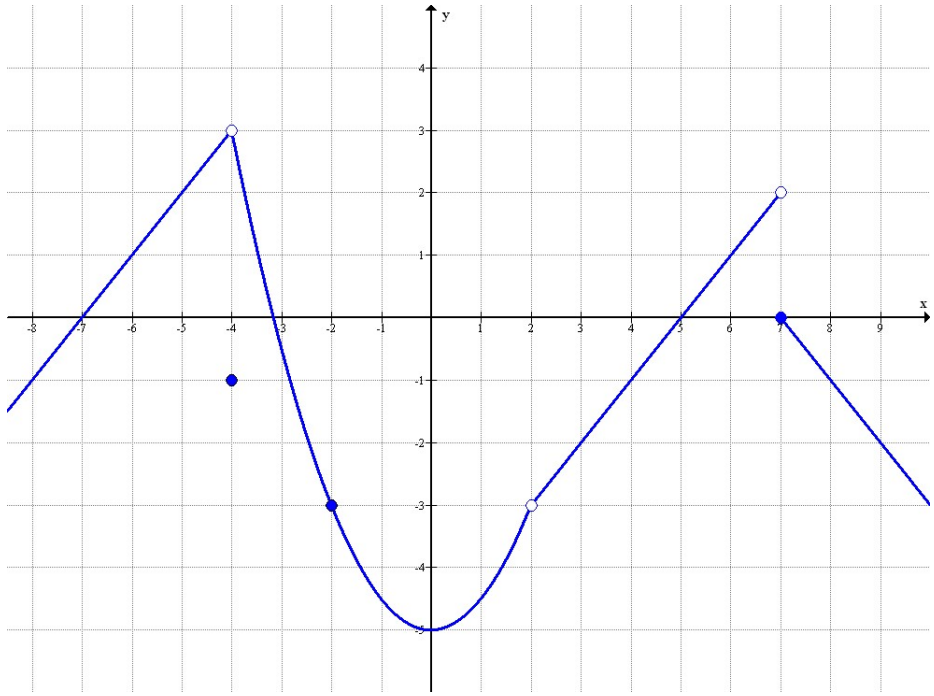



Slika 1

# 1 Limesi, asimptote i neprekidnost funkcija

## 1.1 Limesi funkcija

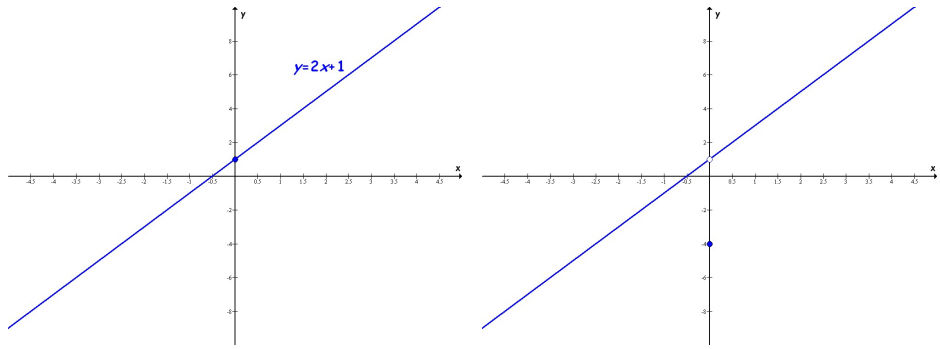
Zajedničko svim varijantama limesa funkcije je da se opisuju (procjenjuju) vrijednosti zadane funkcije u okolini neke vrijednost varijable. Promotrimo sliku 1.

Za funkciju s te slike, kad su $x$-evi blizu $-4$, vidljivo je da su $f(x)$-evi blizu 3 iako je $f(-4) = -1$. S druge strane, kad su $x$-evi blizu $-2$, $f(x)$-evi su blizu $-3 = f(-2)$. Dakle, vrijednosti $f(x)$ oko neke točke $c$ iz domene funkcije mogu i ne moraju biti bliske vrijednostima $f(c)$. Nadalje, vidljivo je da $-2$ nije u domeni funkcije jer ta apscisa nema pridružene točke na grafu, ali ipak možemo identificirati ordinatu $-3$ kao onu za koju vrijedi da kad je $x$ blizu $-2$ su $f(x)$-evi blizu te ordinate. Dakle, ima smisla pitati se kakvi su $f(x)$-evi za $x$-eve blizu nekog $c$ čak i ako $c$ nije u domeni od $f$. Opis ponašanja vrijednosti $f(x)$-eva za $x$-eve blizu $c$ zove se limes funkcije $f$ u točki $c$; ukoliko smo kao u gornja tri slučaja u stanju identificirati ordinatu $L$ takvu da su za $x$-eve blizu $c$ ordinate $f(x)$ blizu $L$, kažemo da taj limes postoji i pišemo $\lim_{x\to c} f(x) = L$. Za funkciju sa slike 1 stoga pišemo: $\lim_{x\to -4} f(x) = 3$, $\lim_{x\to -2} f(x) = -3$, $\lim_{x\to 2} f(x) = -3$.

Preciznije, limes funkcije $f$ u točki $c$ je, ako postoji, broj $L$ takav da što je $x$ bliži $c$ (ali $x \neq c$), to je $f(x)$ bliži $L$. Dakle, znak

$$\lim_{x\to\heartsuit} f(x) = \spadesuit$$

znači da što je $x$ bliže $\heartsuit$, to je $f(x)$ bliže $\spadesuit$. Pritom podrazumijevamo da je $x \neq \heartsuit$, dakle ne zanima nas što se dešava za $x = \heartsuit$ (ako je $\heartsuit$ u domeni, to znamo odrediti izračunavanjem $f(\heartsuit)$,




(a) (b)

Slika 2: Polarne koordinate u ravnini.

a ako nije, onda znamo da $f(\heartsuit)$ ne postoji[1]), nego kako se funkcija ponaša oko $\heartsuit$. Uvjet da pitanje koliki je $\lim_{x\to\heartsuit} f(x)$ ima smisla jest da je funkcija $f$ definirana na nekom intervalu oko $\heartsuit$ (kako bismo se $x$-evima iz tog intervala mogli približiti k $\heartsuit$ i pritom izračunavati $f(x)$-eve), osim eventualno u samom $\heartsuit$.

