Zadatak

Materijalna tačka M mase *m* kreće se u ravni saglasno jednačinama

$$r = 2t$$
$$\varphi = 3t$$

Odrediti silu koja djeluje na materijalnu tačku M.

Rješenje:

Pošto se materijalna tačka kreće u ravni a zakon kretanja izražen je u polarnim koordinatama to su diferencijalne jednačine kretanja

$$m\left[\ddot{r} - 2\dot{\varphi}^2\right] = F_r$$
$$m\left[r\ddot{\varphi} - 2\dot{r}\dot{\varphi}\right] = F_r$$

Diferenciranjem jednačina kretanja i uvrštavanjem u prethodne jednačine dobivamo projekcije sile na ose polarnog koordinatnog sistema

$$\dot{r} = 2 \qquad \dot{\varphi} = 3$$
$$\ddot{r} = 0 \qquad \ddot{\varphi} = 0$$
$$F_r = -18mt$$
$$F_\varphi = 12m$$

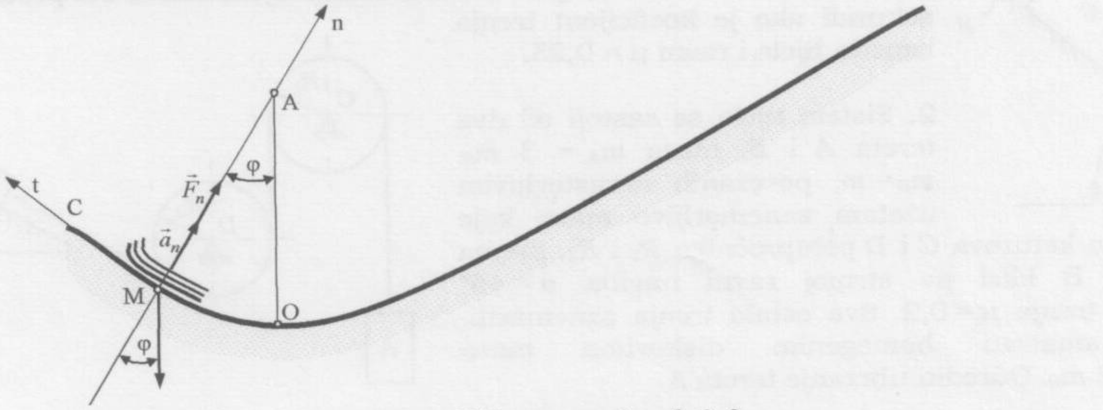
Intenzitet sile koja djeluje na materijalnu tačku

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_\varphi^2}$$
$$F = \sqrt{(-18mt)^2 + (12m)^2}$$
$$F = \sqrt{324t^2 + 144}$$

Vidimo iz prethodne jednačine da se sila koja djeluje na materijalnu tačku mijenja u funkciji vremena.

Zadatak

Pri spuštanju s brda skijaš težine G dostiže u tački O brzinu v_0. Pri daljnjem penjanju uz brdo skijaš se kreće po luku OC kruga poluprečnika r brzinom $v=\sqrt{v_0^2-2gr(1-\cos\varphi)}$ gdje je φ ugao koji obrazuje poluprečnik $\overline{AM}$ sa vertikalom. Odrediti pritisak skijaša na snijeg pri njegovom prolasku na dijelu puta OC. Trenje zanemariti.



Slika uz zadatak 3.8.

Rješenje:

Diferencijalna jednačina kretanja u vektorskom obliku glasi

$$m\vec{a}=\vec{G}+\vec{F}_n \qquad \text{(I)}$$

Projektovanjem jednačine (I) na pravac normale n imamo

$$ma_n=F_n-G\cos\varphi$$

$$m\frac{v^2}{R_k}=F_n-G\cos\varphi.$$

Pritisak skijaša na snijeg

$$F_n=G\cos\varphi+\frac{G}{g}\frac{v^2}{R_k}$$

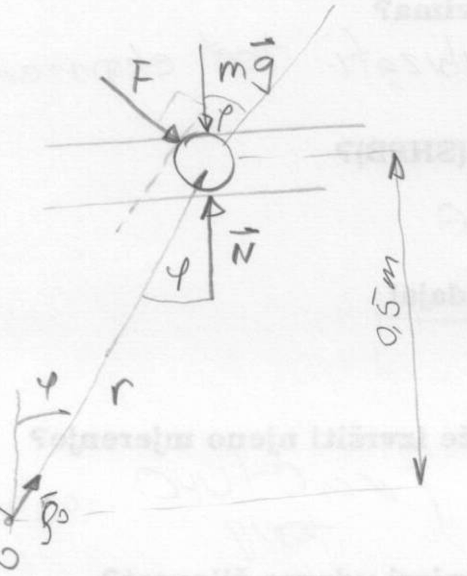
$$v=\sqrt{v_0^2-2gr(1-\cos\varphi)}$$

$$F_n=G\left[\cos\varphi+\frac{v_0^2-2gr(1-\cos\varphi)}{gr}\right]$$

Najveći pritisak je u tački O kada je $\varphi=0$

$$F_n=F_{n_{\max}}=G\left[1+\frac{v_0^2}{gr}\right].$$

Kuglica ima masu 0,5 kg i ograničena je na kretanje duž glatkog horizontalnog žlijeba. Kuglica se pokreće putem poluge $\overline{OA}$ koja rotira konstantnom ugaonom brzinom $\dot{\varphi} = 2$ rad/s. Odrediti silu poluge na kuglicu i reakciju žlijeba kada je $\varphi = 30°$. Pretpostaviti da je poluga u kontaktu sa samo jednom stranom žlijeba.



$$m a_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \Sigma \bar{F}_r \quad (1)$$

$$m a_\varphi = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = \Sigma \bar{F}_\varphi \quad (2)$$

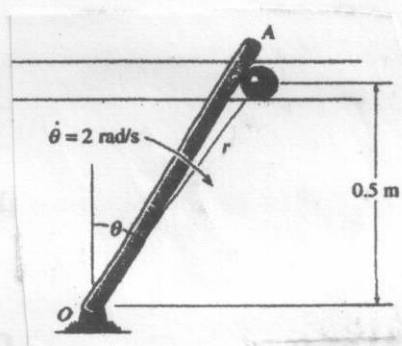
$$\dot{\varphi} = 2 \quad (3)$$

$$\ddot{\varphi} = 0 \quad (4)$$

$$\varphi = 2t \quad (5)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$t = \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{12}$$



$$r = \frac{0,5}{\cos\varphi} = \frac{0,5}{\cos(2t)}$$

iz (3) i (5)

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = 0,5\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right) = 0,5\frac{-(-\sin\varphi)}{\cos^2\varphi}\cdot\dot{\varphi} = 0,5\cdot\frac{tg\varphi}{\cos\varphi}\cdot\dot{\varphi} = \frac{tg(2t)}{\cos(2t)}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt}\left(0,5\cdot\frac{tg\,2t}{\cos 2t}\cdot 2\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{tg(2t)}{\cos(2t)}\right] =$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2(2t)}\cdot 2\cdot\cos(2t) - tg(2t)\cdot[-\sin(2t)]\cdot 2}{\cos^2(2t)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{\cos(2t)} + 2\cdot tg(2t)\cdot\sin(2t)}{\cos^2(2t)} = 2\cdot\left[\frac{1}{\cos^3(2t)} + \frac{tg^2(2t)}{\cos(2t)}\right]$$

$\frac{\pi}{12} = 15^\circ$

$$r = \frac{0{,}5}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{0{,}5}{\cos 30^\circ} = 0{,}577\ m = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (6)$$

$$\dot{r} = \frac{tg(2t)}{\cos(2t)} = \frac{tg\,30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3} = 0{,}667\ \frac{m}{s} \quad (7)$$

$$\ddot{r} = 2 \cdot \left[\frac{1}{\cos^3 30^\circ} + \frac{tg^2\, 30^\circ}{\cos 30^\circ}\right] = 2 \cdot \left[\frac{8}{3\sqrt{3}} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot \sqrt{3}}\right] = \quad (8)$$

$$= \frac{16+4}{3\sqrt{3}} = \frac{20}{3\sqrt{3}} = 3{,}849\ \frac{m}{s^2}$$

(3), (4), (5), (6), (7), (8) u (1) i (2)

$$m a_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = 0{,}5(3{,}849 - 0{,}577 \cdot 2^2) = 0{,}771\ kg \cdot \frac{m}{s^2} \quad (9)$$

$$m a_\varphi = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0{,}5(2 \cdot 0{,}667 \cdot 2) = 1{,}333\ kg \cdot \frac{m}{s^2} \quad (10)$$

$$\Sigma F_r = N \cdot \cos\varphi - mg \cdot \cos\varphi = N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (11)$$

$$\Sigma F_\varphi = F + mg \cdot \sin\varphi - N \cdot \sin\varphi = F + 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{1}{2} - N \cdot \frac{1}{2} \quad (12)$$

Iz (9), (10), (11), (12) prema (1), (2) dobija se:

$$N = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(0{,}771 + 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$N = 5{,}795\ N$$

$$F = 1{,}333 + N \cdot \frac{1}{2} - 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}778\ N$$