Zbirka nalog za srednje šole: MATEMATIKA

D. Grašek, M. Kožar, A. Tiegl: ELEMENTARNE FUNKCIJE, KOMPLEKSNA ŠTEVILA
Poglavje VIII.: LOGARITEM
Logaritemske neenačbe

Stran 65, naloga 65 a), b), c), č)

a) $\log_3(x+2)>0$

b) $\log_4(7-x)<0$

c) $\log_{0,5}(3-\frac{x}{2})>0$

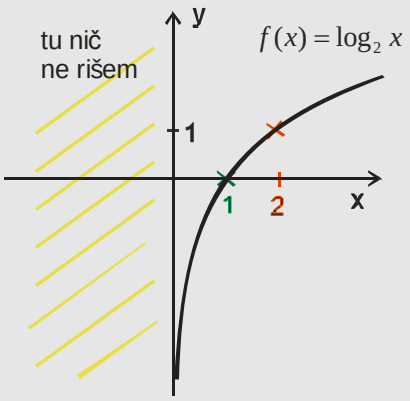
č) $\log_{\frac{1}{3}}(2+\frac{x}{3})>0$

Teorija
Rešiti moramo logaritemske neenačbe. Rešili jih bomo grafično. Levo stran neenačbe smatramo za eno funkcijo, desno stran za drugo funkcijo. Narišemo grafa obeh funkcij in iz grafa odčitamo x-e, ki izpolnjujejo pogoj neenačbe. Tu moram spet znati narisati graf logaritemske funkcije.

Graf logaritemske funkcije
Narisati moram graf logaritemske funkcije:
$f(x)=A.\log_a(x-p)+q$
Narišem ga lahko na več načinov:

(a) način
Z navidezno novim izhodiščem O' (p, q), v katerem rišem funkcijo $f(x)=A.\log_a x$ tako, da upoštevam lastnosti logaritma:
(1) Definicijsko območje Df.: x > 0
(2) $\log_a 1 = 0$ (1, 0)
(3) $\log_a a = 1$ (a, 1)

Primer: $f(x)=\log_2 x$
(1) Df: x > 0
(2) x = 1 $\Rightarrow$ y = 0 Graf poteka skozi točko (1, 0)
(3) x = 2 $\Rightarrow$ y = 1 Graf poteka skozi točko (2, 1)



(b) s premiki

Po vrsti rišem funkcije:

$f_1(x) = \log_a x$

$f_2(x) = \log_a (x-p)$ t.j. $f_1(x)$ premaknemo po x osi

$f_3(x) = A.\log_a (x-p)$ t.j. $f_2(x)$ raztegnemo za A v smeri y osi. To pomeni, da vsak y funkcije $f_2(x)$ množimo z A

$f(x) = A.\log_a (x-p)+q$ t.j. $f_3(x)$ premaknemo za q v smeri y osi.

Tako dobimo končen graf.

Pri naših nalogah je desna stran vedno x os. To pomeni, da se reševanje naših neenačb spremeni v določanje preznaka funkcije. Naša naloga je torej odčitati intervale, kjer je funkcija nad x osjo (>0) oz. pod x osjo (<0). Če bi bil zraven še enačaj, bi prišteli k rešitvi tudi ničle leve funkcije.

Rešitev

65 a) $\log_3(x+2) > 0$

Leva stran naj bo funkcija $f_1(x)$, desna pa je x os z enačbo $f_2(x) = 0$. Desne strani ne rišemo, ker je tako ali tako enaka x osi.

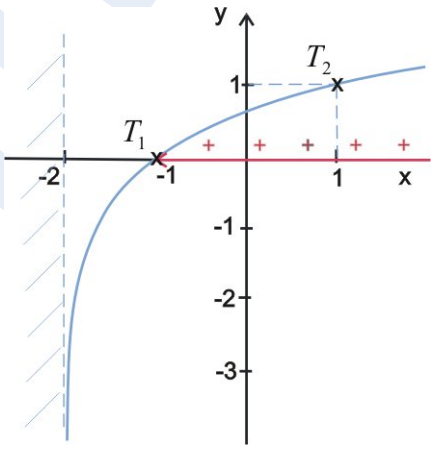
$f_1(x) = \log_3(x+2)$

(1) Definicijsko območje: ARGUMENT je pozitiven
Df: $x+2>0$
$x>-2$
Tu začnem risati. Definicijsko območje $x>-2$ nam pove, da levo od -2 nič ne rišemo, naš graf bo torej na desni od $x=-2$

(2) ARGUMENT =1, y=0
$x+2=1, \quad y=0$
$T_1(x=-1, \quad y=0$

(3) ARGUMENT = OSNOVA, y=1
$(x+2=3, \quad y=1)$
$T_2(x=1, \quad y=1)$

Rezultat odčitam:
$\underline{x>-1}$



Kako pa računsko?