Precizna definicija limesa funkcije $f$ u točki $c \in \mathbb{R}$ glasi:

**Definicija 1** *Neka je $f$ definirana na nekom intervalu $I$ oko $c$, osim eventualno u $c$. Kažemo da $f(x)$ teži prema $L \in \mathbb{R}$ kad $x$ teži u $c$, simbolički $\lim_{x\to c} f(x) = L$, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da kad je $x \in I$ i $0 < |x - c| < \delta$ vrijedi $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ako možemo odrediti takav realan broj $L$ kažemo da $f$ ima limes u $c$, a inače da limes od $f$ u $c$ ne postoji.*

Iznos limesa $\lim_{x\to c} f(x)$ grafički određujemo tako da nađemo ordinatu $L$ (ako se može takva naći) sa svojstvom da sve točke grafa od $f$ za $x$ blizu $c$ (osim eventualno točke s apscisom $c$) imaju ordinate blizu $L$. Vrijedi:

**Teorem 1** *Ako postoji broj $L$ takav da je $\lim_{x\to c} f(x) = L$, onda je taj broj jedinstven.*

**Primjer 1** *Funkcije $f(x) = 2x + 1$ i*

$$g(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \neq 0 \\ -4 & x = 0 \end{cases}$$

*imaju isti iznos limesa u točki 0 ($\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 1$) iako je $f(0) = 1$, a $g(0) = -4$. Pripadni grafovi vidljivi su na slici 2.*

Limesi u točki ne moraju postojati.

**Primjer 2** *Limes $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ ne postoji jer ako je $x$ blizu nule i recimo pozitivan, onda je $\frac{1}{x}$ jako velik, a sinusi velikih brojeva se zbog periodičnosti funkcije sinus ne približavaju nekom određenom broju.*

[1] Iako se tehnika računanja limesa često svodi na uvrštavanje $\heartsuit$ u $f$, zapravo sam iznos $f(\heartsuit)$ ne utječe na iznos limesa.

Promotrimo još jednom sliku 1. Za $x$-eve koji su blizu 7 a koji su malo manji od 7 ordinate točaka grafa su blizu 2, dok su za $x$-eve blizu 7 a koji su malo veći od 7 ordinate točaka grafa blizu 0. Dakle, limes $\lim_{x\to 7} f(x)$ za funkciju čiji graf je prikazan na slici 1, no kad bismo se ograničili na približavanje $x$-eva k 7 samo s jedne strane mogli bismo identificirati po jednu ordinatu koja bi bila limes. Takve situacije opisuju se pomoću jednostranih limesa.

## 1.2 Jednostrani limesi

Ukoliko promatramo što se dešava s $f(x)$ kad su $x$-evi sve bliži $c$, ali isključivo manji (ili veći) od $c$, govorimo o jednostranim limesima. Približavanje $x$-eva broju $c$ slijeva označavamo s $x \to c-$, a približavanje $x$-eva broju $c$ slijeva označavamo s $x \to c-$ribližavanje $x$-eva broju $c$ zdesna označavamo s $x \to c+$. Limes funkcije $f$ u točki $c$ slijeva je broj (ako postoji) $L = \lim_{x\to c-} f(x)$ takav da što je $x$ bliži $c$, a da je pritom $x < c$, to je $f(x)$ bliži $L$. Analogno, limes funkcije $f$ u točki $c$ zdesna je broj (ako postoji) $L = \lim_{x\to c+} f(x)$ takav da što je $x$ bliži $c$, a da je pritom $x > c$, to je $f(x)$ bliži $L$. Formalnije

**Definicija 2** *Neka je $f$ definirana na nekom intervalu $\langle a, c\rangle$. Kažemo da je $\lim_{x\to c-} f(x) = L$, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da kad je $x \in \langle a, c\rangle$ i $0 < |x-c| < \delta$ vrijedi $|f(x)-L| < \varepsilon$.*

*Neka je $f$ definirana na nekom intervalu $\langle c, b\rangle$. Kažemo da je $\lim_{x\to c+} f(x) = L$, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da kad je $x \in \langle c, b\rangle$ i $0 < |x-c| < \delta$ vrijedi $|f(x)-L| < \varepsilon$.*

Tako npr. za funkciju čiji graf je prikazan na slici 1 pišemo $\lim_{x\to 7-} f(x) = 2$ i $\lim_{x\to 7+} f(x) = 0$.

Korisno je znati, a intuitivno je jasno da vrijedi:

**Teorem 2** *Limes $\lim_{x\to c} f(x)$ postoji ako i samo ako postoje oba jednostrana limesa $\lim_{x\to c-} f(x)$ i $\lim_{x\to c+} f(x)$ i jednaki su. U tom slučaju vrijedi $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c-} f(x) = \lim_{x\to c+} f(x)$.*

**Primjer 3** *Neka je*

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ x^2, & -1 < x \le 0 \\ x+2, & x \le -1 \end{cases}$$

*Odredimo jednostrane limese u $c = 0$ i $c = -1$. Imamo:*

$\lim_{x\to 0-} f(x) =$*(pravilo lijevo od nule je $x^2$)*$= \lim_{x\to 0-} x^2 =$*(za $x$ blizu 0 je $x^2$ blizu 0)*$=0$;

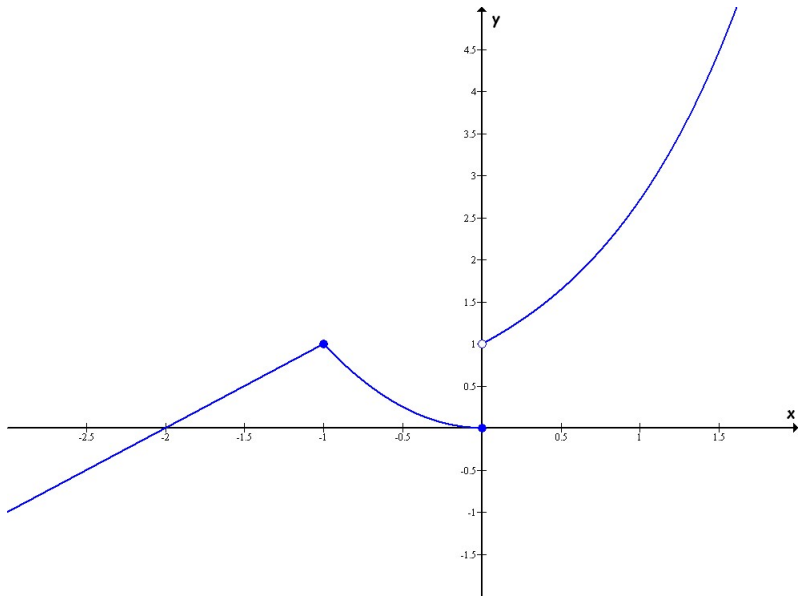
$\lim_{x\to 0+} f(x) =$*(pravilo desno od nule je $e^x$)*$= \lim_{x\to 0+} e^x =$*(za $x$ blizu 0 je $e^x$ blizu 1)*$=1$. *Dakle, ne postoji limes $\lim_{x\to 0} f(x)$ jer se jednostrani limesi u nuli razlikuju.*

