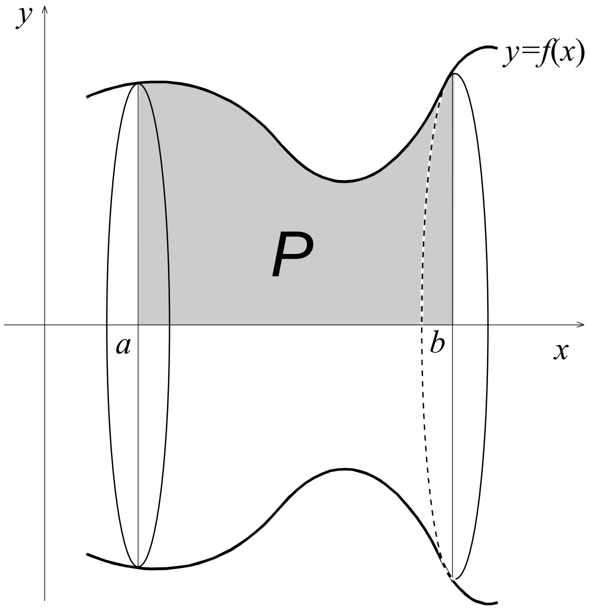
Rješenja:

1. a) $s = 12\dfrac{2}{3}$; b) $s = \ln 3$.

2. a) $s = 12$; b) $s = \dfrac{\pi^3}{3}$.

4.3 Volumen rotacijskog tijela

Neka je f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ neprekinuta nenegativna funkcija. Želimo izračunati volumen rotacionog tijela koje nastaje rotacijom oko x osi površine P omeđene grafom funkcije f, osi x, te pravcima $x = a$ i $x = b$.



Slika 23.

Podijelimo tijelo ravninama okomitom na os x na n tankih dijelova, te svaki dio aproksimiramo tankim valjkom. Ako su dijelovi jako tanki, ta je aproksimacija dobra. Zatim zbrojimo volumene tih valjaka i dobijemo aproksimacije volumena rotacijskog tijela. Aproksimacija je tim bolja što je n veći, tj. što je veći broj dijelova na koje smo podijelili tijelo. Ponovimo opisani postupak korak po korak.

Podijelimo interval $[a, b]$ na n dijelova tako da je

Iz svakog intervala $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ izaberimo po jednu točku $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Volumen tankog valjka visine $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ i radijusa $f(t_i)$ iznosi

$$V_i = [f(t_i)]^2 \, \Delta x_i \, \pi$$

Zbrojimo li dobivene volumene, dobivamo

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} [f(t_i)]^2 \Delta x_i \pi$$

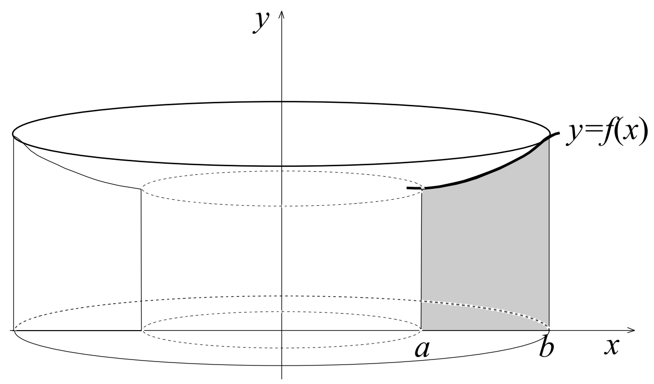
S_n je integralna suma funkcije $g(x) = [f(x)]^2\pi$, pa je

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \pi \int_a^b f(x)^2 dx \, .$$

Dakle, volumen tijela koje nastaje rotacijom oko x - osi površine omeđeno grafom funkcije f, x - osi, te pravcima x = a, x = b jednak je

