

prof. dr. sc. Miljenko Crnjac

**GOSPODARSKA MATEMATIKA**  
riješeni zadaci  
**I DIO**



**OSIJEK, 1997.**

## PREĐGOVOR

Ova zbirka obuhvaća dio gradiva koji se u okviru predmeta Matematika predaje na prvoj godini studija Ekonomskog fakulteta. Međutim, njome se mogu koristiti studenti drugih fakulteta, inženjeri, fizičari, kemičari, biolozi, učenci srednjih škola i svi oni koji žele upoznati dio matematike u opsegu i na razini izloženoj u ovoj zbirci.

Ovom prilikom se zahvaljujem mojim postdiplomantima Gordani Babić i Darku Dukiću, te studentima Dominiki Crnjac i Martini Crnjac, koji su s velikim entuzijazmom pomogli u rješavanju zadataka i izradi kompjutorskih programa.

Veliko hvala studentima Ljubi Rašiću i Kristijanu Cimeru na priređivanju rukopisa za tisak.

Autor će biti zahvalan svim čitateljima na njihovim prijedlozima u svezi s eventualnim greškama, nepreciznostima ili nedostacima koje će koristiti za eventualno novo izdanje.

Zahvaljujem svima koji su izravno ili na drugi način pomogli da se ova knjiga tiska i bude što bolja.

Miljenko Crnjac

## 1. RAZMJERI

1.01. Treba načiniti prošireni razmjer iz jednostavnih razmjera

$$\begin{aligned} 6 : 2 &= 15 : 5 \\ 3 : 1 &= 9 : 3 \\ 12 : 4 &= 18 : 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Rješenje: } 6 \cdot 3 \cdot 12 : 2 \cdot 1 \cdot 4 &= 15 \cdot 9 \cdot 18 : 5 \cdot 3 \cdot 6 \\ 216 : 8 &= 2430 : 90 \end{aligned}$$

1.02. Treba načiniti prošireni razmjer iz sljedećih podataka:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ a : b &= 2 : 3 \\ b : c &= 4 : 5 \\ c : d &= 6 : 7 \end{aligned}$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} 1 : b &= 2 : 3 \\ b &= \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} : c &= 4 : 5 \\ c &= \frac{15}{8} \\ \frac{15}{8} : d &= 6 : 7 \end{aligned}$$

Dobivene vrijednosti možemo koristiti za prošireni razmjer

$$\begin{aligned} a : b : c : d &= 1 : \frac{3}{2} : \frac{15}{8} : \frac{35}{16} \quad \text{ili} \\ a : b : c : d &= 16 : 24 : 30 : 35 \end{aligned}$$

- 1.03. Koliko stoji roba A ako se ostale robe B, C, D, međusobno odnose po vrijednosti ovim redoslijedom A : B = 3 : 4, C : B = 5 : 7, D : C = 1 : 2, a roba D stoji 50 NJ\* .

Rješenje:

Polazimo od poznate vrijednosti D = 50

$$\begin{aligned} 50 : C = 1 : 2 & \quad C : B = 5 : 7 & \quad A : 140 = 3 : 4 \\ C = 100 & \quad 100 : B = 5 : 7 & \quad A = 105 \\ & \quad B = 140 & \end{aligned}$$

Roba A stoji 105 NJ.

- 1.04. Vrijednosti četiri vrste robe međusobno se odnose proporcionalno. Nađite međusobni odnos ako je vrijednost prve vrste 1/4 NJ, suma vrijednosti prve i treće vrste jednaka 19/28, dok je suma vrijednosti druge i četvrte jednaka 9/4 NJ.

Rješenje:

Podimo od osnovne proporcije

$$A : B = C : D$$

Iz zadatka je poznata vrijednost prve vrste  $A = 1/4$ . Nadalje imamo da je

$$A + C = \frac{19}{28} \text{ uvrstimo vrijednost za A}$$

$$\frac{1}{4} + C = \frac{19}{28}$$

$$C = \frac{3}{7}$$

Do sada su poznata dva člana razmjera. Treći dobijemo iz

$$B + D = \frac{9}{4}$$

Odavde dobijemo vrijednost  $B = \frac{9}{4} - D$  koju uvrstimo u osnovnu proporciju

$$A : B = C : D$$

$$\frac{1}{4} : \left( \frac{9}{4} - D \right) = \frac{3}{7} : D$$

Iz svojstava razmjera dobijemo

$$\frac{1}{4} \cdot D = \frac{3}{7} \left( \frac{9}{4} - D \right)$$

$$D = \frac{27}{28} - \frac{3}{7} D, \text{ a odavde}$$

$$D = \frac{27}{19}$$

Iz  $B = \frac{9}{4} - D$  supstituirajući vrijednost za D dobivamo

$$B = \frac{63}{76}$$

Dobivene vrijednosti postavimo u razmjer

$$\frac{1}{4} : \frac{63}{76} = \frac{3}{7} : \frac{27}{19} / \cdot 7 \cdot 19 \cdot 76$$

$$2527 : 8379 = 4332 : 14364$$

- 1.05. Kojom će se svotom teretiti pojedini proizvod za utrošak električne energije ako je izrađeno vrste A = 2000 kom., B = 3000 kom., C = 5000 kom., a račun za sveukupnu struju iznosi 18000 NJ.

Rješenje:

Budući da su pojedini proizvodi proizvedeni iz istog izvora električne energije, to oni stoje u međusobnoj zavisnosti. Zbog toga imamo

$$A : B : C = 2000 : 3000 : 5000$$

$$A : B : C = 2 : 3 : 5$$

Primjenimo li pravilo imamo

$$(A + B + C) : (2 + 3 + 5) = A : 2$$

$$= B : 3$$

$$= C : 5$$

Dodajemo da je  $A + B + C = 18000$  onda prošireni razmjjer izgleda ovako:

$$18000 : 10 = A : 2$$

$$= B : 3$$

$$= C : 5$$

Odavde se dobiju pojedini djelovi  $A = 3600$ ,  $B = 5400$  i  $C = 9000$ .

1.06. Kamate od 9000 NJ treba razdijeliti među 4 ulagača i to proporcionalno njihovim ulozima. Ulagáč A je uložio 8000 NJ, B 7000 NJ, C 15000 NJ i D 20000 NJ. Koliko pripada svakom ulagaču?

Rješenje:

$$A : B : C : D = 8000 : 7000 : 15000 : 20000$$

$$A : B : C : D = 8 : 7 : 15 : 20$$

Nadalje imamo da je  $A + B + C + D = 9000$  i da je  $8+7+15+20 = 50$ , pa iz razmjera

$$9000 : 50 = A : 8$$

$$= D : 20$$

dobivamo da je  $A = 1440$ ,  $B = 1260$ ,  $C = 2700$  i  $D = 3600$ .

Primjedba. U praksi se radi ovako: nađe se faktor proporcionalnosti tako da se svota podijeli s diobenim dijelovima, i onda se taj faktor proporcionalnosti množi svakim diobenim dijelom. U našem slučaju to je  $9000 : 50 = 180$ . Pojedini ulagač bi dobio

$$A = 180 \cdot 8 = 1440$$

$$B = 180 \cdot 7 = 1260$$

$$C = 180 \cdot 15 = 2700$$

$$D = 180 \cdot 20 = 3600$$

1.07. Među 5 članova treba razdijeliti 15800 NJ tako da im se dijelovi odnose kao

$$2 : 5 : 4 : 8 : 6.$$

Rješenje:

Označimo li članove sa A, B, C, D, E imamo

$$A : B : C : D : E = 2 : 5 : 4 : 8 : 6$$

$$k = 15800 : 25 = 632 \quad (2+5+4+8+6) = 25$$

članovi dobivaju

$$A = 632 \cdot 2 = 1264$$

$$B = 632 \cdot 5 = 3160$$

$$C = 632 \cdot 4 = 2528$$

$$D = 632 \cdot 8 = 5056$$

$$E = 632 \cdot 6 = 3792$$

$$\underline{\hspace{1cm}} \\ 15800$$

Primjedba. Dioba koja se vrši uz određene uvjete prosta je ako je uvjet samo jedan, dok je uz dva ili više uvjeta dioba složena. Moramo li razdijeliti neku količinu, iznos ili svotu S na više dijelova tako da se

neka su  $x, y, z, \dots$  koje su međusobno proporcionalne, možemo ih onda napisati u obliku

$$x = ka, \quad y = kb, \quad z = kc, \dots$$

Količina koju dijelimo upravo je zbroj diobenih dijelova, pa je stoga

$$x + y + z = S$$

Uvrstimo li gornje relacije u ovu jednažbu imamo

$$ka + kb + kc = S$$

$$k(a + b + c) = S$$

$$k = \frac{S}{a + b + c}$$

Dobivši tako faktor proporcionalnosti, uvrstimo ga u vrijednosti pojedinih diobenih dijelova te dobivamo:

$$x = ka = \frac{S}{a + b + c} \cdot a$$

$$y = kb = \frac{S}{a + b + c} \cdot b$$

$$z = kc = \frac{S}{a + b + c} \cdot c$$

- 1.08. Zbog nerentabilnog poslovanja jedno se dioničko društvo moralo likvidirati. Njegova imovina u času likvidacije iznosila je 5 836 415,65 NJ i ta se svota treba razdijeliti na 5 vjerovnika u omjeru visine njihovih potraživanja. Vjerovnik A potražuje 8 640 000 NJ, B potražuje 6 386 422 NJ, C sumu od 4 000 000 NJ, D traži 2 563 140 NJ i E potražuje 620 965 NJ.

Rješenje:

$$5\,836\,415.65$$

$$k = \frac{8\,640\,000 + 6\,386\,422 + 4\,000\,000 + 2\,563\,140 + 620\,965}{5\,836\,415.65}$$

$$k = 0.262\,777$$

To znači da će svaki vjerovnik dobiti

$$\begin{array}{l} A = 8\,640\,000 \cdot 0.262\,777 = 2\,270\,393.28 \\ B = 6\,386\,422 \cdot 0.262\,777 = 1\,687\,204.81 \\ C = 4\,000\,000 \cdot 0.262\,777 = 1\,051\,108 \\ D = 2\,563\,140 \cdot 0.262\,777 = 673\,534.24 \\ E = 620\,965 \cdot 0.262\,777 = 163\,175.32 \\ \hline 5\,836\,415.65 \end{array}$$

- 1.09. Požar je djelomično uništio 4 skladišta u kojima je bila roba. U prvom je bilo robe u vrijednosti od 1 200 000 NJ, a izgorjelo je robe za 400 000 NJ, u drugom je bilo robe za 1 500 000 NJ, a šteta iznosi 900 000 NJ, u trećem je je bilo robe za 1 400 000 NJ, a požar je uništio polovicu vrijednosti, u četvrtom je bilo robe za 1 000 000 NJ, a izgorjelo je za 800 000 NJ. Osiguravajući zavod platio je na ime štete svega 2 343 995 NJ jer je ustanovljeno da osiguranje od požara nije bilo najbolje izvedeno. Koliko je otpalo na svako skladište ako je odlučeno da se dobivena osigurana svota razdijeli proporcionalno dijelu robe koja je u pojedinim skladištima uništena.

Rješenje:

Da bi se ustanovilo koji se dio robe za pojedina skladišta izgubio u požaru, moraju se štete svakog skladišta podijeliti prijašnjom vrijednosti robe.

Imamo ove proporcije:

Obilježimo li skladišta A, B, C i D dobivamo

$$\frac{400\,000}{1\,200\,000} \quad \frac{900\,000}{1\,500\,000} \quad \frac{700\,000}{1\,400\,000} \quad \frac{800\,000}{1\,000\,000}$$

$$A : B : C : D = \frac{1}{3} : \frac{1}{5} : \frac{1}{2} : \frac{4}{5} / \text{Množeno sa } 30$$

$$A : B : C : D = 10 : 18 : 15 : 24$$

Koeficijent (faktor) proporcionalnosti je

$$k = \frac{2 \ 343 \ 995}{67} = 34 \ 985$$

Pojedini dijelovi

A	=	34 985 · 10 =	349 850
B	=	34 985 · 18 =	629 730
C	=	34 985 · 15 =	524 775
D	=	34 985 · 24 =	839 640
			<hr/>
			2 343 995

1.10. Dvije grupe djelatnika zaradile su 96 875 NJ. Sumu treba razdijeliti upravno razmjerno uloženoj količini rada u visini satnice. Prva grupa radila je 20 dana sa 15 djelatnika po 8 sati dnevno, dok je druga grupa radila 10 dana sa 30 djelatnika po 6 sati dnevno, a satnica djelatnika druge grupe veća je za 25% od satnice prve grupe.

Rješenje:

Pojedine veličine prve (A) grupe obilježimo sa  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , a druge (B) grupe sa  $b_1, b_2, b_3, b_4$ . Imamo

$$a_1 : b_1 = 20 : 10$$

$$a_2 : b_2 = 15 : 30$$

$$a_3 : b_3 = 8 : 6$$

$$a_4 : b_4 = 1 : 1.25$$

$$\begin{array}{l} a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 : b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 = 20 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 1 : 10 \cdot 30 \cdot 6 \cdot 1.25 \\ A \qquad \qquad \qquad : \qquad \qquad \qquad B \\ \qquad \qquad \qquad = 2400 : 2250 \end{array}$$

$$A : B = 16 : 15$$

Oдавде se lako izračuna k, koji se dobije iz

$$\begin{array}{r} \text{Grupa A dobije } 3125 \cdot 16 = 50 \ 000 \\ \text{Grupa B dobije } 3125 \cdot 15 = 46 \ 875 \\ \hline 96 \ 875 \end{array}$$

1.11. Nagradu od 2666.11 treba razdijeliti među dva člana, ali tako da bude upravno razmjerna s njihovom starošću, a obrnuto razmjerna s osobnim dohodcima. Koliko će dobiti svaki ako prvi ima 28 godina i mjesečni dohodak od 840 NJ, a drugi 40 godina i osobni dohodak 680 NJ mjesečno?

Rješenje:

Prvi član

$$x_1 = k \cdot \frac{a}{p} = k \cdot \frac{28}{840} = 0.0333 k$$

$$x_2 = k \cdot \frac{b}{q} = k \cdot \frac{40}{680} = 0.0588 k$$

$$x_1 + x_2 = (0.0333 + 0.0588) \cdot k$$

$$2666.11 = 0.0921 k$$

$$k = \frac{2666.11}{0.0921} = 28 \ 947.99$$

Prvi dobije

$$x_1 = 28 \ 947.99 \cdot 0.0333 = 963.97$$

$$\begin{array}{r} x_2 = 28 \ 947.99 \cdot 0.0588 = 1702.14 \\ \hline 2666.11 \end{array}$$

1.12. Treba razdijeliti trošak za elektrifikaciju triju sela u iznosu 12 864 384 NJ tako da svako selo podmiruje troškove upravno razmjerno broju odraslih stanovnika, a obrnuto razmjerno količini radnih sati što su dali

odraslih stanovnika i dalo je 3200 radnih sati, C ima 360 odraslih stanovnika i dalo je 1600 radnih sati.

Rješenje:

$$\begin{aligned} A : B : C &= 480 : 560 : 360 / \text{Kratimo sa 40} \\ &= \frac{1}{2400} : \frac{1}{3200} : \frac{1}{1600} / : 32 \cdot 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A : B : C &= 12 : 14 : 9 \\ &= 32 : 24 : 48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A : B : C &= 12 \cdot 32 : 14 \cdot 24 : 9 \cdot 48 / : 16 \\ A : B : C &= 24 : 21 : 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A + B + C) : (24 + 21 + 27) &= A : 24 \\ &= B : 21 \\ &= C : 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12\ 864\ 384 : 72 &= A : 24 \\ &= B : 21 \\ &= C : 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{12\ 864\ 384 \cdot 24}{72} = \frac{12\ 864\ 384}{3} = 4\ 288\ 128 \\ B &= \frac{12\ 864\ 384 \cdot 21}{72} = \frac{90\ 050\ 688}{24} = 3\ 752\ 112 \\ C &= \frac{12\ 864\ 384 \cdot 27}{72} = \frac{38\ 593\ 152}{8} = 4\ 824\ 144 \\ &= 12\ 864\ 384 \end{aligned}$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} A : B : C &= 3 : 2 : 1 \\ A : B : C &= 8 : 4 : 3 \\ A : B : C &= \frac{1}{24} : \frac{1}{28} : \frac{1}{15} \end{aligned}$$

$$A : B : C = 3 \cdot 8 \cdot \frac{1}{24} : 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{28} : 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{15}$$

$$A : B : C = 1 : \frac{2}{7} : \frac{1}{5} / : 35$$

$$\begin{aligned} A : B : C &= 35 : 10 : 7 \\ 13\ 416 : 52 &= 258 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 258 \cdot 35 = 9030 \\ B &= 258 \cdot 10 = 2580 \\ C &= 258 \cdot 7 = 1806 \\ &= 13\ 416 \end{aligned}$$

1.14. Za 25 kg šećera plaćeno je 14 500 NJ koliko bi se platilo za 75 kg.

Rješenje:

a) Riješimo zaključivanjem na jedinicu mase:

$$\begin{aligned} \text{Za 1 kg plaća se } 14500 : 25 &= 580 \text{ NJ, a za 75 kg platiće se} \\ 75 \cdot 580 &= 43500 \text{ NJ.} \end{aligned}$$

b) Zaključivanjem uspoređujući:

Ako se broj kilograma povećao 3 puta (75 : 25), onada se i broj NJ mora povećati 3 puta, tj.

$$14500 \cdot 3 = 43500 \text{ NJ}$$

c) pomoću sheme, koju nazivamo pravilo trojno:

1.13. Razdijelite utrošak električne energije za mjesec spranji i kolovoz među tri stanara, i to upavno razmjerno broju prostorija u stanu, a obrnuto razmjerno vremenu provedenom na godišnjem odmoru. Račun za električnu energiju iznosi 13 416 NJ. Stanar A ima 3 prostorije i 8 članova, a na odmoru je bio 24 dana, stanar B ima 2 prostorije i 4 člana i

25 kg  
75 kg



14500 NJ  
x NJ



Veličine su upavno razmjerne, pa pa strelice imaju isti smjer. Slijedeći smjer strelica imamo razmjer:

$$x : 14500 = 75 : 25 \rightarrow x = 43500 \text{ NJ}$$

1.15. Tri djelatnika moraju završiti izvjestan posao za 8 dana. Koliko će dana raditi na istom poslu 12 djelatnika, uz pretpostavku da su uvjeti posla jednaki?

Rješenje:

a) Zaključivanjem na jedinicu:

1 djelatnik bi morao raditi tri puta dulje:  $3 \cdot 8 = 24$  dana, a 12 djelatnika raditi će 12 puta kraće:  $24 : 12 = 2$  dana.

b) Zaključivanjem uspoređujući:

Broj djelatnika povećao se 4 puta ( $12 : 3$ ), pa će i posao trajati 4 puta kraće:  $8 : 4 = 2$  dana.

c) Pomoću sheme pravila trojnog:

3 djelatnika	↓	8 dana	↑
12 djelatnika	↓	x dana	↑

Za obrnuto razmjernu veličine strelice se postavljaju u suprotnom smjeru, pa slijedeći smjer strelica dolazimo do razmjera:

$$x : 8 = 3 : 12 \rightarrow x = 2 \text{ dana}$$

1.16. Osmam djelatnika bi moglo obaviti posao za 24 dana. Međutim, nakon 4

Rješenje:

8 djelatnika radilo je samo 4 dana.

Da su nastavili sa radom u kompletnom sastavu morali bi raditi još 20 dana, ali kako su 3 djelatnika otišla, ostalo ih je samo 5:

8 djelatnika	↓	20 dana	↑
5 djelatnika	↓	x dana	↑

$$x : 20 = 8 : 5 \rightarrow x = 32 \text{ dana}$$

Preostalih 5 djelatnika bi radilo još 32 dana. Ako na 32 dana dodamo i ona 4 dana što su odradila 8 djelatnika bit će potrebno ukupno  $32 + 4 = 36$  dana.

Provjera:

Da je radio samo 1 djelatnik, posao bi trajao  $8 \cdot 24 = 192$  dana. Taj posao od 192 dana obavljao se ovako:

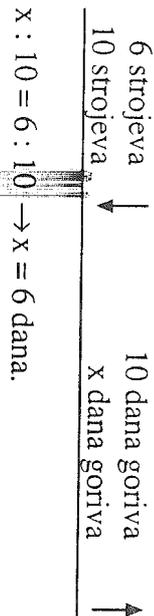
$$\begin{array}{r} \text{a) } 8 \text{ djelatnika za } 4 \text{ dana} \\ \text{b) } 5 \text{ djelatnika za } 32 \text{ dana} \\ \hline \text{Ukupno } 192 \text{ dana.} \end{array}$$

1.17. Za melioraciju zemjišta osigurano je za 6 strojeva goriva za 15 dana. Poslije 5 dana došla su još 4 stroja. Za koliko će dana biti goriva, uz uvjet da su strojevi jednake potrošnje?

Rješenje:

6 strojeva radilo je samo 5 dana.

Da su nastavili s radom, onda bi bez primova, imali posla još deset dana, ali kako su došla još 4 stroja, bilo ih je ukupno 10, a gorivo će trajati:



Prije toga gorivo je trajalo 5 dana + 6 dana nakon promjene = 11 dana.

Provjera:

Da radi samo 1 stroj, bilo bi goriva za  $15 \cdot 6 = 90$  dana.

Ekipa od 6 strojeva potrošila je goriva za  $6 \cdot 5 = 30$  dana.

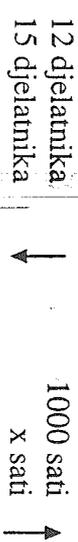
Ekipa od 10 strojeva potrošila je goriva za  $10 \cdot 6 = 60$  dana.

Ukupno je bilo  $30 + 60 = 90$  dana.

- 1.18. 12 djelatnika može obaviti posao za 1500 sati. Nakon 500 sati rada dođu još 3 djelatnika. Koliko će nakon ove promjene trajati posao, uz pretpostavku da su svi djelatnici jednakog učinka.

Rješenje:

12 djelatnika nakon 500 sati rada imalo bi, da nije bilo promjena još 1000 sati posla, onda bi za 15 djelatnika bilo posla:



$$x : 1000 = 12 : 15 \rightarrow x = 800 \text{ sati.}$$

Prema tome, posao će biti obavljen za  $(800 + 500)$  1300 sati.

Provjera:

Jedan djelatnik ima posla  $1500 : 12 = 18000$  sati

12 djelatnika je radilo  $12 \cdot 500 = 6000$  sati

- 1.19. A i B mogu završiti neki posao, radeći zajedno za 8 dana. Poslije 2 dana zajedničkog rada razboli se A, a B dovrši ostatak posla za 9 dana. Koliko bi dana bilo potrebno ako bi A i B radili svaki za sebe?

Rješenje:

A i B su za 1 dan obavili  $\frac{1}{8}$  posla, a za 2 dana  $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$  posla.

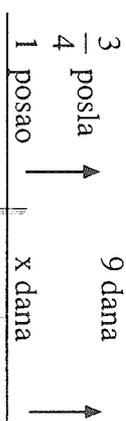
Ostatak posla obavio je B, radeći sam. Možemo postaviti pitanje:

Ako je B  $\frac{3}{4}$  posla obavio za 9 dana, koliko mu je potrebno dana da obavi cijeli posao?

Očigledno da je za  $\frac{1}{4}$  posla trebao 3 dana, a za  $\frac{4}{4}$  (1 posao) 4 puta više dana:

$$3 \cdot 4 = 12 \text{ dana.}$$

Riješimo to razmjernom:



Veličine su upravo razmjerne, pa je

$$x : 9 = 1 : \frac{3}{4} \rightarrow x = \frac{9 \cdot 1}{3} = 12$$

Da bi obavio posao radeći sam B bi morao raditi 12 dana.

Ako bi A radio sam, znajući da B može završiti posao za 12 dana, onda A cijeli posao može završiti za:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{12} = \frac{1}{8} \rightarrow x = 24 \text{ dana.}$$

10/31 mase druge posude. Prelijemo li sadržaj druge posude u prvu postaje joj ukupna masa 38/3 put veća od mase druge posude. Odredi mase posuda i masu vode u svakoj posudi.

Rješenje:

Neka su mase posuda po  $x$  kg, a masa vode  $y$  kg, tada prva posuda ima masu  $(x + y)$  kg, a druga  $(x + y + 105)$  kg i prema uvjetu zadatka je

$$\left. \begin{aligned} x + y &= \frac{10}{31}(x + y + 105) \\ x + y + y + 105 &= \frac{38}{3}x \end{aligned} \right\} x = 15, y = 1.$$

U prvoj posudi je bilo 35 l, a u drugoj 140 l vode.

1.21. Martina je za 4 mjeseca uz kamatnu stopu od 6% dobila jednake kamate kao i Dominika koja je svoju uštedevinu uložila na 10 mjeseci uz 8%. Ako bi se svaki ulog povećao za 4000 NJ, onda bi omjer njihovih uloga biti 12 : 5. U kojem omjeru stoje njihovi ulazi prije ovog povećanja?

Rješenje:

Označimo Martinin ulog sa  $x$ , a Dominikin sa  $y$ , tada je

$$\left. \begin{aligned} x \cdot \frac{4}{12} \cdot 0.06 &= y \cdot \frac{10}{12} \cdot 0.08 \\ (x + 4000) : (y + 4000) &= 12 : 5 \end{aligned} \right\} x = 20000 \text{ NJ}, y = 6000 \text{ NJ}$$

Martinin ulog je 20000 NJ, Dominikin 6000 NJ. Kada bi se ulozi povećali za 4000 NJ, onda bi omjer iznosio  $24000 : 10000 = 12 : 5$ , a omjer uloga prije povećanja iznosi  $20000 : 6000 = 10 : 3$ .

1.22. Neki posao može završiti 18 djelatnika za 48 dana. Posao je započel 1. lipnja, ali sa 12 djelatnika. Poslije 18 dana na posao je dođe još 15 djelatnika. Koje će datuma posao biti završen?

Rješenje:

Promjena je nastala prije početka vremena u zadatku, a nisu ni svi djelatnici došli na posao, pa stoga treba naći novi odnos, tj. za koliko bi dana obavilo posao 12 djelatnika.

$$\begin{array}{cc} 18 \text{ djelatnika} & 48 \text{ dana} \\ 12 \text{ djelatnika} & x \text{ dana} \end{array}$$

$$x : 48 = 18 : 12$$

$$x = 72$$

Posao bi 12 djelatnika završilo za 72 dana. To je taj novi odnos iz kojega treba naći ostatak. Budući da je posao radilo 12 djelatnika 18 dana, to bi oni ostatak posla završili za  $72 - 18 = 54$  dana uz pretpostavku da se ništa nije mijenjalo. Međutim tada na posao dolazi novih 15 djelatnika i sada ih je ukupno 27. Treba sada vidjeti za koliko će dana završiti posao tih 27 djelatnika, a to dobijemo iz sljedećih odnosa.

$$\begin{array}{cc} 12 \text{ djelatnika} & 54 \text{ dana} \\ 27 \text{ djelatnika} & x \text{ dana} \end{array}$$

$$x : 54 = 12 : 27$$

$$x = 24$$

Posao je radilo 12 djelatnika 18 dana, a grupi od 27 djelatnika potrebno je još 24 dana, znači posao će biti završen 11. srpnja.

1.23. Neko gospodarstvo ima 60 goveda i za njih hrane za 120 dana. Poslije 45 dana mora prodati 20 goveda da bi moglo prehraniti ostatak goveda. Koliko će još dana imati hrane za preostala goveda?

Rješenje:

Promjena je nastala poslije 45 dana, i to nas upućuje da nađemo prvo ostatak. Da nije prodano 20 govoda hrane bi imali još za  $120 - 45 = 75$  dana. Na temelju ovoga ostataka treba naći novi odnos tj, za koliko je dana osigurana hrana za preostala govoda?

60 govoda	75 dana
40 govoda	x dana

$$x : 75 = 60 : 40$$

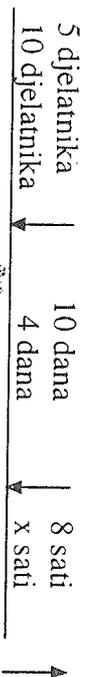
$$x = 112.5$$

Preostalih 40 govoda imat će hrane još 112.5 dana.

24. 5 djelatnika može za 10 dana, radeći 8 sati na dan završiti određeni posao. Koliko sati na dan treba raditi 10 djelatnika da bi posao završili za 4 dana, uz uvjet da su svi djelatnici jednakog učinka?

Rješenje:

Riješimo ovaj zadatak shemom:



$$x : 8 = 10 : 4 = 5 : 10$$

$$x : 8 = 10 : 4$$

$$= 5 : 10$$

$$x = \frac{8 \cdot 10 \cdot 5}{10 \cdot 4} = 10.$$

Provjera:

$10 : 8 = 10 : 4 = 5 : 10$ . Ovaj razmjerni nazivamo produženi. Razmjerni je točan ako je umnožak vanjskih članova jednak umnošku unutarnjih članova:

$$10 \cdot 4 \cdot 10 = 8 \cdot 10 \cdot 5 \rightarrow 400 = 400.$$

Kako smo odredili smjer strelica?

Ako se broj sati na dan povećava, onda će se broj dana smanjiti.

Ako se broj sati na dan povećava, bit će nam potreban manji broj djelatnika.

Kako vidimo, u oba uspoređivanja veličine su u međusobno obrnutoj razmjeri.

- 1.25. Poduzeće je primilo izvjesnu narudžbu. Planski je predviđeno da se narudžba završi za 60 dana i za taj je posao poduzeće predvidjelo 35 djelatnika po 7 sati dnevno. Posao su započeli svi djelatnici i tako rade 12 dana. Drugi posao koji je bio hitnije naravi zahtijevao je veći broj djelatnika i zbog toga je iz ove grupe otišlo 11 djelatnika. Grupa je radila bez njih 7 dana. Iznemada naručitelj zahtijeva da mu se narudžba isporuči u u sljedećih 14 dana, pa je djelatno vrijeme trebalo povećati na 9 sati dnevno. Koliko još treba djelatnika da bi posao bio završen na vrijeme?

Rješenje:

Budući da je posao započelo svih 35 djelatnika treba naći ostatak za koliko bi dana 35 djelatnika završilo posao, a da se nije ništa promijenilo, i na temelju toga naći novi odnos koji se dobije iz ostataka. Djelatnici su radili 12 dana, a radili bi još 48 da nije otišlo onih 11 djelatnika. Zbog te promjene potražimo koliko bi dana trebalo da urade taj posao preostala 24 djelatnika.

35 djelatnika	48 dana	7 sati
24 djelatnika	x dana	7 sati

$$x : 48 = 35 \cdot 24$$

Preostala 24 djelatnika trebala bi još 70 dana da dovrše posao. Pošto je grupa radila samo 7 dana to bi ona taj posao završila za  $70 - 7 = 63$  dana. Narudžba treba biti gotova narednih 14 dana pa se postavlja pitanje koliko još djelatnika treba uposliti da bi se završilo na vrijeme?

24 djelatnika	63 dana	7 sati
x djelatnika	14 dana	9 sati

$$x : 24 = 63 : 14$$

$$= 7 : 9$$

$$x = \frac{24 \cdot 63 \cdot 7}{14 \cdot 9}$$

$$x = 84$$

Da bi posao bi završen za sljedećih 14 dana, potrebno je uposliti još 60 djelatnika.

26. Jedan posao može završiti 18 djelatnika za 100 sati. U tijeku tada dogodile su se ove promjene: Nakon 15 sati rada prestao je raditi jedan djelatnik. Nakon 40 sati rada, računajući od početka, prestala su raditi još četiri djelatnika. Nakon 60 sati rada, računajući od početka, došlo je 7 novih djelatnika. Koliko će sati trajati posao nakon ovih promjena uz upretpostavku da su svi djelatnici jednakog učinka?

Rješenje:

a) Da nakon 15 sati rada nije bilo promjena, 18 bi djelatnika imalo posla još 85 sati, ali kako je 1 djelatnik prestao raditi, zaljučujemo da će posao trajati dulje:



$$x = 90 \text{ sati, što je zajedno s 15 odrađenih sati čini ukupno 105 sati.}$$

Poslije 40 sati rada prestaju raditi 4 djelatnika, a da nije bilo promjena 17 djelatnika bi imalo posla 65 dana:

17 djelatnika	↓	65 sati	↑
13 djelatnika	↓	x sati	↑

$$x = 85, \text{ što zajedno sa 40 odrađenih sati čini 125 sati.}$$

c) Rasudujemo isto kao pod a) i b), tj. 13 djelatnika može završiti posao za  $125 - 60 = 65$  dana:

13 djelatnika	↓	65 sati	↑
20 djelatnika	↓	x sati	↑

$$x = 42.25 \text{ sati, što zajedno sa 60 odrađenih sati čini 102.25 sati.}$$

Provjera:

$$1 \text{ djelatnik bi imao posla } 18 \cdot 100 = 1800 \text{ sati}$$

18 dj. radilo je po 15 sati ( $18 \cdot 15$ )	270 sati
17 dj. radilo je po 25 sati (od 15 do 40) ( $17 \cdot 25$ )	425 sati
13 dj. radilo je po 20 sati (od 40 do 60) ( $20 \cdot 13$ )	260 sati
20 dj. radilo je po 42.25 sati	845 sati
(od 60 do 102.25) ( $42.25 \cdot 20$ )	
<b>Ukupno:</b>	<b>1800 sati</b>

1.27. 5 bagera po 180 kW može za 16 dana, radeći na dan 8 sati iskopati kanal duljine 9600 m, širine 4.8 m i dubine 4.2 m. Koliko dug kanal može iskopati 8 bagera po 160 kW ako rade 15 dana po 10 sati na dan i ako je kanal širok 4 m i dubok 2.5 m, uz pretpostavku da su uvjeti rada jednaki?

Rješenje:

5 b.	↑	180 kW	↑	16 d.	↑	8 h	↑	9600 m	4.8 m	4.2 m
8 b.	↑	160 kW	↑	15 d.	↑	10 h	↑	9600 m	4.0 m	2.5 m

Određimo odnose među veličinama:

Ako želimo imati dužji kanal, onda mu širina mora biti manja.

Dužji kanal zahtijeva manju dubinu.

Za dužji kanal potrebno je više bagera.

Za dužji kanal potrebno je više radnih dana.

Za dužji kanal potrebno je više radnih sati na dan.

Za dužji kanal potrebni su strojevi veće sange.

$$\begin{aligned} x : 9600 &= 8 : 5 \\ &= 160 : 180 \\ &= 15 : 16 \\ &= 10 : 8 \\ &= 4.8 : 4 \\ &= 4.2 : 2.5 \end{aligned}$$

$$x = \frac{9600 \cdot 8 \cdot 160 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 4.8 \cdot 4.2}{5 \cdot 180 \cdot 16 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 2.5} = 32256 \text{ m.}$$

Napomena:

Vrlo je korisno da se prije početka rada rezultat procijeni.

Iz ovog zadatka može se postaviti 13 novih zadataka.

Na primjer, može se uzeti kao nepoznanica broj dana iz prve ekipe bagera ( $16 = x$ ), pa smo u tom slučaju sigurni da rezultat uz dužjim kanala druge ekipe od 32256, mora biti 16 dana.

- 1.28. Broj  $N$  rastavi na dva pribrojnika koji će se odnositi kao  $2 : 5$ . Poseban primjer  $N = 2289$ .