$\lim_{x\to -1-} f(x) =$*(pravilo lijevo od $-1$ je $x+2$)*$= \lim_{x\to -1-}(x+2) =$*(za $x$ blizu $-1$ je $x+2$ blizu 1)*$=1$;

$\lim_{x\to -1+} f(x) =$*(pravilo desno od $-1$ je $x^2$)*$= \lim_{x\to -1+} e^x =$*(za $x$ blizu $-1$ je $x^2$ blizu 1)*$=1$. *Dakle, postoji limes $\lim_{x\to -1} f(x)$ i jednak je 1 jer su jednostrani limesi u $-1$ jednaki.*

*Odgovarajući graf prikazan je na slici 3.*

Uz slučaj kad se lijevi i desni limes u točki $c$ razlikuju, postoji još jedna situacija kad ne možemo naći broj $L$ takav da je $\lim_{x\to c} f(x) = L$ tj. kad taj limes ne postoji.




Slika 3

**Primjer 4** *Za varijable $x$ blizu nule vrijednosti funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$ postaju proizvoljno velike - ma koliko velik broj $M$ zamislili, možemo naći $x \approx 0$ takav da je $\frac{1}{x^2} > 0$. Primjerice, za „preskočiti" vrijednost $M = 1000$ možemo uzeti primjerice $x = 0,01$ i dobit ćemo $f(x) = f(0,01) = 10000 > 1000 = M$.*

Za slučajeve poput gornjeg već smo ranije naveli da se radi o pojavi vertikalnih asimptota grafa funkcije. Sad ćemo taj pojam precizirati.

## 1.3 Vertikalne asimptote i beskonačni limesi funkcija

Označimo:

$$\spadesuit \to c$$

za $c \in \mathbb{R}$ znači da se $\spadesuit$ približava broju $c$; nadalje

$$\spadesuit \to -\infty$$

znači $\spadesuit$ postaje jako mali (negativan), i to bez preciziranja koliko („proizvoljno mali") - kažemo i da $\spadesuit$ postaje proizvoljno malen;

$$\spadesuit \to +\infty$$

znači $\spadesuit$ postaje jako velik, i to bez preciziranja koliko („proizvoljno velik") - $\spadesuit$ postaje proizvoljno velik.

S vertikalnim asimptotama smo se susreli kod racionalnih funkcija te kod logaritamskih funkcija. Tada smo ih opisali kao vertikalne pravce, dakle pravce s jednadžbom oblika

$$x = c,$$

koji imaju svojstvo da se graf funkcije oko vrijednosti varijable $x = c$ uz njih priljubljuje bez da se s njima poklapa (pri čemu funkcija obično nije definirana u $c$). Smisao vertikalne asimptote je da je za $x$ blizu $c$ vrijednost funkcije postaje jako velika ili jako mala što označavamo s $f(x) \to +\infty$ odnosno $f(x) \to -\infty$. Ovakve situacije opisuju se tzv. beskonačnim limesima (koji su vrsta nepostojećih limesa).

Kažemo da je limes funkcije $f$ u točki $c$ beskonačan i pišemo

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$$

ili

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

ako vrijedi: što je $x$ bliži $c$ (a da je pritom $x \neq c$, to $f(x)$ postaje neograničeno veći (slučaj $+\infty$) odnosno neograničeno manji (slučaj $-\infty$). Jednostrani beskonačni limesi se definiraju analogno, s tim da gledamo samo da $x$ bude što bliži $c$ sa samo jedne strane (samo $x > c$ odnosno $x > c$).

**Definicija 3 (Vertikalne asimptote)** *Pravac $x = c$ je vertikalna asimptota za funkciju $y = f(x)$ ako je bar jedan od jednostranih limesa $\lim_{x \to c-} f(x)$ i $\lim_{x \to c+} f(x)$ jednak $+\infty$ ili $-\infty$.*

Matematički precizna definicija beskonačnih limesa je

**Definicija 4 (Beskonačni limesi)** *Kažemo da je $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$ (odnosno da je $x = b$ VA za $f$) ako vrijedi: za svaki $M > 0$ (gornja / donja granica za $f(x)$ za koju želimo da se proizvoljno povećava) postoji $\delta > 0$ takav da kad god je $0 < |x - c| < \delta$ ($x$ dovoljno blizu $c$, ali $x \neq c$)*
*vrijedi*

$$f(x) > M$$

*odnosno*

$$f(x) < -M.$$

Ideja gornje definicije je iduća: za proizvoljno zadanu granicu vrijednosti za funkciju ($M$) možemo naći interval oko $c$ (širine $2\delta$) takav da uvrštavanje $x$-eva iz tog intervala u funkciju daje rezultate veće od $M$ odnosno manje od $-M$.

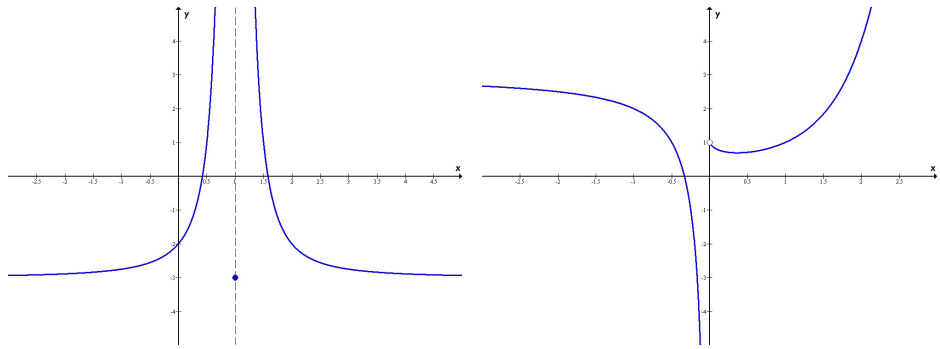
Ponekad se, kao kod funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$, dešava da funkcija ima vertikalnu asimptotu, ali se s jedne strane graf priljubljuje uz nju prema gore, a s druge prema dolje. Stoga je potrebno uvesti pojam **jednostranog limesa** tj. limesa kod kojeg se varijabla funkcije ($x$) nekoj točki $c$ približava samo slijeva ($x \to c-$) ili samo zdesna ($x \to c+$).