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \,. \tag{9}$$

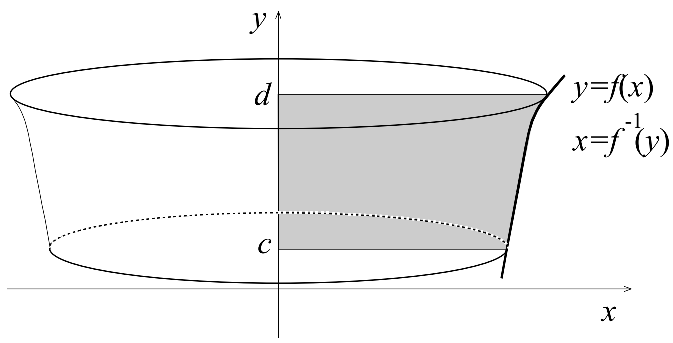
Na sličan način dobivamo i formulu za volumen tijela koje nastaje rotacijom površine P oko y - osi:



Slika 24.

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \tag{10}$$

Ako površina omeđena grafom funkcije $y = f(x)$, pravcem $x = 0$ tj. y - osi, te pravcima $y = c$ i $y = d$ rotira oko y - osi, kao što se vidi na slici 25.,



Slika 25.

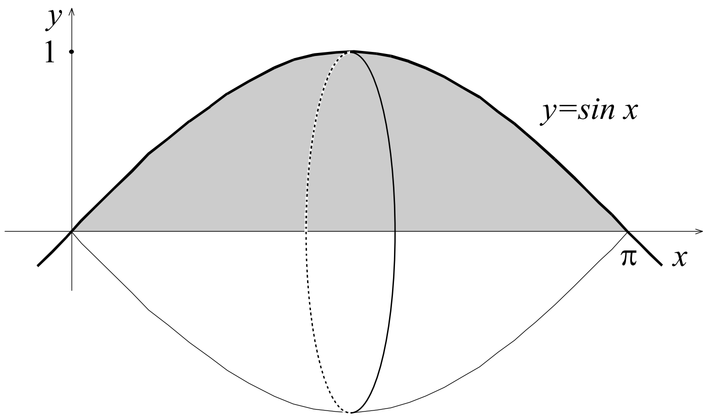
volumen tako nastalog tijela je jednak:

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \left[f^{-1}(y) \right]^2 dy \tag{11}$$

Primjer 10. Izračunajmo volumen tijela koje nastaje rotacijom oko x - osi površine omeđene grafom funkcije

a) $f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$ i $y = 0$

Skicirajmo površinu koja rotira



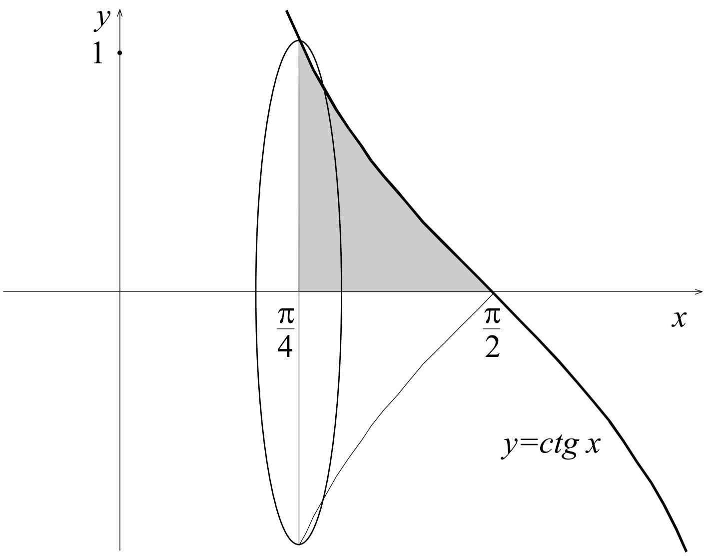
Slika 26.

Prema formuli volumen rotacijskog tijela jednak je

$$V = \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \pi(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

b) $f(x) = \text{ctg}\, x$, te pravcima $x = \frac{\pi}{4}$ i $y = 0$

Skicirajmo površinu koja rotira.



Slika 27.

