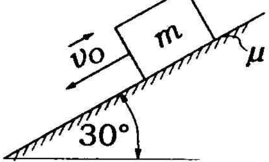
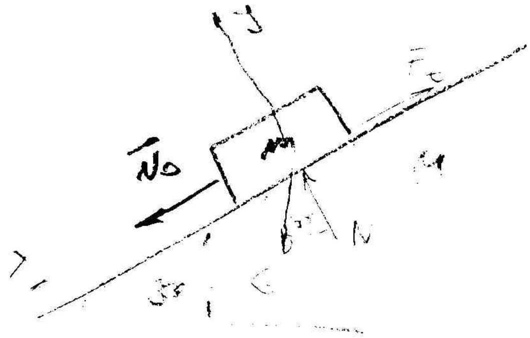
1. Tijelo mase m spušta se klizeći niz strmu ravan nagiba 30° sa početnom brzinom od 2 m/s. Odrediti brzinu tijela nakon 2 s i put koji pređe tijelo pri tom kretanju ako je koeficijent trenja između tijela i ravni $\mu = 0{,}25$.





$\sum y = 0$ (nema kretanja u y-pravcu)

$N - m g \cdot \cos 30° = 0$

$N = m \cdot g \cos 30°$

$m\ddot{x} = m \cdot g \cdot \sin 30° - F_t$

$F_t = N \cdot \mu = m g \cdot \cos 30° \mu$

$m\ddot{x} = m \cdot g \cdot \sin 30° - m \cdot g \cdot \cos 30° \mu$

$\ddot{x} = g \cdot (\sin 30° - \cos 30° \mu) = 2,781 \frac{m}{s^2}$

$\dot{x} = g(\sin 30° - \cos 30° \mu) \cdot t + C_1$

$t = 0 ; \dot{x}_0 = v_0$

$\dot{x} = g(\sin 30° - \cos 30° \mu) t + v_0$

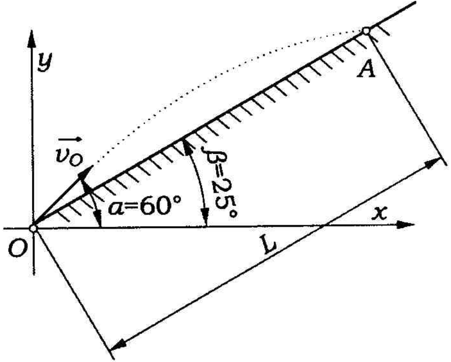
$x = \frac{gt^2}{2}(\sin 30° - \cos 30° \mu) + v_0 t$

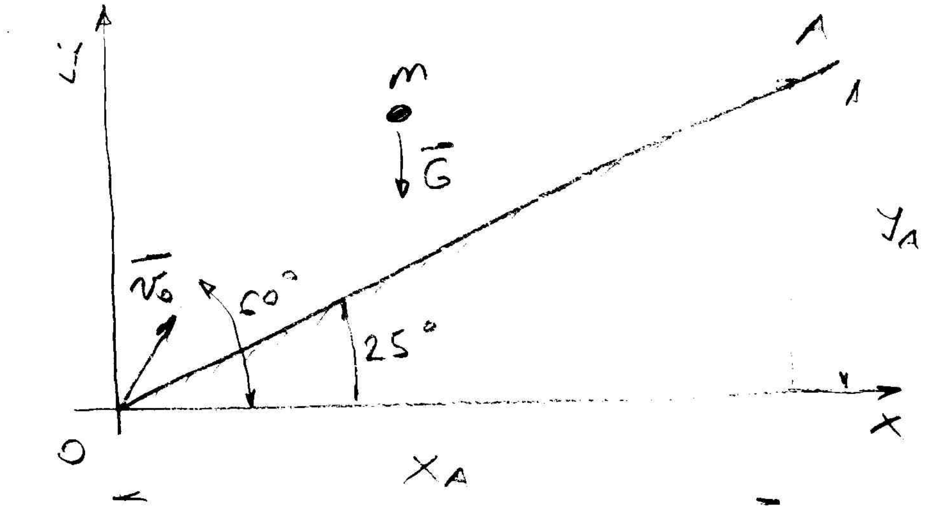
$t = 2$ s

$\dot{x}_t = 7,562 \frac{m}{s}$ ✓

$x_t = 9,562$ m ✓

1. Projektil je ispaljen iz tačke O početnom brzinom $v_0 = 15$ m/s pod uglom $\alpha = 60°$. Odrediti domet $L = OA$ koji će projektil ostvariti na ravni nagnutoj pod uglom $\beta = 25°$. Otpor zraka zanemariti.