Rješenje:

Neka je prvi pribrojnik  $2k$ , a drugi  $5k$ , onda je

$$2k + 5k = N \rightarrow k = \frac{N}{7}$$

$$\text{Prvi pribrojnik je } 2 \cdot \frac{N}{7} = \frac{2}{7}N, \text{ a drugi } \frac{5}{7}N.$$

$$2k + 5k = 2289 \rightarrow k = 327.$$

Prvi pribrojnik	2 · 327	=	654
Drugi pribrojnik	5 · 327	=	1635
Ukupno			2289

- 1.29. Dominika, Marija i Martina platili su za sreću: Dominika 120 NJ, Marija 70 NJ, Martina 50 NJ. Sreća je "izvukla" dobitak od 140000 NJ. Kako će se podijeliti taj dobitak?

Rješenje:

Dominikin dio je 120k  
 Marijin dio je 70k  
 Martinin dio je 50k

$$120k + 70k + 50k = 140\,000 \rightarrow k = 583.5$$

Raspodjela:

Dominiki pripada	120 · 583.5 NJ	=	70 020 NJ
Mariji pripada	70 · 583.5 NJ	=	40 845 NJ
Martini pripada	50 · 583.5 NJ	=	29 175 NJ
Ukupno			140 000 NJ

- 1.30. Djelatnici A, B i C zaradili su na jednom poslu 246 000 NJ.

A je radio 3 dana po 8 sati, B je radio 4 dana po 7 sati, C je radio 5 dana po 6 sati.

Koliko je svaki zaradio ako su uvjeti rada jednaki?

Rješenje:

Djelatnik A je radio  $3 \cdot 8$  sati = 24 sata,  
 Djelatnik B je radio  $4 \cdot 7$  sati = 28 sati,  
 Djelatnik C je radio  $5 \cdot 6$  sati = 30 sati.

Djelatnik B zaradio je 28k NJ,  
Djelatnik C zaradio je 30k NJ, gdje je k faktor proporcionalnosti.

A, B i C su ukupno zaradili

$$24k + 28k + 30k = 246\,000 \text{ NJ} \rightarrow k = 3000.$$

Djelatnik A zaradio je  $24 \cdot 3000 = 72000 \text{ NJ}$ ,

Djelatnik B zaradio je  $28 \cdot 3000 = 84000 \text{ NJ}$ ,

Djelatnik C zaradio je  $30 \cdot 3000 = 90000 \text{ NJ}$ ,  
što je ukupno 246 000 NJ.

1.31. Zupčanik ima 180 zubbaca. Drugi zupčanik čiji zupci zahvaćaju zupce prvoga ima 75 zubbaca. Ako prvi zupčanik učini 540 okretaja u minuti, koliko će okretaja učiniti drugi zupčanik?

Rješenje:

Za zupčanike imamo razmjer:

$n_1 : n_2 = o_1 : o_2$ , gdje su  $n_1$  i  $n_2$  broji zubbaca, a  $o_1$  i  $o_2$  brojevi njihovih okretaja:

$$180 : 75 = 540 : x \rightarrow x = 225 \text{ okretaja.}$$

1.32. Kutovi trokuta se odnose kao 3 : 5 : 8. Koliki su kutovi?

Rješenje:

$$\alpha = 3k, \beta = 5k, \gamma = 8k$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 16k \rightarrow k = 11.25$$

$$\alpha = 3 \cdot 11.25 = 33.75^\circ = 33^\circ 45'$$

$$\beta = 5 \cdot 11.25 = 56.25^\circ = 56^\circ 15'$$

$$\gamma = 8 \cdot 11.25 = 90^\circ = 90^\circ$$

Trokut je pravokutan.

1.33. Vanjski kut na osnovici jednakokračnog trokuta odnosi se prema vanjskom kutu trokuta kao 15 : 20.

Koliki su unutarnji kutovi toga trokuta?

Rješenje:

$\beta_1 = 2\alpha$ , jer je vanjski kut u trokutu jednak zbroju dvaju unutarnjih koji mu nisu susjedni.

$$\alpha_1 = 180^\circ - \alpha$$

$$(180^\circ - \alpha) : 2\alpha = 15 : 20 \rightarrow \alpha = 72^\circ, \beta = 36^\circ.$$

1.34. U trokutu je kut  $\gamma$  1.5 puta veći od kuta  $\alpha$ , dok kut  $\beta$  iznosi  $\frac{4}{5}$  kuta  $\gamma$ .

Koliki su kutovi trokuta?

Rješenje:

Kutovi trokuta su:

$$\alpha = \alpha$$

$$\beta = 1.5\alpha$$

$$\gamma = \frac{4}{5} \cdot 1.5\alpha = 1.2\alpha$$

$$\alpha \cdot 1.5\alpha + 1.2\alpha = 180^\circ$$

$\alpha$	$= 48.65^\circ$	$= 48^\circ 39'$
$\beta$	$= 72.97^\circ$	$= 72^\circ 58' 12''$
$\gamma$	$= 58.38^\circ$	$= 58^\circ 22' 48''$
Ukupno		$180^\circ$

35. Dioničko društvo dijeli dohodak na osobne dohotke i fondove u omjeru 7 : 2. Koliki je iznos osobnih dohodaka, a koliki je iznos za fondove ako ukupni dohodak iznosi 4 500 000 NJ.

Rješenje:

Na osobne dohotke otpada 7 dijelova ukupnog dohotka, dok u fondove idu 2 dijela.

Osobni dohoci iznose  $7k$  NJ.

Fondovi iznose  $2k$  NJ, gdje je  $k$  faktor proporcionalnosti.

Zbroj osobnih dohodaka i fondova daje ukupan dohodak:

$$7k + 2k = 4\,500\,000 \rightarrow k = 500\,000$$

Osobni dohoci iznose  $7 \cdot 500\,000 = 3\,500\,000$  NJ

Fondovi iznose  $2 \cdot 500\,000 = 1\,000\,000$  NJ

Ukupno  $4\,500\,000$  NJ.

36. Dužina je podijeljena na 3 dijela u omjeru 1 : 2 : 3. Drugi dio ima duljinu 5 cm. Kolike su duljine ostala dva dijela?

Rješenje:

Neka su to dijelovi  $a$ ,  $b$  i  $c$ , kako je to prikazano na slici, onda je



$a = k$ ,  $b = 2k$ ,  $c = 3k$  i kako je

$$5 = 2k \rightarrow k = 2.5$$

$a = 2.5$  cm,  $b = 5$  cm,  $c = 7.5$  cm.

- 1.37. Omjer stranica pravokutnika je 5 : 1. Smanjimo li dužju stranicu za 3 cm, a kraću povećamo za 3 cm, onda se površina pravokutnika poveća za  $27\text{cm}^2$ . Kolike su stranice toga pravokutnika?

Rješenje:

Neka su stranice pravokutnika  $a$  i  $b$ , onda je  $a = 5k$ ,  $b = k$  i prema uvjetima zadatka imamo:

$$5k \cdot k + 27 = (5k - 3) \cdot (k + 3) \rightarrow k = 3$$

$$a = 15 \text{ cm}, b = 3 \text{ cm}.$$

- 1.38. Za prijevoz 8500 kg kave, 12400 kg šećera, 34600 kg riže i 90500 kg brašna plaćeno je 1 825 000 NJ. Kojim iznosom troškova treba zadužiti račun svake robe ako se troškovi dijele razmjerno masi?

Rješenje:

$$8500k + 12400k + 34600k + 90500k = 1\,825\,000 \rightarrow k = 1.25$$

Troškovi su:

kava	106 250 NJ
šećer	155 000 NJ
riža	432 500 NJ
brašno	1 131 250 NJ
Ukupno	1 825 000 NJ

- 1.39. Dominika i Martina trebaju podijeliti 2400 NJ. Dominiki pripada  $17/24$  toga iznosa, a Martini ostatak. Koliko će primiti svaka?

Rješenje:

$$\text{Martina će primiti } \frac{24}{24} - \frac{17}{24} = \frac{7}{24} \text{ dijelova toga iznosa. Iznos od}$$

$$2400 \text{ NJ dijele u omjeru:}$$

$$\frac{17}{24} : \frac{7}{24} = 17 : 7.$$

Dominika će dobiti 17k NJ, a Martina 7k NJ.

$$17k + 7k = 2400 \rightarrow k = 100.$$

Dominiki pripada	17 · 100 = 1700 NJ
Martini pripada	7 · 100 = 700 NJ
Ukupno	2400 NJ

40. Troškovi transporta za 3 vrste robe iznosi 23400 NJ. Troškovi se dijele u omjeru  $\frac{3}{2} : \frac{5}{8} : \frac{7}{12}$ .

Izračunaj iznose troškova za svaku vrstu roba.

Rješenje:

Omjer  $\frac{3}{2} : \frac{5}{8} : \frac{7}{12}$  treba svesti na jednake nazivnike. Za 2, 8 i 12

zajednički je nazivnik 24, onda je  $\frac{3}{2} : \frac{5}{8} : \frac{7}{12} = \frac{36}{24} : \frac{15}{24} : \frac{14}{24}$ .

Sada možemo reći da se troškovi dijele u omjeru 36 : 15 : 14.

Određimo još faktor proporcionalnosti:

$$36k + 15k + 14k = 23400 \rightarrow k = 360.$$

Troškovi su za 1. vrstu robe	36 · 360 = 12960 NJ
Troškovi su za 2. vrstu robe	15 · 360 = 5400 NJ
Troškovi su za 3. vrstu robe	14 · 360 = 5040 NJ
Ukupno	23400 NJ

41. Cement, vapno i pijesak miješaju se za produženu žbuku u omjeru 1 : 2 : 5. Koliko treba uzeti m<sup>3</sup> vapna, a koliko pijeska ako treba

Rješenje:

Najprije treba saznati koliko m<sup>3</sup> sadrži 4600 kg cementa:  
4600 : 230 = x : 0.165 → x = 3.3.

Cementa ima 3.3 m<sup>3</sup>

Broj 3.3 je ujedno i faktor proporcionalnosti, jer je omjerni broj za cement 1.

Treba u mješavini biti cementa	1 · 3.3 = 3.3 m <sup>3</sup>
vapna	2 · 3.3 = 6.6 m <sup>3</sup>
pijeska	5 · 3.3 = 16.5 m <sup>3</sup>

a ukupna masa sastava iznosi 26.4 m<sup>3</sup>.

- 1.42. Potrebno je izrezati 1026 m<sup>2</sup> drvne građe. Tri su pilane na raspolaganju, prva kapaciteta 24 m<sup>3</sup> za 10 sati, druga 32 m<sup>2</sup> za 8 sati i treća 80 m<sup>2</sup> za 16 sati. Kako treba rasporediti ovu građu da posao bude završen istovremeno?  
Koliko će sati trajati posao?

Rješenje:

Najprije treba odrediti kapacitete pilana za 1 sat rada:

1. pilana  $\frac{24}{10}$  m<sup>3</sup>, 2. pilana  $\frac{32}{8}$  m<sup>3</sup> i 3. pilana  $\frac{80}{16}$  m<sup>3</sup>.

Raspodjela građe vrši se u omjeru

$$\frac{24}{10} : \frac{32}{8} : \frac{80}{16} = 2.4 : 4 : 5.$$

$$2.4k + 4k + 5k = 1026 \rightarrow k = 90.$$

Faktor proporcionalnosti je ujedno i vrijeme trajanja posla.

Prva pilana će preuzeti građe	$2.4 \cdot 90 = 216 \text{ m}^3$
Druga	$4 \cdot 90 = 360 \text{ m}^3$
Treća	$5 \cdot 90 = 450 \text{ m}^3$
Ukupno $1026 \text{ m}^3$ .	

Provjera:

Ako je kapacitet 1. pilane za 1 sat  $2.4 \text{ m}^3$ , onda će za devedeset sati izrezati

$$90 \cdot 2.4 \text{ m}^3 = 216 \text{ m}^3$$

Za isto vrijeme 2. pilana izreže  $90 \cdot 4 \text{ m}^3 = 360 \text{ m}^3$  i treća  $450 \text{ m}^3$ .

- 1.43. Tri automobila su potrošila goriva za 465080 NJ, prvi je prešao 4500 km i trošio 7 l na 100 km, drugi je prešao 5200 km i trošio 8 l na 100 km, treći je prešao 9300 km i trošio 10 l na 100 km.

Koliko otpada troškova na svaki automobil, ako su troškovi upravno razmjerni s brojem pređenih kilometara i s potrošnjom goriva na 100 km pređenog puta?

Rješenje:

$$4500 \cdot 7k + 5200 \cdot 8k + 9300 \cdot 10k = 465080 \rightarrow k = 2.8.$$

Prvi je potrošio	88200 NJ
Drugi je potrošio	116480 NJ
Treći je potrošio	260400 NJ
Ukupno	465080 NJ.

- 1.44. Izložbeni prostor koriste 3 dionička društva: A koristi  $250 \text{ m}^2$ , B  $180 \text{ m}^2$  i C  $200 \text{ m}^2$ . Za uređenje su potrošili: A 120 sati, B 200 sati i C 300 sati. Ukupni troškovi za uređenje iznosili su 2190000 NJ. Kako će A, B i C podijeliti ove troškove, ako se zna da su oni napravili uređenje razmjerno

kvadratnih metara uređenog prostora, a obrnuto razmjerni s brojem utrošenih sati?

Rješenje:

$$\frac{250}{120}k + \frac{180}{200}k + \frac{200}{300}k = 2190000 \rightarrow k = 600000.$$

Troškovi su za A = 1 250 000 NJ

za B = 540 000 NJ

za C = 400 000 NJ

Ukupno 2 190 000 NJ.

- 1.45. Za jedan posao uložio je A 12 000 000 NJ, a poslije tri mjeseca još 8 000 000 NJ dok je B uložio 40 000 000 NJ, a nakon 6 mjeseci povukao je 15 000 000 NJ. Kako će A i B podijeliti čisti dohodak od 6 060 000 NJ, što su ga ostvarili za 12 mjeseci rada?

Rješenje:

$$(12\,000\,000 \cdot 12k + 8\,000\,000 \cdot 9k) + (40\,000\,000 \cdot 12k - 15\,000\,000 \cdot 6k)$$

$$= 6\,060\,000 \rightarrow k = 0.01.$$

A = 2 160 000 NJ

B = 3 900 000 NJ  $\rightarrow$  A + B = 6 060 000 NJ.

- 1.46. Kako će A, B, C i D podijeliti iznos od 457 600 NJ, ako ga dijele u ovim omjerima:

$$A : C = 3 : 7, B : D = 4 : 5, A : B = 15 : 56 \text{ i } C : D = 1 : 2 ?$$

Rješenje:

Ako omjer A : C = 3 : 7 proširimo 5 puta, bit će A : C = 15 : 35, a omjer C : D = 1 : 2 proširimo 35 puta, bit će C : D = 35 : 70, a proširujući

$$A : B : C : D = 15 : 56 : 35 : 70.$$

Podjela je  $15k + 56k + 35k + 70k = 457\ 600 \rightarrow k = 2600$

$$A = 39\ 000 \text{ NJ}, B = 145\ 600 \text{ NJ}, C = 91\ 000 \text{ NJ} \text{ i } D = 182\ 000 \text{ NJ}.$$

1.47. Iznos od 20900 NJ dijele osobe A, B i C prema ključu:

$$\frac{5}{6} \text{ dijelova osobe A primi B, a C } \frac{13}{6} \text{ zbroja dijelova A i B.}$$

Koliko je primila svaka osoba?

Rješenje:

Neka je osoba A primila  $x$  NJ, onda je osoba B primila  $\frac{5}{6}x$  NJ, a C

$$\frac{13}{6}(A + B) = \frac{13}{6}\left(x + \frac{5}{6}x\right) \text{ NJ}.$$

$$x + \frac{5}{6}x + \frac{13}{6}\left(x + \frac{5}{6}x\right) = 20900 \rightarrow x = 3600$$

$$A = 3600 \text{ NJ}$$

$$B = 3000 \text{ NJ}$$

$$C = 14300 \text{ NJ}$$

$$\underline{20900 \text{ NJ.}}$$

1.48. Omjer osobnih dohodaka Dominike i Martine je 2 : 1. Nakon promjene pravilnika o osobnim dohocima Martina je dobila osobni dohodak za 24000 NJ, a Dominika za 3000 NJ više, pa je omjer iznosio 5 : 3.

Koliki su im osobni dohoci po starom, a koliko po novom pravilniku?

Rješenje:

Prije primjene novog pravilnika osobni dohoci su:

$$\text{Dominikin } 111\ 000 \cdot 2 = 222\ 000 \text{ NJ}$$

$$\text{Martinin } 111\ 000 \cdot 1 = 111\ 000 \text{ NJ}$$

, a poslije primjene

$$\text{Dominikin } 222\ 000 + 3000 = 225\ 000 \text{ NJ}$$

$$\text{Martinin } 111\ 000 + 24000 = 135\ 000 \text{ NJ}$$

$$225\ 000 : 135\ 000 = 5 : 3.$$

1.49. Cijev A može napuniti bazen za 8 sati, a cijev B za 12 sati ako ga pune pojedinačno. Koliko je vremena potrebno cijevima A i B da napune bazen ako su otvorene istovremeno?

Rješenje:

Za 1 sat cijevi A i B napune

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24} \text{ dijelova bazena.}$$

$$\frac{\frac{5}{24} \text{ dijelova bazena za } 1 \text{ sat}}{1 \text{ bazen za } x \text{ sati}}$$

$$x : 1 = 1 : \frac{5}{24} \rightarrow x = \frac{24}{5} = 4,8 \text{ sati} = 4 \text{ sata i } 48 \text{ minuta.}$$

1.50. Šest dioničkih društava: A, B, C, D, E i F ima fond zajedničke potrošnje u iznosu od 5 550 000 NJ. Kako će ovih 6 dioničkih društava podijeliti ovaj iznos ako ga dijele u omjerima: A : D = 3 : 5, F : E = 4 : 3, A : F = 6 : 7, B : D = 1 : 2, C : E = 5 : 7.

Rješenje:

Počet ćemo tako da odmjerni broj za član A bude 1:

$$A : D = 3 : 5 \rightarrow A : D = 1 : \frac{5}{3} \rightarrow A = k, D = \frac{5}{3}k, \text{ što uvršteno u}$$

razmjjer

$$B : D = 1 : 2 \text{ daje } B : \frac{5}{3}k = 1 : 2 \rightarrow B = \frac{5}{6}k.$$

$$\text{Iz razmjjera } A : F = 6 : 7 \rightarrow k : F = 6 : 7 \rightarrow F = \frac{7}{6}k.$$

$$\text{Iz razmjjera } F : E = 4 : 3 \rightarrow \frac{7}{6}k : E = 4 : 3 \rightarrow E = \frac{7}{8}k.$$

$$\text{Iz razmjjera } C : E = 5 : 7 \rightarrow C : \frac{7}{8}k = 5 : 7 \rightarrow C = \frac{5}{8}k.$$

$$A = k, B = \frac{5}{6}k, C = \frac{5}{8}k, D = \frac{5}{3}k, E = \frac{7}{8}k, F = \frac{7}{6}k.$$

$$A : B : C : D : E : F = 1 : \frac{5}{6} : \frac{5}{8} : \frac{5}{3} : \frac{7}{8} : \frac{7}{6} = 24 : 20 : 15 : 40 : 21 :$$

28.

$$24k + 20k + 15k + 40k + 21k + 28k = 5\,550\,000 \rightarrow k = 37500.$$

A	= 24 · 37500	=	900 000 NJ
B	= 20 · 37500	=	750 000 NJ
C	= 15 · 37500	=	562 000 NJ
D	= 40 · 37500	=	1 500 000 NJ
E	= 21 · 37500	=	787 500 NJ
F	= 28 · 37500	=	1 050 000 NJ
<b>Ukupno</b>			<b>5 550 000 NJ.</b>

1.51. Jedan posao može obaviti djelatnik A za 15 sati, a djelatnik B za 25 sati ako rade svaki za sebe.

Za koliko bi sati obavili taj posao A i B ako bi radili istovremeno?

Rješenje:

Za 1 sat djelatnik A obavi  $\frac{1}{15}$  posla, a djelatnik B  $\frac{1}{25}$  posla, a radeći zajedno obave za 1 sat

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{25} = \frac{8}{75} \text{ posla}$$

$$\frac{8}{75} \text{ posla za } 1 \text{ sat}$$

$$\frac{1}{\text{posao za } x \text{ sati}}$$

$$x : 1 = 1 : \frac{8}{75} \rightarrow x = 9 \text{ sati i } 22 \text{ minute i } 30 \text{ sekundi.}$$

1.52. Bazen se puni s dvije cijevi A i B i kada su istovremeno otvorene treba 10 sati da se bazen napuni. Koliko bi trebalo svakoj posebno ako kroz cijev B proliječe  $\frac{7}{8}$  količine vode cijevi A?

Rješenje:

Neka cijev A treba x sati, onda cijev B treba  $\frac{7}{8}x$  sati.

$$\text{Cijev A za 1 sat napuni } \frac{1}{x} \text{ dijelova bazena, cijev B } \frac{8}{7} \text{ dijelova}$$

bazena ili  $\frac{7}{8x}$ .

Vrijeme potrebno da se napuni bazen s cijevi A:

$$\frac{1}{x} + \frac{7}{8x} = \frac{1}{10} \rightarrow x = \frac{75}{4} \text{ sati} = 18 \text{ sati } 45 \text{ minuta.}$$

Ako je otvorena samo cijev B, onda za 1 sat napuni  $\frac{7}{8x}$  dijelova

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{7}{150} = \frac{7}{150} \text{ dijelova bazena, pa zaključujemo:}$$

7/150 bazena za 1 sat  
1 bazen za x sati

$$x : 1 = 1 : \frac{7}{150} \rightarrow x = \frac{150}{7} = 21 \frac{3}{7} \text{ sati.}$$

Provjera:

Za 1 sat cijevi A i B napune

$$\frac{1}{150} + \frac{1}{150} = \frac{1}{10} \text{ bazena. Ako se za 1 sat napuni } \frac{1}{10} \text{ bazena, onda}$$

se cijeli bazen napuni za 10 sati.

1.53. Bazen se može napuniti s 3 cijevi za 5 sati, ako su otvorene istovremeno.

Kroz drugu cijev utječe  $\frac{1}{4}$ , a kroz treću  $\frac{3}{8}$  one količine vode koja protječe prvom cijevi.

Za koliko bi sati svaka cijev posebno napunila bazen?

Rješenje:

Označimo li da prva cijev može napuniti bazen za x sati, tada za 1 sat napuni  $\frac{1}{x}$  dijelova bazena.

Druga cijev napuni za 1 sat

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4x} \text{ dijelova bazena, a treća cijev } \frac{3}{8} = \frac{3}{8x} \text{ dijelova bazena. Sve}$$

tri cijevi napune za 1 sat  $\frac{1}{5}$  bazena:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4x} + \frac{3}{8x} = \frac{1}{5} \rightarrow x = \frac{65}{9} \text{ sati} = 8 \text{ sati } 7 \text{ minuta i } 30 \text{ sekundi.}$$

## 2. POSTOTNI RAČUN

2.01. Kod prijevoza 12 860 kg pšenice na rastur i posušenje otpada 3%.

Koliko iznosi rastur i posušenje?

Rješenje:

$$P = \frac{Sp}{100} = \frac{12860 \cdot 3}{100} = 385.80$$

2.02. Rastur i posušenje iznosi 385.80 kg, što je 3% od cjelokupne količine. Koliko je bilo pšenice?

Rješenje:

$$S = \frac{100P}{p} = \frac{100 \cdot 385.80}{3} = 12860$$

2.03. Od 12 860 kg pšenice, rastur i posušenje iznosi 385.80. Koliki je postotak?

Rješenje:

$$p = \frac{100P}{S} = \frac{100 \cdot 385.80}{12860} = 3$$

2.04. Prijevoznik je naplatio za prijevoz robe 40000 NJ, što iznosi 2% od ukupne vrijednosti robe. Kolika je vrijednost robe?

Rješenje:

Riješimo zadatak primjenom razmjera:

40000 NJ	iznosi	0.02 (2%)
S NJ	iznosi	1 (100%)

$$S : 40000 = 1 : 0.02$$

$$S = \frac{40000 \cdot 1}{0.02} = 2\,000\,000 \text{ NJ.}$$

2.05. Laboratorijskom analizom je utvrđeno da u 6000 l vina ima 0.6% vinske kiseline. Koliko je litara vinske kiseline u 6000 l vina?

Rješenje:

6000	iznosi	1 (100%)
P l	iznosi	0.006 (0.6%)

$$P : 6000 = 0.006 : 1 \rightarrow P = 36 \text{ l.}$$

2.06. Od 2500 komada tvorničkih odlijevaka kontrolom je utvrđeno da je 40 komada neispravno. Koliki je to postotak?

Rješenje:

2500 komada	iznosi	1 (100%)
40 komada	iznosi	p (p%)

$$p : 1 = 40 : 2500 \rightarrow p = \frac{40}{2500} = 0.016 = 1.6\%.$$

2.07. U 2.4 kg zlatne smjese ima 0.48 kg bakra, koja je čistoća zlata?

Rješenje:

Čistoća zlata izražava se količinom čistog zlata na tisuću dijelova zlatne smjese.

Čistog zlata ima  $2.4 - 0.48 = 1.92 \text{ kg}$ .

2.4 kg	iznosi	1 (1000‰)
1.92 kg	iznosi	p (p%)

$$p : 1 = 1.92 : 2.4 \rightarrow p = \frac{1.92}{2.4} = 0.800 = 800\text{‰}.$$

Kažemo da je čistoća našeg zlata 800‰, što znači da na 1000 dijelova zlatne smjese ima 800 dijelova čistog zlata.

2.08. Iz željezne rudače izvađeno je 45 tona čistog željeza, što je 750‰. Koliko je bilo željezne rudače?

Rješenje:

45 tona	iznosi	0.750 (750‰)
x tona	iznosi	1 (1000‰)

$$x : 45 = 1 : 0.750 \rightarrow x = 60 \text{ tona.}$$

2.09. Cijena kave povišena je za 5%, pa sada iznosi 8400 NJ. Kolika je bila cijena kave:

Rješenje:

a)

8400 NJ	iznosi	1.05 (105%)
S NJ	iznosi	1.00 (100%)

$$S : 8400 = 1 : 1.05 \rightarrow S = \frac{8400}{1.05} = 8000 \text{ NJ.}$$

b)

8400 NJ	iznosi	1.05
S NJ	iznosi	0.05

$$S : 8400 = 0.05 : 1.05 \rightarrow S = 400 \text{ NJ.}$$

U praksi se ovakvi zadaci rješavaju vrlo jednostavno i brzo:

a) označimo polaznu cijenu a c i povišimo je 1.05 puta, pa tako povišenu cijenu izjednačimo s novom cijenom:

$$c \cdot 1.05 = 8400 \rightarrow c = 8000 \text{ NJ.}$$

b) Da bi dobili iznos za koliko je kava poskupjela, potrebno je novu cijenu umanjiti 1.05 puta, pa od ove cijene izračunati 5%:

$$\frac{8400}{1.05} \cdot 0.05 = 400 \text{ NJ.}$$

0. Cijena jednom proizvodu najprije je povišena za 25%, a poslije izvjesnog vremena snižena za 25%. Da li je ovaj proizvod skuplji, jeftiniji ili mu je cijena ostala nepromijenjena?

Rješenje:

Neka je cijena toga proizvoda c NJ. Nakon poskupljenja od 25 % cijena mu je

$$c \cdot 1.25 \text{ NJ} = 1.25c \text{ NJ}$$

Sada ovu cijenu treba sniziti za 25%, pa je nova cijena

$$c \cdot 1.25 \cdot 0.75 = 0.9375c \text{ NJ} = 93.75\% c \text{ NJ.}$$

Zaključujemo da je cijena proizvoda jeftinija od početne za 100% - 93.75% = 6.25%, jer iznosi 93.75% od početne.

2.11. Cijena jednog proizvoda najprije je snižena za 25%, a poslije izvjesnog vremena povišena za 25%.

Kakav je odnos zadnje cijene prema početnoj?

Rješenje:

U odnosu na prethodni zadatak ništa se neće promijeniti, jer će samo faktori zamijeniti mjesta:

$$c \cdot 0.75 \cdot 1.25 = 0.9375c \text{ NJ} = 93.75\% c \text{ NJ.}$$

Vidimo da je cijena toga proizvoda jeftinija od početne cijene za 6.25%.

2.12. Cijena jednog proizvoda je povišena za 25%. Tržna inspekcija naređuje da se cijena vrati na početnu. Na koji način će to trgovac učiniti?

Rješenje:

Označimo s x faktor koji će povišenu cijenu vratiti na početnu, onda

je:

$$c \cdot 1.25 \cdot x = c \rightarrow 1.25x = 1$$

$$x = \frac{1}{1.25} = 0.80 = 80\%.$$

Zaključujemo da povišenu cijenu treba smanjiti za 100% - 80 % = 20%.

2.13. Kada bi se proizvod prodavao po 3600 NJ, onda bi gubitak iznosio 25%.

Po kojoj cijeni treba prodavati taj proizvod, da bi se na njemu zaradilo 20%?

Rješenje:

Označimo cijenu robe s  $x$  NJ, onda je  
 $3600 \text{ NJ} = 0.75$  (25% gubitak)

$$\frac{x \text{ NJ}}{3600 \text{ NJ}} = 1.20 \text{ (20\% dobitak)}$$

$$x : 3600 = 1.20 : 0.75 \rightarrow x = 5760 \text{ NJ.}$$

Riješimo zadatak i ovako:

$$3600 \text{ NJ} = 75\%$$

$$\frac{x \text{ NJ}}{3600 \text{ NJ}} = 100\%$$

$x : 3600 = 100 : 75 \rightarrow x = 4800 \text{ NJ}$ . Na taj smo način dobili cijenu proizvoda prije gubitka. Da bi zaradili 20%, onda proizvod moramo prodavati po cijeni od  $4800 \cdot 1.20 = 5760 \text{ NJ}$ .

2.14. Jedan kut u trokutu je za 25% manji od drugoga, a za 25% veći od trećeg kuta. Odredi kutove toga trokuta.

Rješenje:

$$x + 0.75x + 1.25x = 180^\circ \rightarrow x = 60^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 60^\circ \cdot 1.20 = 75^\circ.$$

2.15. Stranica kvadrata iznosi 4 cm. Ako se stranica poveća za 50%. Za koliko će se postotaka povećati:

- a) opseg,  
 b) površina?

Rješenje:

a)

$$a_1 = 4 \cdot 1.50 = 6 \text{ cm}$$

$$O = 4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}$$

$$O_1 = 4 \cdot 6 = 24 \text{ cm}$$

$$\frac{16 \text{ cm} = 100\%}{24 \text{ cm} = x\%}$$

$x = 150\%$ . Opseg  $O_1$  se povećao za 50%.

$$\text{b) } P = 4^2 = 16 \text{ cm}^2, P_1 = 6^2 = 36 \text{ cm}^2.$$

$$16 \text{ cm}^2 = 100\%$$

$$\frac{36 \text{ cm}^2 = x\%}{16 \text{ cm}^2 = 100\%}$$

$x = 225\%$ . Površina  $P_1$  se povećala za 125%.

2.16. Izvoz neke robe povećao se na 24000 tona, a prije je iznosio 21000 tona. Koliko je povećanje u postocima?

Rješenje:

Povećanje u apsolutnom iznosu je  
 $24000 - 21000 = 3000 \text{ tona}$ , a to je

$$P = \frac{3000}{24000} = 0.125 = 12.5\%$$

Zadatak možemo riješiti i ovako: Označimo 24000 tona s indeksom 100, onda je

$$24000 \text{ tona} = 100\%$$

$$\frac{21000 \text{ tona} = x\%}{24000 \text{ tona} = 100\%}$$

$$x : 100 = 21000 : 24000 \rightarrow x\% = 87.5\%$$

Možemo reći da je izvoz startao s 87.5% i narastao na 100%, pa je povećanje iznosilo  $100\% - 87.5\% = 12.5\%$ .

2.17. Za posredničku premiju od 1% i osiguranje od 2% plaćeno je ukupno

Rješenje:

$$\begin{array}{r} 1\% \quad = 0.01 \\ + 2\% \quad = 0.002 \\ \hline 0.012 \end{array}$$

$$x \cdot 0.012 = 48000 \rightarrow x = 4\,000\,000 \text{ NJ.}$$

- 2.18. Primjenom nove tehnologije uštedeno je 12 minuta za izradu 50 bicikala, pa se sada za izradu 80 bicikala potroši onoliko vremena koliko je prije bilo potrebno za izradu 50 bicikala. Izračunajte:
- Koliko vremena, prije primjene nove tehnologije, prođe da 1 bicikl siđe s pokretne trake?
  - Koliko je vremena sada potrebno za izradu jednog bicikla?
  - Koliki je postotak u uštedi vremena?

Rješenje:

Neka je  $x$  broj minuta potrebnih za izradu 50 bicikala, onda je  $50(x + 12) = 80x \rightarrow x = 20$  minuta.

- Za 50 bicikala treba 20 minuta.  
 Za 1 bicikal treba  $x$  minuta.  
 $x : 20 = 1 : 50 \rightarrow x = 0.4$  minute = 24 sekunde.
- Za 80 bicikala treba 20 minuta.  
 Za 1 bicikal treba  $x$  minuta.  
 $x : 20 = 1 : 80 \rightarrow x = 0.25$  minuta = 15 sekundi.
- 15 sekundi 100%  
 24 sekunde  $x\%$   
 $x\% : 100\% = 24 : 15 \rightarrow x\% = 160\%$ , ušteda vremena je 60%.  
 Za izradu 50 bicikala prije je bilo potrebno  $50 \cdot 0.4$  minute = 20 minuta, a sada se za to vrijeme izradi 80 bicikala

- 2.19. U prodajnu cijenu neke robe od 737.5 NJ uračunati su troškovi od 18%.  
 Kolika je nabavna cijena robe?

Rješenje:

Poznata je cijena robe, ali uvećana za troškove, pa se zadatak rješava postojnim računom više 100. Tražimo iznos.

$$P = \frac{(S + P) \cdot p}{100 + p} = \frac{737.5 \cdot 18}{118} = 112.5$$

Troškovi na naznačenu robu iznose 112.5 NJ, dok nabavna cijena robe je  $737.5 - 112.5 = 625$  NJ.

- 2.20. Nabavna cijena neke robe iznosi 625 NJ što je za 18% manje od prodajne cijene. Kolika je prodajna cijena?

Rješenje:

$$P = \frac{(S - P) \cdot p}{100 - p} = \frac{625 \cdot 18}{82} = 137.195$$

Prodajna cijena je  $625 + 137.195 = 762.195$ .

- 2.21. Cijena jednog agregata snižena je za 12% i sada iznosi 6254 NJ. Kolika je bila cijena prije smanjenja i za koliko je smanjena cijena?

Rješenje:

$$P = \frac{(S - P) \cdot p}{100 - p} = \frac{6254 \cdot 12}{88} = 852.82$$

$$S = 6254 + 852.82 = 7106.82$$

- 2.22. U prodajnu cijenu neke robe od 737.5 NJ uračunati su poslovni troškovi od 18%. Kolika je nabavna cijena?