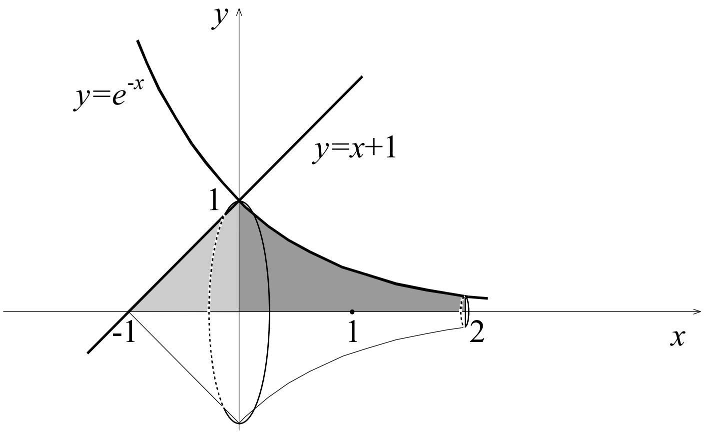
Prema formuli volumen tijela jednak je

$$V=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ctg^2 x dx=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\pi\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2 x}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}dx\right)=\pi(-ctgx-x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\pi(-ctg\frac{\pi}{2}+ctg\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})=\pi-\frac{\pi^4}{4}.$$

c) $f(x) = e^{-x}$, te pravcima $y = x + 1$, $x = 2$ i $y = 0$.

Nacrtajmo površinu koja rotira, a omeđena je sa zadanim krivuljama.



Slika 28.

Volumen tijela koji nastaje rotacijom površine P oko x - osi, a koja se sastoji od dvije površine označene na slici 28.,dobit ćemo kao zbroj volumena dvaju tijela koji nastaju rotacijom tih dviju površina:

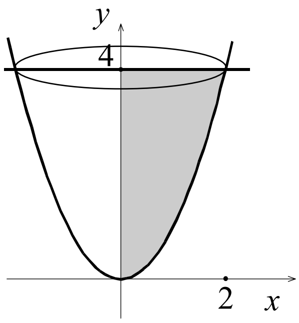
$$V=\pi\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx+\pi\int_{0}^{2}\left(e^{-x}\right)^2dx=\pi\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)dx+\pi\int_{0}^{2}e^{-2x}dx=\pi(\frac{x^3}{3}+x^2+x)\Big|_{-1}^{0}-\frac{\pi}{2}e^{-2x}\Big|_{0}^{2}=$$

$$=\pi(\frac{1}{3}-1+1)-\frac{\pi}{2}(e^{-4}-1)=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}e^{-4}=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}e^{-4}$$

Primjer 11. Izračunajmo volumen tijela koje nastaje rotacijom oko y - osi površine omeđene grafom funkcije

a) $f(x) = x^2$ i pravcima $x = 0$ i $y = 4$

Skicirajmo površinu koja rotira



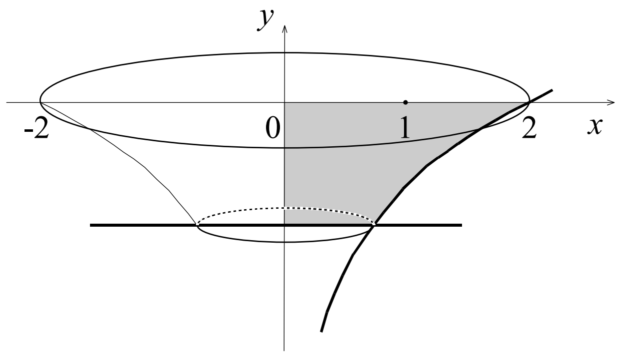
Slika 29.

Inverzna funkcija $y = x^2$, $x > 0$ je $x = \sqrt{y}$, pa prema formuli (11) imamo

$$V = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 y dy = \pi \frac{y^2}{2} \Big|_0^4 = 8\pi$$

b) $f(x) = \ln \frac{x}{2}$, te pravcima $x = 0$, $y = -1$ i $y = 0$.