**Definicija 5 (Jednostrani beskonačni limesi)** *Kažemo da je $\lim_{x \to c-} f(x) = +\infty$ ako vrijedi: za svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da kad god je $|x - c| < \delta$ i $x < c$ vrijedi*

$$f(x) > M.$$

*Kažemo da je $\lim_{x \to c+} f(x) = +\infty$ ako vrijedi: za svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da kad god je $|x - b| < \delta$ i $x > c$ vrijedi*

$$f(x) > M.$$



(a) (b)

Slika 4: Polarne koordinate u ravnini.

*Kažemo da je* $\lim_{x\to c-} f(x) = +\infty$ *ako vrijedi: za svaki* $M > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da kad god je* $|x - b| < \delta$ *i* $x < c$ *vrijedi*

$$f(x) < -M.$$

*Kažemo da je* $\lim_{x\to c+} f(x) = +\infty$ *ako vrijedi: za svaki* $M > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da kad god je* $|x - b| < \delta$ *i* $x > c$ *vrijedi*

$$f(x) < -M.$$

Kraće: $\lim_{x\to c-} f(x) = +\infty$ ako što je $x$ bliži $c$ i pritom je $x < c$, to $f(x)$ postaje sve veći. Analogno se mogu opisati ostale tri definicije. Tako je recimo $x = 0$ vertikalna asimptota za $f(x) = \frac{1}{x}$ jer je $\frac{1}{x}$ jako velik kad je $x$ blizu nule i pozitivan, a jako mali kad je $x$ blizu nule i negativan: $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ i $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Napomenimo da je moguće, iako nije uobičajeno, da funkcija posjeduje vertikalnu asimptotu u točki domene; također postoje funkcije koje imaju vertikalnu asimptotu samo s jedne strane tj. limes s druge strane je konačan. Primjeri takvih „anomalija" prikazani su slikom 4.

Od beskonačnih limesa, dobro je zapamtiti sljedeće:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{a}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}, a \neq 0),$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{a}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}, n \text{ paran}, a \neq 0),$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{a}{x^n} = -\infty \quad (n \in \mathbb{N}, n \text{ neparan}, a \neq 0),$$

$$\lim_{x\to 0+} \log_a x = +\infty \quad (0 < a < 1),$$

$$\lim_{x\to 0+} \log_a x = -\infty \quad (a > 1).$$

Vrijedi: ako je $\lim_{x\to c} f(x) = a \neq 0$ i $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, onda je $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$. To se kratko zapisuje s

$$\frac{a}{0} = \infty$$

(za $a \neq 0$). Nadalje, ako je $\lim_{x\to c} f(x) = a \neq \pm\infty$ i $\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$, onda je $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. To se kratko zapisuje s

$$\frac{a}{\infty} = 0$$

(za $a \neq \infty$). Oprez: pri korištenju ova dva pravila ne smijete misliti da to pravilo znači da je dozvoljeno dijeljenje s nulom ili s beskonačnosti, već se samo radi o skraćenom zapisu jednog svojstva limesa.

Kod racionalnih funkcija potencijalne vertikalne asimptote odnosno beskonačni limesi funkcije mogu se pojaviti u „rupama u domeni" (nultočkama nazivnika). Vertikalna asimptota $x = c$ će se pojaviti točno u onim slučajevima u kojima je nakon skraćivanja svih zajedničkih faktora brojnika i nazivnika broj $b$ nultočka nazivnika, ali ne i brojnika. Skraćivanje[2] faktora $(x - c)$ iz brojnika i nazivnika pod limesom je dozvoljeno jer $x \neq b$ (vidi definiciju) te stoga $x - c \neq 0$.

Ukoliko je $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$, onda je $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ limes tipa $\frac{0}{0}$ koji spada u neodređene izraze. To znači da konačni iznos limesa $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ ovisi o funkcijama $f$ i $g$.

**Primjer 5** *Limesi* $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x}$ *i* $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ *su oba tipa* $\frac{0}{0}$. *Za prvi prema gore opisanom pravilu ispada:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x\to 0}(x + 1) = 1$$

*(jer je* $x + 1$ *blizu* $1$ *kad je* $x$ *blizu* $0$*), a za drugi imamo*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2}$$

*(jer je* $\frac{1}{x+1}$ *blizu* $\frac{1}{2}$ *kad je* $x$ *blizu* $1$*).*

*Vidimo dakle da limesi tipa* $\frac{0}{0}$ *mogu davati različite konačne rezultate.*

## 1.4 Horizontalne asimptote i limesi funkcija u beskonačnosti

S horizontalnim asimptotama susreli smo se kod racionalnih funkcija te kod eksponencijalnih funkcija. Tada smo ih opisali kao horizontalne pravce, dakle pravce s jednadžbom oblika

$$y = L$$

koji imaju svojstvo da se lijevi odnosno desni dio grafa funkcije uz njih sve više priljubljuje što smo dalje lijevo odnosno desno. Pod lijevi/desni dio grafa mislilo se: dio grafa koji se odnosi na jako male/jako velike vrijednosti varijable. Iz interpretacije grafa funkcije slijedi i drugačiji, nešto precizniji opis : pravac $y = L$ je horizontalna asimptota funkcije $y = f(x)$ kad za jako male ili za jako velike $x$ vrijedi $f(x) \approx L$. U ovom poglavlju formalizirat ćemo tu „definiciju".

Ako nas ponašanje funkcije $f$ za jako male ili jako velike vrijednosti varijable $x$, onda govorimo o limesima u beskonačnosti. Oznaka

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

čita se „limes funkcije $f$ kad $x$ teži u plus beskonačnost je $L$" i znači: što je $x$ veći, to je $f(x)$ bliži broju $L$.

[2]Skraćivanje razlomka je dijeljenje brojnika i nazivnika istim brojem, dakle možemo skratiti samo one faktore za koje smo sigurni da nisu jednaki nula.

**Definicija 6 (Horizontalne asimptote)** *Pravac $y = L$ je horizontalna asimptota lijevo/desno za funkciju $y = f(x)$ ako vrijedi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ odnosno $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -L$.*

Matematički precizna definicija limesa u beskonačnosti glasi

**Definicija 7 (Limesi u beskonačnosti)** *Kažemo da je*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

*ako vrijedi: za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $M > 0$ takav da kad god je $x > M$ vrijedi*

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

*Kažemo da je*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

*ako vrijedi: za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $M > 0$ takav da kad god je $x < -M$ vrijedi*

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

U obje definicije smisao broja $\varepsilon$ je da opisuje udaljenost $f(x)$ do $L$ za koju želimo da bude proizvoljno mala, a da pritom možemo s $x$ „otići dovoljno daleko" lijevo / desno (što je regulirano postojanjem broja $M$). Možemo to izreći i drugačije: za proizvoljno zadanu maksimalnu grešku aproksimacije ($\varepsilon$) možemo naći vrijednost varijable ($M$ odnosno $-M$) počevši od koje (udesno odnosno ulijevo) aproksimacija vrijednosti $f(x)$ s $L$ daje grešku manju od zadane.