$v_0 = 15$

$m\ddot{y} = -mg$

$\ddot{y} = -g$

$\int d\dot{y} = -g\int dt$

$\dot{y} = -gt + C_1$

$t=0,\ \dot{y}_0 = v_0 \cdot \sin 60^\circ$

$C_1 = v_0 \cdot \sin 60^\circ$

$\dot{y} = v_0 \cdot \sin 60^\circ - gt$

$\int dy = \int (v_0 \cdot \sin 60^\circ - gt)\, dt$

$y = v_0 \cdot \sin 60^\circ t - \frac{gt^2}{2} + C_2$

$t=0,\ y_0 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$y = v_0 \cdot \sin 60^\circ\, t - \frac{gt^2}{2}$

$m\ddot{x} = 0$

$\dot{x} = D_1$

$t=0,\ \dot{x}_0 = v_0 \cdot \cos 60^\circ$

$\dot{x} = v_0 \cdot \cos 60^\circ$

$\int dx = v_0 \cdot \cos 60^\circ \int dt$

$x = v_0 \cdot \cos 60^\circ\, t + D_2$

$t=0,\ x_0 = 0 \Rightarrow D_2 = 0$

$x = v_0 \cdot \cos 60^\circ\, t$

Domet:

$\frac{y_A}{x_A} = tg\, 25^\circ$

$\frac{v_0 \cdot \sin 60^\circ\, t_A - \frac{g t_A^2}{2}}{v_0 \cdot \cos 60^\circ\, t_A}$

$\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} - \frac{g t_A}{2 \cdot v_0 \cdot \cos 60^\circ} = tg\, 25^\circ$

$-\sin 60^\circ \mp \frac{g \cdot t_A}{2 \cdot v_0} = tg\, 25^\circ \cos 60^\circ$

$t_A = 2 \cdot v_0 \cdot \frac{\sin 60^\circ - tg\, 25^\circ \cdot \cos 60^\circ}{g}$

$t_A = 1{,}935\ s$

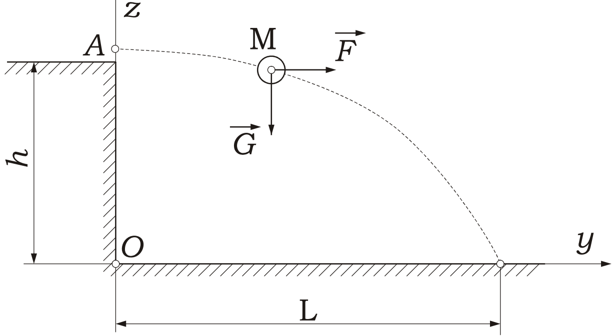
$y_A = 6{,}771$

$x_A = 14{,}513$

$OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$

$\overline{OA} = 16{,}015\ m$

1. Na materijalnu tačku M mase m = 3 kg u vertikalnoj ravni djeluje horizontalna sila proporcionalna kvadratu vremenu, sa faktorom proporcionalnosti k = 35 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}^3}$ ($F = k \cdot t^3$). Tačka počinje kretanje s visine h = 4 m bez početne brzine. Odrediti jednačine kretanja tačke po z i y osi, te udaljenost L koju će tačka preletjeti prije pada na zemlju. Otpor zraka zanemariti.



1. $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$\vec{G} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

Projekcija na y osu:

$m\ddot{y} = kt^3$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{k}{m}t^3$$

$$\int d\dot{y} = \frac{k}{m}\int t^3 dt$$

$$\dot{y} = \frac{k}{4m}t^4 + C_1$$

Početni uslovi:

$t = 0,\ \dot{y} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$\dot{y} = \frac{k}{4m}t^4$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{4m}t^4$$

$$\int dy = \frac{k}{4m}\int t^4 dt$$

$$y = \frac{k}{20m}t^5 + C_2$$

Početni uslovi:

$t = 0,\ y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$$y = \frac{k}{20m}t^5$$