Nacrtajmo površinu koja rotira



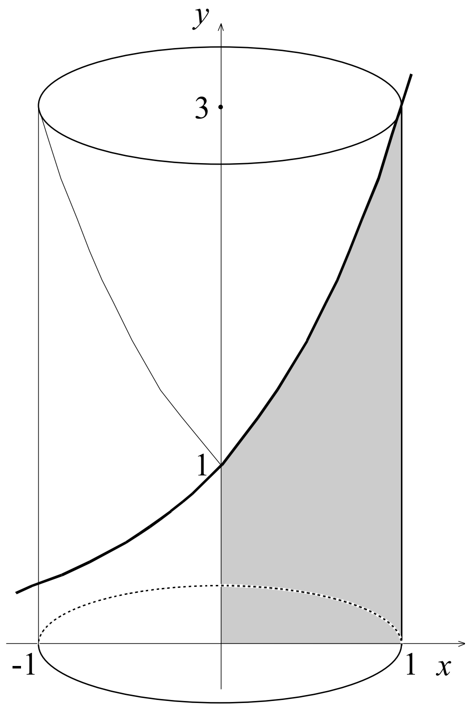
Slika 30.

Inverzna funkcija funkcije $f(x) = \ln \frac{x}{2}$ je $x = 2e^y$. Prema formuli (11) volumen tijela je

$$V = \pi \int_{-1}^{0} (2e^y)^2 dy = 4\pi \int_{-1}^{0} e^{2y} dy = 4\pi \frac{e^{2y}}{2} \Big|_{-1}^{0} = 2\pi\left(e^0 - e^{-2}\right) = 2\pi\left(1 - e^{-2}\right).$$

c) $f(x) = 3^x$, te pravcima $x = 0$, $x = 1$ i $y = 0$.

Skicirajmo površinu



Slika 31.

Prema formuli (10) imamo da je

$$V = 2\pi\int_0^1 x3^x dx = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = 3^x dx, v = \int 3^x dx = \dfrac{3^x}{\ln 3} \end{matrix} \right| = 2\pi\left(\frac{3^x}{\ln 3}x\Big|_0^1 - \frac{1}{\ln 3}\int_0^1 3^x dx \right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{3^x}{\ln 3}x\Big|_0^1 - \frac{1}{\ln^2 3}3^x\Big|_0^1 \right) = 2\pi\left(\frac{3}{\ln 3} - \frac{3}{\ln^2 3} + \frac{1}{\ln^2 3} \right) = \frac{2\pi}{\ln 3}\left(3 - \frac{2}{\ln 3} \right).$$

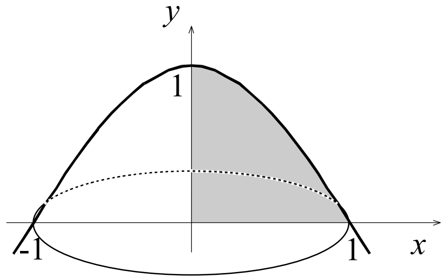
Prema formuli (11) imamo da je taj isti volumen jednak:

$$V = \pi\int_0^3 1^2 dx - \pi\frac{1}{\ln^2 3}\int_1^3 \ln^2 y dy .$$

Jednostavnim računom ćemo dobiti isti rezultat.

d) $f(x) = \cos\dfrac{\pi x}{2}$, te koordinatnim osima.

Osnovni period funkcije $f(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$ je $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$, pa će površina koja rotira biti kao na sljedećoj slici:



Slika 32.

Slijedi da je volumen tijela koji nastaje rotacijom površine P oko y - osi, prema (10) jednak:

$$V = 2\pi\int_0^1 x\cos\frac{\pi x}{2}dx = \left|\begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \frac{\cos\pi x}{2}dx, v = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\end{array}\right| = 2\pi\left(\frac{2}{\pi}x\sin\frac{\pi x}{2}\Big|_0^1 - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2}dx\right) =$$

$$= 4x\sin\frac{\pi x}{2}\Big|_0^1 + \frac{8}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\Big|_0^1 = 4 - \frac{8}{\pi}.$$

e) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{4-3x}$ te osi x

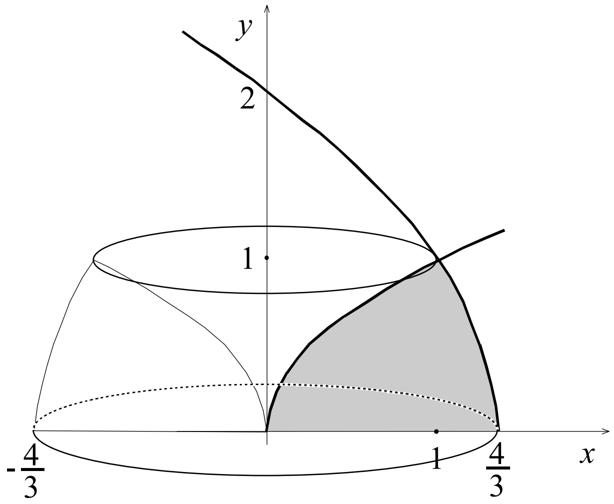
Odredimo domene funkcije, sjecište grafova, te nacrtajmo površinu koja rotira. Lako se vidi da je područje definicije $D_f = [0, +\infty\rangle$ i $D_g = \langle -\infty, \frac{4}{3}]$.

Budući da apscisa sjecišta grafa krivulja zadovoljava jednadžbu

$$\sqrt{x} = \sqrt{4-3x}$$

kvadriranjem dobivamo $x = 4 - 3x$

tj. apscisa sjecišta je $x = 1$. Ordinata sjecišta je $f(1) = 1$



Slika 33.

Pomoću formule (10) dobivamo da je volumen tijela koji nastaje rotacijom površine P oko y - osi

$$V = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{x}dx + 2\pi\int_0^{\frac{4}{3}} x\sqrt{4-3x}dx$$

Drugi integral riješit ćemo supstitucijom $4 - 3x = t$, $-3dx =$ t. Prema tome je

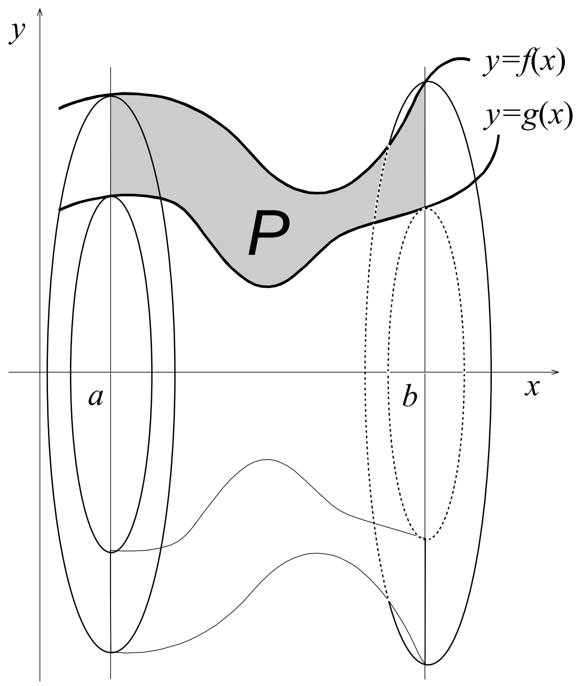
$$V = 2\pi\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx - \frac{2\pi}{3}\int_1^0 (\frac{4}{3}-\frac{t}{3})\sqrt{t}dt = 2\pi\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx - \frac{8\pi}{9}\int_1^0 t^{\frac{1}{2}}dt + \frac{2\pi}{9}\int_1^0 t^{\frac{3}{2}}dt =$$

$$= \frac{4\pi}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 - \frac{16\pi}{27}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^0 + \frac{4\pi}{45}t^{\frac{5}{2}}\Big|_1^0 = \frac{4\pi}{5} + \frac{16\pi}{27} - \frac{4\pi}{45} = \frac{176}{135}\pi .$$

Isti rezultat smo mogli dobiti prema (11) koristeći inverzne funkcije $x = y^2$ i $x = \frac{1}{3}$ (4 – y^2). Tada je:

$$V = \pi\int_0^1 \left[\frac{1}{9}\left(4-y^2\right)^2 - y^2\right]dy .$$

Neka su funkcije f i g neprekinute na $[a, b]$ i $f(x) \geq g(x)$ za svaki $x \in [a, b]$.



Slika 34.