Limesi u beskonačnosti pojavljuju se primjerice u kemijskoj kinetici, u kojoj se ravnotežna koncentracija nekog reaktanta ili produkta B često označava s $[\mathrm{B}]_\infty$ i pod tim se misli na $[\mathrm{B}]_\infty = \lim_{t\to+\infty} c_\mathrm{B}$ tj. koncentraciju nakon što je proteklo jako puno vremena.

Od limesa u beskonačnosti, dobro je zapamtiti sljedeće:

$$\lim_{x\to\pm\infty} C = C,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \quad (0 < a < 1),$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad (a > 1).$$

Nadalje, kod racionalnih funkcija lako je odrediti limese u beskonačnosti. Ideja postupka je da kad je $x$ jako velik (ili jako mali) onda u vrijednosti polinoma dominira vodeći član (primjerice: ako je $f(x) = x^2 + 3x + 2$ onda za jako velike $x$ imamo $x^2 >> 3x + 2$ te je $f(x) \approx x^2$). Stoga imamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}.$$

Posljednji limes je 0 ako $n < m$, a za $n = m$ je jednak $\frac{a_n}{b_m}$. Stoga sve racionalne funkcije kojima nazivnik nema manji stupanj od brojnika imaju horizontalne asimptote (i to istu lijevo i desno). Ako je nazivnik većeg stupnja od brojnika ta asimptota je $x$-os.

Napomenimo da, kao i limesi u nekoj točki $c \in \mathbb{R}$, limesi u beskonačnosti također ne moraju postojati. Jedan takav slučaj su beskonačni limesi u beskonačnosti. Ako $f(x)$ postaje proizvoljno velik (malen) što je $x$ veći, pišemo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ odnosno $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Analogno,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

znači da što je $x$ manji, to je $f(x)$ bliži $L$.

**Zadatak 1** *Formulirajte riječima što znače oznake* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ *i* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Od beskonačnih limesa u beskonačnosti, dobro je zapamtiti sljedeće:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n = +\infty \quad \text{za paran } n,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n = \pm\infty \quad \text{za neparan } n,$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad (a > 1),$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \quad (0 < a < 1),$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \quad (a > 1),$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty \quad (0 < a < 1).$$

Može se desiti i da se limes funkcije u beskonačnosti ne može opisati niti kao beskonačan.

**Primjer 6** *Limesi* $\lim_{x\to\pm\infty} \cos x$ *ne postoje: očito nisu beskonačni jer kosinus poprima samo vrijednosti između* $-1$ *i* $1$*, a zbog periodičnosti se ne može identificirati nikoji broj kojem bi se vrijednosti* $\cos x$ *približavale za jako velike ili jako male vrijednosti varijable.*

Treba biti oprezan i oko pitanja smislenosti ispitivanja nekog (ili oba) beskonačna limesa.

**Primjer 7** *Nema smisla pitati koliki je i postoji li* $\lim_{x\to-\infty} \log_a x$ *jer nema smisla uvrštavati nikoje, pa dakle ni jako male, negativne brojeve u logaritam.*

## 1.5 Kose asimptote

Ponekad se za graf funkcije može uočiti pravac koji nije horizontalan, a ima svojstvo da se graf uz njega priljubljuje sve više što su vrijednosti varijable veće ili manje. Tada govorimo o kosoj asimptoti.

Kad će pravac $y = kx + l$ biti kosa asimptota za funkciju $y = f(x)$, recimo desno? Za početak, $f$ mora biti definirana do $+\infty$ i ne smije postojati desna horizontalna asimptota (ne smije postojati $\lim_{x\to+\infty} f(x)$). Želimo da bude $f(x) \approx kx + l$ za jako velike $x$ tj. da bude $\frac{f(x)}{x} \approx k+ \approx lx \approx k$ i $f(x) - kx \approx l$ za jako velike $x$. Stoga imamo

**Definicija 8 (Kose asimptote)** *Pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota desno za funkciju $y = f(x)$ ako vrijedi*

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

*i*

$$l = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx).$$

*Analogno, pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota lijevo za funkciju $y = f(x)$ ako vrijedi*

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

*i*

$$l = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx).$$

**Primjer 8** *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+1}{x-5}$. Tada je*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-5x} = 1,$$

*dakle $k = 1$. Sad možemo dalje računati*

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left( \frac{x^2+1}{x-5} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x+1}{x-5} = 5$$

*tj. $l = 5$. Stoga je pravac $y = x + 5$ kosa asimptota (i lijevo i desno) za funkciju $f$.*

Napomenimo da se može desiti da se može izračunati $k$, ali ne može izračunati $l$. U tom slučaju naravno nema kose asimptote.

Za kraj priče o ponašanju funkcija u beskonačnostima, zaključimo: horizontalne i kose asimptote, ako postoje, omogućuju aproksimaciju funkcije konstantnom odnosno afinom funkcijom. Na jednoj (lijevoj ili desnoj) strani funkcija može imati najviše jednu asimptotu, dakle ne može imati istovremeno horizontalnu i kosu. S druge strane, lijeva i desna asimptota ne moraju se poklapati te imamo sljedeće moguće kombinacije:

- Funkcija nema ni horizontalnih ni kosih asimptota;
- Funkcija ima samo jednu horizontalnu ili kosu asimptotu za obje strane;
- Funkcija ima samo jednu horizontalnu ili kosu asimptotu, ali samo lijevo ili samo desno, a na drugoj strani nema asimptota;
- Funkcija ima dvije asimptote, jednu lijevu i jednu desnu, a svaka je ili horizontalna ili kosa.

Ni horizontalne ni kose asimptote nema smisla tražiti ako funkcija nije definirana do $-\infty$ (tada nema smisla tražiti lijevu) odnosno do $+\infty$ (tada nema smisla tražiti desnu). Specijalno, za dva slučaja najčešća u primjenama, ako je funkcija definirana na segmentu, ne može imati ni horizontalnih ni kosih asimptota, a ako je definirana na $\langle 0, +\infty \rangle$ ili na $[0, +\infty \rangle$, onda može imati samo desnu horizontalnu ili kosu asimptotu.

