Koncept ispita iz predmeta Matematika

Ispit se sastoji od **6 zadataka** i **3 teoretska pitanja**. Vrijeme za izradu ispita je 3 sata.

Zadaci su razvrstani po slijedećim tipovima:

1. **<u>zadatak:</u>**

   Varijanta A: Riješiti sistem 3 jednačine sa 3 nepoznate u zavisnosti od jednog parametra koji se javlja samo u jednoj jednačini.

   Varijanta B: Odrediti vrijednost parametra tako da homogeni sistem 3 jednačine sa 3 nepoznate ima netrivijalna rješenja a zatim naći ta rješenja.

   Primjeri zadataka:

Kroneker-Kapelijevom metodom diskutuj rješenja sistema u zavisnosti od realnog parametra k i nađi ta rješenja

$$\begin{aligned} x-2y+z&=1\\ 3x+2y+z&=0\\ 5x-2y+kz&=1 \end{aligned}$$

Kroneker-Kapelijevom metodom riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od realnog parametra a:

$$\begin{aligned} x-2y+z&=1\\ 3x+2y+z&=0\\ 5x-2y+az&=1 \end{aligned}$$

Kramerovom metodom riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od realnog parametra a:

$$\begin{aligned} -x+y+z&=2\\ 3x-y+z&=-3\\ x+y+az&=1 \end{aligned}$$

Kramerovom metodom riješiti sistem jednačina i diskutuj njegova rješenja u zavisnosti od realnog parametra a:

$$\begin{aligned} 3x-2y+z&=0\\ -x+y-2z&=2\\ ax-y-z&=0 \end{aligned}$$

Naći vrijednosti parametra m za koje homogeni sistem : $\begin{aligned} x-2y+3z&=0\\ -2x+y+z&=0\\ x+y+mz&=0 \end{aligned}$

ima netrivijalna rješenja i naći ta rješenja.

Naći vrijednosti parametra a za koje homogeni sistem : $\begin{aligned} x+2y&=0 \\ (a+3)y+z&=0 \\ x+ay&=0 \end{aligned}$

ima netrivijalna rješenja i za $a>-2$ naći ta rješenja.

2. <u>zadatak:</u>

Varijanta A: Odrediti definiciono područje, nule, znak i asimptote funkcije

Varijanta B: Odrediti monotonost, ekstreme i prevojne tačke funkcije.

Biće data racionalna funkcija ili jednostavnija eksponencijalna.

Primjeri zadataka:

Ispitaj monotonost, ekstreme, prevojne tačke, konveksnost i konkavnost funkcije

$$y=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$$

Odrediti definiciono područje, nule, znak i asimptote funkcije $y=\dfrac{x^3+1}{x^2-5x+4}$.

Odrediti lokalne ekstreme i intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije : $y=\dfrac{x^2-1}{3x-5}$.

Odrediti lokalne ekstreme i intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

Odrediti definiciono područje, nule, znak i asimptote funkcije: $y=\dfrac{x^2(4-x)}{(x+1)^2}$.

Odrediti lokalne ekstreme i intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije $y=e^{-x}(x+2)$

Odrediti definiciono područje, nule, znak i asimptote funkcije: $y=\dfrac{x^2}{e^{2x}}$.

Odrediti lokalne ekstreme i intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije $y=e^{x}(x^2-1)$

3. <u>zadatak: Izračunavanje neodređenog integrala.</u>

Biće date osnovne metode: jednostavna smjena varijabli, parcijalna integracija, integral racionalne funkcije i integral iracionalne funkcije oblika $\int\dfrac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Primjeri zadataka:

A: Smjena varijabli

$$\int \frac{x^7 dx}{x^8\left(x^8+1\right)}, \qquad \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x}-1}, \qquad \int \frac{xdx}{x^4-2}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-2}.$$

B: Parcijalna integracija (samo sa eksponencijalnom i logaritamskom funkcijom)

$$\int (x+1)\ln x dx, \quad \int x^2 e^{-2x} dx \qquad \int x^2 \ln(x+1) dx \qquad \int (x+2) e^{3x} dx.$$

C: Integral racionalne funkcije

$$\int \frac{xdx}{(x+1)^2(x-1)} \quad \int \frac{x^4 dx}{(x-1)\left(x^2+1\right)} \qquad \int \frac{(x+1)dx}{x^2+x+1} \quad \int \frac{dx}{x^3+1}$$

D: Integral iracionalne funkcije

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x^2}} \qquad \int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

4. <u>zadatak</u>

Varijanta A: Određivanje uslovnog ili lokalnog ekstrema funkcije dvije varijable.

Varijanta B: Izračunati površinu između parabole i prave ili između dvije parabole.

Primjeri zadataka:

A: Odredi ekstremne vrijednosti funkcije $z(x,y)=x^3+y^3-3xy$
Odredi ekstremne vrijednosti funkcije $z(x,y)=x^2+y^2-xy$
Odredi ekstrem funkcije $u(x,y)=(x-1)(y+2)$, ako je $3x+4y=12$
Odredi ekstrem funkcije $T(x,y)=3x+4y$ ako je $(x-1)(y+2)=2$.
Odredi ekstrem funkcije $z(x,y)=xy$, ako je $x^2+y^2=2$.