Budući da površinu P dobivamo oduzimanjem površine ispod grafa funkcije g od površine ispod grafa funkcije f, isto je i s volumenima rotacijskih tijela koja se dobiju rotacijom tih površina. Prema tome, ako površina P rotira oko x - osi volumen nastalog tijela je

$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)dx \qquad (12)$$

Ako površina P rotira oko y - osi, onda je volumen tijela

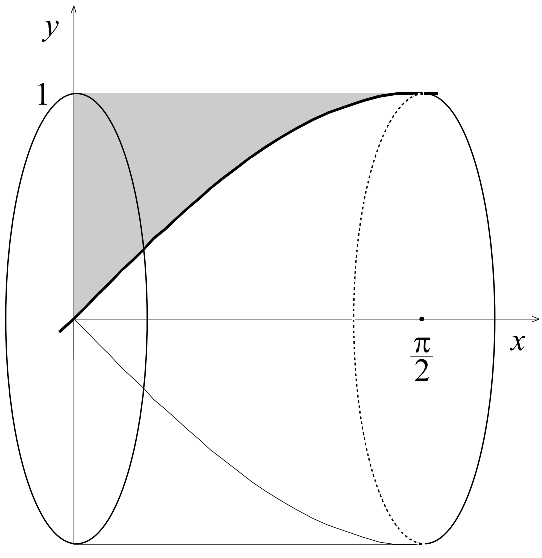
$$V = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))dx\,. \qquad (13)$$

Primjer 12. Odredimo volumen tijela koje nastaje rotacijom površine omeđene grafom funkcije $f(x) = \sin x$ na $[0, \frac{\pi}{2}]$, te pravcima $y = 1$ i $x = 0$

a) oko x – osi

b) oko y - osi

a) Skicirajmo površinu koja rotira oko x - osi

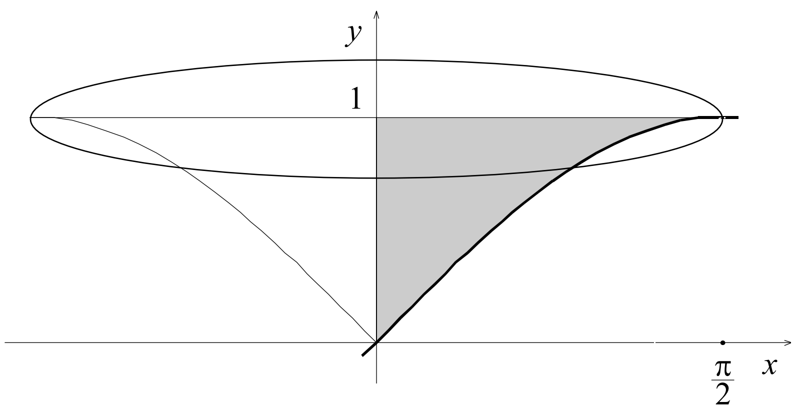


Slika 35.

Volumen tijela koje nastaje rotacijom površine oko x - osi prema (12) je:

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4};$$

b) Skicirajmo površinu koja rotira oko y - osi:



Slika 36.

Volumen rotacijskog tijela premna (13) je:

$$V = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1-\sin x)dx = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx - 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx .$$

Posljednji integral riješit ćemo metodom parcijalne integracije tako da stavimo

$$u = x,\ dv = \sin xdx$$
$$du = dx,\ v = -\cos x$$

Prema tome

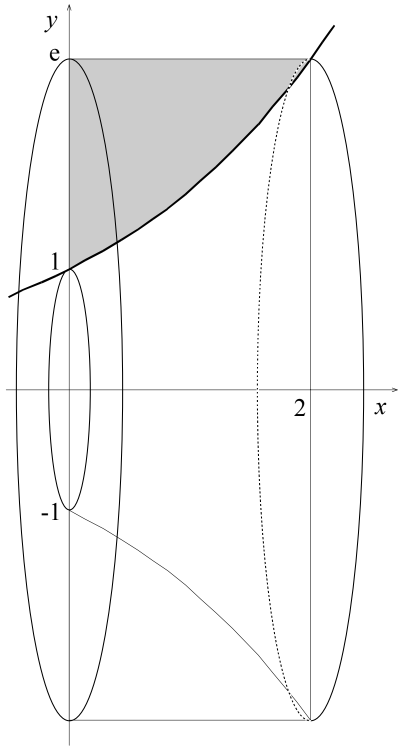
$$V = \pi x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\pi(-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx) = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi(0+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi .$$

