Grešak, Strnad, Tiegl
Zbirka nalog za srednje šole Matematika
Elementarne Funkcije. Kompleksna Števila
IX. Kompleksna števila C, Naloga 55

Naloga

Pokaži, da ima ena od rešitev enačbe $x^3 + 1 = 0$ obliko $x_1 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

Rešitev

Poti, ki vodijo do rešitve je več. Tukaj bom rešil nalogo na 2 načina.

Prvi je da enačbo enostavno razstavimo:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

Ter enačbo $x^2 - x + 1$ rešimo z obrazcem za iskanje rešitev kvadratnih enačb:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ker koeficiente iz naše kvadratne enačbe enostavno preberemo (a = 1, b = -1, c = 1), lahko hitro dobimo rešitve:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$$
$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$$

Konec naloge.

Drugi način, ki je zelo primeren reševanja enačb s kompleksnimi koreni pa je ta:
Dano imamo eno rešitev, ki je $x_1 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$. Vemo, da ima enačba $x^3 + 1 = 0$ tri rešitve. Ker je ena rešitev kompleksna, hkrati pa enačba ni kompleksna (je realna), mora obstajati še ena rešitev, ki je kompleksna, ter bo uničila podano kompleksno rešitev (to pomeni, da bo med množenjem kompleksnih rešitev izginil nadležni i ter bomo dobili realno enačbo). Ker se bosta rešitvi pobili in bomo dobili realno enačbo, bo očitno tretja rešitev nekompleksna, torej realna.
Dovolj besed, gremo k računom; splošna rešitev se glasi:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0.$$

Edina možnost druge kompleksne rešitve je konjugirana vrednost (to pomeni, da i postane -i) že podane rešitve: $x_2 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$, to pa zato, ker je to edini izraz, ki bo izraz $(x - x_1)(x - x_2)$ naredil

realen.
Ponovimo: če želimo realno kvadratno enačbo in vemo, da je en njen koren kompleksen, potem je njen drugi koren konjugirana vrednost prvega korena.
Imamo torej enačbo:

$$(x - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}))(x - \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}))(x - x_3) = 0.$$

Če obstaja tak x_3, da bo zadostil zgornji enačbi, potem je $x_1 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ ena od rešitev enačbe (in naloga je rešena). Zmnožimo in poglejmo:

$$\begin{aligned}(x - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}))(x - \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}))(x - x_3) &= (x^2 - x + 1)(x - x_3) = \\ &= x^3 + x^2(-x_3 - 1) + x(1 + x_3) - x_3\end{aligned}$$

To do zdaj je bila razstavljena naša enačba $x^3 + 1$, zato zapišemo

$$x^3 + x^2(0) + x(0) + 1 = x^3 + x^2(-x_3 - 1) + x(1 + x_3) - x_3,$$

ter primerjamo koeficiente pred potencami x-ov ter jih zapišemo:

$$\begin{aligned}-x_3 - 1 &= 0, \\ 1 + x_3 &= 0, \\ -x_3 - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Očitno je $x_3 = -1$, kar velja za vse tri enačbe koeficientov (vidimo, da se je naše vnaprejšnje predvidevanje o realnosti tretje rešitve izkazalo za pravilno). Kar pa je za nas pomebno je, da tak x_3 obstaja. S tem smo pokazali, da ima ena od rešitev enačbe $x^3 + 1 = 0$ obliko $x_1 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$