Napomena:

U praksi je vrlo čest slučaj da se postotni račun više i niže 100 jednostavno zamijeni postotnim računom od 100, ali tako da se pronađu odgovarajući postoci koji daju istu vrijednost kao da smo računali pomoću postotnog računa više ili niže sto. Nazovimo takav postotak konformni (p). Imamo:

$$\frac{S \cdot p}{100} = \left( S + \frac{S \cdot p}{100} \right) \cdot \frac{p'}{100}$$

$$\frac{S \cdot p}{100} = \frac{S \cdot p'}{100} + \frac{S \cdot pp'}{100 \cdot 100} \quad / : \frac{S}{100}$$

$$p = p' + \frac{p \cdot p'}{100}, \text{ a odavde se dobije}$$

$$p' = \frac{100 \cdot p}{100 + p}$$

Analogno se dobije konformni postotak i za manje od 100. Imamo:

$$p' = \frac{100 \cdot p}{100 - p}$$

Rješenje:

$$p' = \frac{100 \cdot p}{100 + p} = \frac{100 \cdot 18}{118} = 15.254$$

Sada treba naći postotni iznos, ali sa p'. Imamo:

$$P = \frac{737.5 \cdot 15.254}{100} = 112.49825 = 112.50$$

Budući da prodajna cijena uvećana za troškove iznosi 737.5 NJ dobiveni postotni iznos treba odbiti od uvećane svote.

$$737.5 - 112.5 = 625$$

- 2.23. Cijena jednog agregata snižena je za 12% i sada iznosi 6254 NJ. Kolika je bila cijena prije sniženja?

Rješenje:

$$p' = \frac{100 \cdot p}{100 - p} = \frac{1200}{88} = 13.63636$$

$$P = \frac{6254 \cdot 13.63636}{100} = 852.8179 = 852.82$$

Budući da je 6254 snižena cijena to se 852.82 treba dodati, pa imamo 6254 + 852.82 = 710.82

- 2.24. U pivu se nalazi 4.8% alkohola. Koliko se decilitara alkohola nalazi u boci od 0.5 l piva?

Rješenje:

$$\frac{p}{G} = \frac{4.8}{0.5 \text{ l}} = 5 \text{ dl}$$

$$W = \frac{p \cdot G}{100}$$

$$W = \frac{4.8 \cdot 5}{100} = 0.24 \text{ dl}$$

- 2.25. Cijena neke robe snižena je za 12% i sada iznosi 2178.00. Kolika je bila cijena robe prije sniženja?

$$\begin{aligned} p &= 12 \\ C_n &= 2178.00 \\ C_s &= ? \end{aligned}$$

$$C_s = \frac{100}{100-p} \cdot C_n$$

$$C_s = \frac{100}{100-12} \cdot 2178 = 2475$$

- 2.26. Cijena neke robe povećana je za 15% i sada iznosi 1380.00. Kolika je bila cijena robe prije poskupljenja?

Rješenje:

$$\begin{aligned} p &= 15 \\ N &= 1380.00 \\ S &= ? \end{aligned}$$

$$S = N \cdot \frac{100}{100+p}$$

$$S = 1380.00 \cdot \frac{100}{100+15} = 1200.00$$

- 2.27. Od žive svinje dobiva se 80.7% tople šurene polovice, a od tople šurene polovice dobiva se 98.2% hladne šurene polovice. Koliko se kilograma hladne šurene polovice dobije od žive svinje teške 100 kg?

Rješenje:

$$G_1 = 100$$

$$p_1 = 80.7$$

$$W = ?$$

$$W = \frac{G \cdot p}{100}$$

$$W = \frac{100 \cdot 80.7}{100} = 80.7 \rightarrow G = 80.7$$

$$G = 80.7$$

$$p = 98.2$$

$$W = ?$$

$$W = \frac{80.7 \cdot 98.2}{100} = 79.25$$

- 2.28. Od živog juneta dobiva se 58% juneće polovice-tople, od juneće polovice-tople dobiva se 98% juneće polovice hladne, a od juneće polovice-hladne dobiva se 96.87% juneće polovice-kompenzirane. Koliko se kilograma juneće polovice-kompenzirane dobije od živog juneta mase 250 kg i koliki je to postotak od živog juneta?

Rješenje:

$$p_1 = 58$$

$$p_2 = 98$$

$$p_3 = 96.87$$

$$G = 250 \text{ kg}$$

$$W = ?$$

$$p = \frac{p_1}{100} \cdot \frac{p_2}{100} \cdot \frac{p_3}{100} \cdot 100$$

$$p = \frac{58}{100} \cdot \frac{98}{100} \cdot \frac{96.87}{100} \cdot 100 = 55.06$$

$$W = \frac{G \cdot p}{100}$$

$$W = \frac{250 \cdot 55.06}{100} = 137.65 \text{ kg}$$

Rješenje:

$$W = 12 \text{ kg}$$

$$p = 68\%$$

$$G = ?$$

$$G = \frac{W \cdot 100}{p}$$

$$G = \frac{12 \cdot 100}{68} = 17.65 \text{ kg}$$

- 2.30. Od tzv. svinjske francuske polovice dobiva se 69% šunka-karea, 21% plećke i 10% vrata s kostima, a od šunka-karea dobiva se 36% karea s kostima i 64% šunke. Koliko je masa šunke od francuske polovice mase 25 kg?

Rješenje:

$$p_1 = 69 \rightarrow p_a = 36, p_b = 64$$

$$p_2 = 21$$

$$p_3 = 10$$

$$W = ?$$

$$p = \frac{p_1}{100} \cdot \frac{p_a}{100} \cdot 100$$

$$100 \cdot 100$$

$$p = \frac{69}{100} \cdot \frac{64}{100} \cdot 100 = 44.16$$

$$G = 25 \text{ kg}$$

$$p = 44.16$$

$$W = ?$$

$$W = \frac{G \cdot p}{100}$$

$$W = \frac{25 \cdot 44.16}{100} = 11.04 \text{ kg}$$

- 2.31. Morska voda sadrži 3.5% soli. S koliko litara neslane (slatke) vode treba pomiješati 1 l morske vode, da bi se dobila normalna voda za piće koja sadrži 0.5 promila soli?

Rješenje:

$$p_{mv} = 3.5\% = 35 \text{ ‰}$$

$$p_{ov} = 0.5 \text{ ‰}$$

$$X = ?$$

$$x : 0.5 = 1 : 35$$

$$x = \frac{35}{0.5} = 70$$

$$X = 70 - 1 = 69 \text{ l}$$

- 2.32. Na nekim izborima bilo je 2 930 932 birača s pravom glasa. Na izbore je izašlo 73.9% birača. Vazećih glasačkih listića bilo je 2 157 508. Koliko % je bilo nevažećih glasačkih listića (zaokružite na jednu decimalu)?

Rješenje:

$$G_1 = 2930392$$

$$G_2 = 2127508$$

$$p_a = 73.9$$

$$p = ?$$

W = broj glasača koji je izišao na izbore

X = broj nevažećih listića

$$W = \frac{2930392 \cdot 73.9}{100} = 2165560$$

$$X = W - G_2$$

$$X = 2165560 - 2127508 = 38052$$

$$p = \frac{X}{W} \cdot 100$$

$$p = \frac{38052}{2165560} \cdot 100 = 1.8$$

2.33. Kupovna cijena jednog automobila je 112 000.00. Automobil se može dobiti na 40-mjesečni kredit\*. Odmah treba uplatiti 5% cijene automobila, a na ostatak se dodaje 20% kamata. Tako dobiveni iznos dijeli se s 40. Kolika je ovako dobivena mjesečna rata?

Rješenje:

$$C = 112000.00$$

$$m = 40$$

$$p_u = 5$$

$$p = 20$$

$$a = ?$$

U = udio u gotovini

$C_0$  = ostatak duga nakon uplate gotovine

I = kamate

$C_m$  = ukupan iznos kredita

$$U = \frac{C \cdot p_u}{100}$$

$$U = \frac{112000 \cdot 5}{100} = 5600$$

$$C_0 = C - U$$

$$C_0 = 112000.00 - 5600.00 = 106400.00$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

$$I = 106400.00 \cdot \frac{20}{100} = 21280.00$$

$$C_m = C_0 + I$$

$$C_m = 106400.00 + 21280.00 = 127680.00$$

$$a = \frac{C_m}{m}$$

$$a = \frac{127680.00}{40} = 3192.00$$

### 3. RAČUN SMJESE

3.01. Prodavaonica živežnih namirnica raspolaze sa 3 vrste kave: Po 7800 NJ, 8200 NJ i 8600 NJ za 1 kg.

Po kojoj cijeni bi prodavala mješavinu napravljenu od ove 3 vrste kave?

Rješenje:

Označimo cijenu mješavine s  $p$ , onda je

$$p = \frac{7800 + 8200 + 8600}{3} = 8200 \text{ NJ.}$$

Ovaj zadatak riješili smo računom aritmetičke sredine.

Neka je cijena pojedinih vrsta iste robe  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ , a prosječna cijena mješavine  $p$ , onda je prosječna cijena:

$$p = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n}{n}, \text{ gdje je } n \text{ broj pribrojnika.}$$

3.02. Trgovina raspolaze s 3 vrste kave: 5 kg po 7800 NJ, 4 kg po 8200 NJ i 11 kg po 8600 NJ. Odredi cijenu mješavine.

Rješenje:

$$p = \frac{5 \cdot 7800 + 4 \cdot 8200 + 11 \cdot 8600}{5 + 4 + 11} = \frac{166400}{20} = 8320 \text{ NJ.}$$

Provjera:

Ukupna vrijednost svih triju vrsta kave:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 7800 &= 39000 \text{ NJ} \\ 4 \cdot 8200 &= 32800 \text{ NJ} \\ 11 \cdot 8600 &= 94600 \text{ NJ} \\ \hline \text{Ukupno} &= 166400 \text{ NJ} \end{aligned}$$

Cijena za 1 kg:  $166400 : 20 = 8320 \text{ NJ}$ ,  
vrijednost mješavine  $8320 \cdot 20 = 166400 \text{ NJ}$ .

3.03. Raspoložemo s 9 l alkohola jakosti 96%. Koliko treba dodati vode da bismo dobili alkohol jakosti 36%?

Rješenje:

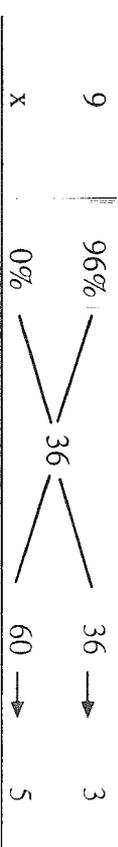
$$j = \frac{m_1 j_1 + m_2 j_2}{m_1 + m_2},$$

gdje su  $m_1$  i  $m_2$  količine tvari koje ulaze u smjesu,  $j_1$  i  $j_2$  jakosti u postocima alkohola, odnosno vode, a  $j$  jakost mješavine.

U formuli je nepoznata količina vode  $m_2$ .

$$m_2 = \frac{m_1 (j_1 - j)}{j - j_2} = \frac{9(96 - 36)}{36 - 0} = 15 \text{ l. (jakost vode je 0)}$$

U praksi ovakvi i slični zadaci rješavaju se pomoću sheme:



$$x : 9 = 60 : 36 \rightarrow x = 15 \text{ l ili } x : 9 = 5 : 3 \rightarrow x = 15 \text{ l.}$$

3.04. Zlatarski djelatnik ima narudžbu da izradi zlatni pokal mase 400 g od zlata finoće 750‰. Na raspolaganju ima zlato finoće 850‰ i 600‰. Na koji način će zaltar udovoljiti naručitelju?

Rješenje:

Zadatak se može riješiti na dva načina:

a) miješanjem raspoloživih finoća zlata.

b) dodavanjem primjese (obični bakar) zlatu finoće 850‰.

a)

$$j = \frac{m_1 j_1 + m_2 j_2}{m_1 + m_2} \quad \text{gdje je } j\text{‰} = 750\text{‰}, m_1 = x, m_2 = (400 - x),$$

$$j_1\text{‰} = 850\text{‰} \text{ i } j_2\text{‰} = 600\text{‰} :$$

$$750 = \frac{x \cdot 850 + (400 - x) \cdot 600}{x + (400 - x)} \rightarrow x = 240 \text{ g.}$$

Zlata finoće 850‰ treba uzeti 240 g, a zlata finoće 600‰ treba uzeti  $400 - 240 = 160$  g.

Provjerita:

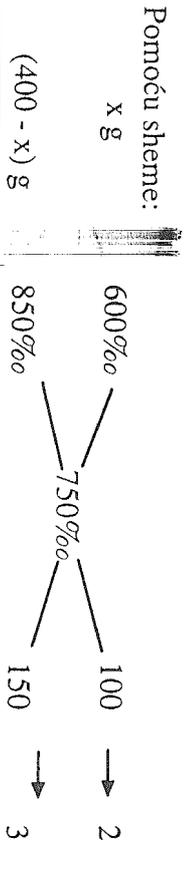
U mješavini od 400 g zlata finoće 750‰ ima čistoga zlata  $400 \cdot 0.750 = 300$  g, a toliko ga mora biti u zlatu od

$$240 \text{ g finoće } 850\text{‰} : 240 \cdot 0.850 = 204 \text{ g}$$

$$160 \text{ g finoće } 600\text{‰} : 160 \cdot 0.600 = 96 \text{ g}$$

$$\text{Ukupno} \quad 300 \text{ g}$$

Pomoću sheme:



$$x : (400 - x) = 2 : 3 \rightarrow x = 160 \text{ g, i } 240 \text{ g.}$$

b)

U ovom slučaju u formulu treba uvrstiti ove podatke:

$$j\text{‰} = 750\text{‰}, m_1 = x, m_2 = 400 - x, j_1\text{‰} = 850\text{‰}, j_2 = 0$$

$$750 = \frac{x \cdot 850 + (400 - x) \cdot 0}{x + (400 - x)} \rightarrow x = 352.9412 \text{ g.}$$

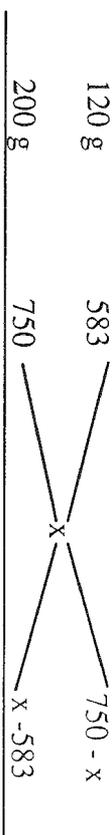
Zlata finoće 850‰ treba uzeti 352.9412 g, a bakra 47.0588 g.

3.05. A grama zlata finoće  $f_1$  istali se i pomiješa s B grama zlata finoće  $f_2$ . Odredi finoću legure. Posebne vrijednosti:  $A = 120$  g,  $B = 200$  g,  $f_1\text{‰} = 538\text{‰}$ ,  $f_2\text{‰} = 750\text{‰}$ .

Rješenje:

$$f = \frac{Af_1 + Bf_2}{A + B} = \frac{120 \cdot 583 + 200 \cdot 750}{120 + 200} = 687.375.$$

III:



$$(x - 583) : (750 - x) = 200 : 120 \rightarrow x = 687.375.$$

3.06. Koliko bakra treba pomiješati s A grama srebra finoće  $f_1$  da bi se dobila finoća legure  $f$ ?

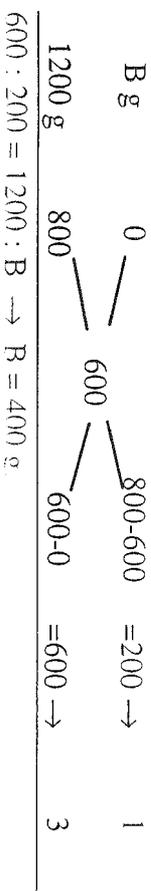
Posebne vrijednosti:  $A = 1200$  g,  $f_1 = 800$ ,  $f_2 = 0$ ,  $f = 600$  (bakar nema finoće).

Rješenje:

$$f = \frac{Af_1 + Bf_2}{A + B} = \frac{Af_1}{A + B} \rightarrow B = \frac{A(f_1 - f)}{f}$$

$$B = \frac{1200(800 - 600)}{600} = 400 \text{ g.}$$

III:



$$B \text{ g} \quad 0 \quad 800 - 600 = 200 \rightarrow 1$$

$$1200 \text{ g} \quad 800 \quad 600 - 0 = 600 \rightarrow 3$$

$$600 : 200 = 1200 : B \rightarrow B = 400 \text{ g.}$$

Provjera:

$$\frac{1200 \cdot 800 + 400 \cdot 0}{1200 + 400} = 600.$$

- 3.07. Voda temperature  $20^{\circ}\text{C}$  pomiješa se s vodom temperature  $30^{\circ}\text{C}$ , pri čemu se dobije mješavina temperature  $24^{\circ}\text{C}$ . Dodamo li ovoj mješavini 5 l prve i 20 l druge količine vode temperatura mješavine poraste za  $3^{\circ}\text{C}$ . Koliko je litara uzeto prve, a koliko druge vode?

Rješenje:

Neka je količina prve vode  $x$ , a druge  $y$ , tada je

$$\frac{20x + 30y}{x + y} = 24$$

$$\frac{20(x + 5) + 30(y + 20)}{(x + 5) + (y + 20)} = 27$$

$$x = 51, y = \frac{10}{3} \text{ l.}$$

- 3.08. Ako pomiješamo 30 l vode temperature  $40^{\circ}\text{C}$  s vodom od  $18^{\circ}\text{C}$  i vodom od  $24^{\circ}\text{C}$ , dobijemo smjesu od 60 l vode temperature  $30^{\circ}\text{C}$ . Odredi količinu vode od  $18^{\circ}\text{C}$  i  $24^{\circ}\text{C}$ .

Rješenje:

Vode od  $18^{\circ}\text{C}$  i od  $24^{\circ}\text{C}$  bilo je ukupno 30 l, jer je mješavina iznosila 60 l.

Označimo količinu vode od  $24^{\circ}\text{C}$  sa  $x$  l, onda je količina vode od  $18^{\circ}\text{C}$   $(30 - x)$  l.

$$\frac{30 \cdot 40 + (30 - x) \cdot 18 + 24x}{30 + (30 - x) + x} = 30 \rightarrow x = 10.$$

Voda temperature  $24^{\circ}\text{C}$  ima 10 l, a vode temperature  $18^{\circ}\text{C}$  ima 20 l.

- 3.09. Pomiješamo li 20 l toplije vode s 10 l hladnije, onda temperatura smjese iznosi  $60^{\circ}\text{C}$ . Pomiješamo li 8 l toplije s 2 l hladnije, temperatura smjese je  $64^{\circ}\text{C}$ . Odredi temperaturu toplije, odnosno hladnije vode.

Rješenje:

Nek je temperatura toplije vode  $x^{\circ}\text{C}$ , a hladnije  $y^{\circ}\text{C}$ , tada je

$$\left. \begin{aligned} 20(x - 60) &= 10(60 - y) \\ 8x + 2y &= 10 \cdot 64 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x^{\circ}\text{C} &= 70^{\circ}\text{C}, \\ y^{\circ}\text{C} &= 40^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$

Provjera:

$$t_1 = \frac{20 \cdot 70 + 10 \cdot 40}{30} = 60 \text{ i}$$

$$t_2 = \frac{8 \cdot 70 + 2 \cdot 40}{10} = 64.$$

#### 4. VERIŽNI RAČUN

4.01. Za 25 kg šećera plaćeno je 24150 NJ. Koliko će se platiti za 75 kg?

Rješenje:

Podsjetimo se kako bismo taj zadatak rješavali primjenom razmjera:

25 kg	iznosi	24150 NJ
75 kg	iznosi	x NJ

$$x : 24150 = 75 : 25 \rightarrow x = \frac{75 \cdot 24150}{25} = 72450 \text{ NJ.}$$

U verižnom postupku primjenjuje se ova shema:

x NJ	za	75 kg šećera
25 kg	za	24150 NJ

$$x = \frac{75 \cdot 24150}{25} = 72450 \text{ NJ.}$$

4.02. Dominika je dužna Martini 450 \$ (dolara). Ovaj dug Dominika želi podmiriti s DM (njemačke marke). Koliko će DM platiti ako se prema važećem srednjem tečaju za 1 \$ plaća 5.25 NJ, a za 100 DM 355 NJ na dan 30.08.1996.god.

Rješenje:

x DM	za	450 \$
1 \$	za	5.25 NJ
355 NJ	za	100 DM

$$x = \frac{450 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 100}{1 \cdot 355} = 665.49$$

Zapamti:

- Verižnik uvijek počinje pitanjem (x) koliko. U našem slučaju koliko DM (x DM) za 450 \$.
- Svaki idući red verižnika počinje onom jedinicom mjere (novca) kojom je prethodni red završio.
- Verižnik je završen kad posljedni red završi jedinicom mjere (novca) kojim je i počeo. U našem slučaju počelo je s DM i završilo s DM.
- Nepoznatu veličinu (x) određujemo tako da da umnožak članova verižnika na desnoj strani podjelimo umnoškom članova na lijevoj strani verižnika.

4.03. Koliko bismo palatili u Zagrebu 1 par cipela koje je trgovina kupila u Trstu za 46000 lira ako se za 100 TTL u Zagrebu plaća 0.347 NJ i ako je rabat (dobit) i porez na promet 86%?

Rješenje:

x NJ	za	1 par cipela
1 par	za	46000 TTL
100 TTL	za	0.347 NJ
100 NJ	za	186 NJ

$$x = \frac{1 \cdot 46000 \cdot 0.347 \cdot 186}{1 \cdot 100 \cdot 100} = 296.89 \text{ NJ}$$

4.04. Koliko ćemo platiti u Trstu za 1 par cipela ako one tamo stoje 50000 TTL i ako se u Trstu za 100 NJ plaća 156 TTL, a trgovac nam još odobrava popust od 10%?

Rješenje:

x NJ	za	1 par cipela
1 par	za	50000 TTL

$$x = \frac{1 \cdot 50000 \cdot 156 \cdot 0.9}{100 \cdot 100} = 680.4$$

$$x = \frac{1 \cdot 500000 \cdot 100 \cdot 90}{1 \cdot 156 \cdot 100} = 28846 \text{ NJ}$$

4.05. Burza u Londonu notira Tr oz čistoga zlata 174/3. Kolika je cijena za 30 oz zlata finoće 900?

Rješenje:

? sh	30 oz ☉ fin 900
1000	900 oz č. ☉
1	174,25 sh

$$x = \frac{30 \cdot 900 \cdot 174,25}{1000} = 4704,75 \text{ sh} = 235,4,9,$$

4.06. Koliko stoji u Notnoj banci USA 2.35 kg zlata finoće 800, ako 1 oz čistog zlata stoji 35 \$?

Rješenje:

? \$	2.35 kg ☉ fin 900
1000	800 kg č. ☉
1	1000 grama č. ☉
31.1035	1 oz č. ☉
1	35 \$

$$x = \frac{2,35 \cdot 800 \cdot 1000 \cdot 35}{1000 \cdot 31,1035} = 2115,52 \text{ $}.$$

4.07. Koliko stoji u Bank of England 25 oz rep. W2,-, ako 1 oz čistoga zlata notira 35\$, a 1 = 2,80 \$? Provizija je 1%.

Rješenje:

?	25 oz ☉ fin W2,-
24	20 oz č. ☉
1	35 \$
1	2,80

$$x = \frac{25 \cdot 20 \cdot 35 \cdot 2,80}{24} = 1575,,-, + 1\% \text{ prov.}$$

1575,,-,  
1,11,6  
-----  
1576,11,6

## 5. KAMATNI RAČUN

5.01. Kolike će kamate\* dati glavnica od 8800 NJ uz 5% za 4 godine?

Rješenje:

$$I = \frac{Cpn}{100} = \frac{8800 \cdot 5 \cdot 4}{100} = 1760 \text{ NJ}$$

5.02. Koja glavnica daje za 4 godine uz 5% 1760 NJ kamata?

Rješenje:

$$C = \frac{100I}{pn} = \frac{1760 \cdot 100}{5 \cdot 4} = 8800 \text{ NJ}$$

5.03. Glavnica od 8800 NJ daje 1760 NJ kamata uz 5% godišnju kamatnu stopu\*\*. Prije koliko je godina posuđen novac?

Rješenje:

$$n = \frac{100I}{Cp} = \frac{1760 \cdot 100}{8800 \cdot 5} = 4 \text{ godine.}$$

5.04. Koja je kamatna stopa dala 1760 NJ kamata od glavnice 8800 NJ za 4 godine?

Rješenje:

$$p = \frac{100I}{Cn} = \frac{1760 \cdot 100}{8800 \cdot 4} = 5.$$

5.05. Kolike su kamate od svote 125 532 NJ uz  $4\frac{3}{4}\%$  za 3 godine i 8 mjeseci?

Rješenje:

$$I = \frac{Cpn}{1200} = \frac{125\,523 \cdot 4 \cdot 75 \cdot 44}{1200} = 21\,863,49$$

5.06. Kolika je bila uložena svota ako su kamate nakon 12 godina i 3 mjeseca iznosile 8964 uz 5.5%?

Rješenje:

$$C = \frac{1200I}{pn} = \frac{8694 \cdot 1200}{5 \cdot 5 \cdot 147} = 13\,304,638 \text{ NJ}$$

5.07. Za koliko je mjeseci glavnica od 1 961 465.68 NJ dala 34 734.29 kamata uz  $4\frac{1}{4}\%$ ?

Rješenje:

$$n = \frac{1200I}{Cp} = \frac{34\,734,29 \cdot 1200}{1\,961\,465,68 \cdot 4,25} = 5 \text{ mjeseci.}$$

5.08. Koliko će dati kamata glavnica od 86 843.25 NJ za 62 dana uz 6%?

Rješenje:

$$I = \frac{Cpn}{36000} = \frac{86843,25 \cdot 6 \cdot 62}{36000} = 897,38 \text{ NJ}$$

5.09. Račun nije plaćen 18.06. nego tek 24.09. tekuće godine. Kamatna stopa na zatezne kamate od svote 126 312 NJ iznosi 8%. Kolike su zatezne kamate?

Rješenje:

Najprije treba izračunati koliko je dana prošlo od dana kada je trebalo račun platiti do dana kada je u stvar i uplaćen.

Do kraja lipnja 12 dana (prvi se dan ne računa, ali se računa zadnji dan)

srpanj	31 dan
kolovoz	31 dan
rujan	24 dana
	98 dana

$$I = \frac{C_{pn}}{36000} = \frac{126312 \cdot 8 \cdot 98}{36000} = 2750.79 \text{ NJ}$$

5.10. Koji će kapital dati 299 NJ kamata uz 5.45% od 15.07. do 22.11. tekuće godine?

Rješenje:

srpanj	16 dan
kolovoz	31 dan
rujan	30 dana
listopad	31 dan
studeni	22 dana
Ukupno	130 dana

$$C = \frac{36000I}{pn} = \frac{36000 \cdot 299}{5.45 \cdot 130} = 15\,172.66 \text{ NJ}$$

5.11. Dominika i Martina ulože istog dana u banku svoje kapitala uz 7.5% kamata godišnje. Martina je uložila 100 000 NJ manje nego Dominika.

Izračunaj njihove uložene kapitala.

Rješenje:

Označimo uložene kapitala: Dominikin s  $C_0$ , a Martinin s  $(C_0 - 100000)$ , onda je:

$$C_0 + C_0 \cdot 0.075 \cdot 5 = (C_0 - 100\,000) + (C_0 - 100\,000 \cdot 0.075 \cdot 20.8)$$

$$\text{Dominika } C_0 = 300\,000 \text{ NJ, Martina } C_0 - 100\,000 = 200\,000 \text{ NJ.}$$

5.12. Dominika i Martina uložile su u banku istog dana svoje kapitala: Dominika 100 000 NJ, Martina 120 000 NJ na jednake vremenske rokove. Uz koju kamatnu stopu su bili uloženi njihovi kapitali ako su donijeli jednake kamate i ako je Martinina kamatna stopa bila manja za 1%?

Rješenje:

$$C_1 \cdot p \cdot n = C_2 \cdot (p - 0.01) \cdot n$$

$$100\,000 \cdot p \cdot n = 120\,000 \cdot (p - 0.01) \cdot n$$

$$p = 0.06 = 6\%.$$

Dominikina kamatna stopa je 6%, a Martinina 5%.

5.13. Tri kapitala iznose zajedno 100 000 NJ. Ako se prvi uloži uz 5%, drugi uz 5.5%, a treći uz 7.5%, onda su godišnje kamate 6400 NJ. Kada bi prvi kapital bio uložen uz 7.5%, a drugi uz 5.5%, a treći ut 5%, onda bi godišnje kamate iznosile 5650 NJ. Odredi kapitala.

Rješenje:

$$0.05C_1 + 0.055C_2 + 0.075C_3 = 6400$$

$$0.075C_1 + 0.055C_2 + 0.05C_3 = 5650$$

Ako su zadane jednadžbe kapital  $C_3$  zamjenimo s  $100\,000 - (C_1 + C_2)$ , jer je

$$C_1 + C_2 + C_3 = 100\,000, \text{ nalazimo da je } C_1 = 20\,000, C_2 = 30\,000.$$

- 5.14. Uz koju kamatnu stopu je uložen kapital od 400 000 NJ, a uz koju kapital od 500 000 NJ, ako su nakon 6 godina oba kapitala u banci zajedno s kamatama iznosila 1 200 000 NJ, a nakon 10 godina kapitali u banci su bili jednaki?

Rješenje:

$$400\,000 + 400\,000 \cdot p_1 \cdot 6 + 500\,000 + 500\,000 \cdot p_2 \cdot 6 = 1\,200\,000$$

$$400\,000 + 400\,000 \cdot p_1 \cdot 10 = 500\,000 + 500\,000 \cdot p_2 \cdot 10$$

Iz ovog sustava nalazimo da je

$$p_1 = 0.075 = 7.5\%, p_2 = 0.04 = 4\%.$$

- 5.15. Koliko godina treba biti uložen kapital C da uz 5% donese toliko kamata koliki je i kapital?

Rješenje:

$$k = Cpn \text{ i } k = C \rightarrow C = Cpn \rightarrow 1 = pn \rightarrow n = \frac{1}{p} \rightarrow n = \frac{1}{0.05} = 20.$$

Potrebno je 20 godina.

- 5.16. Koliko godina treba biti uložen kapital C da se uz 7.5% utrostruči?

Rješenje:

$$k = Cpn \text{ i } k = 3C \rightarrow 3C = Cpn \rightarrow n = \frac{3}{p} \rightarrow n = \frac{3}{0.075} = 40.$$

Potrebno je 40 godina.

- 5.17. Uz koji postotak treba uložiti kapital C, da se za 32 godine učetrverostuči?

Rješenje:

$$k = Cpn \text{ i } k = 4C \rightarrow 4C = Cpn \rightarrow p = \frac{4}{n} \rightarrow p = \frac{4}{32} = 0.125 = 12.5\%.$$

- 5.18. Kapital od 58 000 NJ uložen je uz 5.5%, a 3 godine kasnije uložen je drugi kapital od 80 000 NJ uz 6%. Poslije koliko vremena će oba kapitala donijeti jednake kamate?

Rješenje:

$$58\,000 \cdot 0.055 \cdot n = 80\,000 \cdot 0.06 \cdot (n - 3)$$

$$n = 8 \text{ godina } 11 \text{ mjeseci i } 10 \text{ dana.}$$

- 5.19. Dva kapitala  $C_1$  i  $C_2$  ( $C_1 > C_2$ ) razlikuju se za 1000 NJ. Kapital  $C_1$  uložen je 4.5 godina uz 5%, a kapital  $C_2$  je uložen 8 godina uz 5.5%. Oba kapitala  $C_1$  i  $C_2$  donose 6210 NJ kamate. Koliki su kapitali  $C_1$  i  $C_2$ ?

Rješenje:

$$C_1 - C_2 = 1000 \rightarrow C_1 = C_2 + 1000$$

$$C_1 pn + (C_1 - 1000) p_2 n_2 = 6210$$

$$C_1 \cdot 0.05 \cdot 4.5 + (C_1 - 1000) \cdot 0.055 \cdot 8 = 6210$$

$$C_1 = 10\,000 \text{ NJ i } C_2 = 9000 \text{ NJ.}$$

Provjeri da prvi kapital nosi 2250 NJ kamata, a

prvi kapital nosi	2250 NJ kamata,
drugi kapital nosi	3960 NJ kamata
<b>Ukupno</b>	<b>6210 NJ</b>

- 5.20. Pozajmica je vraćena nakon 8 mjeseci zajedno sa 7% kamata u iznosu od 8792 NJ. Kolika je bila pozajmica, a kolike kamate?

Rješenje:

$$C = \frac{(C + I) \cdot 1200}{1200 + np} = \frac{8792 \cdot 1200}{1200 + 7 \cdot 8} = 8400 \text{ NJ}$$

Ako od uvećane svote odbijemo osnovnu svotu dobijemo kamate koje iznose  
 $8792 - 8400 = 392$ .

5.21. Zajmoprimatelju je isplaćeno 11 632 NJ po odbitku 6% kamata za razdoblje od 184 dana. Koliko je zaduženje, a kolike kamate?

Rješenje:

$$C = \frac{(C - I) \cdot 36\,000}{36\,000 - 184 \cdot 6} = \frac{11\,632 \cdot 36\,000}{36\,000 - 1104} = 12\,000 \text{ NJ}$$

Kontrola:

$$I = \frac{(C - I) \cdot np}{36\,000 - np} = \frac{11\,632 \cdot 6 \cdot 184}{34\,896} = 368$$

5.22. Ako je 25000.00\* početni kapital i  $p=22$  godišnja kamatna stopa, uz primjenu jednostavnog dekurzivnog ukamaciivanja izračunajte vrijednost tog kapitala na kraju treće godine, iznos jednogodišnjih kamata  $I_1$  i vrijednost ukupnih kamata nakon tri godine.

Rješenje:

$$C_0 = 25000.00$$

$$p = 22\%$$

$$C_3, I_1, I_3 = ?$$

$$I_1 = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

$$I_1 = 25000.00 \cdot \frac{22}{100} = 5500.00$$

$$I_3 = 3 \cdot I_1$$

$$I_3 = 3 \cdot 5500.00 = 16500.00$$

$$C_3 = C_0 + I_3$$

$$C_3 = 25000.00 + 16500.00 = 41500.00$$

5.23. Neka je  $p=25$  godišnja kamatna stopa. Nakon koliko će se godina neki kapital utrostručiti ako primjenjujemo jednostavno dekurzivno ukamaciivanje?

Rješenje:

$$C_n = 3C_0$$

$$p = 25\%$$

$$n = ?$$

$$C_n = C_0 + n \cdot C_0 \frac{p}{100}$$

$$3 \cdot C_0 = C_0 + n \cdot C_0 \frac{25}{100}$$

$$3 = 1 + n \cdot 0.25$$

$$2 = n \cdot 0.25$$

5.24. Kapital od 10000.00 nakon 4 godine uz primjenu jednostavnog dekurzivnog ukamatiivanja naraste na iznos od 15000.00. Koja je godišnja kamatna stopa pri tome primjenjena?

Rješenje:

$$C_0 = 10000.00$$

$$n = 4 \text{ godine}$$

$$C_4 = 15000.00$$

$$p = ?$$

$$C_4 = C_0 + n \cdot C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

$$15000.00 = 10000.00 + 4 \cdot 10000.00 \cdot \frac{p}{100}$$

$$5000.00 = 400 \cdot p$$

$$p = \frac{5000.00}{400} = 12.5$$

5.25. Ako je 15750.00 osnovni kapital i  $p=2$  mjesečna kamatna stopa, uz primjenu jednostavnog dekurzivnog ukamatiivanja izračunajte vrijednost tog kapitala nakon 6 mjeseci, iznos mjesečnih kamata  $I_1$  i vrijednost ukupnih kamata nakon 6 mjeseci.