## 1.6 Svojstva limesa i neki važni limesi

Intuitivno je jasno da ako je za $x$ blizu $c$ (može biti i $c = \pm\infty$) $f(x)$ blizu $L_1$, a $g(x)$ blizu $L_2$, da je onda i $f(x) \pm g(x)$ blizu $L_1 \pm L_2$, $f(x)g(x)$ blizu $L_1L_2$ i $\frac{f(x)}{g(x)}$ blizu $\frac{L_1}{L_2}$ (ovo posljednje naravno samo za $L_2 \neq 0$ jer su rezultati limesa realni brojevi za koje nije dozvoljeno dijeljenje s nulom). Kao i obično u matematici, svojstva na koja nas intuicija navodi da bi morala vrijediti moraju se dokazati. Vjerovali ili ne, gornja svojstva se stvarno mogu dokazati te vrijedi

**Teorem 3** *Neka postoje* $\lim_{x\to c} f(x)$ *i* $\lim_{x\to c} g(x)$, *gdje je* $c \in \mathbb{R}$, $c = +\infty$ *ili* $c = -\infty$. *U tom slučaju postoje i limesi* $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))$, $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x))$ *i* $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x))$ *te vrijedi:*

$$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x),$$

$$\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x),$$

*i*

$$\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) == \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x).$$

*Nadalje, ako je* $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$, *postoji i* $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ *i jednak je* $\frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$.

Zapravo, ta smo svojstva koristili već u opisu postupka za računanje limesa racionalnih funkcija, a slijedi još jedan primjer.

**Primjer 9** *Treba izračunati* $\lim_{x\to 0} \frac{x+x^2e^x}{\cos x}$. *Kad je* $x$ *blizu* $0$, *kosinus mu je blizu* $1$ *te je limes nazivnika* $1$. *Kad je* $x$ *blizu nule, onda su* $x$ *i* $x^2$ *blizu nule, a* $e^x$ *je blizu* $1$ *te je brojnik blizu* $0 + 0 \cdot 1$ *odnosno limes brojnika je* $0$ *(kad* $x$ *teži u nulu). Stoga je*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+x^2e^x}{\cos x} = \frac{0+0\cdot 1}{1} = 0.$$

Kako bismo izračunali limes $\lim_{x\to 0}\sqrt{\sin x}$? Nije primjenjivo nijedno od četiri pravila iz teorema jer u teoremu nije navedeno pravilo za određivanje limesa kompozicije funkcija. No, opet će se potvrditi što intuicija nalaže: kad je $x$ blizu 0, onda je $\sin x$ blizu 0 te je $\sqrt{\sin x}$ blizu $\sqrt{0} = 0$ tj. naš limes iznosi nula. Može se dokazati da vrijedi

**Teorem 4** *Neka postoji limes* $\lim_{x\to c} f(x) = L$ *i* $\lim_{y\to L} g(y) = L'$. *Tada je*

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(\lim_{x\to c} f(x)) = L'.$$

Pomoću gornja dva teorema mogu se izračunati mnogi limesi, no problemi nastaju ako pravila ne primjenjujemo u skladu s gornjim teoremima tj. ne pazimo na uvjet o postojanju limesa.

**Primjer 10** *Neka je* $f(x) = \sin x$ *i* $g(x) = \frac{1}{\sin x}$. *Za* $x \to \pm\infty$ *ne postoji niti limes* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ *niti* $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$, *ali postoji* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 1 = 1$.

*Dakle, moguće je da postoji limes produkta iako pojedinačni limesi ne postoje (jedan ili oba). Isto vrijedi i za ostala svojstva iz teorema.*

Ponekad indirektno možemo zaključiti koliki je limes, primjenom tzv. „teorema o sendviču". On u biti kaže da ako znamo da je za $x$-eve iz nekog intervala oko $c$

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

i ako znamo da je

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L,$$

onda je i

$$\lim_{x\to c} g(x) = L.$$

**Primjer 11** *Znamo da je za svaki $x$*

$$-1 \leq \sin x \leq 1.$$

*Stoga je i za sve $x > 0$*

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

*Kako je $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ slijedi i da je*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

*Analogno bi se vidjelo da je i*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cos x}{x} = 0.$$

Za izračunavanje raznih limesa osobito korisno je znati sljedeća tri važna limesa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

(posljednji limes može se uzeti kao definicija broja $e$!).

**Primjer 12** *Izračunajmo $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ i $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$.*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \{y = \ln(1+x)\} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{(-x)\cdot(-1)}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e^{-1}}{e} = \frac{1}{e^2}.$$

## 1.7 L'Hôpital-ovo pravilo

Čest problem pri izračunavanju limesa su tzv. neodređeni izrazi $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. Ti izrazi zovu se neodređeni jer daju različite konačne rezultate ovisno o funkcijama zbog kojih su se pojavili te nije moguće direktno zaključiti koji je konačni rezultat limesa. U neodređene izraze spadaju i $0 \cdot \infty$, $+\infty - \infty$, $1^\infty$, $0^0$, $0^\infty$ i još neki, no većina se uz određene manipulacije mogu svesti na tipove $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. Iako se u nekim slučajevima, primjerice kod računanja limesa racionalnih funkcija, dosta lako „ispetljati" iz problema i izračunati takve limese do kraja, ipak se često radi o dosta mukotrpnim računima koji se obično mogu izbjeći korištenjem sljedećeg teorema:

**Teorem 5 (L'Hôpital-ovo pravilo)** *Neka su oba limesa* $\lim_{x\to c} f(x)$ *i* $\lim_{x\to c} g(x)$ *jednaka* $0$ *ili su pak oba beskonačna.* Ako postoji *limes* $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *ili ako je jednak* $\pm\infty$*, te ako je* $g'(x) \neq 0$ *za* $x$*-eve iz nekog intervala oko* $c$*, onda vrijedi*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Primjer 13** *Limes* $\lim_{x\to 1} \frac{2\ln x}{x-1}$ *je tipa* $\frac{0}{0}$*. Primjena L'Hôpital-ova pravila daje:*

$$\lim_{x\to 1} \frac{2\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 2.$$

U teoremu uvjet „ako postoji" je naglašen, jer postoje situacije kad limes $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ne postoji, ali ipak postoji limes $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$.