Domet leta L ćemo odrediti ako u jednačinu kretanja po y osi za t uvrstimo vrijeme leta t_L:

$$L = y_L = \frac{k}{20m}t_L^5 = \frac{35}{20 \cdot 3} \cdot 0{,}903^5$$

$L = 0{,}35$ m

Projekcija na z osu:

$m\ddot{z} = -G = -mg$

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = -g$$

$$\int d\dot{z} = -g\int dt$$

$\dot{z} = -gt + D_1$

Početni uslovi:

$t = 0,\ \dot{z} = 0 \Rightarrow D_1 = 0$

$\dot{z} = -gt$

$$\frac{dz}{dt} = -gt$$

$$dz = -g\int tdt$$

$$z = -\frac{g}{2}t^2 + D^2$$

Početni uslovi:

$t = 0,\ z = h \Rightarrow D_2 = h$

$$z = h - \frac{g}{2}t^2$$

Vrijeme leta ćemo dobiti ako u jednačinu kretanja po z osi uvrstimo vrijednost 0 za z, tj. položak u kome je kretanje završeno jer je materijalna tačka došla do tla:

$$0 = h - \frac{g}{2}t_L{}^2$$

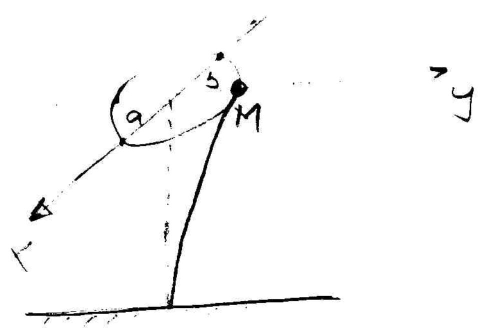
$$t_L = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4}{9{,}81}} = 0{,}903 \text{ s}$$

Za gornji kraj vertikalnog elastičnog štapa, koji je na donjem kraju uklješten, učvršćena je kuglica M mase m. Pri malim pomjeranjima štapa iz njegovog ravnotežnog položaja može se smatrati da se središte kuglice M kreće približno u horizontalnoj ravni oxy koja prolazi kroz ravnotežni položaj kuglice.

Odrediti zakon po kome se mijenja sila kojom elastični štap djeluje na kuglicu ako je ona izvedena iz ravnotežnog položaja O, usvojenog za koordinatni početak i kreće se prema jednačinama:

$x = a\cos(kt) \qquad y = b\sin(kt)$

gdje su a, b i k konstantne veličine. (sl 1)



$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m\ddot{x} = F_x$$

$$m\ddot{y} = F_y$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[a\cos(kt)\right] = -ak\sin(kt)$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-ak\sin(kt)\right] = -ak^2\cos(kt)$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[b\sin(kt)\right] = bk\cos(kt)$$

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[bk\cos(kt)\right] = -bk^2\sin(kt)$$

$$F_x = -mak^2\cos(kt) \; ; \quad F_y = -mbk^2\sin(kt)$$

$$F_x = -mk^2x \qquad F_y = -mk^2y$$

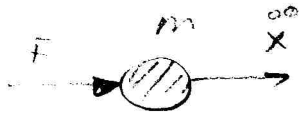
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2\sqrt{x^2+y^2}$$

Tačka mase m kreće se pravolinijski duž x ose po zakonu:

$$x = a\cos(kt),$$

gdje su a i k konstante.

Odrediti silu koja pokreće tačku i izraziti je u funkciji vremena, puta i brzine.



$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$F = m\ddot{x}$$

$$x = a\cos(kt)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(a\cos kt) = -ak\sin(kt)$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(-ak\sin kt) = -ak^2\cos(kt)$$

$$\ddot{x}(\dot{x}) = ?$$

$$\ddot{x}(x) = ?$$

$$\ddot{x} = -ak^2\cos(kt) = -k^2[a\cos(kt)] = -k^2x$$

$$\dot{x} = -ak\sin(kt) \Rightarrow \sin(kt) = -\frac{\dot{x}}{ak}$$

$$\ddot{x} = -ak^2\cos(kt) = -ak^2\sqrt{1-\sin^2(kt)} =$$

$$\ddot{x} = -ak^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{a^2k^2}} = -k\sqrt{a^2k^2-\dot{x}^2}$$

$$F(t) = -m\,ak^2\cos(kt)$$

$$F(x) = -mk^2x$$

$$F(\dot{x}) = -mk\sqrt{a^2k^2-\dot{x}^2}$$