Rješenje:

$$C_0 = 15750.00$$

$$P_m = 2\% \text{ mjesečno}$$

$$m = 6 \text{ mjeseci}$$

$$C_6, I_1, I_6 = ?$$

$$C_m = C_0 + m \cdot C_0 \cdot \frac{p_m}{100}$$

$$C_6 = 15750.00 + 6 \cdot 15750.00 \cdot \frac{2}{100} = 17640.00$$

$$I_1 = C_0 \cdot \frac{p_m}{100}$$

$$I_1 = 15750.00 \cdot \frac{2}{100} = 315.00$$

$$I_6 = 6 \cdot I_1$$

$$I_6 = 6 \cdot 315.00 = 1890.00$$

5.26. Zadan je početni kapital od 32500.00 i  $p=19\%$  godišnja kamatna stopa. Uz primjenu jednostavnog dekurzivnog ukamatiivanja izračunajte vrijednost kapitala nakon 16 mjeseci.

Rješenje:

$$C_0 = 32500.00$$

$$p = 19\% \text{ godišnje}$$

$$n = 16 \text{ mjeseci}$$

$$m = 12$$

$$C_{16} = ?$$

$p_m$  = jednostavna mjesečna kamatna stopa

$$p_m = \frac{p}{m}$$

$$P_m = \frac{19}{12} = 1.5833333$$

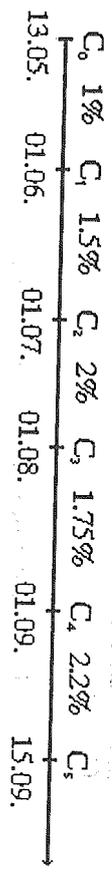
$$C_n = C_0 \cdot \left( 1 + n \cdot \frac{P_m}{100} \right)$$

$$C_{16} = 32500.00 \cdot \left( 1 + 16 \cdot \frac{1.5833333}{100} \right) = 40733.33$$

5.27. Netko je 13.05. posudio iznos od 15000.00 uz obračun jednostavnih dekurzivnih kamata i promjenjivu mjesečnu kamatnu stopu. Dug treba vratiti 15.09. Mjesečna kamatna stopa u svibnju bila je 1, u lipnju 1.5, u srpnju 2, u kolovozu 1.75, u rujnu 2.2. Izračunajte veličinu duga na dan 15.09.

Rješenje:

- $C_0 = 15000.00$  (13.05.)
- $p_1 = 1\%$  (svibanj)
- $p_2 = 1.5\%$  (lipanj)
- $p_3 = 2\%$  (srpanj)
- $p_4 = 1.75\%$  (kolovoz)
- $p_5 = 2.2\%$  (rujan)
- $C_n$  (15.09.) = ?



U sljedećoj tablici izračunat je dnevni kamatnjak ( $p_d$ ) kao odnos mjesečne kamatne stope i broja dana u svakom mjesecu (npr. za mjesec svibanj  $p_d = 1/31 = 0.03226$ ).

mjesec	broj dana	dani korištenja kapitala	mjesečna kamata	dnevni kamatnjak ( $p_d$ )
svibanj	31	19	1	0.03226
lipanj	30	30	1.5	0.05
srpanj	31	31	2	0.06452
kolovoz	31	31	1.75	0.05645
rujan	30	15	2.2	0.07333

Iznos kapitala  $C_5$  dobiva se na sljedeći način:

$$C_1 = 15000.00 + 19 \cdot 15000.00 \cdot \frac{0.03226}{100} = 15091.94$$

$$C_2 = 15091.94 + 30 \cdot 15000.00 \cdot \frac{0.05}{100} = 15316.94$$

$$C_3 = 15316.94 + 31 \cdot 15000.00 \cdot \frac{0.06452}{100} = 15616.94$$

$$C_4 = 15616.94 + 31 \cdot 15000.00 \cdot \frac{0.05645}{100} = 15879.44$$

$$C_5 = 15879.44 + 15 \cdot 15000.00 \cdot \frac{0.07333}{100} = 16044.43$$

5.28. Neka je 25000.00 početni kapital i  $p=22$  godišnja kamatna stopa. Uz primjenju složenog dekurzivnog ukamatačivanja izračunajte vrijednost tog kapitala na kraju treće godine i vrijednost ukupnih kamata nakon 3 godine.

Rješenje:

$$C_0 = 25000.00$$

$$p = 22\%$$

$$\frac{n=3 \text{ godine}}{C_3, I_3 = ?}$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r = 1 + \frac{22}{100} = 1.22$$

$$C_n = C_0 \cdot r^n$$

$$C_3 = 25000.00 \cdot 1.22^3 = 45396.20$$

$$I_n = C_0 \cdot (r^n - 1)$$

$$I_3 = 25000.00 \cdot (1.22^3 - 1) = 20396.20$$

- 5.29. Neka je  $p=25$  godišnja kamatna stopa\*. Nakon koliko će se godina neki kapital  $C_0$  utrostručiti ako primjenjujemo složeno dekurzivno ukamativanje?

Rješenje:

$$p=25$$

$$C_n = 3C_0$$

$$n = ?$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r = 1 + \frac{22}{100} = 1.22$$

$$C_n = C_0 \cdot r^n$$

$$3 \cdot C_0 = C_0 \cdot 1.25^n$$

$$3 = 1.25^n$$

$$n = \frac{\ln 3}{\ln 1.25} = 4.923343212 \text{ godine}$$

Broj dana u četvrtoj godini, kada se kapital utrostručuje, računa se iz sljedećeg odnosa:

$$1:365 = 0.923343212 : x$$

$$x = \frac{365 \cdot 0.923343212}{1} = 337 \text{ dana}$$

Dakle, kapital se pri navedenim uvjetima utrostručio nakon 4 godine i 337 dana.

- 5.30. Početni kapital od 10000.00 nakon 4 godine uz primjenu složenog dekurzivnog ukamativanja naraste na iznos 15000.00. Koja je godišnja kamatna stopa pri tome primjenjena?

Rješenje:

$$\begin{array}{l} C_0 = 10000.00 \\ n = 4 \text{ godine} \\ C_4 = 15000.00 \\ \hline p = ? \end{array}$$

$$p = 100 \cdot \left[ \left( \frac{C_n}{C_0} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right]$$

$$p = 100 \cdot \left[ \left( \frac{15000.00}{10000.00} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] = 10.6682\%$$

31. Gospodin X uložio je u banku početni kapital od 30500.00 uz obračun složenih dekurzivnih godišnjih kamata.

a) Ako je godišnja kamatna stopa  $p = 6.125$ , kolika će biti vrijednost konačnog kapitala na kraju četvrtre godine i vrijednost ukupnih kamata na početku četvrtre godine?

b) Nakon koliko godina početni kapital naraste na iznos 36786.07, ako je primjenjivan godišnji kamatnjak  $p = 5.5$ ?

c) Koju kamatnu stopu je banka primjenjivala ako je nakon 12 godina početni kapital narastao na vrijednost 64937.44?

d) Koliki bi početni kapital gospodin X morao uložiti u banku da bi nakon 18 godina uz godišnju kamatnu stopu 5.5 dobio konačni kapital od 100000.00?

Rješenje:

$$\begin{array}{l} a) \\ C_0 = 30500.00 \\ p = 6.125 \\ n = 4 \text{ godine} \\ \hline C_n, I_n = ? \end{array}$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r = 1 + \frac{6.125}{100} = 1.06125$$

$$C_n = C_0 \cdot r^n$$

$$C_4 = 30500.00 \cdot 1.06125^4 = 38687.50$$

Vrijednost kamata računa se na početku godine.

$$I_n = C_0 \cdot (r^{n-1} - 1)$$

$$I_4 = 30500.00 \cdot (1.06125^3 - 1) = 5954.65$$

b)

$$C_n = 36786.07$$

$$C_0 = 30500.00$$

$$p = 5.5$$

$$n = ?$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r = 1 + \frac{5.5}{100} = 1.055$$

$$C_n = C_0 \cdot r^n$$

$$r = \frac{C_n}{C_0}$$

$$n = \frac{\ln \frac{C_n}{C_0}}{\ln r}$$

$$n = \frac{\ln \frac{36786.07}{30500.00}}{\ln 1.055} = 3.5 \text{ godina}$$

c)

$$C_{12} = 64937.44$$

$$C_0 = 30500.00$$

$$n = 12 \text{ godina}$$

p = ?

$$p = 100 \cdot \left[ \left( \frac{C_n}{C_0} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right]$$

$$p = 100 \cdot \left[ \left( \frac{64937.44}{30500.00} \right)^{\frac{1}{12}} - 1 \right] = 6.5$$

d)

$$n = 18 \text{ godina}$$

$$p = 5.5$$

$$C_{18} = 100000.00$$

C<sub>n</sub> = ?

$$C_n = C_0 \cdot r^n$$

$$C_0 = \frac{C_n}{r^n} = 38153$$

5.32. Poduzeće za prodaju stanova ima dvije ponude za jednu vrstu stana: A: 80000.00 odmah, 100000.00 nakon 2 godine, 40000.00 nakon 5 godina; B: 96600.00 odmah, 75000.00 nakon 3 godine, 50000.00 nakon 4 godine. Koja ponuda je povoljnija za kupca, ako se računa sa 7% (odnosno 9%) dekurzivnih godišnjih kamata?

Rješenje:

Potrebno je izračunati sadašnje vrijednosti (SC<sub>0</sub>) ponuda A i B i utvrditi koja je od njih manja. Za kupca koji kupuje stan ponuda koja daje manju sadašnju vrijednost bit će i povoljnija..

a)

ponuda A:

$$C_0 = 80000.00$$

$$C_2 = 100000.00$$

$$C_5 = 40000.00$$

$$p = 7$$

$$SC_0 = ?$$

$$C_0 = 80000.00$$

$$C_0 = \frac{C_2}{r^2} = \frac{100000.00}{1.07^2} = 87343.87$$

$$C_0 = \frac{C_5}{r^5} = \frac{40000.00}{1.07^5} = 28343.87$$

$$\sum C_0 = 80000.00 + 87343.87 + 28519.45 = 195863.32$$

ponuda B:

$$C_0 = 96600.00$$

$$C_3 = 75000.00$$

$$C_4 = 50000.00$$

$$\frac{p=7}{SC_0 = ?}$$

$$C_0 = 80000.00$$

$$C_0 = \frac{C_2}{r^2} = \frac{100000.00}{1.07^2} = 87343.87$$

$$C_0 = \frac{C_5}{r^5} = \frac{40000.00}{1.07^5} = 28519.45$$

$$\sum C_0 = 96600.00 + 61222.34 + 38144.76 = 195967.10$$

Ponuda A je povoljnija budući da je njezina sadašnja vrijednost manja od sadašnje vrijednosti ponude B za 103.78.

b)

ponuda A:

$$C_0 = 80000.00$$

$$C_2 = 100000.00$$

$$C_5 = 40000.00$$

$$\frac{p=9}{SC_0 = ?}$$

$$C_0 = 80000.00$$

$$C_0 = \frac{C_2}{r^2} = \frac{100000.00}{1.09^2} = 84168.00$$

$$C_0 = \frac{C_5}{r^5} = \frac{40000.00}{1.09^5} = 25997.26$$

$$\sum C_0 = 80000.00 + 84168.00 + 25997.26 = 190165.26$$

ponuda B:

$$C_0 = 96600.00$$

$$C_3 = 75000.00$$

$$C_4 = 50000.00$$

$$\frac{p=9}{SC_0 = ?}$$

$$C_0 = 96600.00$$

$$C_0 = 96600.00$$

$$C_3 = \frac{C_3}{r^3} = \frac{75000.00}{1.09^3} = 57913.76$$

$$C_4 = \frac{C_4}{r^4} = \frac{50000.00}{1.09^4} = 35421.26$$

$$\sum C_0 = 96600.00 + 57913.76 + 35421.26 = 189935.02$$

Ponuda B je povoljnija budući da je njezina sadašnja vrijednost manja od sadašnje vrijednosti ponude A za 230.24.

5.33. Ako je 20000.00 početni kapital i  $p=2.5$  polugodišnja kamatna stopa, uz primjenu složenog dukurzivnog ukamaciivanja izračunajte vrijednost tog kapitala nakon 3 godine i vrijednost ukupnih kamata nakon 3 godine.

Rješenje:

$$C_0 = 200000.00$$

$$P_m = 2.5$$

$$m = 2$$

$$n = 3 \text{ godine}$$

$$C_6, I_6 = ?$$

$$r = 1 + \frac{P_m}{100}$$

$$r = 1 + \frac{2.5}{100} = 1.025$$

$$C_{m:n} = C_0 \cdot r^{m \cdot n}$$

$$C_{2:3} = 200000.00 \cdot 1.025^{2 \cdot 3}$$

$$C_6 = 23193.87$$

$$I_{m:n} = C_0 \cdot (r^{m \cdot n} - 1)$$

$$I_{2:3} = 200000.00 \cdot (1.025^{2 \cdot 3} - 1)$$

$$I_6 = 3193.87$$

5.34. Neka je 50000.00 početni kapital, a  $p=19$  dekurzivna godišnja kamatna stopa. Uz primjenu konformnog kamatnjaka izračunajte vrijednost kapitala nakon 16 mjeseci.

Rješenje:

$$C_0 = 50000.00$$

$$p = 19$$

$$m = 12$$

$$k = 16 \text{ mjeseci}$$

$$P_m, C_{16} = ?$$

$$P_m = 100 \cdot \left( \sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right)$$

$$P_{12} = 100 \cdot \left( \sqrt[12]{1 + \frac{19}{100}} - 1 \right) = 1.4601687$$

$$r = 1 + \frac{P_m}{100}$$

$$r = 1 + \frac{1.4601687}{100} = 1.014601687$$

$$C_k = C_0 \cdot r^k$$

$$C_{16} = 50000.00 \cdot 1.014601687^{16} = 63052.06$$

5.35. U godini koja nije prestupna za vrijednosti dekurzivnih godišnjih kamatnih stopa:  $p \in \{100, 375, 1000\}$  izračunajte ekvivalentne konformne mjesečne kamatne stope za veljaču, travanj i srpanj.

Rješenje:

$$p \in \{100, 375, 1000\}$$

$$P_m \text{ za veljaču, travanj i srpanj?}$$

$$P_m = 100 \cdot \left( \sqrt[m]{1 + \frac{P}{100}} - 1 \right)$$

$$\underline{P=100}$$

$$P_m = 100 \cdot \left( \sqrt[m]{1 + \frac{P}{100}} - 1 \right)$$

$$P_{\frac{365}{28}} = 100 \cdot \left( \sqrt[\frac{365}{28}]{1 + \frac{100}{100}} - 1 \right) = 5.461201$$

$$P_{\frac{365}{30}} = 100 \cdot \sqrt[30]{1 + \frac{100}{100}} - 1 = 5.862511$$

$$P_{\frac{365}{31}} = 100 \cdot \left( \sqrt[\frac{365}{31}]{1 + \frac{100}{100}} - 1 \right) = 6.063739$$

$$\underline{P=375}$$

$$P_{\frac{365}{28}} = 100 \cdot \left( \sqrt[\frac{365}{28}]{1 + \frac{375}{100}} - 1 \right) = 12.696582$$

$$P_{\frac{365}{30}} = 100 \cdot \left( \sqrt[\frac{365}{30}]{1 + \frac{375}{100}} - 1 \right) = 13.662879$$

$$P_{\frac{365}{31}} = 100 \cdot \left( \sqrt[\frac{365}{31}]{1 + \frac{375}{100}} - 1 \right) = 14.149131$$

$$\underline{P=1000}$$

$$P_{\frac{365}{28}} = 100 \cdot \left( \sqrt[\frac{365}{28}]{1 + \frac{1000}{100}} - 1 \right) = 20.195348$$

$$P_{\frac{365}{30}} = 100 \cdot \left( \sqrt[\frac{365}{30}]{1 + \frac{1000}{100}} - 1 \right) = 21.785033$$

$$P_{\frac{365}{31}} = 100 \cdot \left( \sqrt[\frac{365}{31}]{1 + \frac{1000}{100}} - 1 \right) = 22.587743$$

5.36. U godini koja nije prestupna za vrijednosti dekurzivnih mjesečnih kamatnih stopa:  $P_{12} \in \{0.8, 1.2, 12, 20\}$  izračunajte odgovarajuću korektnu godišnju kamatnu stopu ako se mjesečno kamatna stopa odnosi na: veljaču, travanj i srpanj.

Rješenje:

$$\underline{P_{12} \in \{0.8, 1.2, 12, 20\}}$$

p za veljaču, travanj i srpanj?

Da bi se dobila korektna godišnja kamatna stopa prvo se mjesečna stopa pretvara u dnevnu, a onda dnevna u godišnju.

$$P_d = 100 \cdot \left( \sqrt[d]{1 + \frac{P_m}{100}} - 1 \right)$$

$$P = 100 \cdot \left( \left( 1 + \frac{P_d}{100} \right)^{365} - 1 \right)$$

$$\underline{p=0.8}$$

$$P_d = 100 \cdot \left( \sqrt[28]{1 + \frac{0.8}{100}} - 1 \right) = 0.0284618$$

$$P = 100 \cdot \left( \left( 1 + \frac{0.0284618}{100} \right)^{365} - 1 \right) = 10.946$$

$$P_d = 100 \cdot \left( \sqrt[30]{1 + \frac{0.8}{100}} - 1 \right) = 0.02656409$$

$$P = 100 \cdot \left( \left( 1 + \frac{0.02656409}{100} \right)^{365} - 1 \right) = 10.180$$

$$P_d = 100 \cdot \left( \sqrt[31]{1 + \frac{0.8}{100}} - 1 \right) = 0.02570708$$

$$P = 100 \cdot \left( \left( 1 + \frac{0.02570708}{100} \right)^{365} - 1 \right) = 9.836$$

$$\underline{p=1.2}$$

$$P_d = 100 \cdot \left( \sqrt[28]{1 + \frac{1.2}{100}} - 1 \right) = 0.04261112$$

$$P = 100 \cdot \left( \left( 1 + \frac{0.04261112}{100} \right)^{365} - 1 \right) = 16.824$$

$$P_d = 100 \cdot \left( \sqrt[30]{1 + \frac{1.2}{100}} - 1 \right) = 0.03976981$$

$$P = 100 \cdot \left( \left( 1 + \frac{0.03976981}{100} \right)^{365} - 1 \right) = 15.619$$

$$P_d = 100 \cdot \left( \sqrt[31]{1 + \frac{1.2}{100}} - 1 \right) = 0.03848667$$

$$P = 100 \cdot \left( \left( 1 + \frac{0.03848667}{100} \right)^{365} - 1 \right) = 15.079$$

$$\underline{p=12}$$

$$P_d = 100 \cdot \left( \sqrt[28]{1 + \frac{12}{100}} - 1 \right) = 0.40556551$$

$$P = 100 \cdot \left( \left( 1 + \frac{0.40556551}{100} \right)^{365} - 1 \right) = 338.12$$

$$P_d = 100 \cdot \left( \sqrt[30]{1 + \frac{12}{100}} - 1 \right) = 0.37847671$$

$$P = 100 \cdot \left( \left( 1 + \frac{0.37847671}{100} \right)^{365} - 1 \right) = 297.03$$

$$P_d = 100 \cdot \left( \sqrt[31]{1 + \frac{12}{100}} - 1 \right) = 0.36624545$$

$$P = 100 \cdot \left( \left( 1 + \frac{0.36624545}{100} \right)^{365} - 1 \right) = 279.75$$

$$P = 20$$

$$P_d = 100 \cdot \left( \sqrt[28]{1 + \frac{20}{100}} - 1 \right) = 0.653273$$

$$P = 100 \cdot \left( \left( 1 + \frac{0.653273}{100} \right)^{365} - 1 \right) = 976.92$$

$$P_d = 100 \cdot \left( \sqrt[30]{1 + \frac{20}{100}} - 1 \right) = 0.609589$$

$$P = 100 \cdot \left( \left( 1 + \frac{0.609589}{100} \right)^{365} - 1 \right) = 819.12$$

$$P_d = 100 \cdot \left( \sqrt[31]{1 + \frac{20}{100}} - 1 \right) = 0.58986696$$

$$P = 100 \cdot \left( \left( 1 + \frac{0.58986696}{100} \right)^{365} - 1 \right) = 755.65$$

- 5.37. Netko je 13.05. posudio iznos od 20000.00 uz obračun složjenih dekurzivnih kamata i promjenjivu mjesečnu kamatnu stopu. Dug treba vratiti 29.07. Mjesečna kamatna stopa u svibnju bila je 3, u lipnju 2.5, a u srpnju 2. Izračunajte veličinu duga na dan 29.07.

Rješenje:

$$C_0 = 20000.00 \text{ (13.05)}$$

$$p = 3 \text{ (svibanj)}$$

$$p = 2.5 \text{ (lipanj)}$$

$$p = 2 \text{ (srpanj)}$$

$$C_n \text{ (29.07.)} = ?$$

U sljedećoj tablici izračunat je dnevni kamatnjak ( $P_d$ ) prema sljedećoj formuli:

$$P_d = 100 \cdot \left( \sqrt[1 + \frac{P_m}{100}}{1} - 1 \right)$$

mjesec	broj dana	dani korištenja kapitala	mjesečna kamata	dnevni kamatnjak ( $P_d$ )
svibanj	31	19	3	0.09539645
lipanj	30	30	2.5	0.08234259
srpanj	31	29	2	0.06389985

$$P_d = 100 \cdot \left( \sqrt[31]{1 + \frac{3}{100}} - 1 \right) = 0.09539645$$

$$P_d = 100 \cdot \left( \sqrt[30]{1 + \frac{2.5}{100}} - 1 \right) = 0.08234259$$

$$P_d = 100 \cdot \left( \sqrt[31]{1 + \frac{2}{100}} - 1 \right) = 0.06389985$$

Uz pomoć dnevnog kamatnjaka računa se konačna vrijednost. Složeno ukamaciivanje potrebno je raditi za svaki mjesec posebno jer su kamatne stope različite.

$$C_1 = 20000.00 \cdot \left(1 + \frac{0.09539645}{100}\right)^{19} = 20365.64$$

$$C_2 = 20365.64 \cdot \left(1 + \frac{0.08234259}{100}\right)^{30} = 20874.78$$

$$C_3 = 20874.78 \cdot \left(1 + \frac{0.06389985}{100}\right)^{29} = 21265.09$$

5.38. Neka je 25000.00 početni kapital, a  $p=15$  dekurzivna godišnja kamatna stopa. Izračunajte vrijednost tog kapitala nakon 150 dana (u godini koja nije prestupna) uz primjenu relativnog ili konformnog dnevnog kamatnjaka. Kolika je efektivna godišnja kamatna stopa u slučaju primjene relativnog kamatnjaka?

Rješenje:

$$C_0 = 25000.00$$

$$p = 15$$

$$n = 150 \text{ dana}$$

$$m = 365$$

$$C_{150}, P_d, P_r, P_e = ?$$

Konačna vrijednost kapitala uz primjenu konformnog dnevnog kamatnjaka:

$$P_d = 100 \cdot \left( \sqrt[365]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right)$$

$$P_d = 100 \cdot \left( \sqrt[365]{1 + \frac{15}{100}} - 1 \right) = 0.0382983$$

$$r = 1 + \frac{0.0382983}{100} = 1.000382983$$

$$C_n = C_0 \cdot r^n$$

$$C_{150} = 25000.00 \cdot 1.000382983^{150} = 26477.95$$

Konačna vrijednost kapitala uz primjenu relativnog kamatnjaka:

$$P_r = \frac{p}{m}$$

$$P_r = \frac{15}{365} = 0.04109589$$

$$r = 1 + \frac{0.0410959}{100} = 1.000410959$$

$$C_{150} = 25000.00 \cdot 1.000410959^{150} = 26589.25$$

Efektivni godišnji kamatnjak dobiva se iz sljedećeg odnosa:

$$C_0 \cdot \left(1 + \frac{P_e}{100}\right) = C_0 \cdot \left(1 + \frac{P_r}{100}\right)^m$$

$$P_e = 100 \cdot \left(1 + \frac{P_r}{100}\right)^m - 100$$

$$P_e = 100 \cdot \left( 1 + \frac{0.0410959}{100} \right)^{365} = 16.18$$

5.39. Koja je polugodišnja relativna kamatna stopa ekvivalentna efektivnom godišnjem kamatnjaku 9%?

Rješenje:

$$\frac{P_e = 9}{m = 2}$$

$$P_r = ?$$

$$1 + \frac{P_e}{100} = \left( 1 + \frac{P_r}{100} \right)^m$$

$$P_r = 100 \cdot \sqrt[m]{1 + \frac{P_e}{100}} - 100$$

$$P_r = 100 \cdot \sqrt[2]{1 + \frac{9}{100}} - 100 = 4.4$$

5.40. Početni kapital od 50000.00 ukamatačuje se kvartalno uz primjenu relativnog kamatnjaka i godišnje nominalne kamatne stope 8.

- Na koju konačnu vrijednost će narasti kapital nakon 20 godina?
- Kolika je efektivna godišnja kamatna stopa?
- Koja relativna mjesečna kamatna stopa odgovara efektivnoj kamatnoj stopi iz (b)?

Rješenje:

a)

$$C_0 = 50000.00$$

$$p = 8\%$$

$$m = 4$$

$$n = 20 \text{ godina}$$

$$C_{mn} = ?$$

$$P_r = \frac{p}{m}$$

$$P_r = \frac{8}{4} = 2$$

$$C_k = C_0 \cdot r^k$$

$$C_{20 \cdot 4} = 50000.00 \cdot 1.02^{80}$$

$$C_{80} = 243772$$

b)

$$P_r = 2$$

$$m = 4$$

$$P_e = ?$$

$$1 + \frac{P_e}{100} = \left( 1 + \frac{P_r}{100} \right)^m$$

$$P_e = 100 \cdot \left( 1 + \frac{P_r}{100} \right)^m - 100$$

$$P_e = 100 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^4 - 100 = 8.243$$

c)

$$P_e = 8.243$$

$$m = 12$$

$$P_r = ?$$

$$1 + \frac{P_e}{100} = \left(1 + \frac{P_r}{100}\right)^m$$

$$P_r = 100 \cdot \sqrt[m]{1 + \frac{P_e}{100}} - 100$$

$$P_r = 100 \cdot \sqrt[12]{1 + \frac{8.243}{100}} - 100 = 0.662$$

5.41. Nakon 75 dana (u godini koja nije prestupna) kapital od 15000.00 uz primjenu složene dekurzivnog ukamaciivanja naraste na 15381.47. Koja je godišnja kamatna stopa primjenjena?

Rješenje:

$$C_0 = 15000.00$$

$$C_{75} = 15381.47$$

$$n = 75$$

$$P = ?$$

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$$

$$r = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1$$

$$r = \sqrt[75]{\frac{15381.47}{15000.00}} - 1 = 0.000334901$$

$$r = 1 + \frac{P_d}{100}$$

$$P_d = 100 \cdot 1.000334901 - 100 = 0.0334901$$

$$P_d = 100 \cdot \left(\sqrt[100]{1 + \frac{P_d}{100}} - 1\right)$$

$$P = 100 \cdot \left(\sqrt[100]{\frac{P_d}{100} + 1} - 1\right)^d - 100$$

$$P = 100 \cdot \left(\sqrt[100]{\frac{0.0334901}{100} + 1} - 1\right)^{365} - 100 = 13$$

5.42. Nakon koliko će dana (u godini koja nije prestupna) kapital od 12000.00 uz 15% dekurzivnih godišnjih kamata narasti na 12516.24?

Rješenje:

$$C_0 = 12000.00$$

$$C_n = 12516.24$$

$$p = 15$$

$$n = ?$$

$$P_d = 100 \cdot \left(\sqrt[100]{1 + \frac{P_d}{100}} - 1\right)$$

$$P_d = 100 \cdot \left( \sqrt[365]{1 + \frac{15}{100}} - 1 \right) = 0.03829828$$

$$r = 1 + \frac{0.03829828}{100} = 1.000382983$$

$$C_n = C_0 \cdot r^n$$

$$\ln \frac{C_n}{C_0} = n \cdot \ln r$$

$$n = \frac{\ln \frac{12516.24}{12000.00}}{\ln 1.000382983} = 110.00 \text{ dana}$$

5.43. Netko je uložio u banku početni kapital od 50000.00 i nakon 6 godina uz obračun složenih dekurzivnih godišnjih kamata dobio 88971.03. Prve dvije godine kamatna stopa  $p$  se nije mijenjala. Sljedeće godine povećala se za 2, a posljednje 3 godine smanjila se za 1. Kolika kamatna stopa je vrijedila prve dvije godine?

Rješenje:

$$C_0 = 50000.00$$

$$C_6 = 88971.03$$

$$n = 6 \text{ godina}$$

$$P_1 = p$$

$$P_2 = p$$

$$P_3 = p+2$$

$$P_4 = p+1$$

$$P_5 = p+1$$

$$P_6 = p+1$$

$$p = ?$$

$$r = 1 + \frac{P_1}{100} = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r = 1 + \frac{P_2}{100} = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r_1 = 1 + \frac{P_3}{100} = 1 + \frac{p+2}{100}$$

$$r_2 = 1 + \frac{P_4}{100} = 1 + \frac{p+1}{100}$$

$$r_2 = 1 + \frac{P_4}{100} = 1 + \frac{p+1}{100}$$

$$r_2 = 1 + \frac{P_4}{100} = 1 + \frac{p+1}{100}$$

$$C_2 = C_0 \cdot r^2 = C_0 \cdot \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^2$$

$$C_3 = C_0 \cdot r_1 = C_0 \cdot \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^2 \cdot \left( 1 + \frac{p+2}{100} \right)^1$$

$$C_6 = C_3 \cdot r_2^3 = C_0 \cdot \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^2 \cdot \left( 1 + \frac{p+2}{100} \right)^1 \cdot \left( 1 + \frac{p+1}{100} \right)^3$$

$$88971.03 = 50000.00 \cdot r^2 \cdot (r + 0.02) \cdot (r + 0.01)^3$$

$$50000.00 \cdot r^2 \cdot (r + 0.02) \cdot (r + 0.01)^3 - 88971.03 = 0$$

$$50000 \cdot r^6 + 25000 \cdot r^5 + 45 \cdot r^4 + 0.35 \cdot r^3 + 0.001 \cdot r^2 - 88971.03 = 0$$

Ovako dobivena jednačdba može se riješiti pomoću više metoda, a ovdje će to biti učinjeno metodom Regula falsi (tzv. metoda krivih položaja). Prvo je potrebno odrediti početnu aproksimaciju  $x_0$  tako da bude  $f(x_0)f(c) < 0$ . Nakon toga definiira se pravac (sekanta) kroz točke  $(c, f(c))$  i  $(x_0, f(x_0))$ . Slijedeća aproksimacija  $x_1$  dobiva se na sjecištu tog pravca s osi  $x$ . Ponavljanjem postupka dobiva se niz aproksimacija  $(x_n)$  zadan rekurzivnom formulom:

$$x_{n+1} = \frac{c \cdot f(x_n) - x_n \cdot f(c)}{f(x_n) - f(c)}$$

U ovom primjeru lako se može pokazati da je  $x_0=1$  (budući da je  $r > 1$ ), a  $c=1.1$ . Naime, te vrijednosti zadovoljavaju prethodni uvjet:  
 $f(x_0)=f(1)=-36425.679$   
 $f(c)=f(1.1)=8831.136$

Kako je  $f(x_0)f(c) < 0$ , prihvaćamo vrijednosti za  $x_0$  i  $c$ .

Daljnje provođenje postupka je dugačko i složeno, pa se zato preporučuje upotreba elektroničkog računala. Ovdje je prikazan BASIC program pomoću kojeg se može riješiti prethodno dobivena jednačdba.

10 'REGULA FALSI

20 'Objašnjenje:

30 ' -linijom 230 definiran je naziv funkcije

40 ' -linijom 90 definirana je sama funkcija

50 ' -linijom 240 određena je početna aproksimacija ( $x_0, c$ ),

točnost

60 ' (EPS), m1. maksimalan broj iteracija (NMAX)

```
70 READ A$:CLS:PRINT " ";A$:PRINT " "
80 READ c,x0,EPS,m1,NMAX:n=0
90 DEF
FNF(x)=50000*x^6+2500*x^5+45*x^4+0.35*x^3+0.001*x^2
-88971.03
100 PRINT "      n      xn      g1      f(xn)"
110 PRINT "-----"
```

```
120 PRINT USING "#####.#####";n,x0,g1,FNF(x0)
130 f0=FNF(x0):fc=FNF(c):x1=(c*f0-x0*fc)/(f0-fc)
140 g1=ABS(FNF(x1))/m1:n=n+1:IF n>NMAX THEN 190
150 PRINT USING "#####.#####";n,
INT(x1*1000000)/100000,g1,FNF(x1)
160 IF g1<EPS THEN 200
170 x0=x1
180 GOTO 130
190 PRINT:PRINT "PREMAŠEN DOZVOLJEN BROJ
ITERACIJA"
200 PRINT "":PRINT " g1=ABS(f(xn))/m1 " " m1=":m1
210 PRINT "":EPS=":EPS
220 END
230 DATA
"f(x)=50000*x^6+2500*x^5+45*x^4+0.35*x^3+0.001*x^2-
88971.03"
240 DATA 1.11,1,0.00005,1.6,50
```

Pokretanjem programa, za  $n=6$  dobiva se vrijednost  $x_n=r=1.0925$ .  
 Budući da je:

$$p = 100 \cdot (r - 1) \Rightarrow p = 9.25.$$

5.44. Netko je uložio u banku početni kapital od 100000.00 i nakon 3 godine uz obračun složenih dekurzivnih godišnjih kamata dobio 127718.10. Prve godine kamatna stopa  $p$  nije se mijenjala, a svake slijedeće povećala se za 1. Kolika kamatna stopa je vrijedila prve godine?

Rješenje:

$C_0 = 1000000,00$   
 $C_3 = 127718,10$   
 $n = 3$  godine

$P_1 = P$

$P_2 = P + 1$

$P_3 = P + 2$

$p = ?$

$$r = 1 + \frac{P_1}{100} = 1 + \frac{P}{100}$$

$$r_1 = 1 + \frac{P_2}{100} = 1 + \frac{P+1}{100}$$

$$r_2 = 1 + \frac{P_3}{100} = 1 + \frac{P+2}{100}$$

$$C_1 = C_0 \cdot r = C_0 \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)$$

$$C_2 = C_1 \cdot r_1 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{P+1}{100}\right)$$

$$C_3 = C_2 \cdot r_2 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{P+1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{P+2}{100}\right)$$

$$127718,10 = 1000000,00 \cdot r \cdot (r + 0,01) \cdot (r + 0,02)$$

$$1000000,00 \cdot r \cdot (r + 0,01) \cdot (r + 0,02) - 127718,10 = 0$$

$$1000000 \cdot r^3 + 30000 \cdot r^2 + 20 \cdot r - 127718,10 = 0$$

Slično kao u zadatku 5.43. vidimo da je:

$$f(x_0) = f(1) = -24698,1$$

$$f(c) = f(1,11) = 12763,5$$

Kako je  $f(x_0)f(c) < 0$ , prihvaćamo vrijednosti za  $x_0$  i  $c$ .