**Primjer 14** *Pokušaj izračunavanja limesa*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+\sin x}{x}$$

*(koji je tipa* $\frac{\infty}{\infty}$*) L'Hôpital-ovim pravilom daje:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} (1+\cos x).$$

*Posljednji limes ne postoji iako postoji* $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+\sin x}{x}$ *i jednak je* $1$ *(jer za jako velike* $x$ *dodavanje sinusa - koji je broj između* $-1$ *i* $1$ *- nema bitan utjecaj na limes, vrijedi* $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x} = 1$*).*

Također, L'Hôpital-ovo pravilo smije se primjenjivati samo na limese kvocijenata funkcija koji su tipa $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$.

**Primjer 15** *Imamo* $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-5} = -\frac{1}{4}$ *jer je* $1$ *u prirodnoj domeni funkcije kojoj računamo limes. Da smo išli primijeniti L'Hôpital-ovo pravilo bez provjere uvjeta da se radi o limesu tipa* $\frac{0}{0}$ *ili* $\frac{\infty}{\infty}$ *(a ovdje to nije slučaj) dobili bismo* $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-5} = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{1} = 2$.

Pomoću L'Hôpital-ova pravila možemo pokazati da eksponencijalna funkcija s bazom $a > 1$ brže raste od svake potencije tj. da vrijedi

$$\lim_{x\to+\infty} x^n a^x = 0.$$

Limesi se i u primjenama koriste za procjenu graničnog ponašanja.

**Primjer 16** *Molarni toplinski kapacitet dvoatomnog idealnog plina konstantnog volumena opisan je formulom*

$$C_{V,\mathrm{m}} = \frac{5}{2}R + \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{e^{h\nu/(kT)}}{\left(e^{h\nu/(kT)}-1\right)^2}.$$

*Pritom su $R$, $h$, $k$ i $\nu$ konstante. Želimo li opisati molarni toplinski kapacitet pri vrlo niskim temperaturama, treba izračunati $\lim_{T\to 0\mathrm{K}+} C_{V,\mathrm{m}}$ tj.*

$$\lim_{T\to 0\mathrm{K}+}\left(\frac{5}{2}R + \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{e^{h\nu/(kT)}}{\left(e^{h\nu/(kT)}-1\right)^2}\right) =$$

$$\frac{5}{2}R + \lim_{T\to 0\mathrm{K}+}\left(\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{e^{h\nu/(kT)}}{\left(e^{h\nu/(kT)}-1\right)^2}\right) = \diamondsuit$$

*Radi lakšeg računanja označimo $x = \frac{h\nu}{kT}$. Ako $T \to 0\mathrm{K}+$, onda $x \to +\infty$ ($x$ ima jedinicu J K$^{-1}$ mol$^{-1}$). Stoga je*

$$\diamondsuit = \frac{5}{2}R + \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2} = (\textit{L'Hôpital}) = \frac{5}{2}R + \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+x^2)e^x}{2e^x(e^x-1)} =$$

$$= \frac{5}{2}R + \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+x^2}{2e^x-2} = (\textit{L'Hôpital}) = \frac{5}{2}R + \lim_{x\to+\infty}\frac{2+2x}{2e^x} =$$

$$= (\textit{L'Hôpital}) = \frac{5}{2}R + \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2e^x} = \frac{5}{2}R + 0 = \frac{5}{2}R.$$

*Dakle, pri vrlo niskim temperaturama molarni toplinski kapacitet dvoatomnog idealnog plina konstantnog volumena iznosi približno $2,5R$.*

**Zadatak 2** *Kakav je molarni toplinski kapacitet dvoatomnog idealnog plina konstantnog volumena za jako visoke temperature?*

**Zadatak 3** *Ovisnost koncentracije $c$ produkta $C$ reakcije $\mathrm{A} + \mathrm{B} -> \mathrm{C}$ o vremenu u slučaju reakcije drugog reda (prvog u $A$ i prvog u $B$) dana je formulom*

$$c(t) = ab\frac{1-e^{(b-a)kt}}{a-be^{(b-a)kt}}.$$

*Pritom je $a$ početna koncentracija reaktanta $A$, $b$ je početna koncentracija reaktanta $B$, a $k$ je koeficijent brzine reakcije (ima pozitivan iznos). Odredite $c_\infty$ tj. koncentraciju produkta kad „reakcija ode do kraja".*

*Uputa: odvojeno promatrajte slučajeve $a > b$, $a = b$ i $a < b$.*

*Rješenje: $c_\infty$ bit će jednaka manjoj od početnih koncentracija $a$ i $b$.*

## 1.8 Neprekidnost funkcija

Na početku ovog poglavlja, vezano uz sliku 1, utvrdili smo da kad je točka u kojoj tražimo limes u domeni funkcije, limes u toj točki može i ne mora biti jednak vrijednosti funkcije u njoj. Tako smo sa slike 1 utvrdili da je $\lim_{x\to -4} f(x) = 3 \neq f(-4) = -1$ i $\lim_{x\to 7} f(x)$ ne postoji, dok je $f(7) = 0$, a $\lim_{x\to -2} f(x) = -3 = f(-2)$. Posljednja situacija je češća, a i ljepša - sa slike vidimo da pri crtanju grafa prolaskom kroz točku s apscisom $-2$ ne moramo podići ruku s papira odnosno da graf „prirodno" prolazi kroz odgovarajuću točku. Takvo svojstvo zove se neprekidnost. Preciznije:

**Definicija 9 (Neprekidnost)** *Funkcija $f$ je neprekidna u točki $c$ svoje domene ako vrijedi $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.*

*Ako je $c$ u domeni od $f$ i $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$, onda kažemo da $f$ u $c$ ima prekid.*

*Funkciju koja je neprekidna u svakoj točki svoje domene zovemo neprekidnom funkcijom.*

Uobičajeno je točke prekida identificirati kao apscise mjesta na kojima smo pri crtanju grafa morali podići ruku s papira, no primijetimo da se pitanje (ne)prekidnosti funkcije odnosi samo na elemente domene.

**Primjer 17** *Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ nema prekid u 0 iako pri crtanju grafa kod apscise 0 moramo podići olovku s papira. Naime, 0 nije u domeni pa je besmisleno pitanje ima li ili nema funkcija prekid u 0.*

Obzirom na definiciju, postoje dva moguća uzroka prekida funkcije nekoj točki $c$ svoje domene:

- Ne postoji limes $\lim_{x\to c} f(x)$ pa ne može biti jednak $f(c)$ - primjer je točka $c = 7$ za funkciju čiji graf je na slici 1; ako pritom postoje jednostrani limesi $\lim_{x\to c+} f(x)$ i $\lim_{x\to c-} f(x)$, onda govorimo o prekidu prve vrste ili skoku, a ako bar jedan od ta dva jednostrana limesa ne postoji (ili je beskonačan), govorimo o prekidu druge vrste ili bitnom prekidu;

- Limes $\lim_{x\to c} f(x)$ postoji, ali je različit od $f(c)$ - primjer je točka $c = -4$ za funkciju čiji graf je na slici 1; u ovakvom slučaju govorimo o uklonjivom prekidu jer bismo promjenom definicije $f(c)$ iz trenutne vrijednosti u vrijednost $\lim_{x\to c} f(x)$ dobili funkciju neprekidnu u $c$.