$\log_3(x+2) > 0$

$x+2>3$

$x>1-2$

$\underline{x>-1}$

65 b) $\log_4(7-x)<0$

$f_1(x)=\log_4(7-x)$

(1) Df: $7-x>0$

$-x>-7$

$x<7$

Graf bo ležal levo od x=7

(2) $7-x=1, \quad y=0$

$-x=1-7$

$T_1(x=6, \quad y=0$

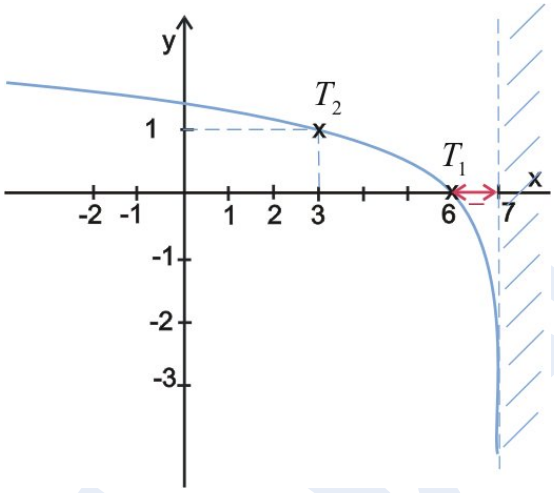
(3) $7-4=4, \quad y=1$

$-x=-3$

$T_2(x=3, \quad y=1)$

Rešitev: $6<x<7$ ali drugačen zapis:

$x\in(6,\ 7)$



65 c) $\log_{0,5}(3-\frac{x}{2})>0$

$f_1(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3-\frac{x}{2})$

(1) Df: $3-\frac{x}{2}>0/\cdot 2$

$6-x>0$

$-x>-6$

$x<6$

Graf leži levo od asimptote x=6.

(2) $3-\frac{x}{2}=1/\cdot 2, \quad y=0$

$6-x=2$

$T_1(x=4, \quad y=0$

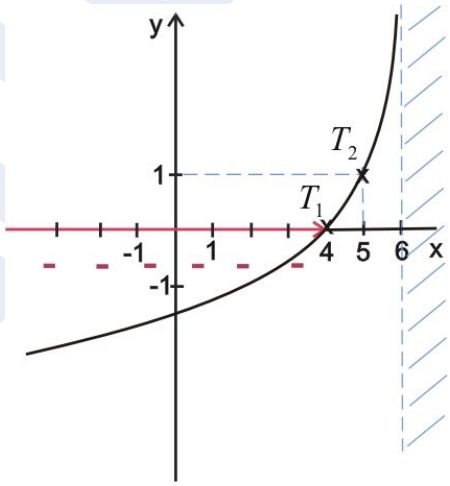
(3) $3-\frac{x}{2}=\frac{1}{2}, \quad y=1$

$6-x=1$

$-x=-5$

$T_2(x=5, \quad y=1)$

$\Re: \quad x<4$



65 č) $\log_{\frac{1}{3}}(2+\frac{x}{3})>0$

$f_1(x)=\log_{\frac{1}{3}}(2+\frac{x}{3})$

(1) Df: $2+\frac{x}{3}>0 / \cdot 3$

$6+x>0$

$x>-6$

Graf leži desno od asimptote x=-6.

(2) $2+\frac{x}{3}=1, \quad y=0$

$6+x=3$

$T_1(x=-3, \quad y=0$

(3) $3+\frac{x}{3}=\frac{1}{3}, \quad y=1$

$6+x=1$

$T_2(x=-5, \quad y=1)$

$\Re: \quad \underline{-6<x<-3}$