Ovdje je prikazan BASIC program pomoću kojeg se može riješi prethodno dobivena jednažba.

```

10 ' REGULA FALSI
20 ' Objašnjenje:
30 ' - linijom 230 definiran je naziv funkcije
40 ' - linijom 90 definirana je sama funkcija
50 ' - linijom 240 određena je početna aproksimacija (x0, c),
točnost
60 ' (EPS), m1, maksimalan broj iteracija (NMAX)
70 READ A$: CLS: PRINT " "; A$: PRINT " "
80 READ c, x0, EPS, m1, NMAX: n=0
90 DEF FNF(x)=100000*x^3+3000*x^2+20*x-127718,1
100 PRINT " " n xn g1 f(xn)"
110 PRINT " "
-----"
120 PRINT USING "#####"; n, x0, g1, FNF(x0)
130 f0=FNF(x0): fc=FNF(c): x1=(c*f0-x0*fc)/(f0-fc)
140 g1=ABS(FNF(x1))/m1: n=n+1: IF n>NMAX THEN 190
150 PRINT USING "#####"; n,
INT(x1*1000000)/100000, g1, FNF(x1)
160 IF g1<EPS THEN 200
170 x0=x1
180 GOTO 130
190 PRINT: PRINT " PREMAŠEN DOZVOLJEN BROJ
ITERACIJA "
200 PRINT " "; PRINT " g1=ABS(f(xn))/m1 " " m1 =" ; m1
210 PRINT " " EPS =" ; EPS
220 END
230 DATA "f(x)=100000*x^3+3000*x^2+20*x-127718,1"
240 DATA 1,11,1,0,0005,1,6,50

```

Pokretanjem programa, za  $n=6$  dobiva se vrijednost  $x_n=r=1.075$ .  
 Budući da je:

$$p = 100 \cdot (r - 1) \Rightarrow p = 7.5.$$

5.45. Godina je podijeljena na kvartale. U prvom kvartalu primjenjuje se godišnja kamatna stopa  $p_1=12$ , u drugom  $p_2=15$ , u trećem  $p_3=20$ , a u četvrtom godišnja kamatna stopa  $p_4=18$ . Izračunajte prosječnu godišnju kamatnu stopu.

Rješenje:

$$\begin{array}{l} m=4 \\ p_1=12 \\ p_2=15 \\ p_3=20 \\ p_4=18 \\ \hline r=? \end{array}$$

$$r_1 = 1 + \frac{12}{100} = 1.12$$

$$r_2 = 1 + \frac{15}{100} = 1.15$$

$$r_3 = 1 + \frac{20}{100} = 1.2$$

$$r_4 = 1 + \frac{18}{100} = 1.18$$

$$r = \left( r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$r = (1.12 \cdot 1.15 \cdot 1.2 \cdot 1.18)^{\frac{1}{4}} = 1.16210342$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$p = 100 \cdot (r - 1)$$

$$p = 100 \cdot (1.16210342 - 1) = 16.21 \%$$

5.46. Jedna rentna ustanova treba početkom svake od narednih 20 godišnjih isplaćivati iznos  $a=30000.00$ .

a) Kolika je sadašnja vrijednost cijele rente (svih uplata) u trenutku prve isplate ako se primjenjuje dekurzivna godišnja kamatna stopa  $p=7$ ?

b) Kolika je konačna vrijednost cijele rente u trenutku posljednje isplate ako je  $p=7$ ?

c) Ako se primjenjuje dekurzivna godišnja kamatna stopa  $p=7$ , koliki kapital  $C_0$  korisnik rente morao uplatiti godinu dana prije prve isplate?

d) Uz koju dekurzivnu godišnju kamatnu stopu bi kapital od 300000.00 uplaćen 100 dana prije prve isplate pokrio cijelu rentu?

e) Koliko dugo bi mogla biti isplaćivana godišnja renta  $a=30000.00$  ako je 100 dana prije prve isplate rentnoj ustanovi stavljen na raspolaganje kapital  $C_0=240000.00$  uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu  $p=7$ ? Koliki kapital bi preostao u trenutku posljednje isplate?

Rješenje:

a)

$$a=30000.00$$

$$n=20 \text{ godina}$$

$$p=7$$

$$A_{20}=?$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r = 1 + \frac{7}{100} = 1.07$$

$$A_n = a \cdot r^{-n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$A_{20} = 30000.00 \cdot 1.07^{-20+1} \cdot \frac{1.07^{20} - 1}{1.07 - 1} = 340067.86$$

b)

$$a=30000.00$$

$$n=20 \text{ godina}$$

$$p=7$$

$$S_{20}=?$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r = 1 + \frac{7}{100} = 1.07$$

$$S_n = a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$S_{19} = 30000.00 \cdot 1.07 \cdot \frac{1.07^{19} - 1}{1.07 - 1} = 1199864.77$$

$$S_{20} = S_{19} + a$$

$$S_{20} = 1199864.77 + 30000.00 = 1229864.77$$

c)

$$A_n = C_1 = 340067.86$$

$$n=1 \text{ godina}$$

$$p=7$$

$$C_0=?$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r = 1 + \frac{7}{100} = 1.07$$

$$C_1 = C_0 \cdot r^1$$

$$C_0 = \frac{C_1}{r}$$

$$C_0 = \frac{340067.86}{1.07} = 317820.43$$

d)

$$C_0=300000.00$$

$$a=30000.00$$

$$n=20 \text{ godina}$$

$$p=7$$

$$m=100 \text{ dana}$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r = 1 + \frac{7}{100} = 1.07$$

Prvo je potrebno izračunati vrijednost uloženog kapitala u trenutku prve isplate:

$$C_1 = 300000.00 \cdot 1.07^{\frac{100}{365}} = 305612.85$$

$$a \cdot r^{-n+1} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = C_1$$

$$300000.00 \cdot r^{-20+1} \cdot \frac{r^{20} - 1}{r - 1} = 305612.85$$

$$\frac{r - r^{-19}}{r - 1} = 10.187095$$

$$9.187095 \cdot r^{20} - 10.187095 \cdot r^{19} + 1 = 0$$

Kao u zadatku 5.43. lako se može pokazati da je  $x_0=1.01$  (budući da je  $r>1$ ), i  $c = 1.1$ , te

$$f(x_0)=f(1.01)=-0.0971119$$

$$f(c)=f(1.1)=0.502835$$

Kako je  $f(x_0)f(c)<0$ , prihvaćamo vrijednosti za  $x_0$  i  $c$ .

Ovdje je prikazan BASIC program pomoću kojeg se može riješiti prethodno dobivena jednačica.

```

10 'REGULA FALSI
20 'Objašnjenje:
30 ' - linijom 230 definirana je naziv funkcije
40 ' - linijom 90 definirana je sama funkcija
50 ' - linijom 240 određena je početna aproksimacija (x0, c),
točnost
60 ' (EPS), m1, maksimalan broj iteracija (NMAX)
70 READ A$: CLS: PRINT " "; A$: PRINT " "
80 READ c, x0, EPS, m1, NMAX: n=0
90 DEF FNF(x)=9.187095*x ^ 20 - 10.187095*x ^ 19 + 1
100 PRINT " n xn g1 f(xn)"
110 PRINT " -----"
120 PRINT USING "#####.#####"; n, x0, g1, FNF(x0)
130 f0=FNF(x0): fc=FNF(c): x1=(c*f0-x0*fc)/(f0-fc)
140 g1=ABS(FNF(x1))/m1: n=n+1: IF n>NMAX THEN 190
150 PRINT USING "#####.#####"; n,
INT(x1*1000000)/1000000, g1, FNF(x1)
160 IF g1<EPS THEN 200
170 x0=x1
180 GOTO 130
190 PRINT: PRINT " PREMAŠEN DOZVOLJEN BROJ
ITERACIJA"
200 PRINT " ": PRINT " g1=ABS(f(xn))/m1 " " m1 =" ; m1
210 PRINT " " EPS =" ; EPS
220 END
230 DATA "f(x)=9.187095*x ^ 20 - 10.187095*x ^ 19 + 1"
240 DATA 1.11, 1.01, 0.000005, 1.6, 50
Pokretanjem programa, za n=12 dobiva se vrijednost  $x_n=r=1.086243$ 
Budući da je:

```

$$p = 100 \cdot (r - 1) \Rightarrow p = 8.6243.$$

e)

$$a=300000.00$$

$$r=1.07$$

$$\frac{p=7}{n, DC = ?}$$

Prvo je potrebno izračunati vrijednost uloženog kapitala u trenutku prve isplate:

$$C_1 = 240000.00 \cdot 1.07^{\frac{100}{365}} = 244490.28$$

Sada mora biti ispunjen uvjet:

$$a \cdot r^{-n-1} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = C_1$$

$$n = 1 - \frac{\ln \left( r - C_1 \cdot \frac{r-1}{a} \right)}{\ln r}$$

$$n = 1 - \frac{\ln \left( 1.07 - 244490.28 \cdot \frac{1.07-1}{30000.00} \right)}{\ln 1.07} = 11.25888474 \text{ godina}$$

Preostali kapital nakon 11 godina (DC) može se računati na sljedeći način:

$$DC = C_1 \cdot r^{10} - a \cdot \frac{r^{11} - 1}{r - 1}$$

$$DC = 244490.28 \cdot 1.07^{10} - 30000.00 \cdot \frac{1.07^{11} - 1}{1.07 - 1} = 7441.41$$

5.47. Početkom svake od narednih 4 godine netko bi trebao uplaćivati iznos od 12000.00. Treba izračunati ukupnu vrijednost svih tih uplata na kraju pete godine ako se tijekom cijelog razdoblja primjenjuje dekurzivna godišnja kamatna stopa  $p=20$ .

$$\frac{n=4 \text{ godine}}{a=12000.00}$$

$$\frac{p=20}{S_4 = ?}$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r = 1 + \frac{20}{100} = 1.2$$

$$S_n = a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$S_4 = 12000.00 \cdot 1.2 \cdot \frac{1.2^4 - 1}{1.2 - 1} = 77299.20$$

5.48. Netko je tijekom 10 godina početkom svake godine uplaćivao 10 000.00, pa je na kraju desete godine podigao iznos od 196545.83. Čitavom razdoblju kamatna stopa se nije mijenjala. Izračunajte veličinu dekurzivne godišnje kamatne stope.

Rješenje:

$$\frac{n=10 \text{ godina}}{a=10000.00}$$

$$\frac{S_{10}=196545.83}{p = ?}$$

$$S_n = a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$196545.83 = 10000.00 \cdot r \cdot \frac{r^{10} - 1}{r - 1}$$

$$196545.83 \cdot (r - 1) = 10000.00 \cdot r \cdot (r^{10} - 1)$$

$$10000 \cdot r^{11} - 206545.83 \cdot r + 19645.83 = 0$$

Kao u zadatku 5.43. lako se može pokazati da je  $x_0=1.01$  (budući da je  $r>1$ ), a  $c=1.12$ , te

$$f(x_0)=f(1.01)=-908.77483$$

$$f(c)=f(1.12)=0.00033$$

Kako je  $f(x_0)f(c)<0$ , prihvaćamo vrijednosti za  $x_0$  i  $c$ .

Ovdje je prikazan BASIC program pomoću kojeg se može riješiti prethodno dobivena jednažba.

```
10 ' REGULA FALSI
```

```
20 ' Objašnjenje:
```

```
30 ' - linijom 230 definirana je naziv funkcije
```

```
40 ' - linijom 90 definirana je sama funkcija
```

```
50 ' - linijom 240 određena je početna aproksimacija (x0, c),
```

```
točnost
```

```
60 ' (EPS), m1, maksimalan broj iteracija (NMAX)
```

```
70 READ A$:CLS:PRINT " ";A$:PRINT " "
```

```
80 READ g0, EPS, m1, NMAX: n=0
```

```
90 DEF FNF(x)=10000*x ^ 11 - 206545.83*x + 196545.83
```

```
100 PRINT " n xn g1 f(xn)"
```

```
110 PRINT "
```

```
120 PRINT USING "#####.#####"; n, x0, g1, FNF(x0)
```

```
150 PRINT USING "#####.#####"; n,
INT(x1*1000000)/1000000, g1, FNF(x1)
160 IF g1<EPS THEN 200
170 x0=x1
180 GOTO 130
190 PRINT: PRINT " PREMAŠEN DOZVOLJENI BROJ
ITERACIJA"
200 PRINT " "; PRINT " g1=ABS(f(xn))/m1 " " m1 =";m1
210 PRINT " "; EPS ="; EPS
220 END
230 DATA "f(x)=10000*x ^ 11 - 206545.83*x + 196545.83"
240 DATA 1.11, 1.01, 0.000005, 1.6, 50
```

Pokretanjem programa, za  $n=2$  dobiva se vrijednost  $x_n=t=1.119999$   
Budući da je:

$$p = 100 \cdot (r - 1) \Rightarrow p = 11.9999 \approx 12.$$

5.49. Koliki iznos treba uplatiti neka osoba na početku neke godine da b  
idućih 12 godina, počevši od iduće, na početku svake godine mogli  
podići iznos od 35000.00? Tijekom cijelog razdoblja primjenjivat će s  
konstantna dekurzivna godišnja kamatna stopa  $p=12$ .

Rješenje:

$n=12$  godine

$a=35000.00$

$p=12$

$A=?$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r = 1 + \frac{12}{100} = 1.12$$

$$A = a \cdot (r^{-1} + r^{-2} + \dots + r^{-12})$$

$$A = a \cdot r^{-12} \cdot (r^{11} + r^{10} + \dots + r^1 + 1)$$

$$A = a \cdot r^{-12} \cdot \frac{r^{12} - 1}{r - 1}$$

$$A = 35000.00 \cdot 1.12^{-12} \cdot \frac{1.12^{12} - 1}{1.12 - 1} = 216803.10$$

5.50. Neka je  $p$  dekurzivna godišnja kamatna stopa. Pretpostavimo da se na kraju svake godine, kroz  $n$  godina uplaćuje jednaki iznos  $a$ . Izračunajte sumu konačnih  $S_n$  (na kraju  $n$ -te godine) i sadašnjih  $A_n$  (na početku prve godine) vrijednosti svih uplaćenih svota.

Rješenje:

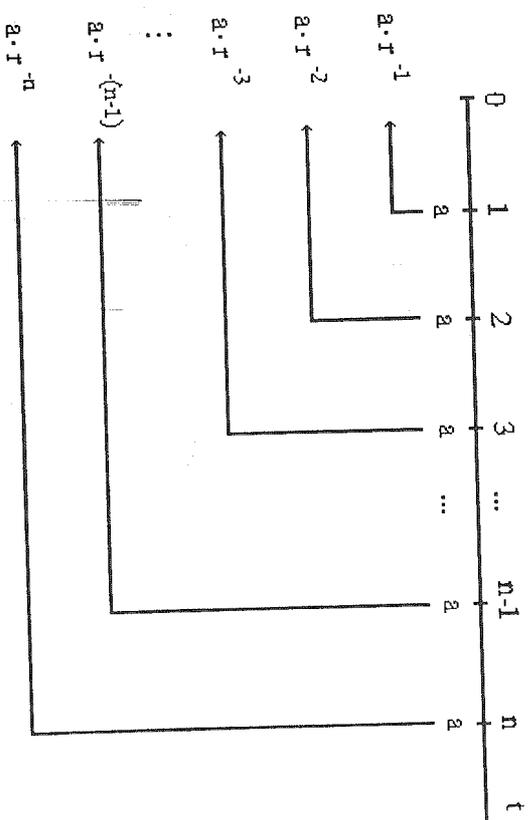
Konačna vrijednost na kraju  $n$ -te godine:

$$S_n = a \cdot r^1 + a \cdot r^2 + a \cdot r^3 + \dots + a \cdot r^{n-2} + a \cdot r^{n-1}$$

$$S_n = a \cdot (1 + r^1 + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-2} + r^{n-1})$$

$$S_n = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Sadašnja vrijednost više periodičnih uplata na kraju razdoblja:



Pretpostavimo da je:

$$a = a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n,$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}.$$

Tada je:

$$A_n = a \cdot r^{-1} + a \cdot r^{-2} + a \cdot r^{-3} + \dots + a \cdot r^{-(n-1)} + a \cdot r^{-n}$$

$$A_n = a \cdot (r^{-1} + r^{-2} + r^{-3} + \dots + r^{-(n-1)} + r^{-n})$$

$$A_n = a \cdot r^{-n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

5.51. Netko tijekom 4 godine, na početku svake godine, uplaćuje 35000.00. Kamatna stopa u prvoj godini je 12, u drugoj 10, u trećoj 15, a u četvrtoj

Rješenje:

$$n=4$$

$$a=35000.00$$

$$p_1=12$$

$$p_2=10$$

$$p_3=15$$

$$p_4=8$$

$$A_4, S_4 = ?$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r_1 = 1 + \frac{12}{100} = 1.12$$

$$r_2 = 1 + \frac{10}{100} = 1.1$$

$$r_3 = 1 + \frac{15}{100} = 1.15$$

$$r_4 = 1 + \frac{8}{100} = 1.08$$

$$A_0 = 35000.00$$

$$A_1 = a \cdot r_1^{-1} = 35000.00 \cdot 1.12^{-1} = 31250.00$$

$$A_2 = a \cdot r_1^{-1} \cdot r_2^{-1} = 35000.00 \cdot 1.12^{-1} \cdot 1.1^{-1} = 28409.09$$

$$A_3 = a \cdot r_1^{-1} \cdot r_2^{-1} \cdot r_3^{-1} = 35000.00 \cdot 1.12^{-1} \cdot 1.1^{-1} \cdot 1.15^{-1} = 24703.56$$

$$A_4 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 119362.65$$

$$S_1 = a \cdot r_1 = 35000.00 \cdot 1.12 = 39200.00$$

$$S_2 = (S_1 + a) \cdot r_2 = (39200.00 + 35000.00) \cdot 1.1 = 81620.00$$

$$S_3 = (S_2 + a) \cdot r_3 = (81620.00 + 35000.00) \cdot 1.15 = 134113.00$$

$$S_4 = (S_3 + a) \cdot r_4 = (134113.00 + 35000.00) \cdot 1.08 = 182642.04$$

5.52. Koliki iznos treba uplatiti 1. siječnja (u godini koja nije prestupna) da bi na kraju svakog od prvih 6 mjeseci te godine mogao podići iznos od 2500.00 uz pretpostavku konstantne dekurzivne kamatne stope  $p=16$ .

Rješenje:

$$a=2500.00$$

$$n=6 \text{ mjeseci}$$

$$p=16$$

$$A = ?$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r = 1 + \frac{16}{100} = 1.16$$

$$A = a \cdot \left( r^{-\frac{31}{365}} + r^{-\frac{59}{365}} + r^{-\frac{90}{365}} + r^{-\frac{120}{365}} + r^{-\frac{151}{365}} + r^{-\frac{181}{365}} \right)$$

$$A = 2500.00 \cdot \left( 1.16^{-\frac{31}{365}} + 1.16^{-\frac{59}{365}} + 1.16^{-\frac{90}{365}} + 1.16^{-\frac{120}{365}} + 1.16^{-\frac{151}{365}} + 1.16^{-\frac{181}{365}} \right)$$

3. Koliki iznos treba uplatiti neka osoba na početku godine da bi 8 godina na kraju svake godine (počevši od tekuće) mogla podići iznos od 50000.00? Tijekom cijelog razdoblja primjenjivat će se konstantna dekurzivna godišnja kamatna stopa  $p=10$ .

Rješenje:

$$n=8$$

$$a=50000.00$$

$$p=10$$

$$A = ?$$

$$A = a \cdot (r^{-1} + r^{-2} + \dots + r^{-n}) = a \cdot r^{-n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$A = 50000.00 \cdot 1.1^{-8} \cdot \frac{1.1^8 - 1}{1.1 - 1} = 266746.31$$

4. Na tekućem računu otvorenom 05.01.1994. tijekom te iste godine zabilježene su sljedeće promjene: 05.01. (uplata 2500.00), 03.02. (isplata: 1350.00), 10.02. (uplata: 1950.00), 07.03. (uplata: 1560.00, isplata: 2500.00), 25.03. (isplata: 1500.00), 08.04. (uplata: 1450.00), 15.04. (isplata: 2500.00), 10.05. (uplata: 2200.00), 01.06. (isplata: 2500.00), 08.06. (isplata: 250.00). Banka primjenjuje dekurzivnu godišnju kamatnu stopu  $p=24$  i na pozitivni i na negativni saldo. Izradite tablicu iz koje će se vidjeti kretanje stanja na tekućem računu.

Rješenje:

Sljedeća tabela prikazuje kretanje stanja na tekućem računu. Broj dana od jedne do druge promjene ne uključuje prvi dan promjene, a uzima u obzir zadnji dan (npr. od 05.01. do 03.02. dani se računaju ovako  $(31-5)+(3-0) = 26 + 3 = 29$ .

r. br.	datum	dani	uplata	isplata	kamata	stari saldo	novi saldo
1.	05.01.	0	2500.00	-	0	0	2500.00
2.	03.02.	29	-	1350.00	43.09	2500.00	1193.09
3.	10.02.	7	1950.00	-	4.93	1193.09	3148.02
4.	07.03.	25	1560.00	2500.00	46.73	3148.02	2254.75
5.	25.03.	18	-	1500.00	24.05	2254.75	778.80
6.	08.04.	14	1450.00	-	6.45	778.80	2235.25
7.	15.04.	7	-	2500.00	9.24	2235.25	-255.51
8.	10.05.	25	2200.00	-	-3.79	-255.51	1940.70
9.	01.06.	22	-	2500.00	25.33	1940.70	-533.97
10.	08.06.	7	-	250.00	-2.21	-533.97	-786.18
S		154	9660.00	10600.00	153.82		

Kamate se računaju za određeni broj dana uz primjenu godišnje kamatne stope na stari saldo (npr. kamate na dan 03.02. računaju se:  $2500(1.24^{29/365} - 1) = 43.09$ ). Novi saldo dobije se kao zbroj starog salda i kamata na koji se dodaje uplata i/ili oduzima isplata provedena na taj dan (npr.:  $2500.00 + 43.09 - 1350.00 = 1193.09$ ).

5.55. U štednoj knjižici otvorenoj 05.02.1994. tijekom te iste godine zabilježene su sljedeće promjene: 05.02. (uplata: 2000.00), 03.03. (uplata: 1800.00), 20.05. (uplata: 1500.00), 28.05. (isplata: 1500.00), 01.07. (uplata: 2500.00), 03.08. (isplata: 1000.00), 30.09. (uplata: 2000.00), 08.11. (uplata: 1200.00), 13.12. (uplata: 2500.00). Banka primjenjuje dekurzivnu godišnju kamatnu stopu  $p=7.5$ . Izradite tablicu iz koje će se vidjeti kretanje salda na štednoj knjižici. Koliko je stanje 31.12.1994.?

Rješenje:

Sljedeća tabela prikazuje kretanje stanja na štednoj knjižici. Broj dana računa se isto kao u u prethodnom primjeru.

I. br.	datum	dani	uplata	isplata	kamata	stari saldo	novi saldo
1.	05.02	0	2000.00	-	0	0	2000.00
2.	03.03.	26	1800.00	-	10.33	2000.00	3810.33
3.	20.05.	78	1500.00	-	59.35	3810.33	5369.68
4.	28.05.	8	-	-	8.52	5369.68	3878.20
5.	01.07.	34	2500.00	-	26.21	3878.20	6404.41
6.	03.08.	33	-	1000.00	42.01	6404.41	5446.42
7.	30.09.	58	2000.00	-	62.95	5446.42	7509.37
8.	25.10.	25	2200.00	-	37.29	7509.37	9746.66
9.	08.11.	14	1200.00	-	27.07	9746.66	10973.73
10	13.12.	35	2500.00	-	76.37	10973.73	13550.10
11	31.12.	18	0	0	48.41	13550.10	13598.51
S		329	15700.00	2500.00	398.51		

Kamate se računaju za određeni broj dana uz primjenu godišnje kamatne stope na stari saldo (npr. kamate na dan 03.03. računaju se:  $2000.00(1.075^{26/365}-1)=10.33$ ). Novi saldo dobije se kao zbroj starog salda i kamata na koji se dodaje uplata i/ili oduzima isplata provedena na taj dan (npr.:  $2000.00+10.33+1800.00=3810.33$ ).

5.56. Kredit od 9000.00 treba otplatiti u roku  $n=9$  "mjeseci" uz godišnju kamatnu stopu  $p=12$  primjenom principa jednakih otplatnih kvota. Izračunajte otplatnu kvotu, ukupne kamate te izradite plan otplate.

Rješenje:

$$C_0=9000.00$$

$$n=9 \text{ mjeseci}$$

$$p=12$$

$$m=12$$

$$\text{otplatna kvota, } I =$$

$$\text{otplatna kvota} = \frac{C_0}{n} = \frac{9000.00}{9} = 1000.00$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100 \cdot m} \cdot \frac{n+1}{2}$$

$$I = 9000.00 \cdot \frac{12}{100 \cdot 12} \cdot \frac{9+1}{2} = 450.00$$

Mjesečna kamata se računa kao odnos godišnje kamate i broj mjeseci, a ovdje iznosi  $12/12=1\%$ . Iz toga slijedi da je kamata za prvi mjesec  $0.01 \cdot 9000.00=90$ ; za drugi mjesec:  $0.01 \cdot 8000.00=80.00$ ; itd. Na isti način računaju se i kamate za ostale mjesece. Otplatna rata predstavlja zbroj otplatne kvote i kamate (npr. za prvi mjesec ona iznosi:  $1000.00+90.00=1090.00$ ; za drugi mjesec ona iznosi:  $1000.00+80.00=1080.00$ ; itd.). Ostatak duga je razlika između oplatne kvote (na početku prvog mjeseca ostatak duga je 9000.00, na početku drugog mjeseca on iznosi:  $9000.00-1000.00=8000.00$ ; itd.). Svi tako dobiveni podaci zabilježeni su u sljedećoj tablici.

	početak mjeseca	ostatak duga	otplatna kvota	prispijele kamate	otplatne rate
1		9000.00	1000.00	90.00	1090.00
2		8000.00	1000.00	80.00	1080.00
3		7000.00	1000.00	70.00	1070.00
4		6000.00	1000.00	60.00	1060.00
5		5000.00	1000.00	50.00	1050.00
6		4000.00	1000.00	40.00	1040.00
7		3000.00	1000.00	30.00	1030.00
8		2000.00	1000.00	20.00	1020.00
9		1000.00	1000.00	10.00	1010.00
S			9000.00	450.00	9450.00

5.57. Prethodni zadatak riješite prema principu jednakih otplatnih rata.

Rješenje:

$$C_0 = 9000.00$$

$$m = 9 \text{ mjeseci}$$

$$p = 12$$

$$I = 450$$

$$a = ?$$

$$R = \frac{1}{n}(C_0 + I)$$

$$R = \frac{1}{9}(9000 + 450)$$

$$R = \frac{9450}{9} = 1050.00$$

Kraj mjeseca	prispijele kamate	otplatna rata	otplatna kvota	ostatak duga
0	-	-	-	9000.00
1	90.00	1050.00	960.00	8040.00
2	80.40	1050.00	969.60	7070.40
3	70.70	1050.00	979.30	6091.10
4	60.91	1050.00	989.09	5102.01
5	51.02	1050.00	998.98	4103.03
6	41.03	1050.00	1008.97	3094.06
7	30.94	1050.00	1019.06	2075.00
8	20.75	1050.00	1029.25	1045.75
9	10.46	1050.00	1039.54	6.21
S	456.21	9450.00	8993.79	

Postupak računanja pojedinih elemenata plana otplata sličan je kao i u prethodnom zadatku. Kamate se računaju pomoću mjesečne

konstantna, otplatna kvota predstavlja razliku od prispijele kamate do otplatne rate.

5.58. Automobil, čija je otplatna cijena 89600.00 može se kupiti na kredit uz 10% učešća. Ostatak prodajne cijene može se otplatiti:

- u 12 mjeseci s 12% godišnjih kamata,
- u 18 mjeseci s 15% godišnjih kamata,
- u 24 mjeseca s 20% godišnjih kamata.

Koliko bi iznosila mjesečna rata u sva tri slučaja, ako se primjenjuje princip jednakih otplatah rata.

Rješenje:

$$C = 89600.00$$

$$u = 10$$

$$U, C_0 = ?$$

$$U = \frac{C \cdot u}{100} = \frac{89600.00 \cdot 10}{100} = 8960.00$$

$$C_0 = C - U = 89600.00 - 8960.00 = 80640.00$$

a)

$$m = 12$$

$$n = 12$$

$$p = 12$$

$$R = ?$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100 \cdot m} \cdot \frac{n+1}{2}$$

$$I = 80640.00 \cdot \frac{12}{100 \cdot 12} \cdot \frac{12+1}{2} = 5241.60$$

$$R = \frac{1}{n} \cdot (C_0 + I)$$

$$R = \frac{1}{12} \cdot (80640.00 + 5241.60) = 7156.80$$

b)

$$m=12$$

$$n=18$$

$$p=15$$

$$R = ?$$

$$I = 80640.00 \cdot \frac{15}{100 \cdot 12} \cdot \frac{18+1}{2} = 9576.00$$

$$R = \frac{1}{18} \cdot (80640.00 + 9576.00) = 5012.00$$

c)

$$m=12$$

$$n=24$$

$$p=20$$

$$R = ?$$

$$I = 80640.00 \cdot \frac{20}{100 \cdot 12} \cdot \frac{24+1}{2} = 16800.00$$

$$R = \frac{1}{24} \cdot (80640.00 + 16800.00) = 4060.00$$

5.59. Zajam od 30000.00 odobren je 1. siječnja 1991. godine. Treba ga otplaćiti kroz 7 godina uz nepromjenjivu godišnju kamatnu stopu  $p=12$  jednakim anuitetima plaćanim na kraju godine. Izračunati anuitet i izdati

Rješenje:

$$C_0 = 30000.00$$

$$n = 7 \text{ godina}$$

$$p = 12$$

$$a, O_1 = ?$$

$$a = C_0 \cdot r^n \cdot \frac{r-1}{r^n-1}$$

$$a = 30000.00 \cdot 1.12^7 \cdot \frac{1.12-1}{1.12^7-1} = 6573.53$$

Sljedeća tablica sadrži plan otplate. U njoj se prispjele kamate računaju na ostatak duga (npr. 31.12.1991. ona iznosi: 30000.00(1.12-1)=3600.00; 31.12.1992. ona iznosi: 27026.47(1.12-1)=3243.18; itd.), dok je visina anuiteta fiksno određena i jedanaka za svaku godinu.

datum	prispjele kamate	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
01.01.1991.	-	-	-	30000.00
31.12.1991.	3600.00	2973.53	6573.53	27026.47
31.12.1992.	3243.18	3330.35	6573.53	23696.12
31.12.1993.	2843.53	3730.00	6573.53	19966.12
31.12.1994.	2395.93	4177.60	6573.53	15788.52
31.12.1995.	1894.62	4678.91	6573.53	11109.61
31.12.1996.	1333.15	5240.38	6573.53	5869.23
31.12.1997.	704.31	5869.23	6573.54	0
S	16014.72	30000.00	46014.72	

Otplatna kvota predstavlja razliku između annuiteta i prispijele kamate. U planu otplate prikazanom u tablici vrijednost posljednjeg annuiteta je morala biti korigirana zbog zaokruživanja brojeva na dvije decimale.

Ostatak duga na dan 29. srpnja 1995. godine sastoji se od ostatka duga na dan 31.12.1994. i prispijele kamata za razdoblje od 1. siječnja 1995. do 29. srpnja 1995. (210 dana). Ostatak duga na dan 31.12.1994. moguće je jednostavno očitati iz tablice ili izračunati na ovaj način:

$$O_k = C_0 \cdot \frac{r^n - r^k}{r^n - 1}$$

$$O_4 = 30000.00 \cdot \frac{1.12^7 - 1.12^4}{1.12^7 - 1} = 15788.51$$

Traženi ostatak duga tada iznosi:

$$O = 15788.51 \cdot 1.12^{210} = 16852.27$$

60. Zajam od 50000.00 odobren na početku godine treba vratiti jednakim godišnjim anuitetima od 9000.00 plativim krajem godine uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu  $p=9$ . Koliko godina će trajati otplata zajma i koliki će biti posljednji (krtji) anuitet?

Rješenje:

$$C_0 = 50000.00$$

$$a = 9000.00$$

$$p = 9$$

$$n = ?$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r = 1 + \frac{9}{100} = 1.09$$

$$a = C_0 \cdot r^n \cdot \frac{r-1}{r^n-1}$$

$$9000.00 = 50000.00 \cdot 1.09^n \cdot \frac{1.09-1}{1.09^n-1}$$

$$9000 \cdot (1.09^n - 1) = 4500 \cdot 1.09^n$$

$$4500 \cdot 1.09^n = 9000$$

$$n = \frac{\ln 2}{\ln 1.09} = 8.0432 \text{ godina}$$

Sljedeća tablica sadrži plan otplate. U njoj se prispijele kamate računaju na ostatak duga (npr. na kraju prve godine ona iznosi:  $50000.00(1.09-1) = 4500.00$ ; na kraju druge godine ona iznosi:  $45500.00(1.09-1) = 4995.00$ ; itd.), dok je visina annuiteta fiksno određena i jednaka za svaku godinu, osim za zadnju, u kojoj se anuitet računa kao zbroj ostatka duga i prispijele kamate. U ostalim godinama otplatna kvota predstavlja razliku između annuiteta i prispijele kamate.

kraj godine	prispijela kamata	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
0	-	-	-	50000.00
1	4500.00	4500.00	9000.00	45500.00
2	4095.00	4905.00	9000.00	40595.00
3	3653.55	5346.45	9000.00	35248.55
4	3172.37	5827.63	9000.00	29420.92
5	2647.88	6352.12	9000.00	23068.80
6	2076.19	6923.81	9000.00	16144.99
7	1453.05	7546.95	9000.00	8598.04
8	773.82	8598.08	9371.86	0

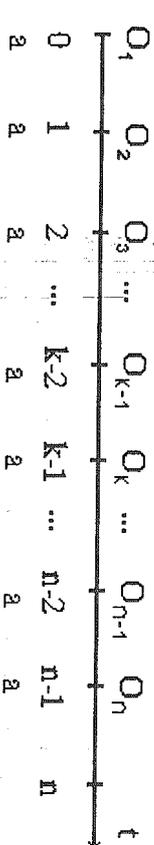
Traženi je iznos zadnjeg (krijevog) anuiteta:

$$a_8 = 9371.86$$

5.61. Neka je  $C_0$  zajam odobren na početku godine, koji treba vratiti s  $n$  jednakih godišnjih anuiteta plativih početkom godine. Dekurzivna godišnja kamatna stopa  $p$  je nepromjenjiva u čitavom razdoblju otplate. Izračunajte veličinu anuiteta i ostatak duga na početku  $k$ -te ( $k < n$ ) godine.