Posljedica svojstava limesa je da se neprekidne funkcije „pristojno" ponašaju kad ih kombiniramo. Preciznije:

**Teorem 6** *Ako su funkcije $f$ i $g$ neprekidne u točki $c$, onda su i njihov zbroj, razlika i produkt funkcije neprekidne u $c$. Ako je uz to i $g(c) \neq 0$, onda je i kvocijent $f/g$ također funkcija neprekidna u točki $c$.*

*Ako je funkcija $f$ neprekidna u točki $c$ i funkcija $g$ neprekidna u točki $f(c)$, onda je i kompozicija $g \circ f$ neprekidna u $c$.*

Velika većina funkcija koje se pojavljuju u primjenama matematike u kemiji su neprekidne funkcije. Ipak, postoje i neke iznimke. One se pojavljuju najčešće u obliku skokova tj. prekida prve vrste jer se obično radi o nagloj promjeni vrijednosti neke fizikalne ili kemijske veličine. Najtipičnije točke prekida imamo na granicama faza odnosno pri faznoj tranziciji.

**Primjer 18** *Promotrimo ovisnost gustoće $\rho$ neke čiste tvari o temperaturi $T$ (pri konstantnom tlaku). Tada $\rho$ ima dvije točke prekida (skoka), i to pri temperaturama ledišta i vrelišta ($T_f$ i $T_b$). Skok (pad gustoće) pri $T_f$ (razlika lijevog i desnog limesa od $\rho$ u $T_f$) je u pravilu manji od onog pri $T_b$. Unutar pojedine faze se gustoća mijenja neprekidno u ovisnosti o $T$.*

*Primijetimo ovdje da zbog mogućnosti supostojanja dviju faza ovdje nemamo pravu funkciju - temperaturama $T_p$ i $T_f$ pridružene su dvije gustoće koje odgovaraju dvjema supostojećima fazama promatrane tvari pri toj temperaturi.*

Gotovo sve funkcije koje susrećemo u primjenama su na većem dijelu domene neprekidne i imaju najviše konačno mnogo prekida - takve funkcije zovemo po dijelovima neprekidne funkcije.

Teorem o međuvrijednostima i ekstremima garantira da svaka neprekidna funkcija kojoj je domena segment $[a, b]$ postiže svoj globalni minimum i globalni maksimum te da su jedine moguće točke promjene predznaka funkcije njene nultočke.

## 1.9 Derivacija kao limes

Sad konačno možemo dati preciznu definiciju derivacije funkcije $f$ u točki $c$:

**Definicija 10 (Derivacija)** *Ako postoji limes*[3] $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ *i $f$ je definirana na nekom intervalu koji sadrži $c$, onda se taj limes zove derivacijom funkcije $f$ u točki $c$ i označava s $f'(c)$ ili $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)$.*

Posljedica ove definicije je da se derivacija ne definira u rubovima domene funkcije ako je ta domena segment $[a, b]$ jer u njima ne možemo tražiti obostrani, nego samo jednostrane limese.

Sad je lako vidjeti kad derivacija ne postoji. Mogući slučajevi su:

1. Limes $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ je beskonačan - u Cartesiusovom koordinatnom sustavu to znači vertikalnu tangentu na graf od $f$ u točki s apscisom $c$. Primjer je derivacija funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x}$ u $c = 0$: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x^{-2/3} = +\infty$.

2. Ako funkcija ima prekid u točki $c$, onda $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$ pa brojnik u $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ nema limes 0, dok nazivnik ima limes nula te je limes beskonačan. Dakle, ako funkcija ima prekid u $c$, onda ne postoji $f'(c)$.

3. Limes $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ ne postoji jer se limes slijeva i limes zdesna ne podudaraju - geometrijski se radi o „špici" na grafu. Primjer je derivacija funkcije $f(x) = |x|$ u točki $c = 0$: $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$, što je slijeva jednako $\lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1$, a zdesna $\lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1$.

[3] Uočite da se radi o limesu koeficijenta smjera sekante u Cartesiusovom koordinatnom sustavu.

Drugi od nabrojanih slučajeva povlači da je neprekidnost nužna za postojanje derivacije:

**Teorem 7** *Ako funkcija ima derivaciju u nekoj točki, onda je i neprekidna u toj točki.*

Obrat ne mora vrijediti, tj. postoje neprekidne funkcije koje nemaju derivaciju u nekoj točki. Najjednostavniji primjer opisan je trećim od nabrojanih slučajeva nepostojanja derivacije.

Vježbe radi, izvedimo svojstvo aditivnosti derivacija iz definicije derivacije.

**Primjer 19** *Neka su $f$ i $g$ derivabilne u $c$ te neka je $h = f+g$ tj. za sve $x$ je $h(x) = f(x)+g(x)$. Tada imamo:*

$$h'(c) = \lim_{x\to c} \frac{h(x)-h(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)+g(x)-f(c)-g(c)}{x-c} =$$

$$= \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} + \lim_{x\to c} \frac{g(x)-g(c)}{x-c} = f'(c)+g'(c)$$

*tj. pokazali smo da je $(f+g)'(c) = f'(c)+g'(c)$.*

**Zadatak 4** *Dokažite svojstvo homogenosti tj. formulu $(Af)'(c) = A \cdot f'(c)$ ($A$ je konstanta, $f$ je funkcija derivabilna u $c$, a $Af$ je funkcija definirana s $(Af)(x) = A \cdot f(x)$).*

Jedan od najvažnijih teorema o derivacijama je

**Teorem 8 (Teorem srednje vrijednosti)** *Ako je funkcija $f$ derivabilna na $\langle a, b\rangle$ i neprekidna na $[a, b]$, onda postoji $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Geometrijski gledano teorem kaže da ćemo za derivabilnu funkciju i njenu proizvoljnu sekantu moći naći točku na grafu (između točaka koje određuju sekantu) takvu da je tangenta u toj točki paralelna toj sekanti.