B: Izračunatiti površinu između krive i prave: $y=x^2-2x$; $y=x$.
Izračunati površinu između krive $y=2-x-x^2$ i prave $y=1-x$.
Izračunati površinu između krivih $y=x^2+1$ i $y=3-x^2$.

5. **<u>zadatak:</u>**

Diferencijalna jednačina slijedećeg tipa:

- jednačina sa razdvojenim promjenljivim
- homogena jednačine I reda,
- linearna jednačine
- Bernoullieva jednačina
- diferencijalna jednačine II reda sa konstantnim koeficijentima oblika $ay''+by'+cy=f(x)$, gdje je $f(x)$ ili polinom ili eksponencijalna funkcija puta polinom.

Primjeri zadataka:

Riješiti linearnu diferencijalnu jednačinu: $2xy'+x^2-6y=0$

Riješiti Bernoullievu diferencijalnu jednačinu: $y'-xy=x^3y^2$.

Naći opće rješenje linearne diferencijalne jednačine: $x^2y'-2x^3y=x^3-2x^2$.

Naći opće rješenje Bernulijeve diferencijalne jednačine $x^2y'-2y=3y^{-1}$.

Naći opće rješenje linearne diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficjentima

$y''+4y=xe^{-x}$

Naći opće rješenje homogene diferencijalne jednačine $y^2+x^2y'=xyy'$.

Naći opće rješenje linearne diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficjentima $y''+3y'=(x+1)e^x$.

Naći opće rješenje diferencijalne jednačine sa razdvojenim promjneljivim:

$(x^2y+2y)y'+(xy^2+xy)=0$.

Naći opšte rješenje homogene diferencijalne jednačine $xy'-y=\dfrac{y^2+x^2}{x}$.

6. **<u>zadatak: Kamatni račun, kao što je rađeno na vježbama.</u>**

Primjeri zadataka:

Koliko moramo uložili u banku da bi u narednih 12 godina primali po 3000 KM mjesečno, uz kamatnu stopu od 4% godišnje. Koliko kamate će biti zarađeno?

Zajam od 100.000 KM treba otplatiti u periodu od 15 godina, uz kamatnu stopu od 8% godišnje. Uraditi dinamiku vraćanja zajma i to:
-po anuitetnom principu
-po serijskom principu
Odrediti mjesečne rate za oba principa.

Tri teoretska pitanja dolaze sa slijedećeg spiska pitanja:

1. Pojam matrice. Operacije s matricama (sabiranje, množenje skalarom i množenje matrica). Jedinična matrica. Inverzna matrica. Određivanje inverzne matrice.
2. Determinanta matrice. Osobine determinanti. Laplaceovo pravilo o razvoju determinante. Minor i kofaktor.
3. Zapisivanje sistema jednačina pomoću matrica. Rješavanje sistema jednačina pomoću matrica.
4. Pojam ranga matrice. Metod određivanja ranga matrice.
5. Pojam sistema od m linearnih jednačina sa n nepoznatih. Ekvivalentni sistemi jednačina. Metode rješavanja homogenih i nehomogenih sistema jednačina
6. Granična vrijednost funkcije. Asimptote funkcije.
7. Elementarne funkcije (stepena, eksponencijalna i logaritamska funkcija njihov grafik, granične vrijednosti, izvod.
8. Pojam izvoda i diferencijala realne funkcije jedne realne promjenljive i njihovo geometrijsko značenje.
9. Taylorova formula. L'Hopitalovo pravilo.
10. Lokalni ekstrem realne funkcije jedne realne promjenljive. Potrebni i dovoljni uslovi za lokalni ekstrem.
11. Definicija konveksne i konkavne funkcije. Veza konveksnosti (i konkavnosti) s drugim izvodom funkcije. Prevojne tačke. Potreban i dovoljan uvjet za postojanje prevojne tačke funkcije.
12. Pojam parcijalnog izvoda prvog reda realne funkcije dvije realne promjenljive. Diferencijal realne funkcije dvije realne promjenljive.
13. Lokalni ekstrem realne funkcije dvije realne promjenljive. Određivanje lokalnog ekstrema realne funkcije realne dvije promjenljive.
14. Uslovni (vezani) ekstrem realne funkcije dvije realne promjenljive. Metod supstitucije i Lagrangeov metod za određivanje uslovnog ekstrema.
15. Pojam primitivne funkcije i neodređenog integrala. Osobine neodređenog integrala.
16. Pojam određenog integrala i njegovo geometrijsko značenje. Veza određenog i neodređenog integrala.
17. Pojam nesvojstvenog integrala. Konvergencija nesvojstvenog nitegrala.
18. Modeli prostog i složenog ukamaćivanja. Sadašnja vrijednost uloga.
19. Anuiteti i njihova sadašnja i buduća vrijednost. Nominalna i efektivna kamatna stopa.
20. Modeli amortizacije kredita (anuitetni i serijski princip).

Potrebno je znati definicije i osnovne teoreme, bez dokaza.