Rješenje:

$C_0 =$  iznos zajma  
 $n =$  broj jednakih godišnjih anuiteta  
 $p =$  nepromjenjiva dekurzivna kamatna stopa  
 $a, O_k = ?$



Ostatak duga na početku pojedinog obračunskog razdoblja može se izraziti na sljedeći način:

$$O_1 = C_0 - a$$

$$O_2 = O_1 \cdot r - a = (C_0 - a) \cdot r - a = C_0 r - a \cdot r - a$$

$$O_3 = O_2 \cdot r - a = (C_0 \cdot r - a \cdot r - a) \cdot r - a = C_0 \cdot r^2 - a \cdot r^2 - a \cdot r - a$$

$$O_n = C_0 \cdot r^{n-1} - a \cdot r^{n-1} - a \cdot r^{n-2} - \dots - a \cdot r - a$$

Kako ostatak duga na kraju  $n$ -te godine mora biti nula, odnosno  $O_n = 0$ , iz tog slijedi:

$$C_0 \cdot r^{n-1} - a \cdot r^{n-1} - a \cdot r^{n-2} - \dots - a \cdot r - a = 0$$

$$C_0 \cdot r^{n-1} - a \cdot r^{n-1} - a \cdot r^{n-2} - \dots - a \cdot r - a = 0$$

$$a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = C_0 \cdot r^{n-1}$$

$$a = C_0 \cdot r^{n-1} \cdot \frac{r - 1}{r^n - 1}$$

Ostatak duga na kraju  $k$ -te godine, gdje je  $k < n$ , izračunava se na sljedeći način:

$$O_k = O_{k-1} \cdot r - a$$

$$O_n = C_0 \cdot r^{n-1} - a \cdot r^{n-1} - a \cdot r^{n-2} - \dots - a \cdot r - a$$

$$O_k = C_0 \cdot r^{k-1} - a \cdot (r^{k-1} + r^{k-2} + \dots + r + 1)$$

$$O_k = C_0 \cdot r^{k-1} - C_0 \cdot r^{n-1} \cdot \frac{r - 1}{r^n - 1} \cdot \frac{r^k - 1}{r - 1}$$

$$O_k = C_0 \cdot \left( r^{k-1} - r^{n-1} \cdot \frac{r^k - 1}{r^n - 1} \right)$$

$$O_k = C_0 \cdot \left( r^{k-1} - r^{n-1} \cdot \frac{r^k - 1}{r^n - 1} \right)$$

$$O_k = \frac{C_0}{r} \cdot \left( \frac{r^k \cdot (r^n - 1) - r^n \cdot (r^k - 1)}{r^n - 1} \right)$$

$$O_k = \frac{C_0}{r} \cdot \frac{r^n - r^k}{r^n - 1}$$

5.62. Zajam odobren na početku godine treba vratiti kroz  $n$  godina s anuitetima koji se uplaćuju početkom godine uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu  $p$ . Prvi anuitet uplaćuje se u trenutku odobrenja zajma. Odredite uvjet uz koji će zajam  $C_0$  biti vraćen nakon  $n$  godina anuitetima  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

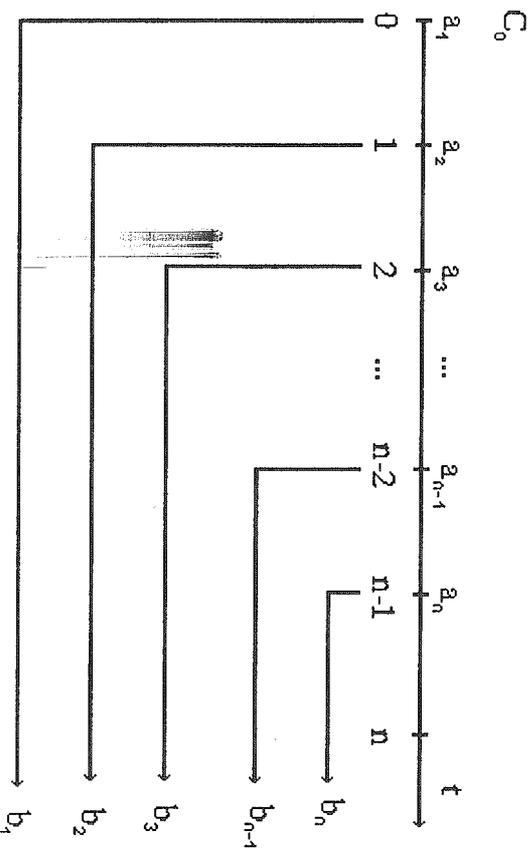
Rješenje:

$C_0$  = iznos zajma

$n$  = broj godišnjih anuiteta

$p$  = nepromjenjiva dekurzivna kamatna stopa

$b$  = sadašnja vrijednost anuiteta



$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_2 \cdot r^{-1}$$

$$b_3 = a_3 \cdot r^{-2}$$

⋮

$$b_{n-1} = a_{n-1} \cdot r^{-(n-2)}$$

$$b_n = a_n \cdot r^{-(n-1)}$$

Zajam  $C_0$  bit će vraćen nakon  $n$  godina anuitetima  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , ako je:

$$C_0 = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$$

$$C_0 = a_1 + a_2 \cdot r^{-1} + a_3 \cdot r^{-2} + \dots + a_{n-1} \cdot r^{-(n-2)} + a_n \cdot r^{-(n-1)}$$

$$C_0 = \sum_{i=1}^n a_i \cdot r^{-(i-1)}$$

5.63. Zajam od 50000.00 odobren na početku godine treba biti vraćen kroz 4 godine promjenjivim anuitetima plativim krajem godine uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu  $p=20$ . Ako je prvi anuitet 10000.00, drugi 15000.00, a treći 20000.00 odredite četvrti anuitet i izradite plan oplate.

Rješenje:

$$C_0 = 50000.00$$

$$p = 20$$

$$a_1 = 10000.00$$

$$a_2 = 15000.00$$

$$a_3 = 20000.00$$

$$a_4 = ?$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r = 1 + \frac{20}{100} = 1.2$$

Četvrti anuitet  $a_4$  određuje se iz sljedećeg izraza:

$$a_1 r^{-1} + a_2 r^{-2} + a_3 r^{-3} + a_4 r^{-4} = C_0$$

$$a_4 r^{-4} = C_0 - a_1 r^{-1} - a_2 r^{-2} - a_3 r^{-3} / r^4$$

$$a_4 = r^4 (C_0 - a_1 r^{-1} - a_2 r^{-2} - a_3 r^{-3})$$

$$a_4 = 1.2^4 (50000 - 10000 \cdot 1.2^{-1} - 15000 \cdot 1.2^{-2} - 20000 \cdot 1.2^{-3})$$

$$a_4 = 40800.00$$

Sljedeća tablica sadrži plan otplate: U njoj se prispjele kamate računaju na ostatak duga (u prvoj godini otplate:  $50000.00(1.2-1)=10000.00$ ; u drugoj godini otplate:  $50000.00(1.2-1)=10000.00$ ; u trećoj godini otplate  $45000.00(1.2-1)=9000.00$ ; u četvrtoj godini otplate:  $34000.00(1.2-1)=6800.00$ ), dok je visina anuiteta fiksno određena zadatkom za svaku godinu. U tom slučaju otplatna kvota predstavlja razliku između anuiteta i prispjele kamate.

kraj godine	prispjele kamate	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
0	-	-	-	50000.00
1	10000.00	0	10000.00	50000.00
2	10000.00	5000.00	15000.00	45000.00
3	9000.00	11000.00	20000.00	34000.00
4	6800.00	34000.00	40800.00	0
S	35800.00	50000.00	85800.00	

5.64. Zajam od 80000.00 treba otplatiti s 12 jednakih mjesečnih anuiteta plaćivih krajem mjeseca. Dekurzivna godišnja kamatna stopa  $p=7.5$ . Izračunajte veličinu mjesečnog anuiteta i izradite odgovarajući plan otplate.

Rješenje:

$$C_0=80000.00$$

$$m=12$$

$$n=12$$

$$p=7.5$$

$$a=?$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r = 1 + \frac{7.5}{100} = 1.075$$

$$a = C_0 \cdot r^m \cdot \frac{1}{r^m - 1}$$

$$a = 80000.00 \cdot 1.075^{12} \cdot \frac{1}{1.075^{12} - 1} = 6931.51$$

Sljedeća tablica sadrži plan otplate.

kraj mjeseca	prispjele kamate	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
0	-	-	-	80000.00
1	483.59	6447.92	6931.51	73552.08
2	444.62	6486.89	6931.51	67065.19
3	405.40	6526.11	6931.51	60539.08
4	365.95	6565.56	6931.51	53973.52
5	326.27	6605.24	6931.51	47368.28
6	286.34	6645.17	6931.51	40723.28
7	246.17	6685.34	6931.51	34037.77
8	205.79	6725.75	6931.51	27312.02
9	165.10	6766.41	6931.51	20545.61
10	124.20	6807.31	6931.51	13738.30
11	83.05	6848.46	6931.51	6889.84
12	41.65	6889.84	6931.49	0
S	3178.10	80000.00	83178.10	

U tablici su se prispjele kamate računale na ostatak duga (npr. u prvoj godini otplate ona je iznosila:  $80000(1.075^{1/12}-1)=483.59$ ; u drugoj godini otplate ona je iznosila:  $73552.08(1.075^{1/12}-1)=444.62$ ; itd.), dok je visina anuiteta fiksno određena i jednaka za sve mjesece otplate, osim za zadnji u kojem se anuitet računa kao zbroj ostatka duga i prispjele kamate. U ostalim mjesecima otplatna kvota predstavlja razliku između anuiteta i prispjele kamate.

U planu otplate prikazanom u tablici vrijednost posljednjeg anuiteta je morala biti korigirana zbog zaokruživanja brojeva na dvije decimalne.

- 5.65. Zajam od 100000.00 treba otplatiti s 20 jednakih polugodišnjih anuiteta od 6500.00. Kolika je dekurzivna godišnja kamatna stopa u slučaju prenumerando, a kolika u slučaju postnumerando uplate?

Rješenje:

$$C_0 = 100000.00$$

$$a = 6500.00$$

$$n = 20$$

$$m = 2$$

$$p = ?$$

postnumerando uplata:

$$a = C_0 \cdot r^{\frac{n}{m}} \cdot \frac{1 - r^{\frac{1}{m}} - 1}{r^{\frac{n}{m}} - 1}$$

$$6500.00 = 100000.00 \cdot r^{\frac{20}{2}} \cdot \frac{1 - r^{\frac{1}{2}} - 1}{r^{\frac{20}{2}} - 1}$$

$$6500.00 = 100000.00 \cdot r^{10} \cdot \frac{1 - r^{\frac{1}{2}} - 1}{r^{10} - 1}$$

$$6500 \cdot (r^{10} - 1) = 100000 \cdot r^{10} \cdot \left( \frac{1 - r^{\frac{1}{2}} - 1}{r^{10} - 1} \right)$$

$$106500 \cdot r^{10} - 100000 \cdot r^{\frac{21}{2}} - 6500 = 0$$

$$200 \cdot r^{\frac{21}{2}} - 213 \cdot r^{10} + 13 = 0$$

Kao u zadatku 5.43. može se odrediti  $x_0 = 1.01$  (budući da je  $r > 1$ ), a  $c = 1.1$ , te

$$f(x_0) = f(1.01) = -0.258213$$

Kako je  $f(x_0)f(c) < 0$ , prihvaćamo vrijednosti za  $x_0$  i  $c$ .

Ovdje je prikazan BASIC program pomoću kojeg se može riješiti prethodno dobivena jednačba.

```

10 ' REGULA FALSI
20 ' Objašnjenje:
30 ' - linijom 230 definiran je naziv funkcije
40 ' - linijom 90 definirana je sama funkcija
50 ' - linijom 240 određena je početna aproksimacija (x0, c),
    točnost
60 ' (EPS), m1, maksimalan broj iteracija (NMAX)
70 READ A$: CLS: PRINT " "; A$: PRINT " "
80 READ c, x0, EPS, m1, NMAX: n=0
90 DEF FNF(x)=200*x^(21/2) - 213*x^10 + 13
100 PRINT "
110 PRINT "
-----
120 PRINT USING "#####.###"; n, x0, g1, FNF(x0)
130 f0=FNF(x0): fc=FNF(c): x1=(c*f0-x0*fc)/(f0-fc)
140 g1=ABS(FNF(x1))/m1: n=n+1: IF n>NMAX THEN 190
150 PRINT USING "#####.###"; n,
    INT(x1*1000000)/100000, g1, FNF(x1)
160 IF g1<EPS THEN 200
170 x0=x1
180 GOTO 130
190 PRINT: PRINT " PREMAŠEN DOZVOLJEN BROJ
    ITERACIJA"
200 PRINT " "; PRINT " g1=ABS(f(xn))/m1" " m1=";m1
210 PRINT " " EPS="; EPS
220 END
230 DATA "f(x)=200*x^(21/2) - 213*x^10 + 13"
240 DATA 1.1, 1.01, 0.00005, 1.6, 50

```

Pokretanjem programa, za  $n=23$  dobiva se vrijednost  $x_n=r=1.0535$ .  
 Budući da je:

$$p = 100 \cdot (r - 1) \Rightarrow p = 5.35.$$

prenumerando uplata:

$$a = C_0 \cdot r^m \cdot \frac{r^m - 1}{r^m - 1}$$

$$6500.00 = 100000.00 \cdot r^2 \cdot \frac{r^{20} - 1}{r^2 - 1}$$

$$6500.00 = 100000.00 \cdot r^2 \cdot \frac{r^{20} - 1}{r^{10} - 1}$$

$$6500 \cdot (r^{10} - 1) = 100000 \cdot r^2 \cdot \left( \frac{r^{20} - 1}{r^{10} - 1} \right)$$

$$-93500 \cdot r^{10} + 100000 \cdot r^2 - 6500 = 0$$

$$187 \cdot r^{10} - 200 \cdot r^2 + 13 = 0$$

I ova jednačba rješava se pomoću metode Regula falsi. U ovom primjeru može se odrediti  $x_0=1.01$  (budući da je  $r>1$ ), a  $c=1.1$ .  
 Naime, te vrijednosti zadovoljavaju prethodni uvjet:

$$f(x_0)=f(1.01)=-0.26368$$

$$f(c)=f(1.1)=3.42256$$

Kako je  $f(x_0)f(c) < 0$ , prihvaćamo vrijednosti za  $x_0$  i  $c$ .

Daljnje provođenje postupka je identično prethodnom primjeru. Jedino je potrebno u navednom BASIC programu promijeniti linije 90 i 230 tako da one glase:

$$230 \text{ DATA } "f(x)=187*x \wedge 10 - 200*x \wedge (19/2) + 13"$$

Liniju 240 nije potrebno mijenjati budući da ona sadrži iste uvjete kao i prethodni riješeni primjer.

Pokretanjem programa, za  $n=19$  dobiva se vrijednost  $x_n=r=1.059914$ .  
Budući da je:

$$p = 100 \cdot (r - 1) \Rightarrow p = 5.9914 \approx 6.$$

- 5.66. Zajam od 300000.00 treba otplatiti jednakim mjesečnim anuitetima od 2000.00 plativih krajem mjeseca uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu  $p=12$ . Treba izračunati broj i veličinu posljednjeg povećanog anuiteta.

Rješenje:

$$C_0 = 300000.00$$

$$a = 2000.00$$

$$p = 12$$

$$m = 12$$

$$n, a, i_6 = ?$$

$$a = C_0 \cdot r^m \cdot \frac{1}{r^m - 1}$$

$$2000.00 = 300000.00 \cdot 1.12^{12} \cdot \frac{1}{1.12^{12} - 1}$$

$$2000 \cdot \left( 1.12^{12} - 1 \right) = 300000 \cdot 1.12^{12} \cdot \left( 1.12^{12} - 1 \right)$$

$$1715.33621 \cdot 1.12^{12} = 2000$$

$$\frac{n}{12} = \frac{\ln 1.165952}{\ln 1.12}$$

$$n = 16.2576 \Rightarrow n \approx 16 \text{ godina}$$

Sljedeća tablica sadrži plan oplate. U njoj se prispjele kamate računaju na ostatak duga (npr. na kraju prve godine prispjela kamata iznosi:  $300000.00(1.12^{12}-1)=284.66$ ; na kraju druge godine prispjela kamata iznosi:  $28284.66(1.12^{12}-1)=268.39$ ; itd.), dok je visina anuiteta fiksno određena i jednaka za svaku godinu, osim za zadnju, u kojoj se anuitet računa kao zbroj ostatka duga i prispjele kamate.. U ostalim godinama oplatna kvota predstavlja razliku između anuiteta i prispjele kamate.

kraj mjeseca	prispjela kamata	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
0	-	-	-	30000.00
1	284.66	1715.34	2000.00	28284.66
2	268.39	1731.61	2000.00	26553.05
3	251.96	1748.04	2000.00	24805.01
4	235.37	1764.63	2000.00	23040.38
5	218.63	1781.37	2000.00	21259.01
6	201.72	1798.28	2000.00	19460.73
7	184.66	1815.34	2000.00	17645.39
8	167.43	1832.57	2000.00	15812.82
9	150.04	1849.96	2000.00	13962.86
10	132.49	1867.51	2000.00	12095.35
11	114.77	1885.23	2000.00	10210.12
12	96.88	1903.12	2000.00	8307.00
13	78.82	1921.18	2000.00	6385.82
14	60.59	1939.41	2000.00	4446.41
15	42.19	1957.81	2000.00	2488.60
16	123.61	2488.60	2512.21	0
S	2512.21	30000.00	32512.21	

Zadnji anuitet može se jednostavno očitati iz tablice ( $a_{16}=2512.21$ ) ili

$$a_{16} = a + O_{16}$$

$$O_k = C_0 \cdot r^{\frac{k}{m}} - a \cdot \frac{r^{\frac{n}{m}} - 1}{r^{\frac{k}{m}} - 1}$$

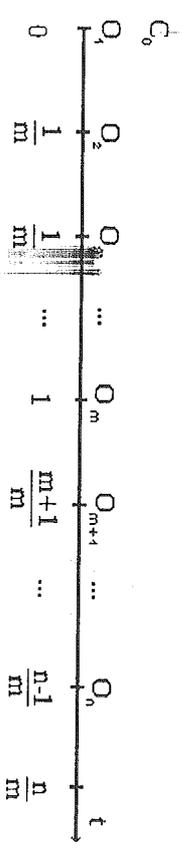
$$O_{16} = 30000.00 \cdot 1.12^{12} - 2000.00 \cdot \frac{1.12^{12} - 1}{1.12^{12} - 1} = 512.23$$

$$a_{16} = 2000.00 + 512.23 = 2512.23$$

5.67. Pretpostavimo da je trenutku  $t_0=0$  odobren zajam  $C_0$  uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu  $p$ . Pretpostavimo nadalje da smo godinu podijelili na  $m$  jednakih obračunskih razdoblja i da zajam treba vratiti s  $n$  jednakih anuiteta veličine  $a$  plativih početkom svakog obračunskog razdoblja počevši od trenutka odobrenja zajma. Broj  $n$  može biti manji ili veći od  $m$ . Treba odrediti veličinu anuiteta  $a$  i ostatak duga na početku  $k$ -tog obračunskog razdoblja. Neka je  $C_0=75000.00$ ,  $p=12$ ,  $m=4$  (obračunska razdoblja su kvartili) i  $n=20$ . Izračunajte veličinu anuiteta i izradite plan otplate.

Rješenje:

- $C_0$  = iznos zajma
- $m$  = broj jednakih obračunskih razdoblja u godini
- $n$  = broj jednakih anuiteta
- $p$  = nepromjenjiva dekurzivna kamatna stopa
- a,  $O_k = ?$



Ostatak duga na početku pojedinog obračunskog razdoblja može se izraziti na sljedeći način:

$$O_1 = C_0 - a$$

$$O_2 = O_1 \cdot r^{\frac{1}{m}} - a = (C_0 - a) \cdot r^{\frac{1}{m}} - a = C_0 r^{\frac{1}{m}} - a \cdot r^{\frac{1}{m}} - a$$

$$O_3 = O_2 \cdot r^{\frac{1}{m}} - a = \left( C_0 \cdot r^{\frac{1}{m}} - a \cdot r^{\frac{1}{m}} - a \right) \cdot r^{\frac{1}{m}} - a =$$

$$C_0 \cdot r^{\frac{2}{m}} - a \cdot r^{\frac{2}{m}} - a \cdot r^{\frac{1}{m}} - a$$

:

$$O_n = O_{n-1} \cdot r^{\frac{1}{m}} - a = \left( C_0 \cdot r^{\frac{n-2}{m}} - a \cdot r^{\frac{n-2}{m}} - a \cdot r^{\frac{n-3}{m}} - \dots - a \cdot r^{\frac{1}{m}} - a \right) \cdot r^{\frac{1}{m}} - a$$

$$O_n = C_0 \cdot r^{\frac{n-1}{m}} - a \cdot r^{\frac{n-1}{m}} - a \cdot r^{\frac{n-2}{m}} - \dots - a \cdot r^{\frac{1}{m}} - a$$

Kako ostatak duga na kraju  $n$ -te godine mora biti nula, odnosno  $O_n=0$ , iz tog slijedi:

$$C_0 \cdot r^{\frac{n-1}{m}} - a \cdot r^{\frac{n-1}{m}} - a \cdot r^{\frac{n-2}{m}} - \dots - a \cdot r^{\frac{1}{m}} - a = 0$$

$$a \cdot (r^{\frac{n-1}{m}} + r^{\frac{n-2}{m}} + \dots + r^{\frac{1}{m}} + 1) = C_0 \cdot r^{\frac{n-1}{m}}$$

$$a \cdot \frac{r^{\frac{n}{m}} - 1}{r^{\frac{1}{m}} - 1} = C_0 \cdot r^{\frac{n-1}{m}}$$

$$a = C_0 \cdot r^m \cdot \frac{r^m + 1}{r^m - 1}$$

Ostatak duga na kraju  $k$ -te godine, gdje je  $k < n$ , izračunava se na sljedeći način:

$$O_k = O_{k-1} \cdot r^m - a$$

$$O_n = C_0 \cdot r^m - a \cdot r^m - a \cdot r^m - \dots - a \cdot r^m - a$$

$$O_k = C_0 \cdot r^m - a \cdot \left( r^m + r^{m-2} + \dots + r^m + 1 \right)$$

$$O_k = C_0 \cdot r^m - a \cdot \frac{r^m - 1}{r^m - 1}$$

$$O_k = C_0 \cdot r^m - C_0 \cdot r^m \cdot \frac{r^m - 1}{r^m - 1} \cdot \frac{r^m - 1}{r^m - 1}$$

$$O_k = C_0 \cdot r^m - C_0 \cdot r^m \cdot \frac{r^m - 1}{r^m - 1}$$

$$C_0 = 75000.00$$

$$p = 12$$

$$m = 4$$

$$n = 20$$

$$a = ?$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r = 1 + \frac{12}{100} = 1.12$$

$$a = C_0 \cdot r^m \cdot \frac{r^m - 1}{r^m - 1}$$

$$a = 75000.00 \cdot 1.12^4 \cdot \frac{1.12^4 - 1}{1.12^4 - 1} = 4843.33$$

Sljedeća tablica sadrži plan oplate. U njoj se prispjele kamate računaju na ostatak duga (npr. na početku prvog kvartila nema prispjelih kamata; na početku drugog kvartila ona iznosi:  $70156.67(1.12^{3/4} - 1) = 2016.12$ ; na početku trećeg kvartila ona iznosi:  $67329.48(1.12^{3/4} - 1) = 1934.87$ ; itd.), dok je visina anuiteta fiksno određena i jedanaka za svaki kvartil. U tom slučaju oplatna kvota predstavlja razliku između anuiteta i prispjele kamate.

početak kvartila	prispijela kamata	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
0	-	-	-	75000.00
1	2016.12	4843.33	4843.33	70156.67
2	1934.87	2827.21	4843.33	67329.48
3	1851.29	2908.46	4843.33	64421.00
4	1765.31	2992.04	4843.33	61428.95
5	1676.85	3078.02	4843.33	58350.93
6	1585.85	3166.48	4843.33	55184.45
7	1492.24	3257.48	4843.33	51926.97
8	1395.94	3351.09	4843.33	48575.89
9	1296.87	3447.39	4843.33	45128.50
10	1194.96	3546.46	4843.33	41582.05
11	1090.11	3648.37	4843.33	37933.67
12	982.26	3753.22	4843.33	34180.46
13	871.30	3861.07	4843.33	30319.38
14	757.15	3972.03	4843.33	26347.35
15	639.73	4086.18	4843.33	22261.17
16	518.93	4203.60	4843.33	18057.57
17	394.65	4324.40	4843.33	13733.17
18	266.81	4448.68	4843.33	9284.49
19	135.29	4576.52	4843.33	4707.97
20		4707.97	4843.26	0
S	21866.53	75000.00	96866.53	

U planu otplate prikazanom u tablici vrijednost posljednjeg anuiteta je morala biti korigirana zbog zaokruživanja brojeva na dvije decimale.

5.68. Zajam od 30000.00 koji je odobren 12 travnja (u godini koja nije prestupna), treba otplatiti sa šest promjenjivih anuiteta koji se uplaćuju svakog prvog u narednim mjesecima uz primjenu dekurzivne godišnje kamatne stope  $p=24$ . Prvih pet anuiteta iznose redom: 2000.00, 3000.00, 5000.00, 6000.00 i 7500.00. Treba odrediti šesti anuitet i izraditi plan

Rješenje:

$$C_0 = 30000.00$$

$$p = 24$$

$$a_1 = 2000.00$$

$$a_2 = 3000.00$$

$$a_3 = 5000.00$$

$$a_4 = 6000.00$$

$$a_5 = 7500.00$$

$$12.04-01.10.$$


---


$$a_6, O_1 = ?$$

$$C_0 = \sum_{i=1}^n a_i \cdot r^{-i}$$

$$C_0 = a_1 \cdot r^{-19/365} + a_2 \cdot r^{-50/365} + a_3 \cdot r^{-80/365} + a_4 \cdot r^{-111/365} + a_5 \cdot r^{-142/365} + a_6 \cdot r^{-172/365}$$

$$30000 = 20000 \cdot 1.24^{-19/365} + 3000 \cdot 1.24^{-50/365} + 5000 \cdot 1.24^{-80/365} + 6000 \cdot 1.24^{-111/365} + 7500 \cdot 1.24^{-142/365} + a_6 \cdot 1.24^{-172/365}$$

$$a_6 = 8656.15$$

Sljedeća tablica sadrži plan otplate. U njoj se prispijele kamate računaju na ostatak duga (npr. 0.1.05. ona iznosi: 30000.00(1.24<sup>19/365</sup>-1) = 337.82 i odnosi se na 19 dana koji su protekli u travnju; 01.06. ona iznosi 28337.82(1.24<sup>31/365</sup>-1) = 552.48 i odnosi se na 31 dan koliko je proteklo u svibnju; itd.). Iznos anuiteta je fiksno određen zadatkom i jedino se u listopadu računa kao zbroj prispijelih kamata za rujna i ostatka duga. U svim ostalim mjesecima otplatna kvota dobiva se kao razlika anuiteta i prispijele kamate.

datum	protoklo dana	prispijela kamata	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
12.04	-	-	-	-	30000.00
01.05.	19	337.82	1662.18	2000.00	28337.82
01.06.	31	552.48	2477.52	3000.00	25860.30
01.07.	30	461.29	4538.71	5000.00	21321.59
01.08.	31	393.12	5606.88	6000.00	15714.71
01.09.	31	289.74	7210.26	7500.00	8504.45
01.10.	30	151.70	8504.45	8656.15	0
S	172	186.15	30000.00	32156.15	

Ostatak duga na dan 4. srpnja:

$$O_1 = C_0 \cdot r^t - \sum_{i=1}^k a_i \cdot r^{t-t_i}$$

$$O_1 = C_0 \cdot r^{\frac{84}{365}} - (a_1 \cdot r^{\frac{65}{365}} + a_2 \cdot r^{\frac{34}{365}} + a_3 \cdot r^{\frac{4}{365}})$$

$$O_1 = 30000.00 \cdot 1.24^{\frac{84}{365}} - (2000.00 \cdot 1.24^{\frac{65}{365}} + 3000.00 \cdot 1.24^{\frac{34}{365}} + 5000.00 \cdot 1.24^{\frac{4}{365}})$$

$$5000.00 \cdot 1.24^{\frac{4}{365}}$$

$$O_1 = 21371.91$$

69. Zajam od 20000.00 odobren je na početku godine. Treba ga vratiti s 4 jednaka polugodišnja anuiteta plativa krajem polugodišta uz primjenu dekurzivne godišnje kamatne stope  $p=9$ . Izračunajte veličinu anuiteta i izradite plan otplate.

Rješenje:

$$C_0 = 20000.00$$

$$m = 2$$

$$n = 4$$

$$p = 9$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r = 1 + \frac{9}{100} = 1.09$$

$$a = C_0 \cdot r^m \cdot \frac{1}{r^m - 1}$$

$$a = 20000.00 \cdot 1.09^2 \cdot \frac{1}{1.09^2 - 1} = 5562.23$$

Sljedeća tablica sadrži plan otplate. U njoj se prispijele kamate računaju na ostatak duga (npr. na kraju prvog polugodišta kamata iznosi:  $20000.00(1.09^{6/12} - 1) = 880.61$ ; na kraju drugog polugodišta kamata iznosi:  $15318.38(1.09^{6/12} - 1) = 674.48$ ; itd.), dok je visina anuiteta fiksno određena i jednaka za svaki kvartil. U tom slučaju otplatna kvota predstavlja razliku između anuiteta i prispijele kamate.

kraj polugodišta	prispijela kamata	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
0	-	-	-	20000.00
1	880.61	4681.62	5562.23	15318.38
2	674.48	4887.75	5562.23	10430.63
3	459.27	5102.96	5562.23	5327.67
4	234.58	5327.67	5562.25	0
S	2248.94	20000.00	22248.94	

U planu otplate prikazanom u tablici vrijednost posljednjeg anuiteta je morala biti korigirana zbog zaokruživanja brojeva na dvije

5.70. Dana 12.04. odobren je zajam u iznosu od 10000.00 s rokom jednokratne otplate 01.10. iste godine. Koji iznos treba vratiti u slučaju konstantne dekurzivne godišnje kamatne stope  $p=15$ , a koliko u slučaju dekurzivne godišnje kamatne stope, koja se mijenja svakog prvog u mjesecu na sljedeći način:

mjesec	04	05	06	07	08	09
p	15	18	18	20	17	19

Rješenje:

konstantna dekurzivna godišnja kamatna stopa:

$$C_0 = 10000.00$$

$$p = 15$$

$$C_t = ?$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r = 1 + \frac{15}{100} = 1.15$$

$$C_t = C_0 \cdot r^{-t_1} \cdot r^{-t_2-1} \cdot r^{-t_3-2} \cdot r^{-t_4-3} \cdot \dots \cdot r^{-t_{t-1}-t+1}$$

$$C_t = C_0 \cdot r^{-\frac{19}{365}} \cdot r^{-\frac{31}{365}} \cdot r^{-\frac{30}{365}} \cdot r^{-\frac{31}{365}} \cdot r^{-\frac{31}{365}} \cdot r^{-\frac{30}{365}}$$

$$C_t = C_0 \cdot r^{-\frac{19+31+30+31+31+30}{365}}$$

$$C_t = 10000.00 \cdot 1.15^{-\frac{172}{365}} = 10680.78$$

$$C_0 = 10000.00$$

$$p_1 = 15$$

$$p_2 = 18$$

$$p_3 = 18$$

$$p_4 = 20$$

$$p_5 = 17$$

$$p_6 = 19$$

$$C_t = ?$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r_1 = 1 + \frac{15}{100} = 1.15$$

$$r_2 = 1 + \frac{18}{100} = 1.18$$

$$r_3 = 1 + \frac{18}{100} = 1.18$$

$$r_4 = 1 + \frac{20}{100} = 1.2$$

$$r_5 = 1 + \frac{17}{100} = 1.17$$

$$r_6 = 1 + \frac{19}{100} = 1.19$$

$$C_t = C_0 \cdot r_1^{-t_1} \cdot r_2^{-t_2-1} \cdot r_3^{-t_3-2} \cdot r_4^{-t_4-3} \cdot \dots \cdot r_{t-1}^{-t_{t-1}-t+1}$$

5.71. Zajam od 30000.00, odobren 1. siječnja 1991. godine. Treba ga otplatiti kroz 7 godina uz nepromjenjivu godišnju kamatnu stopu  $p=12$  anuitetima plaćivim na početku godine. Izračunati anuitet, izraditi plan otplate te izračunati ostatak duga na dan 29. srpnja 1995. godine.

Rješenje:

$$C_0 = 30000.00$$

$$n = 7 \text{ godina}$$

$$p = 12$$

$$a, O_t = ?$$

$$a = C_0 \cdot r^{n-1} \cdot \frac{r-1}{r^n-1}$$

$$a = 30000.00 \cdot 1.12^{7-1} \cdot \frac{1.12-1}{1.12^7-1} = 5869.23$$

Sljedeća tablica sadrži plan otplate. U njoj se prispjele kamate računaju na ostatak duga (npr. 01.01.1991. nema prispjele kamate, 01.01.1992. prispjela kamata iznosi:  $24130.00(1.12-1)=2895.69$ ; 01.01.1993. prispjela kamata iznosi  $21157.23(1.12-1)=2538.87$ ; itd.), dok je iznos anuiteta fiksno određen i jednak za svaku godinu. U tom slučaju otplatna kvota predstavlja razliku između anuiteta i prispjele kamate.

datum	prispjele kamate	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
01.01.1991.	-	5869.23	5869.23	30000.00
01.01.1991.	-	24130.77	24130.77	
01.01.1992.	2895.69	2973.54	5869.23	21157.23
01.01.1993.	2538.87	3330.36	5869.23	17826.87
01.01.1994.	2139.22	3730.01	5869.23	14096.86
01.01.1995.	1691.62	4177.61	5869.23	9919.25
01.01.1996.	1190.31	4678.92	5869.23	5240.33
01.01.1997.	628.84	5240.33	5869.17	0

U planu otplate prikazanom u tablici vrijednost posljednjeg anuiteta je morala biti korigirana zbog zaokruživanja brojeva na dvije decimale.

Ostatak duga na dan 29. srpnja 1995. godine sastoji se od ostatka duga na dan 01.01.1994. i prispjele kamata za razdoblje od 1. siječnja 1995. do 29. srpnja 1995. (210 dana). Ostatak duga na dan 01.01.1994. moguće je jednostavno očitati iz tablice ili izračunati na ovaj način:

$$O_k = \frac{C_0 \cdot r^n - r^k}{r \cdot r^n - 1}$$

$$O_4 = \frac{30000.00 \cdot 1.12^7 - 1.12^4}{1.12 \cdot 1.12^7 - 1} = 14096.89$$

Traženi ostatak duga tada iznosi:

$$O = 14096.89 \cdot 1.12^{\frac{210}{365}} = 15046.67$$

5.72. Zajam od 50000.00 odobren na početku godine treba vratiti kroz 4 godine promjenjivim anuitetima plaćivim početkom godine uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu  $p=20$ . Ako je prvi anuitet 10000.00, drugi 15000.00, a treći 20000.00, odredite četvrti anuitet i izradite plan otplate.

Rješenje:

$$C_0 = 50000.00$$

$$n = 4$$

$$p = 20$$

$$a_1 = 10000.00$$

$$a_2 = 15000.00$$

$$a_3 = 20000.00$$

$$a_4 = ?$$

$$C_0 = a_4 \cdot r^{-3} + a_3 \cdot r^{-2} \cdot a_2 \cdot r^{-1} + a_1$$

$$a_4 = r^3 \cdot (C_0 - a_1 - a_2 \cdot r^{-1} - a_3 \cdot r^{-2})$$

$$a_4 = 1.2^3 \cdot (50000.00 - 10000.00 - 15000.00 \cdot 1.2^{-1} - 20000.00 \cdot 1.2^{-2}) = 23520.00$$

Sljedeća tablica sadrži plan otplate. U njoj se prispjele kamate računaju na ostatak duga (npr. početkom prve godine nema prispjele kamate, a početkom druge ona iznosi:  $40000(1.2-1)=8000.00$ ). Visina anuiteta fiksno je određena za svaku godinu.

početak godine	prispjele kamate	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
0	-	-	-	50000.00
1	8000.00	10000.00	10000.00	40000.00
2	6600.00	7000.00	15000.00	33000.00
3	3920.00	13400.00	20000.00	19600.00
4	18520.00	19600.00	23520.00	0
S	18520.00	50000.00	68520.00	

5.73. Zajam od 30000.00, koji je odobren 12. travnja (u godini koja nije prestupna), treba otplatiti sa šest promjenjivih anuiteta koji se uplaćuju svakog prvog u narednim mjesecima. Dekurzivna godišnja kamatna stopa u travnju je bila 21, u svibnju 18, u lipnju 20, u srpnju 26, u kolovozu 24 i u rujnu 28. Prvih pet anuiteta iznose redom: 2000.00, 3000.00, 5000.00, 6000.00 i 7500.00. Treba odrediti šesti anuitet, izraditi plan otplate i odrediti ostatak duga na dan 29. srpnja.