Primjer 13. Izračunajmo volumen tijela koje nastaje rotacijom površine omeđene grafom funkcije $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$, te pravcima $x = 0$ i $y = e$.

a) oko x – osi

b) oko y - osi

a) Površina koja rotira oko x - osi prikazana je na sljedećoj slici:



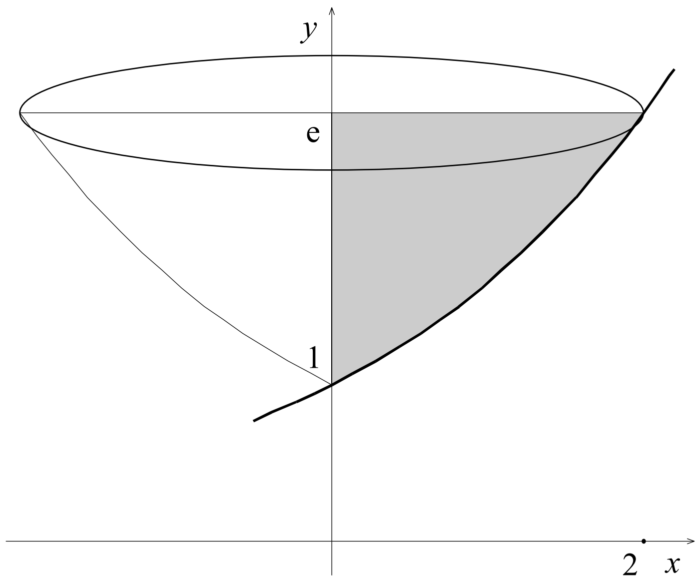
Slika 37.

Prema (12) volumen rotacijskog tijela je:

$$V = \pi \int_0^2 \left[e^2 - (e^{\frac{x}{2}})^2 \right] dx = \pi \int_0^2 (e^2 - e^x) dx = \pi e^2 \int_0^2 dx - \pi \int_0^2 e^x dx =$$

$$= \pi e^2 x \Big|_0^2 - \pi e^x \Big|_0^2 = \pi(2e^2 - e^2 + 1) = \pi(e^2 + 1) .$$

b) Površina koja rotira oko y - osi prikazana je na sljedećoj slici:



Slika 38.

Kako je $f^{-1}(y) = 2\ln y$, slijedi da je

$$V = \pi \int_1^e (2\ln y)^2 dy = 4\pi \int_1^e \ln^2 y dy .$$

Kako smo posljednji integral riješili u Poglavlju 1. Primjeru 10. a), to je

$$V = 4\pi(y\ln^2 y - 2y\ln y + 2y)\Big|_1^e = 4\pi(e - 0 - 2e + 0 + 2e - 2) = 4\pi(e-2) .$$

Primjer 14. Izračunajmo volumen tijela nastalog rotacijom

$$y = \sqrt{\cos x}$$

oko x-osi, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.

Prema (9) je

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y^2 dx = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \pi(\sin x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\pi .$$

4.3.1 Zadaci za vježbu

1. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom oko x-osi površine omeđene grafom funkcije:

a) $f(x) = 4x^2$, te pravcima $x = 0$ i $y = 16$;

b) $f(x) = x^2$ i grafom funkcije $g(x) = 4x - x^2$;

c) $f(x) = \sin 2x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ i pravcem $y = 0$.

2. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom površine omeđene krivuljom

$4x^2 + 9y^2 = 36$:

a) oko x-osi;

b) oko y-osi.

3. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom oko y-osi površine omeđene krivuljama $x = 9 - y^2$, $x - y - 7 = 0$ i $x = 0$.

Rješenja:

1. a) $V = \dfrac{512\pi}{5}$; b) $V = \dfrac{32\pi}{3}$; c) $V = \dfrac{\pi^2}{4}$.

2. a) $V = 16\pi$; b) $V = 24\pi$.

3. $V = \dfrac{963\pi}{5}$.