Rješenje:

$$C_0 = 30000.00$$

$$p_1 = 21 \quad a_1 = 2000.00$$

$$\begin{array}{ll} p_4 = 26 & a_4 = 6000.00 \\ p_5 = 24 & a_5 = 7500.00 \\ p_6 = 28 & \end{array}$$

$$a_6 = ?$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r_1 = 1 + \frac{21}{100} = 1.21$$

$$r_2 = 1 + \frac{18}{100} = 1.18$$

$$r_3 = 1 + \frac{20}{100} = 1.2$$

$$r_4 = 1 + \frac{26}{100} = 1.26$$

$$r_5 = 1 + \frac{24}{100} = 1.24$$

$$r_6 = 1 + \frac{28}{100} = 1.28$$

$$C_0 = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \prod_{k=1}^i r^{-(t_k - t_{k-1})}$$

$$C_0 = a_1 \cdot r_1^{-\frac{19}{365}} + a_2 \cdot r_1^{-\frac{19}{365}} \cdot r_2^{-\frac{31}{365}} + a_3 \cdot r_1^{-\frac{19}{365}} \cdot r_2^{-\frac{31}{365}} \cdot r_3^{-\frac{30}{365}} +$$

$$+ a_4 \cdot r_1^{-\frac{19}{365}} \cdot r_2^{-\frac{31}{365}} \cdot r_3^{-\frac{30}{365}} \cdot r_4^{-\frac{31}{365}} + a_5 \cdot r_1^{-\frac{19}{365}} \cdot r_2^{-\frac{31}{365}} \cdot r_3^{-\frac{30}{365}} \cdot r_4^{-\frac{31}{365}} \cdot r_5^{-\frac{30}{365}} +$$

$$+ a_6 \cdot r_1^{\frac{19}{365}} \cdot r_2^{\frac{31}{365}} \cdot r_3^{\frac{30}{365}} \cdot r_4^{\frac{31}{365}} \cdot r_5^{\frac{31}{365}} \cdot r_6^{\frac{30}{365}}$$

$$a_6 = 8461.67$$

Slijedeća tablica sadrži plan otplate. U njoj se prispjele kamate računaju na ostatak duga (npr. 01.06 ona iznosi:  $30000(1.21^{19/365} - 1) = 299.16$ , a 01.07. njezin je iznos:  $28299.16(1.18^{31/365} - 1) = 400.62$ ). Otplatna kvota računa se kao razlika između fiksnog anuiteta i prispjele kamate.

da-tum	pro-teklo dana	kamata stopa	prispjela kamata	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
12.04.	-	-	-	-	-	30000.00
01.05	19	21	299.16	1700.84	2000.00	28299.16
01.06	31	18	400.62	2599.38	3000.00	25699.78
01.07.	30	20	388.02	4611.98	5000.00	21087.80
01.08.	31	26	418.01	5581.99	6000.00	15505.81
01.09.	31	24	285.89	7214.11	7500.00	8291.70
01.10.	30	28	169.96	8291.7	8461.66	0
S	172		1961.66	30000.00	31961.66	

Ostatak duga na dan 29.07. dobiva se tako da se na ostatak duga početkom srpnja (očitan iz tablice) pribroji kamata koja tereti ostatak duga.

$$O_3 = 21087.80$$

$$O = 21087.80 \cdot 1.26^{365/29} = 21478.60$$

od 1. travnja iste godine. Koja se dekurzivna godišnja kamatna stopa mora primjeniti?

Rješenje:

$$C_0 = 20000.00$$

$$n = 20$$

$$m = 12$$

$$a = 1100.00$$

$$p = ?$$

Ostatak duga po pojedinim obračunskim razdobljima, uzimajući u obzir da se dug počinje vraćati tek nakon tri mjeseca, može se izraziti na slijedeći način:

$$O_1 = C_0 \cdot r^{29/365}$$

$$O_2 = O_1 \cdot r^{28/365} = C_0 \cdot r^{57/365}$$

$$O_3 = O_2 \cdot r^{31/365} = C_0 \cdot r^{88/365} - a$$

$$O_4 = O_3 \cdot r^m - a = \left( C_0 \cdot r^{88/365} - a \right) \cdot r^m - a = C_0 \cdot r^{88/365} \cdot r^m - a \cdot r^m - a$$

Uz pretpostavku da je  $m=12$ , ostatak duga na kraju otplate računa se ovako:

$$O_{22} = C_0 \cdot r^{88/365} \cdot r^{20} \cdot r^{12} - a \cdot r^{12} - a \cdot r^{12} - \dots - a \cdot r^{12} - a$$

Kako na kraju ostatak duga mora biti jednak nuli, odnosno  $O_{22} = 0$ , možemo pisati:

$$C_0 \cdot r^{\frac{88}{365}} \cdot r^{12} - a \cdot r^{12} - a \cdot r^{12} \dots - a \cdot r^{12} - a = 0$$

$$C_0 \cdot r^{\frac{88}{365}} \cdot r^{12} - a \cdot (r^{12} - r^{12} \dots - r^{12} - 1) = 0$$

$$a = \frac{C_0 \cdot r^{\frac{88}{365}} \cdot r^{12}}{\frac{1}{r^{12}} - 1}$$

$$a = C_0 \cdot r^{\frac{88}{365}} \cdot r^{12} \cdot \frac{1}{r^{12} - 1}$$

$$1100.00 = 20000.00 \cdot r^{\frac{88}{365}} \cdot r^{12} \cdot \frac{1}{r^{12} - 1}$$

$$11 \cdot r^{12} - 200 \cdot r^{\frac{2907}{1460}} + 200 \cdot r^{\frac{2089}{1095}} - 11 = 0$$

Kao u primjeru 5.43. može se odrediti  $x_0=1.01$  (budući da je  $r>1$ ), a  $c=1.1$ , te

$$f(x_0)=f(1.01)=0.01486$$

$$f(c)=f(1.1)=-0.01906$$

Kako je  $f(x_0)f(c)<0$ , prihvaćamo vrijednosti za  $x_0$  i  $c$ .

Ovdje je prikazan BASIC program pomoću kojeg se može riješiti prethodno dobivena jednačica.

```

10 ' REGULA FALSI
20 ' Objašnjenje:
30 ' - linijom 230 definirana je naziv funkcije
40 ' - linijom 90 definirana je sama funkcija
50 ' - linijom 240 određena je početna aproksimacija (x0, c),
    točnost
60 ' (EPS), m1, maksimalan broj iteracija (NMAX)
70 READ A$: CLS: PRINT " "; AS: PRINT " "
80 READ c, x0, EPS, m1, NMAX: n=0
90 DEF FNF(x)= 11*x ^ (20/12) - 200*x ^ (2907/1460) +
    200*x ^ (2089/1095) - 11
100 PRINT "      n      xn      g1      f(xn)"
110 PRINT "-----"
120 PRINT USING "#####.#####"; n, x0, g1, FNF(x0)
130 f0=FNF(x0): fc=FNF(c): x1=(c*f0-x0*fc)/(f0-fc)
140 g1=ABS(FNF(x1))/m1: n=n+1: IF n>NMAX THEN 190
150 PRINT USING "#####.#####"; n,
    INT(x1*1000000)/100000, g1, FNF(x1)
160 IF g1<EPS THEN 200
170 x0=x1
180 GOTO 130
190 PRINT: PRINT "      PREMAŠEN DOZVOLJEN BROJ
    ITERACIJA"
200 PRINT "      PRINT "      g1=ABS(f(xn))/m1", "      m1 =" ;m1
210 PRINT "      EPS =" ; EPS
220 END
230 DATA "f(x)= 11*x ^ (20/12) - 200*x ^ (2907/1460) +
    200*x ^ (2089/1095) - 11"
240 DATA 1.1, 1.01, 0.000005, 1.6, 50
    Pokretanjem programa, za n=6 dobiva se vrijednost  $x_n=r=1.089984$ .
    Budući da je:
    p = 100 · (r - 1) ⇒ p = 8.9984 ≈ 9.

```

5.75. Zajam od 10000.00, koji je odobren 14. ožujka, treba oplatiti do 1.

početkom mjeseca, ali tako da se prvi anuitet od 70.00 uplati 1. srpnja, drugi od 2500.00 1. kolovoza, treći od 3000.00 1. rujna, četvrti od 45.00 1. listopada, peti od 2000.00 1. studenog i šesti u iznosu od 1500.00 1. prosinca. Dekurzivne godišnje kamatne stope mijenjale su se tijekom godine na sljedeći način:

mjesec	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_t$	12	10	11	9	10	12	12	10	8	9

Treba izračunati posljednji anuitet koji dospjeva 1. siječnja, izraditi plan otplate te izračunati ostatak duga na dan 29. srpnja.

Rješenje:

$$C_0 = 10000.00$$

$$a_1 = 70.00 (01.07.)$$

$$a_2 = 2500.00 (01.08.)$$

$$a_3 = 3000.00 (01.09.)$$

$$a_4 = 45.00 (01.10.)$$

$$a_5 = 2000.00 (01.11.)$$

$$a_6 = 1500.00 (01.12.)$$


---


$$a_7 (01.01.), O_t = ?$$

Sljedeća tablica sadrži plan otplate. U njoj se prispjele kamate računaju na ostatak duga (npr. 01.04. ona iznosi:  $10000(1.12^{18/365} - 1) = 56.04$ , a 01.05. mjezin je iznos:  $10056.00(1.1^{30/365} - 1) = 79.09$ ). Otplatna kvota računa se kao razlika između fiksnog anuiteta i prispjele kamate osim zadnje otplate kvote koja je jednaka iznosu ostatka duga. U slučajevima kada je anuitet manji od prispjele kamate otplatna kvota je jednaka nula pa se ostatak duga povećava za razliku prispjele kamate i anuiteta.

datum	prote- klo dana	kama- tna stopa	prispj- ela kamata	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
14.03.	-	-	-	-	-	10000.00
01.04.	18	12	56.04	0	0	10056.04
01.05.	30	10	79.09	0	0	10135.13
01.06.	31	11	90.23	0	0	10225.36
01.07.	30	9	72.68	0	70.00	10228.04
01.08.	31	10	83.13	2416.87	2500.00	7811.17
01.09.	31	12	75.55	2924.45	3000.00	4886.72
01.10.	30	12	45.73	0	45.00	4887.45
01.11.	31	10	39.72	1960.28	2000.00	2927.18
01.12.	30	8	18.57	1481.43	1500.00	1445.75
01.01.	31	9	10.62	1445.75	1456.00	0
S	293		571.36	10228.78	10571.37	

Posljednji anuitet koji dospjeva 1. siječnja može se jednostavno očitati iz tablice, a iznosi  $a=1456.37$ . Ostatak duga na dan 29.07. dobiva se tako da se na ostatak duga početkom srpnja (očitan iz tablice) pribroji kamata koja tereti ostatak duga do navedenog datuma:

$$O = 10228.04$$

$$O_t = 10228.04 \cdot 1.1^{365/29} = 10305.79$$

5.76. Zajam od 10000.00, koji je odobren 14. ožujka, treba otplatiti do 1. siječnja sljedeće godine. Dogovoreno je da se anuiteti uplaćuju početkom mjeseca, ali tako da se prvi anuitet od 70.00 uplati 1. srpnja, drugi od 3500.00 1. kolovoza, treći od 3000.00 1. rujna, četvrti od 35.00 1. listopada, peti od 1500.00 1. studenog i šesti u iznosu od 1200.00 1. prosinca. Dekurzivne godišnje kamatne stope mijenjale su se tijekom godine na sljedeći način:

mjesec	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_t$	12	10	11	9	10	12	12	10	8	9

Treba izračunati posljednji anuitet koji dospijeva 1. siječnja, izraditi plan otplate te izračunati ostatak duga na dan 29. srpnja.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= 10000.00 \\
 a_1 &= 70.00 \quad (01.07.) \\
 a_2 &= 3500.00 \quad (01.08.) \\
 a_3 &= 3000.00 \quad (01.09.) \\
 a_4 &= 35.00 \quad (01.10.) \\
 a_5 &= 1500.00 \quad (01.11.) \\
 a_6 &= 1200.00 \quad (01.12.) \\
 a_7 & \quad (01.01.), O_1 = ?
 \end{aligned}$$

Sljedeća tablica sadrži plan otplate. U njoj se prispjele kamate računaju na ostatak duga (npr. 01.04. ona iznosi:  $10000(1.12^{18/365} - 1) = 56.04$ , a 01.05. njezin je iznos:  $10056.00(1.1^{30/365} - 1) = 79.09$ ). Otplatna kvota računa se kao razlika između fiksnog anuiteta i prispjele kamate osim zadnje otplatne kvote koja je jednaka iznosu ostatka duga. U slučajevima kada je anuitet manji od prispjele kamate otplatna kvota je jednaka nula pa se ostatak duga povećava za razliku prispjele kamate i anuiteta.

datum	prote- klo dana	kama- tna stopa	pri- spjela kamata	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
14.03.	-	-	-	-	-	10000.00
01.04.	18	12	56.04	0	0	10056.04
01.05.	30	10	79.09	0	0	10135.13
01.06.	31	11	90.23	0	0	10225.36
01.07.	30	9	72.68	0	70.00	10228.04
01.08.	31	10	83.13	3416.87	3500.00	6811.17
01.09.	31	12	65.88	2934.12	3000.00	3877.05
01.10.	30	12	36.28	0	35.00	3878.33
01.11.	31	10	31.52	1468.48	1500.00	2409.85
01.12.	30	8	15.29	1184.71	1200.00	1225.14
01.01.	31	9	9.00	1225.14	1234.14	0

Posljednji anuitet koji dospijeva 1. siječnja može se jednostavno očitati iz tablice, a iznosi  $a = 1234.14$ .

Ostatak duga na dan 29.07. dobiva se tako da se na ostatak duga početkom srpnja (očitan iz tablice) pribroji kamata koja tereti ostatak duga do navedenog datuma:

$$O = 10228.04$$

$$O_1 = 10228.04 \cdot 1.1^{\frac{29}{365}} = 10305.79$$

```

REM *****
REM * Program pomocu kojeg se rjesavaju problemi *
REM * jednostavnog dekurzivnog ukamaccivanja *
REM *****

```

```
1CLS
```

```
PRINT : PRINT
```

```
PRINT "
```

```
JEDNOSTAVNO DEKURZIVNO UKAMACCIVANJE"
```

```
PRINT : PRINT
```

```
PRINT " Ponudjene su sljedece mogucnosti:"
```

```
PRINT
```

```
PRINT "
```

```
PRINT "
```

```
PRINT "
```

```
PRINT "
```

```
PRINT
```

```
PRINT "
```

```
PRINT "
```

```
PRINT "
```

```
PRINT
```

```
PRINT "
```

```
PRINT "
```

```
PRINT "
```

```
PRINT
```

```
PRINT " 4) Zavsetak rada u programu."
```

```
PRINT : PRINT
```

```
PRINT " Unesite Vas izbor (1/2/3/4)?"
```

```
10 DO
```

```
a$ = INKEY$
```

```
LOOP WHILE a$ = ""
```

```
IF a$ = "1" THEN 100
```

```
IF a$ = "2" THEN 200
```

```
IF a$ = "3" THEN 300
```

```
IF a$ = "4" THEN 400
```

```
IF a$ <> "1" OR a$ <> "2" OR a$ <> "3" OR a$ <> "4" THEN 10
```

```
100 CLS
```

```
105 PRINT : PRINT
```

```
PRINT " Unesite trazene vrijednost:"
```

```
PRINT
```

## DODATAK



```

INPUT " a) iznos pocetnog kapitala: ", C0
INPUT " b) broj godina ukamacivanja: ", n
INPUT " c) godisnja kamatna stopa (%): ", p
IF C0 <= 0 OR n <= 0 OR p <= 0 THEN PRINT : PRINT : PRINT " NEIS
PRAVNO! PONOVIITE UNOS!": GOTO 105
PRINT : PRINT
PRINT " Rjesenje:"
PRINT
I = C0 * p / 100
PRINT " Jednogodisnje kamate iznose: "; I
In = n * I
PRINT " Ukupne kamate iznose: "; In
Cn = C0 + In
PRINT " Konacna vrijednost kapitala: "; Cn
PRINT : PRINT : PRINT
PRINT " Izbornik:"
PRINT
PRINT " 1) Ponoviti unos;"
PRINT " 2) Povratak u glavni izbornik."
PRINT
UNESITE Vas izbor (1/2)?"
110 DO
a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = "1" THEN 100
IF a$ = "2" THEN 1
IF a$ <> "1" OR a$ <> "2" THEN 110

```

200 CLS

205 PRINT : PRINT

PRINT " Unesite trazene vrijednost:"

PRINT

INPUT " a) iznos pocetnog kapitala: ", C0

INPUT " b) konacna vrijednost kapitala: ", Cn

INPUT " c) godisnja kamatna stopa (%): ", p

IF C0 <= 0 OR Cn <= C0 OR p <= 0 THEN PRINT : PRINT : PRINT " NE

ISPRAVNO! PONOVIITE UNOS!": GOTO 205

PRINT : PRINT

PRINT " Rjesenje:"

```

n = (100 * Cn) / (C0 * p) - (100 / p)
PRINT " Broj godina ukamacivanja iznosi: "; n
PRINT : PRINT : PRINT : PRINT
PRINT " Izbornik:"
PRINT
PRINT " 1) Ponoviti unos;"
PRINT " 2) Povratak u glavni izbornik."
PRINT
UNESITE Vas izbor (1/2)?"
210 DO
a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = "1" THEN 200
IF a$ = "2" THEN 1
IF a$ <> "1" OR a$ <> "2" THEN 210

```

300 CLS

305 PRINT : PRINT

PRINT " Unesite trazene vrijednost:"

PRINT

INPUT " a) iznos pocetnog kapitala: ", C0

INPUT " b) konacna vrijednost kapitala: ", Cn

INPUT " c) broj godina ukamacivanja: ", n

IF C0 <= 0 OR Cn <= C0 OR n <= 0 THEN PRINT : PRINT : PRINT " NE

ISPRAVNO! PONOVIITE UNOS!": GOTO 305

PRINT : PRINT

PRINT " Rjesenje:"

PRINT

p = 100 \* (Cn - C0) / (n \* C0)

PRINT " Godisnja kamatna stopa iznosi: "; p, "%"

PRINT : PRINT : PRINT : PRINT

PRINT " Izbornik:"

PRINT

PRINT " 1) Ponoviti unos;"

PRINT " 2) Povratak u glavni izbornik."

PRINT

PRINT " Unesite Vas izbor (1/2)?"

310 DO

a\$ = INKEY\$

```

IF a$ = "1" THEN 300
IF a$ = "2" THEN 1
IF a$ <> "1" OR a$ <> "2" THEN 310
400 CLS
END

```

```

REM *****
REM * Program pomocu kojeg se rjesavaju problemi *
REM * jednostavnog ispodgodisnjeg ukamacivanja *
REM *****

```

```
5 DIM g(12)
```

```
CLS
```

```
PRINT : PRINT
```

```
PRINT " JEDNOSTAVNO ISPODGODISNJE UKAMACIVANJE"
```

```
PRINT : PRINT
```

```
PRINT " Ovaj program omogućava izracunavanje iznosa duga nakon  
odredenog"
```

```
PRINT " razdoblja uz primjenu jednostavnog ispodgodisnjeg  
ukamacivanja."
```

```
PRINT " U njemu je potrebno unijeti podatke o velicini duga, datumu"
```

```
PRINT " preuzimanja duga, datumu vracanja duga te vrijednosti kamatnih"
```

```
PRINT " stopa po mjesecima. Pretpostavlja se da se datumi preuzimanja"
```

```
PRINT " i vracanja nalaze u istoj, nepristupnoj godini."
```

```
PRINT
```

```
PRINT
```

```
PRINT " UNESITE TRAZENE PODATKE!"
```

```
10 PRINT
```

```
INPUT " Velicina duga: ", C0
```

```
IF C0 <= 0 THEN 1000
```

```
PRINT  
INPUT " Datum preuzimanja duga - dan: ", dn
```

```
INPUT " - mjesec: ", mj
```

```
IF mj < 1 OR mj > 12 OR dn < 1 THEN 1000
```

```
IF mj = 1 AND dn > 31 THEN 1000
```

```
IF mj = 2 AND dn > 28 THEN 1000
```

```
IF mj = 3 AND dn > 31 THEN 1000
```

```
IF mj = 4 AND dn > 30 THEN 1000
```

```
IF mj = 5 AND dn > 31 THEN 1000
```

```
IF mj = 6 AND dn > 30 THEN 1000
```

```
IF mj = 7 AND dn > 31 THEN 1000
```

```
IF mj = 8 AND dn > 31 THEN 1000
```

```
IF mj = 9 AND dn > 30 THEN 1000
```

```
IF mj = 11 AND dn > 30 THEN 1000
IF mj = 12 AND dn > 31 THEN 1000
```

```
PRINT
```

```
INPUT " Datum vracanja duga - dan: ", dnv
INPUT " - mjesecc: ", mjv
```

```
IF mjv < mj OR mjv < 1 OR mjv > 12 OR dnv < 1 THEN 1000
IF mjv = 1 AND dnv > 31 THEN 1000
IF mjv = 2 AND dnv > 28 THEN 1000
IF mjv = 3 AND dnv > 31 THEN 1000
IF mjv = 4 AND dnv > 30 THEN 1000
IF mjv = 5 AND dnv > 31 THEN 1000
IF mjv = 6 AND dnv > 30 THEN 1000
IF mjv = 7 AND dnv > 31 THEN 1000
IF mjv = 8 AND dnv > 31 THEN 1000
IF mjv = 9 AND dnv > 30 THEN 1000
IF mjv = 10 AND dnv > 31 THEN 1000
IF mjv = 11 AND dnv > 30 THEN 1000
IF mjv = 12 AND dnv > 31 THEN 1000
IF mjv = mj AND dnv <= dn THEN 1000
```

```
PRINT
```

```
PRINT " Mjesecne kamatne stope (%):"
```

```
FOR a = mj TO mjv
```

```
IF a = 1 THEN INPUT " - sijecanj: ", g(a)
IF a = 2 THEN INPUT " - veljaca: ", g(a)
IF a = 3 THEN INPUT " - ozujak: ", g(a)
IF a = 4 THEN INPUT " - travanj: ", g(a)
IF a = 5 THEN INPUT " - svibanj: ", g(a)
IF a = 6 THEN INPUT " - lipanj: ", g(a)
IF a = 7 THEN INPUT " - srpanj: ", g(a)
IF a = 8 THEN INPUT " - kolovoz: ", g(a)
IF a = 9 THEN INPUT " - rujanj: ", g(a)
IF a = 10 THEN INPUT " - listopad: ", g(a)
IF a = 11 THEN INPUT " - studeni: ", g(a)
IF a = 12 THEN INPUT " - prosinac: ", g(a)
NEXT a
```

```
IF mj = 2 THEN n = 28 - dn
```

```
IF mj = 1 OR mj = 3 OR mj = 5 OR mj = 7 OR mj = 8 OR mj = 10 OR mj
= 12 THEN n = 31 - dn
```

```
Cb = C0
```

```
FOR b = mj TO mjv
```

```
IF b = 2 THEN dan = 28
IF b = 4 OR b = 6 OR b = 9 OR b = 11 THEN dan = 30
IF b = 1 OR b = 3 OR b = 5 OR b = 7 OR b = 8 OR b = 10 OR b = 12 T
HEN dan = 31
IF mj = mjv THEN Cn = C0 + ((dnv - dn) * C0 * (g(b) / 100)):
GOTO 500
Cn = Cb + (n * C0 * (g(b) / dan) / 100)
IF mjv > b + 1 THEN GOSUB 2000
IF mjv = b + 1 THEN n = dnv
Cb = Cn
NEXT b
```

```
500 PRINT : PRINT
```

```
PRINT " RJESENJE:"
```

```
PRINT
```

```
PRINT " Dug na dan ", dnv, " "; mjv, " : iznosi: ", Cn
```

```
PRINT : PRINT : PRINT
```

```
PRINT " Izbornik:"
```

```
PRINT " 1) Ponoviti od pocetka;"
```

```
PRINT " 2) Kraj;"
```

```
PRINT
```

```
PRINT " Unesite Vas izbor (1/2)?"
```

```
110 DO
```

```
a$ = INKEY$
```

```
LOOP WHILE a$ = ""
```

```
IF a$ = "1" THEN 5
```

```
IF a$ = "2" THEN CLS : END
```

```
IF a$ <> "1" OR a$ <> "2" THEN 110
```

GOTO 10

```

2000 IF b + 1 = 2 THEN n = 28
IF b + 1 = 4 OR b + 1 = 6 OR b + 1 = 9 OR b + 1 = 11 THEN n = 30
IF b + 1 = 1 OR b + 1 = 3 OR b + 1 = 5 OR b + 1 = 7 OR b + 1 = 8 O
R b + 1 = 10 OR b + 1 = 12 THEN n = 31
RETURN

```

```

REM *****
REM * Program pohocu kojeg se rjesavaju problemi *
REM * slozenog godisnjeg ukamacivanja *
REM *****

```

1 CLS

PRINT : PRINT

PRINT "

SLOZENO GODISNJE UKAMACIVANJE"

PRINT : PRINT

PRINT " Ponudjene su sljedece mogucnosti:"

PRINT

PRINT "

```

PRINT " Unesite trazene vrijednost:"
PRINT
INPUT " a) iznos pocetnog kapitala: ", C0
INPUT " b) broj godina ukamacivanja: ", n
INPUT " c) godisnja kamatna stopa (%): ", p
IF C0 <= 0 OR n <= 0 OR p <= 0 THEN PRINT : PRINT : PRINT " NEIS
PRAVNOI PONOVI TE UNOSI!": GOTO 105
PRINT : PRINT
PRINT " Rjesenje:"
PRINT
Cn = C0 * (1 + p / 100) ^ n
PRINT " Konacna vrijednost kapitala: "; Cn
PRINT
In = Cn - C0
PRINT " Ukupne kamate iznose: "; In
PRINT : PRINT : PRINT
PRINT " Izbornik:"
PRINT "
PRINT " 1) Ponoviti unos;"
PRINT " 2) Povratak u glavni izbornik
"
PRINT
PRINT " Unesite Vas izbor (1/2)?"
PRINT "
110 DO
a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = "1" THEN 100
IF a$ = "2" THEN 1
IF a$ <> "1" OR a$ <> "2" THEN 110

200 CLS
205 PRINT : PRINT
PRINT " Unesite trazene vrijednost:"
PRINT
INPUT " a) iznos pocetnog kapitala: ", C0
INPUT " b) konacna vrijednost kapitala: ", Cn
INPUT " c) godisnja kamatna stopa (%): ", p
IF C0 <= 0 OR Cn <= C0 OR p <= 0 THEN PRINT : PRINT : PRINT " NE
ISPRAVNOI PONOVI TE UNOSI!": GOTO 205
PRINT : PRINT

```

```

PRINT " Rjesenje:"
PRINT
n = LOG(Cn / C0) / LOG(1 + p / 100)
PRINT " Broj godina ukamacivanja iznosi: "; n
PRINT : PRINT : PRINT : PRINT
PRINT " Izbornik:"
PRINT
PRINT " 1) Ponoviti unos;"
PRINT " 2) Povratak u glavni izbornik
"
PRINT
PRINT " Unesite Vas izbor (1/2)?"
PRINT "
210 DO
a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = "1" THEN 200
IF a$ = "2" THEN 1
IF a$ <> "1" OR a$ <> "2" THEN 210

300 CLS
305 PRINT : PRINT
PRINT " Unesite trazene vrijednost:"
PRINT
INPUT " a) iznos pocetnog kapitala: ", C0
INPUT " b) konacna vrijednost kapitala: ", Cn
INPUT " c) broj godina ukamacivanja: ", n
IF C0 <= 0 OR Cn <= C0 OR n <= 0 THEN PRINT : PRINT : PRINT " NE
ISPRAVNOI PONOVI TE UNOSI!": GOTO 305
PRINT : PRINT
PRINT " Rjesenje:"
PRINT
p = 100 * ((Cn / C0) ^ (1 / n) - 1)
PRINT " Godisnja kamatna stopa iznosi: "; p; "%"
PRINT : PRINT : PRINT : PRINT
PRINT " Izbornik:"
PRINT
PRINT " 1) Ponoviti unos;"
PRINT " 2) Povratak u glavni izbornik
"
PRINT

```

```

PRINT " Unesite Vas izbor (1/2)?"
310 DO
a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = "1" THEN 300
IF a$ = "2" THEN 1
IF a$ <> "1" OR a$ <> "2" THEN 310
400 CLS
405 PRINT : PRINT
PRINT " Unesite trazene vrijednost:"
PRINT
INPUT " a) konacna vrijednost kapitala: ", Cn
INPUT " b) broj godina ukamacivanja: ", n
INPUT " c) godisnja kamatna stopa (%): ", p
IF Cn <= 0 OR n <= 0 OR p <= 0 THEN PRINT : PRINT " NEIS
PRAVNO! PONOVI TE UNOS!": GOTO 305
PRINT : PRINT
PRINT " Rjesenje:"
PRINT
PRINT
C0 = Cn / ((1 + p / 100) ^ n)
PRINT " Pocetni kapital iznosi: ", C0
PRINT : PRINT : PRINT : PRINT
PRINT " Izbornik:"
PRINT
PRINT " 1) Ponoviti unos;"
PRINT " 2) Povatak u glavni izbornik"
PRINT
PRINT " Unesite Vas izbor (1/2)?"
410 DO
a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = "1" THEN 400
IF a$ = "2" THEN 1
IF a$ <> "1" OR a$ <> "2" THEN 410
500 CLS
END

```

```

REM *****
REM * Program pomocu kojeg se rjesavaju problemi *
REM * slozenog ispodgodisnjeg ukamacivanja *
REM *****

```

```

5 DIM g(12)
CLS
PRINT : PRINT
PRINT " SLOZENO ISPODGODISNJE UKAMACIVANJE"
PRINT : PRINT
PRINT " Ovaj program omogucava izracunavanje iznosa duga nakon
odredjenog"
PRINT " razdoblja uz primjenu slozenog ispodgodisnjeg ukamacivanja."
PRINT " U njemu je potrebno unijeti podatke o velicini duga, datumu"
PRINT " preuzimanja duga, datumu vraccanja duga te vrijednosti kamatnih"
PRINT " stopa po mjesecima. Pretpostavlja se da se datumi preuzimanja"
PRINT " i vraccanja nalaze u istoj, neprijestupnoj godini."
PRINT
PRINT
PRINT " UNESITE TRAZENE PODATKE!"
PRINT
10 PRINT
INPUT " Velicina duga: ", C0
IF C0 <= 0 THEN 1000
PRINT
PRINT " Datum preuzimanja duga - dan: ", dn
INPUT " - mjesec: ", mj
IF mj < 1 OR mj > 12 OR dn < 1 THEN 1000
IF mj = 1 AND dn > 31 THEN 1000
IF mj = 2 AND dn > 28 THEN 1000
IF mj = 3 AND dn > 31 THEN 1000
IF mj = 4 AND dn > 30 THEN 1000
IF mj = 5 AND dn > 31 THEN 1000
IF mj = 6 AND dn > 30 THEN 1000
IF mj = 7 AND dn > 31 THEN 1000
IF mj = 8 AND dn > 31 THEN 1000
IF mj = 9 AND dn > 30 THEN 1000
IF mj = 10 AND dn > 31 THEN 1000
IF mj = 11 AND dn > 30 THEN 1000

```

IF mj = 12 AND dn > 31 THEN 1000

PRINT

INPUT " Datum vracanja duga - dan: ", dnv

INPUT " - mjsec: ", mjv

IF mjv < mj OR mjv < 1 OR mjv > 12 OR dnv < 1 THEN 1000

IF mjv = 1 AND dnv > 31 THEN 1000

IF mjv = 2 AND dnv > 28 THEN 1000

IF mjv = 3 AND dnv > 31 THEN 1000

IF mjv = 4 AND dnv > 30 THEN 1000

IF mjv = 5 AND dnv > 31 THEN 1000

IF mjv = 6 AND dnv > 30 THEN 1000

IF mjv = 7 AND dnv > 31 THEN 1000

IF mjv = 8 AND dnv > 31 THEN 1000

IF mjv = 9 AND dnv > 30 THEN 1000

IF mjv = 10 AND dnv > 31 THEN 1000

IF mjv = 11 AND dnv > 30 THEN 1000

IF mjv = 12 AND dnv > 31 THEN 1000

PRINT

PRINT " Mjesecne kamatne stope (%):"

FOR a = mj TO mjv

IF a = 1 THEN INPUT "

IF a = 2 THEN INPUT "

IF a = 3 THEN INPUT "

IF a = 4 THEN INPUT "

IF a = 5 THEN INPUT "

IF a = 6 THEN INPUT "

IF a = 7 THEN INPUT "

IF a = 8 THEN INPUT "

IF a = 9 THEN INPUT "

IF a = 10 THEN INPUT "

IF a = 11 THEN INPUT "

IF a = 12 THEN INPUT "

NEXT a

IF mj = 2 THEN n = 28 - dn

IF mj = 4 OR mj = 6 OR mj = 9 OR mj = 11 THEN n = 30 - dn

IF mj = 1 OR mj = 3 OR mj = 5 OR mj = 7 OR mj = 8 OR mj = 10 OR mj

= 12 THEN n = 31 - dn

Cb = C0

FOR b = mj TO mjv

IF b = 2 THEN dan = 28

IF b = 4 OR b = 6 OR b = 9 OR b = 11 THEN dan = 30

IF b = 1 OR b = 3 OR b = 5 OR b = 7 OR b = 8 OR b = 10 OR b = 12 T

HEN dan = 31

IF mj = mjv THEN Cn = C0 \* (1 + ((1 + g(b) / 100) ^ (1 / dan) - 1)) ^ (dnv

- dn): GOTO 500

Cn = Cb \* (1 + ((1 + g(b) / 100) ^ (1 / dan) - 1)) ^ n

IF mjv > b + 1 THEN GOSUB 2000

IF mjv = b + 1 THEN n = dnv

Cb = Cn

NEXT b

500 PRINT : PRINT

PRINT " RJESENJE:"

PRINT

PRINT " Dug na dan ", dnv, " ", mjv, " ", iznosi: ", Cn

PRINT : PRINT : PRINT

PRINT " Izbornik:"

PRINT

PRINT " 1) Ponoviti od pocetka;"

PRINT " 2) Kraj."

PRINT " Unesite Vas izbor (1/2)?"

110 DO

a\$ = INKEY\$

LOOP WHILE a\$ = ""

IF a\$ = "1" THEN 5

IF a\$ = "2" THEN CLS : END

IF a\$ <> "1" OR a\$ <> "2" THEN 110

1000 PRINT : PRINT

PRINT " NEISPRAVNO! PONOVITE UNOS!"

GOTO 10

```

2000 IF b + 1 = 2 THEN n = 28
IF b + 1 = 4 OR b + 1 = 6 OR b + 1 = 9 OR b + 1 = 11 THEN n = 30
IF b + 1 = 1 OR b + 1 = 3 OR b + 1 = 5 OR b + 1 = 7 OR b + 1 = 8 O
R b + 1 = 10 OR b + 1 = 11 THEN n = 31
RETURN

```

```

REM *****
REM * Program pomocu kojeg se rjesavaju problemi *
REM * izbora primjenom kriterija sadasnje vrijednosti *
REM *****
1 CLS
PRINT : PRINT
PRINT " OPTIMALAN IZBOR PRIMJENOM KRITERIJA SADASNJE
VRIJEDNO
ST"
PRINT : PRINT
PRINT " Ovaj program omogucava da se sa stajalista one osobe koja
prilikom"
PRINT " kupnje određenog dobra ima dva ponudjena modela za izvršenje"
PRINT " obveze placanja napravi optimalan izbor. Pri tome se koristi"
PRINT " kriterij sadasnje vrijednosti. Time se sva dugovanja koje tijekom"
PRINT " vremena kupac treba podmiriti, uz poznatu dekurzivnu godisnju"
PRINT " kamatnu stopu, svode na sadasnju vrijednost i zbrajaju. Ona"
PRINT " alternativa cija je sadasnja vrijednost niza ujedno je i bolja"
PRINT " za kupca. U programu je stoga potrebno definirati dekurzivnu"
PRINT " godisnju kamatnu stopu, godine nakon kojih pojedine uplate"
PRINT " pristizu te iznos tih uplata."
PRINT : PRINT
10 PRINT " Unesite sljedece podatke:"
PRINT : PRINT
PRINT " MODEL A"
PRINT
INPUT " Dekurzivna godisnja kamata (%): ", p1
PRINT
PRINT " Unesite nakon koliko godina sljede uplate (npr. 0 ako sljede"
PRINT " odmah, 1 ako sljede nakon jedne godine, itd.), kao i iznose"
PRINT " uplata. Broj mogucih uplata programom je ogranicen na 10."
n = 0
20 n = n + 1
IF n > 10 THEN 50
PRINT
PRINT " Podaci za "; n; ". uplatu:"
INPUT " - rok dospjeca: ", rok1(n)
INPUT " - iznos uplate: ", upl1(n)

```

```

PRINT
PRINT "      Postoji li jos koja uplata (D/N):"
30 DO
a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = "D" OR a$ = "d" THEN 20
IF a$ = "N" OR a$ = "n" THEN 50
IF a$ <> "D" OR a$ <> "d" OR a$ <> "N" OR a$ <> "n" THEN 30
50 PRINT : PRINT
PRINT "      MODEL B"
PRINT
PRINT "      Dekurzivna godisnja kamata (%): ", p2
PRINT
PRINT "      Unesite nakon koliko godina slijede uplate (npr. 0 ako slijedi"
PRINT "      odmah, 1 ako slijedi nakon jedne godine, itd.), kao i iznose"
PRINT "      uplata. Broj mogucih uplata programom je ogranicen na 10."
d = 0
60 d = d + 1
IF n > 10 THEN 100
PRINT
PRINT "      Podaci za: d: ". uplatu:"
INPUT "      - rok/dospjeca: ", rok2(d)
INPUT "      - iznos uplate: ", up12(d)
PRINT
PRINT "      Postoji li jos koja uplata (D/N):"
70 DO
a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = "D" OR a$ = "d" THEN 60
IF a$ = "N" OR a$ = "n" THEN 100
IF a$ <> "D" OR a$ <> "d" OR a$ <> "N" OR a$ <> "n" THEN 70
100 C0 = 0
FOR a = 1 TO n
Ca = C0 + (up1(a) / (1 + p1 / 100) ^ rok1(a))
C0 = Ca
NEXT a

```

```

FOR b = 1 TO d
Cb = C0 + (up12(b) / (1 + p2 / 100) ^ rok2(b))
C0 = Cb
NEXT b
PRINT : PRINT
PRINT "      RIJESENJE!"
PRINT
PRINT "      Sadasnja vrijednost svih uplata modela A iznosi: "; Ca
PRINT "      Sadasnja vrijednost svih uplata modela B iznosi: "; Cb
PRINT
IF Ca < Cb THEN PRINT "      Za kupca je povoljniji model placanja A za";
Cb - Ca
IF Cb < Ca THEN PRINT "      Za kupca je povoljniji model placanja B za";
Ca - Cb
IF Ca = Cb THEN PRINT "      Za kupca su jednako povoljna oba modela
placanja!"
PRINT : PRINT : PRINT
PRINT "      Izbornik:"
PRINT
PRINT "      1) Ponoviti program od pocetka,"
PRINT "      2) Kraj."
PRINT
PRINT "      Unesite Vas izbor (1/2)?"
200 DO
a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = "1" THEN 1
IF a$ = "2" THEN 300
IF a$ <> "1" OR a$ <> "2" THEN 200
300 CLS
END

```

```

REM *****
REM * Program pomoću kojeg se rješavaju problemi          *
REM * konformne i relativne kamatne stope                *
REM *****
1 CLS
PRINT : PRINT
PRINT " KONFORMNA I RELATIVNA KAMATNA STOPA "
PRINT : PRINT
PRINT " Ponudjene su sljedeće mogućnosti:"
PRINT
PRINT " 1) Poznat početni kapital, broj dana ukamaccivanja i dekurzivna "
PRINT " godišnja kamatna stopa, a traži se konacna vrijednost kapitala "
PRINT " (u godini koja nije prestupna) uz primjenu konformnog "
PRINT " dnevnog "
PRINT " kamatnjaka i uz primjenu relativnog kamatnjaka te efektivna "
PRINT " kamatnjaka; "
PRINT " 2) Poznat početni kapital, broj ukamaccivanja u godini, broj "
PRINT " godina "
PRINT " ukamaccivanja i dekurzivna godišnja kamatna stopa, a traži se "
PRINT " konacna vrijednost kapitala uz primjenu relativnog kamatnjaka "
PRINT " te efektivna godišnja kamatna stopa; "
PRINT " 3) Poznata efektivna godišnja kamatna stopa, a traži se "
PRINT " ekvivalentna "
PRINT " ispodgodišnja (mjesecna, kvartalna, polugodišnja) relativna "
PRINT " kamatna "
PRINT " stopa. "
PRINT " 4) Završetak rada u programu. "
PRINT : PRINT
PRINT " Unesite Vas izbor (1/2/3/4)?"
10 DO
a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = "1" THEN 100
IF a$ = "2" THEN 200
IF a$ = "3" THEN 300
IF a$ = "4" THEN 400
IF a$ <> "1" OR a$ <> "2" OR a$ <> "3" OR a$ <> "4" THEN 10

```

```

100 CLS
105 PRINT : PRINT
PRINT " Unesite tražene vrijednost:"
PRINT
INPUT " a) iznos početnog kapitala: ", C0
INPUT " b) broj dana ukamaccivanja: ", n
INPUT " c) dekurzivna godišnja kamatna stopa (%): ", p
IF C0 <= 0 OR n <= 0 OR p > 365 OR p <= 0 THEN PRINT : PRINT : PRI
NT " NEISPRAVNO! PONOVI TE UNOSI!": GOTO 105
PRINT
PRINT " Rjesenje:"
PRINT
pd = 100 * ((1 + p / 100) ^ (1 / 365) - 1)
r = 1 + pd / 100
Cn = C0 * r ^ n
PRINT " Konacna vrijednost kapitala uz "
PRINT " primjenu konformnog dnevnog kamatnjaka: ", Cn
PRINT
pr = p / 365
r = 1 + pr / 100
Cn = C0 * r ^ n
PRINT " Konacna vrijednost kapitala uz "
PRINT " primjenu relativnog kamatnjaka: ", Cn
PRINT
pe = 100 * (1 + pr / 100) ^ 365 - 100
PRINT " Efektivna godišnja kamata uz "
PRINT " primjenu relativnog kamatnjaka: ", pe, "%"
PRINT : PRINT
PRINT " Izbornik:"
PRINT
PRINT " 1) Ponoviti unos;"
PRINT " 2) Povratak u glavni izbornik."
PRINT : PRINT
PRINT " Unesite Vas izbor (1/2)?"
110 DO
a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = "1" THEN 100
IF a$ = "2" THEN 1
IF a$ <> "1" OR a$ <> "2" THEN 110

```





```

REM *****
REM * Program pomocu kojeg   *
REM * konacne i sadašnje vrijednosti vise uplata *
REM *****
10 CLS
PRINT : PRINT
PRINT "          KONACNA I SADASNJA VRIJEDNOST VISE
      UPLATA"
PRINT : PRINT
PRINT " Ovaj program na osnovi unesenih podataka o broju godina,
      iznosima "
PRINT " jednakih godišnjih uplata, visini dekurzivne godišnje kamatne
      stope"
PRINT " i nacina godišnjih uplata (na pocetku ili kraju razdoblja) kao "
PRINT " rezultat daje vrijednost sume konacnih i sadašnjih vrijednosti svih
      uplata."
PRINT "
PRINT " Ponudjene su dva nacina godišnjih uplata i mogućnost završetka
      rada"
PRINT " u programu:"
PRINT "
PRINT " 1) Prenumerando uplata (na pocetku razdoblja);"
PRINT "
PRINT " 2) Postnumerando uplata (na kraju razdoblja);"
PRINT "
PRINT " 3) Završetak rada u programu."
PRINT : PRINT
PRINT " Unesite Vas izbor (1/2/3)?"
20 DO
  a$ = INKEYS
  LOOP WHILE a$ = ""
  IF a$ = "1" THEN 100
  IF a$ = "2" THEN 200
  IF a$ = "3" THEN 300
  IF a$ <> "1" OR a$ <> "2" OR a$ <> "3" THEN 20
100 CLS
105 PRINT : PRINT
PRINT " Unesite trazene vrijednost:"

```

```

PRINT
INPUT " a) iznos godišnje uplate: ", a
INPUT " b) broj godina tijekom kojih se vrši uplata: ", n
INPUT " c) dekurzivna godišnja kamatna stopa (%): ", p
IF a <= 0 OR n <= 1 OR p <= 0 THEN PRINT : PRINT : PRINT " NEISP
RAVNOI PONOVITE UNOS!": GOTO 105
PRINT
PRINT " Rjesenje:"
PRINT
PRINT
r = 1 + p / 100
SV = a * r ^ (-n + 1) * ((r ^ n - 1) / (r - 1))
PRINT " Sadašnja vrijednost svih uplata: ", SV
PRINT
KV1 = a * r * (r ^ n - 1) / (r - 1)
PRINT " Konacna vrijednost svih uplata na kraju: ", n, ". godin
e: ", KV1
PRINT
KV2 = a * r * (r ^ (n - 1) - 1) / (r - 1) + a
PRINT " Konacna vrijednost svih uplata u trenutku posljednje
uplate: ", KV2
PRINT : PRINT
PRINT "
      Izbornik:"
PRINT
PRINT "
      1) Ponoviti unos;"
PRINT "
      2) Povratak u glavni izbornik."
PRINT
PRINT "
      Unesite Vas izbor (1/2)?"
110 DO
  a$ = INKEYS
  LOOP WHILE a$ = ""
  IF a$ = "1" THEN 100
  IF a$ = "2" THEN 10
  IF a$ <> "1" OR a$ <> "2" THEN 110
200 CLS
205 PRINT : PRINT
PRINT " Unesite trazene vrijednost:"
PRINT
INPUT " a) iznos godišnje uplate: ", a
INPUT " b) broj godina tijekom kojih se vrši uplata: ", n

```

```

INPUT " c) dekurzivna godisnja kamatna stopa (%): ", p
IF a <= 0 OR n <= 1 OR p <= 0 THEN PRINT : PRINT : PRINT " NEISP
RAVNO! PONOVI TE UNOS!"; GOTO 105
PRINT : PRINT
PRINT " Rjesenje:"
PRINT
r = 1 + p / 100
SV = a * r ^ (-n) * ((r ^ n - 1) / (r - 1))
PRINT " Sadasnja vrijednost svih uplata: "; SV
PRINT
KV = a * (r ^ n - 1) / (r - 1)
PRINT " Konacna vrijednost svih uplata: "; KV
PRINT : PRINT : PRINT
PRINT " Izbornik:"
PRINT
PRINT " 1) Ponoviti unos;"
PRINT " 2) Povratak u glavni izbornik
PRINT "
PRINT
PRINT " Unesite Vas izbor (1/2)?"
210 DO
a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = "1" THEN 200
IF a$ = "2" THEN 10
IF a$ <> "1" OR a$ <> "2" THEN 210

```

```

300 CLS
END

```

```

REM *****
REM * Program pomocu kojeg se rjesavaju problemi konacne
REM * i sadasnje vrijednosti vise prenumerando uplata
REM * uz promjenjive godisnje kamatne stope
REM *****

```

```

100 CLS
PRINT : PRINT
PRINT " KONACNA I SADASNJA VRIJEDNOST VISE
PRENUMERANDO UPLATA"
PRINT " UZ PROMJENJIVE GODISNJE KAMATNE STOPE"
PRINT : PRINT
PRINT " Ovaj program na osnovi unesenih podataka o broju godina.
iznosima"
PRINT " jednakih godisnjih uplata i visini dekurzivnih godisnjih kamatnih"
PRINT " stopa kao rezultat daje vrijednost sume konacnih i sadasnjih"
PRINT " vrijednosti svih prenumerando uplata."
PRINT : PRINT
PRINT " UNESITE TRAZENE VRIJEDNOSTI:"
PRINT
PRINT
110 INPUT " a) iznos godisnje uplate: ", a
IF a <= 0 THEN PRINT : PRINT " NEISPRAVNO! PONOVI TE
UNOS!"
: PRINT : GOTO 110
120 INPUT " b) broj godina tijekom kojih se vrši uplata: ", n
IF n <= 1 THEN PRINT : PRINT " NEISPRAVNO! PONOVI TE
UNOS!"
: PRINT : GOTO 120
DIM p(n), r(n), k(n), pom(n), a(n), KV(n)
PRINT " c) dekurzivne godisnje kamatne stope (%): "
FOR i = 1 TO n
"i": " godina"
130 PRINT "
: PRINT "
- visina kamatne stope: ", p(i)
INPUT "
IF p(i) <= 0 THEN PRINT : PRINT " NEISPRAVNO! PONOVI TE
UNO
SI": PRINT : GOTO 130
r(i) = 1 + p(i) / 100
NEXT i

```

REM \*\*\*\*\* SADASNJA VRIJEDNOST \*\*\*\*\*

= 0  
r(0) = a

FOR i = 1 TO n

o = b + 1

= 1

FOR j = 1 TO b

oom(i) = r \* r(j) ^ (-1)

r = pom(i)

NEXT j

k(i) = a \* pom(i)

a(i) = a \* r

NEXT i

pom = 0

FOR i = 0 TO n - 1

SV = pom + k(i)

pom = SV

NEXT i

REM \*\*\*\*\* KONACNA VRIJEDNOST \*\*\*\*\*

KV(0) = 0

FOR i = 1 TO n

KV(i) = (KV(i - 1) + a) \* r(i)

NEXT i

PRINT : PRINT

PRINT " Rjesenje:"

PRINT

PRINT " Sadasnja vrijednost svih uplata:"; SV

PRINT " Konacna vrijednost svih uplata:"; KV(n)

ERASE p, r, k, pom, a, KV

PRINT : PRINT

PRINT "

PRINT

PRINT "

PRINT "

PRINT

PRINT "

140 DO

a\$ = INKEY\$

LOOP WHILE a\$ = ""

IF a\$ = "1" THEN 100

IF a\$ = "2" THEN 200

IF a\$ <> "1" OR a\$ <> "2" THEN 140

200 CLS

END

Izbornik:"

- 1) Ponoviti program od pocetka;
- 2) Zavrsetak rada u programu."

Unesite Vas izbor (1/2)?"

```

REM *****
REM * Program pomocu kojeg se rjesavaju *
REM * problemi potrosackih kredita prema *
REM * principu jednakih otplatnih kvota *
REM *****

```

```
100 CLS
```

```
PRINT : PRINT
```

```
PRINT " OBRACUN POTROSACKIH KREDITA PREMA"
```

```
PRINT " PRINCIPU JEDNAKIH OTPLATNIH KVOTA"
```

```
PRINT :
```

```
PRINT " Ovaj program na osnovi unesenih podataka o velicini kredita, roku"
```

```
PRINT " oplate u mjesecima i godisnje kamatne stope prema principu
```

```
jednakih"
```

```
PRINT " otplatnih kvota izradjuje plan oplate."
```

```
PRINT : PRINT
```

```
PRINT " UNESITE TRAZENE VRIJEDNOSTI:"
```

```
PRINT
```

```
110 INPUT " a) iznos kredita: ", C0 NEISPRAVNO! PONOVIITE
```

```
IF C0 <= 0 THEN PRINT : PRINT "
```

```
UNOSI!
```

```
": PRINT : GOTO 110
```

```
120 INPUT " b) rok oplate u mjesecima: ", n
```

```
IF n < 1 THEN PRINT : PRINT " NEISPRAVNO! PONOVIITE
```

```
UNOSI!:"
```

```
PRINT : GOTO 120
```

```
DIM i(n)
```

```
130 INPUT " c) godisnja kamatna stopa (%): ", p
```

```
IF p <= 0 THEN PRINT : PRINT " NEISPRAVNO! PONOVIITE
```

```
UNOSI!:"
```

```
: PRINT : GOTO 130
```

```
CLS
```

```
PRINT : PRINT
```

```
PRINT " PLAN OTPLATE!"
```

```
PRINT
```

```
PRINT " pocetak ostatak otplatna prispjele otplatna"
```

```
PRINT " mjeseca duga kvota kamate rata "
```

```
PRINT
```

```

pm = p / 12
OTKVOTA = C0 / n
c = C0
pom = 0
pom1 = 0
b = 8

```

```
FOR a = 1 TO n
```

```
b = b + 1: IF b MOD 23 = 0 THEN GOSUB 1000
```

```
i(a) = c * pm / 100
```

```
In = pom + i(a)
```

```
pom = In
```

```
OTRATA = OTKVOTA + i(a)
```

```
ORn = pom1 + OTRATA
```

```
pom1 = ORn
```

```
OSDUGA = c " ; a, " ; USING "#####.##"; O
```

```
IF a < 10 THEN PRINT " SDUGA, OTKVOTA, i(a), OTRATA
```

```
IF a >= 10 AND a <= 99 THEN PRINT " ; a, " ; USING "#####
```

```
#####.##"; OSDUGA, OTKVOTA, i(a), OTRATA
```

```
IF a >= 100 THEN PRINT " ; a, " ; USING "#####.##"; O
```

```
SDUGA, OTKVOTA, i(a), OTRATA
```

```
c = OSDUGA - OTKVOTA
```

```
NEXT a
```

```
b = b + 1
```

```
IF b MOD 23 = 0 THEN GOSUB 1000 ELSE PRINT
```

```
PRINT " ukupno: " ; USING "#####.##"; C0; In;
```

```
ORn
```

```
PRINT
```

```
ERASE i
```

```
PRINT " <Esc> za n
```

```
astavak"
```

```
200 DO
```

```
a$ = INKEY$
```

```
LOOP WHILE a$ = ""
```

```
IF a$ = CHR$(27) THEN 500
```

```
IF a$ <> CHR$(27) THEN 200
```

```

00 PRINT : PRINT : PRINT
PRINT "      Izbornik:"
PRINT "
PRINT "      1) Ponoviti program od pocetka;"
PRINT "      2) Zavrsetak rada u programu."
PRINT "
PRINT "      Unesite Vas izbor (1/2)?"
40 DO
    a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = "1" THEN 100
IF a$ = "2" THEN CLS : END
IF a$ <> "1" OR a$ <> "2" THEN 140
1000 PRINT
PRINT "
astavak"
1010 DO
    a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = CHR$(27) THEN 1020
IF a$ <> CHR$(27) THEN 1010
1020 CLS
PRINT : PRINT
PRINT "      pocetak      ostatak      otplatna      prispijele      otplatna"
PRINT "      mjeseca      duga      kvota      kamate      rata "
PRINT "
PRINT "      b = b + 7
RETURN

```

<Esc> za n

```

REM *****
REM * Program pomocu kojeg se rjesavaju *
REM * problemi potrosackih kredita prema *
REM * principu jednakih otplatnih rata *
REM *****

```

```

100 CLS
PRINT : PRINT
PRINT "
PRINT "      OBRACUN POTROSACKIH KREDITA PREMA"
PRINT "      PRINCIPU JEDNAKIH OTPLATNIH RATA"
PRINT "
PRINT : PRINT
PRINT "      Ovaj program na osnovi unesenih podataka o velicini kred
ita, roku"
PRINT "      otplate u mjesecima i godisnje kamatne stope prema principu
jednakih"
PRINT "      otplatnih rata izradjuje plan otplate."
PRINT : PRINT
PRINT "      UNESITE TRAZENE VRIJEDNOSTI:"
PRINT
PRINT
110 INPUT "      a) iznos kredita: ", C0
IF C0 <= 0 THEN PRINT "
UNOS!"
PRINT : GOTO 110
120 INPUT "      b) rok otplate u mjesecima: ", n
IF n < 1 THEN PRINT "      NEISPRAVNO! PONOVI TE
UNOS!":
PRINT : GOTO 120
DIM i(n)
130 INPUT "      c) godisnja kamatna stopa (%): ", p
IF p <= 0 THEN PRINT "      NEISPRAVNO! PONOVI TE
UNOS!":
PRINT : GOTO 130

```

```

CLS
PRINT : PRINT
PRINT "      PLAN OTPLATE!"
PRINT
PRINT "      pocetak      ostatak      otplatna      prispijele      otplatna"
PRINT "      mjeseca      duga      kvota      kamate      rata "
PRINT

```

```
R = 1 + p / 1200
OTRATA = C0 * R ^ n * (R - 1) / (R ^ n - 1)
pm = p / 12
c = C0
pom = 0
pom1 = 0
pom2 = 0
b = 8
```

```
FOR a = 1 TO n
b = b + 1: IF b MOD 23 = 0 THEN GOSUB 1000
```

```
i(a) = c * pm / 100
ln = pom + i(a)
pom = ln
OSDUGA = c
```

```
IF a = n THEN OTRATA = OSDUGA + i(a)
OTKVOTA = OTRATA - i(a)
```

```
ORn = pom1 + OTRATA
pom1 = ORn
Cn = pom2 + OTKVOTA
pom2 = Cn
```

```
IF a < 10 THEN PRINT " "; a; " "; USING "#####.###"; O
SDUGA, OTKVOTA, i(a), OTRATA
IF a >= 10 AND a <= 99 THEN PRINT " "; a; " "; USING "#####
#####.###"; OSDUGA, OTKVOTA, i(a), OTRATA
IF a >= 100 THEN PRINT " "; a; " "; USING "#####.###"; O
SDUGA, OTKVOTA, i(a), OTRATA
c = OSDUGA - OTKVOTA
NEXT a
```

```
b = b + 1
IF b MOD 23 = 0 THEN GOSUB 1000 ELSE PRINT
PRINT " ukupno: "; USING "#####.###"; Cn; ln;
ORn
PRINT
```

```
ERASE i
```

```
PRINT "
```

<Esc> za nastavak"

```
200 DO
a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = CHR$(27) THEN 500
IF a$ <> CHR$(27) THEN 200
```

```
500 PRINT : PRINT : PRINT
PRINT " Izbornik:"
```

- 1) Ponoviti program od pocetka;"
- 2) Zavrsetak rada u programu.

```
PRINT
PRINT " Unesite Vas izbor (1/2)?"
```

```
140 DO
a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = "1" THEN 100
IF a$ = "2" THEN CLS : END
IF a$ <> "1" OR a$ <> "2" THEN 140
```

```
1000 PRINT
PRINT " <Esc> za n
```

```
astavak"
1010 DO
a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = CHR$(27) THEN 1020
IF a$ <> CHR$(27) THEN 1010
1020 CLS
PRINT : PRINT
PRINT " pocetak ostatak otplatna prispjele otplatna"
PRINT " mjeseca duga kvota kamate rata "
PRINT
b = b + 7
RETURN
```

```

REM *****
REM * Program pomocu kojeg se rjesavaju *
REM * problemi otplate zajma jednakim *
REM * anuitetima plativim na kraju godine *
REM *****

```

```
100 CLS
```

```
PRINT : PRINT
```

```
PRINT "          OBRAČUN ZAJMA JEDNAKIM ANUITETIMA"
```

```
PRINT "          PLATIVIM NA KRAJU GODINE"
```

```
PRINT : PRINT
```

```
PRINT " Ovaj program na osnovi unesenih podataka o velicini zajma, roku"
```

```
PRINT " otplate u godinama i godisnje kamatne stope izradijuje plan otplate"
```

```
PRINT " jednakim anuitetima plativim krajem godine."
```

```
PRINT : PRINT
```

```
PRINT " UNESITE TRAZENE VRIJEDNOSTI:"
```

```
PRINT
```

```
110 INPUT " a) iznos zajma: ", C0
```

```
IF C0 <= 0 THEN PRINT : PRINT " NEISPRAVNO! PONOVITE
```

```
UNOS!
```

```
": PRINT : GOTO 110
```

```
120 INPUT " b) rok otplate u godinama: ", n
```

```
IF n < 1 THEN PRINT : PRINT " NEISPRAVNO! PONOVITE
```

```
UNOS!"
```

```
PRINT : GOTO 120
```

```
DIM i(n)
```

```
130 INPUT " c) godisnja kamatna stopa (%): ", p
```

```
IF p <= 0 THEN PRINT : PRINT " NEISPRAVNO! PONOVITE
```

```
UNOS!"
```

```
: PRINT : GOTO 130
```

```
CLS
```

```
PRINT : PRINT
```

```
PRINT " PLAN OTPLATE!"
```

```
PRINT
```

```
PRINT " kraj prispijele otplatna anuitet ostatak"
```

```
PRINT " godine kamate kvota duga"
```

```
PRINT
```

```
t = 1 + p / 100
```

```
ANUITET = C0 * t ^ n * (t - 1) / (t ^ n - 1)
```

```

c = C0
d = C0
pom = 0
pom1 = 0
pom2 = 0
b = 8

```

```
FOR a = 0 TO n
```

```
  b = b + 1: IF b MOD 23 = 0 THEN GOSUB 1000
```

```
  OSD = c
```

```
  OTK = ANUITET - c * (t - 1)
```

```
  c = OSD - OTK
```

```
  IF a = 0 THEN PRINT " 0 - "; USING "#####.##"; OSD: GOTO 135
```

```
  OSDUGA = d
```

```
  i(a) = d * (t - 1)
```

```
  In = pom + i(a)
```

```
  pom = In
```

```
  IF a = n THEN ANUITET = OSDUGA + i(a)
```

```
  OTKVOTA = ANUITET - i(a)
```

```
  ANn = pom1 + ANUITET
```

```
  pom1 = ANn
```

```
  Cn = pom2 + OTKVOTA
```

```
  pom2 = Cn
```

```
  IF a < 10 THEN PRINT "      "; a; " "; USING "#####.##";
```

```
  i(a), OTKVOTA, ANUITET, OSD
```

```
  IF a >= 10 AND a <= 99 THEN PRINT "      "; a; " "; USING "###
```

```
#####.##"; i(a), OTKVOTA, ANUITET, OSD
```

```
  IF a >= 100 THEN PRINT "      "; a; " "; USING "#####.##";
```

```
  i(a), OTKVOTA, ANUITET, OSD
```

```
  d = OSDUGA - OTKVOTA
```

```
135 NEXT a
```

```
b = b + 1
```

```
IF b MOD 23 = 0 THEN GOSUB 1000 ELSE PRINT
```

```
PRINT "      ukupno: "; USING "#####.##"; In, Cn, ANn
```

```
PRINT
```

```
ERASE i
```

```

PRINT "
200 DO
a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = CHR$(27) THEN 500
IF a$ <> CHR$(27) THEN 200

500 PRINT : PRINT : PRINT
PRINT "
PRINT "
PRINT "
PRINT "
PRINT "
140 DO
a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = "1" THEN 100
IF a$ = "2" THEN CLS : END
IF a$ <> "1" OR a$ <> "2" THEN 140

1000 PRINT
PRINT "
.nastavak"
1010 DO
a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = CHR$(27) THEN 1020
IF a$ <> CHR$(27) THEN 1010
1020 CLS
PRINT : PRINT
PRINT "
PRINT "
PRINT "
PRINT "
PRINT "
RETURN

```

<Esc> za nastavak"

Izbornik:"

1) Ponoviti program od pocetka,  
2) Zavrsetak rada u programu."

Unesite Vas izbor (1/2)?"

<Esc> za

```

REM *****
REM * Program pomocu kojeg se rjesavaju problemi
REM * otplate zajma jednakim, unaprijed određenim
REM * anuitetima (osim zadnjeg (krajnjeg) kojeg
REM * izracunava racunalo) plativim na kraju godine
REM *****

```

100 CLS

PRINT : PRINT

PRINT " OBRACUN ZAJMA JEDNAKIM, UNAPRIJED

ODREDJENIM"

PRINT " ANUITETIMA PLATIVIM NA KRAJU GODINE"

PRINT : PRINT

PRINT " Ovaj program na osnovi unesenih podataka o velicini zajma,

iznosu"

PRINT " anuiteta i godisnje kamatne stope izradjuje plan otplate zajma

jednakim"

PRINT " anuitetima plativim krajem godine. Zadnji (krajnji) anuitet racunalo"

PRINT " samo odredjuje."

PRINT : PRINT

PRINT " UNESITE TRAZENE VRIJEDNOSTI:"

PRINT

110 INPUT " a) iznos zajma: ", C0

IF C0 <= 0 THEN PRINT : PRINT " NEISPRAVNO! PONOVITE

UNOS!"

": PRINT : GOTO 110

120 INPUT " b) godisnja kamatna stopa (%): ", p

IF p <= 0 THEN PRINT : PRINT " NEISPRAVNO! PONOVITE

UNOS!"

: PRINT : GOTO 120

130 INPUT " c) iznos anuiteta: ", anuitet

r = 1 + p / 100

IF C0 + anuitet <= C0 \* r OR anuitet >= C0 \* r THEN PRINT : PRINT

" NEISPRAVNO! PONOVITE UNOS!": PRINT : GOTO 130

n = LOG(anuitet / (anuitet - C0 \* r + C0)) / LOG(r)

n = INT(n)

DIM i(n)

CLS

PRINT : PRINT

```
PRINT " PLAN OTPLATE!"
PRINT
PRINT " kraj prispjele otplatna anuitet ostatak"
PRINT " godine kamate kvota duga"
PRINT
```

```
b = 8
c = C0
d = C0
pom = 0
pom1 = 0
pom2 = 0
```

```
FOR a = 0 TO n
b = b + 1: IF b MOD 23 = 0 THEN GOSUB 1000
```

```
OSD = c
OTK = anuitet - c * (r - 1)
```

```
c = OSD - OTK
IF a = 0 THEN PRINT " 0"
- "; USING "#####.##"; OSD: GOTO 135
```

```
OSDUGA = d
i(a) = d * (r - 1)
In = pom + i(a)
```

```
pom = In
IF a = n THEN anuitet = OSDUGA + i(a)
OTKVOTA = anuitet - i(a)
```

```
IF a = n THEN OSD = OSDUGA - OTKVOTA
ANn = pom1 + anuitet
pom1 = ANn
```

```
Cn = pom2 + OTKVOTA
pom2 = Cn
IF a < 10 THEN PRINT "
```

```
"; a: "; USING "#####.##";
i(a), OTKVOTA, anuitet, OSD
IF a >= 10 AND a <= 99 THEN PRINT " "; a: "; USING "###
#####.##"; i(a), OTKVOTA, anuitet, OSD
```

```
IF a >= 100 THEN PRINT " "; a: "; USING "#####.##";
i(a), OTKVOTA, anuitet, OSD
d = OSDUGA - OTKVOTA
```

```
135 NEXT a
```

```
b = b + 1
IF b MOD 23 = 0 THEN GOSUB 1000 ELSE PRINT
PRINT " ukupno: "; USING "#####.##"; In, Cr, ANn
PRINT
```

```
ERASE i
```

```
PRINT " <Esc> za
nastavak"
```

```
200 DO
a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = CHR$(27) THEN 500
IF a$ <> CHR$(27) THEN 200
```

```
500 PRINT : PRINT : PRINT
PRINT " Izbornik:"
```

```
PRINT " 1) Ponoviti program od pocetka;"
PRINT " 2) Zavrsetak rada u programu."
PRINT " Unesite Vas izbor (1/2)?"
```

```
140 DO
a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
IF a$ = "1" THEN 100
IF a$ = "2" THEN CLS : END
IF a$ <> "1" OR a$ <> "2" THEN 140
```

```
1000 PRINT <Esc> za
PRINT " nastavak"
```

```
1010 DO
```

```
a$ = INKEY$
LOOP WHILE a$ = ""
```

```
IF a$ = CHR$(27) THEN 1020
IF a$ <> CHR$(27) THEN 1010
1020 CLS
PRINT : PRINT
```

```
PRINT " kraj prispjele otplatna anuitet ostatak"
```

PRINT "  
PRINT  
b = b + 7  
RETURN

godine kamate kvota

duga"

## LITERATURA

1. A.Dabčević, N.Dravinac, I.Franić, B.Sekulić, P.Šego, Primjena matematike za ekonomiste, Informator, Zagreb 1991.
2. M.Crnjac, D.Jukić, R.Scitovski, Matematika, Ekonomski fakultet, Osijek 1994.
3. R.Scitovski, Problemi najmanjih kvadrata - financijska matematika, Ekonomski i Elektrotehnički fakultet, Osijek 1993.
4. G.Babić, Basic programi za rješavanje određenih problema financijske matematike (seminarski rad), Ekonomski fakultet, Osijek 1996.
5. D.Dukić, Kompijutorski programi za rješavanje određenih problema financijske matematike (seminarski rad), Ekonomski fakultet, Osijek 1996.
6. E.Caprano, A.Gierl, Finanzmathematik, Verlag Franz Vahlen, München 1986.
7. D.Francišković, Genaralizacija kontinuiranog ukamatičivanja i strategije otplate duga, Ekonomska analiza, 2 - 24 (1990), 179 - 189.
8. D.Francišković, Continuous capitalization and debt management, VII Conference on Applied Mathematics, Osijek, 1990.
9. I.Kruschwitz, Finanzmathematik, Verlag Franz Vahlen, München 1989.
10. Lj.Martić, Kvantitativne metode za financijske i računovodstvene analize Informator, Zagreb, 1980.
11. V.Muškarđin, Suvremeni pristup financijskoj matematici, Ekonomska analiza, 1 - 19 (1985), 75 - 99.
12. R.Scitovski, Ispodgodišnje ukamatičivanje, Ekonomska analiza, 2 - 21 (1987), 243 - 257.

13. R. Scitovski, M. Šilac, D. Francišković, *Suvremeni pristup financijskoj matematici*, Privreda, 4 - 33 (1989).
14. M. Šilac, *Otplata zajma varijabilnim anuitetima*, Ekonomska analiza, 2 - 23 (1989), 185 - 197.
15. B. Šego, *Modeli otplate kredita s revalorizacijom*, Informator Zagreb, 1991.
16. R. Scitovski, R. Galić, M. Benšić, *Numerička analiza vjerojatnosti i statistika*, Osijek (1993).

13. R. Scitovski, M. Šilac, D. Francišković, *Suvremeni pristup financijskoj matematici*, Privreda, 4 - 33 (1989).
14. M. Šilac, *Otplata zajma varijabilnim anuitetima*, Ekonomska analiza, 2 - 23 (1989), 185 - 197.
15. B. Šego, *Modeli otplate kredita s revalorizacijom*, Informator Zagreb, 1991.
16. R. Scitovski, R. Galić, M. Benšić, *Numerička analiza vjerojatnosti i statistika*, Osijek (1993).